

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕРБИЙ-ГАЛЛИЕВОГО ГРАНАТА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

А. В. Инюшкин, А. Н. Талденков*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 марта 2010 г.

Проведены исследования теплопроводности монокристаллов парамагнитного тербий-галлиевого граната $Tb_3Ga_5O_{12}$ (ТbGG) при температурах от 0.4 до 300 К в магнитных полях до 3.25 Тл. В температурной зависимости теплопроводности $\kappa(T)$ обнаружен минимум при $T_{min} = 0.52$ К. Эта и другие особенности зависимости $\kappa(T)$ связаны с рассеянием фононов на ионах тербия. Теплопроводность при $T = 5.1$ К сильно зависит от направления магнитного поля относительно кристаллографических осей кристалла. Экспериментальные данные обсуждаются в рамках дебаевской теории теплопроводности с учетом резонансного рассеяния фононов на ионах Tb^{3+} . Из анализа температурных и полевых зависимостей теплопроводности следует наличие сильного спин-фононного взаимодействия в ТbGG. Низкотемпературное поведение теплопроводности (полевые и угловые зависимости) определяется в основном резонансным рассеянием фононов на первом квазидублете электронного спектра иона Tb^{3+} .

1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет назад авторы работы [1] сообщили об экспериментальном обнаружении в парамагнитном диэлектрике нового магнитоперпендикулярного теплового эффекта — фононного эффекта Холла. В пластине монокристаллического $Tb_3Ga_5O_{12}$ (ТbGG), в которой устанавливался тепловой поток \mathbf{q} в поперечном магнитном поле \mathbf{H} , они наблюдали возникновение градиента температуры в направлении, перпендикулярном \mathbf{q} и \mathbf{H} , т. е. в геометрии, аналогичной геометрии эффекта Холла. Наличие фононного эффекта Холла было подтверждено в работе [2]. Принципиальной особенностью нового эффекта является то, что он наблюдается в диэлектрике, в котором нет электрически заряженных частиц, передвигающихся по кристаллической решетке и, соответственно, нет эффекта Риги–Ледюка. В теоретических работах [3–6] показано, что фононный эффект Холла возможен в случае сильных электронного спин-орбитального взаимодействия и спин-решеточного взаимодействия для парамагнитного иона. Последнее ответственно за рассеяние фононов на парамагнитном ионе и может привести

к сильному подавлению диагональной компоненты теплопроводности.

Несмотря на обнаружение недиагональной компоненты тензора теплопроводности в ТbGG, мало что известно о его диагональной составляющей и, в частности, о роли спин-фононного взаимодействия в теплопроводности этого парамагнетика.

Кристалл ТbGG обладает кубической симметрией, его структура описывается пространственной группой $Ia\bar{3}d$ (O_h^{10}). Элементарная ячейка состоит из восьми формульных единиц (160 атомов) $\{Tb_3\}[Tb_xGa_{2-x}](Ga_3)O_{12}$. Скобками обозначены три разные катионные позиции с разным кислородным окружением: $\{ \dots \}$ — 24 додекаэдрические c -позиции с орторомбической точечной группой симметрии D_2 , занимаемые ионами Tb^{3+} ; $[\dots]$ — 16 октаэдрических a -позиций (ромбоэдрическая симметрия C_{3i}) ионов Ga^{3+} , часть которых может быть замещена ионами Tb^{3+} ; (\dots) — 24 тетраэдрические d -позиции с ионами Ga^{3+} (симметрия S_4). Додекаэдрические позиции имеют в своем ближайшем окружении 8 атомов кислорода, a -позиции — 6 атомов и d -позиции — 4 атома. В элементарной ячейке имеется 6 неэквивалентных додекаэдрических узлов и 2 октаэдрических узла относительно направления кристаллического поля.

*E-mail: inyushkin@imp.kiae.ru

Основное состояние 7F_6 свободного некрамерсовского иона тербия в кристаллическом поле s -позиций расщепляется на 13 синглетов. Некоторые синглеты имеют близкие энергии и образуют так называемые квазидублеты. Значения энергий низколежащих уровней иона Tb^{3+} , определенные из оптических спектроскопических [7] и магнитных исследований [8], составляют примерно 3, 49, 62, 72 и 76 К, причем энергия первого уровня определена весьма приблизительно (по порядку величины).

Кристаллы тербиевого граната выращивают двумя способами — низкотемпературным из раствора (flux, кристаллы $TbGG_{fl}$) и высокотемпературным из расплава, например, методом Чохральского (кристаллы $TbGG_{Cz}$). В первом случае получают довольно высококачественные кристаллы как правило небольших размеров, а во втором — крупные кристаллы, но с нарушенной стехиометрией. Согласно данным работы [9], кристаллы $TbGG_{Cz}$ имеют избыточное содержание тербия, причем примесные ионы Tb^{3+} замещают ионы Ga^{3+} и состав граната оказывается $Tb_{3.04}Ga_{4.96}O_{12}$. Атомная масса тербия $M_{Tb} = 158.93$ ат. ед. значительно больше массы галлия $M_{Ga} = 69.72$ ат. ед., что создает большой дефект массы в замещенной позиции. Вдобавок, за счет большего ионного радиуса Tb^{3+} (0.923 \AA) по сравнению с радиусом Ga^{3+} (0.62 \AA) возникают статические поля деформации в элементарной ячейке вблизи «примесного» тербия. Кроме того, примесные ионы Tb^{3+} находятся в кристаллическом поле отличном от поля додекаэдрических узлов, поэтому структура их электронных уровней отличается от спектра «регулярного» иона Tb^{3+} .

Впервые теплопроводность $\kappa(T)$ трех разных кристаллов $TbGG$ экспериментально исследовалась в работе [9]. Было найдено, что теплопроводность кристаллов $TbGG_{Cz}$ при низких температурах почти на порядок меньше, чем кристаллов $TbGG_{fl}$. Наличие минимума в зависимости $\kappa(T)$ при $T_{min} \approx 12$ К было обусловлено сильным резонансным рассеянием фононов на парамагнитном ионе Tb^{3+} , при котором фонон с энергией, равной разности энергий электронных уровней Tb^{3+} , поглощается, а затем излучается в произвольном направлении. Из величины T_{min} была получена оценка энергии возбужденного состояния иона Tb^{3+} в диапазоне 3–12 К. Очевидно, что проявление в $\kappa(T)$ резонансного рассеяния фононов на первом квазидублете следует ожидать при температурах около 0.8 К, при которых энергия доминирующих в теплопроводности фононов (примерно $3.8T$) сравнивается с энергией первого уровня (3 К).

Теплопроводность монокристаллов $TbGG_{Cz}$ была измерена также в работах [10, 11]. Во всех упомянутых работах измерения выполнены при температурах выше 2.4 К, при которых минимум, обусловленный резонансом на первом квазидублете, не наблюдается. Влияние магнитного поля на теплопроводность изучено весьма ограничено [11]. Кроме того, не проведен теоретический анализ экспериментальных данных.

Целью настоящей работы было определение доминирующих процессов рассеяния тепловых фононов в $TbGG$ при низких температурах около 5 К, при которых был обнаружен фонный эффект Холла. В работе представлены данные измерений теплопроводности монокристаллов $TbGG$ в диапазоне температур от 0.4 до 300 К в магнитных полях до 3.25 Тл. Эти данные обсуждаются в рамках феноменологической теории теплопроводности. Особое внимание уделено выяснению роли резонансного рассеяния фононов в теплопроводности при низких температурах.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Измерения теплопроводности выполнены для двух монокристаллов $TbGG$. Один монокристалл был выращен методом Чохральского из расплава [12]. Образцы из этого кристалла были приготовлены в виде прямоугольных пластин. Длинное ребро, вдоль которого направлялся тепловой поток, совпадало с кристаллографическим направлением $\langle 100 \rangle$ (образцы А и В) или $\langle 110 \rangle$ (образец С) в пределах 3° , а нормаль к широкой грани была параллельна направлению $\langle 100 \rangle$ (табл. 1). Поверхность образцов шлифовали абразивным порошком с размерами зерен примерно 14 мкм. Измерения зависимостей $\kappa(T)$ были выполнены на образцах А и В.

Таблица 1. Параметры образцов монокристаллов $TbGG$ (ориентация указана соответственно вдоль самых длинного и короткого ребер образца; l_b — длина свободного пробега фононов при рассеянии на границах образца)

| Образец | Ориентация | Размеры, мм | l_b , мм |
|----------------|--|--------------------------------|------------|
| $TbGG_{Cz}$ -А | $\langle 100 \rangle \times \langle 100 \rangle$ | $26.0 \times 0.50 \times 3.40$ | 1.18 |
| $TbGG_{Cz}$ -В | $\langle 100 \rangle \times \langle 100 \rangle$ | $26.2 \times 0.50 \times 3.75$ | 1.22 |
| $TbGG_{Cz}$ -С | $\langle 110 \rangle \times \langle 100 \rangle$ | $26.0 \times 0.50 \times 3.95$ | 1.24 |
| $TbGG_{fl}$ | $\langle \bar{3}15 \rangle \times \langle 211 \rangle$ | $2.8 \times 0.56 \times 1.25$ | 0.90 |

Теплопроводность измеряли методом стационарного продольного теплового потока. Использовались два термометра сопротивления, которые закрепляли на образце с помощью медных зажимов, среднее расстояние между которыми составляло примерно 13.5 мм. Электрический нагреватель для создания теплового потока в образце приклеивали к свободному концу образца. Во время измерений теплопроводности разность температур на образце не превышала 3% от средней температуры при $T > 4.6$ К и 6–7% ниже 4.6 К. При $T < 4.6$ К использовали термометры Cernox-1070 (Lake Shore Cryotronics, Inc.) и CRT-2 (ВНИИФТРИ), а при более высоких температурах — пару термометров Cernox-1050. Погрешность в определении абсолютной величины теплопроводности, обусловленная главным образом ошибкой при измерении расстояния между термометрами, не превышала 3%. Случайная погрешность измерений была менее 0.1% при $T > 4.6$ К и увеличивалась с понижением температуры до 1% при $T < 0.6$ К.

Измерения теплопроводности в магнитном поле проводили, используя соленоид с горизонтальным полем. Ориентацию поля относительно образца меняли, поворачивая криогенную вставку с образцом вокруг оси, совпадающей с направлением теплового потока. Погрешность установки направления поля относительно образца была меньше 3°. На основе экспериментальных данных работы [13] по магнито-сопротивлению датчиков Cernox-1050 мы оценили, что в магнитном поле 3.25 Тл при температуре около 5 К ошибка в определении температуры составляет примерно 4 мК. Мы не учитывали эту ошибку, поскольку она при определении κ приводит к несущественной погрешности, не превышающей 0.3%.

Образец монокристалла TbGG_{fl}, выращенного из раствора, имел небольшие размеры (см. табл. 1). Сечение его было параллелограммом с углами примерно 80° и 100°. Перепад температуры вдоль длинного ребра образца при измерениях теплопроводности определяли с помощью хромель-константановой термопары (провода диаметром 12 и 25 мкм), приклеенной к образцу. Расстояние между спаями термопары было около 1.3 мм. Для этого монокристалла выполнены измерения теплопроводности в диапазоне от 4.4 до 300 К в магнитных полях до 3.25 Тл. К показаниям термопары в магнитном поле введена поправка, учитывающая влияние магнитного поля на чувствительность термопары, в соответствии с результатами работы [14] за исключением температур ниже 7.5 К, для которых мы не нашли значительного роста магнитополевого эффекта.

Для количественного сравнения магнитолевых зависимостей, измеренных в разных направлениях, необходимо учитывать размагничивающее поле, поскольку TbGG имеет достаточно большую намагниченность ($4\pi M \approx 0.44$ Тл в приложенном поле $H_0 = 3$ Тл при 5.1 К), а форма образцов в виде тонкой пластины обуславливает сильную анизотропию размагничивающего фактора. В качестве размагничивающих факторов $\langle N^{(1)} \rangle$ использовали усредненные по объему образцов в области между точками крепления термометров значения факторов, рассчитанные в первом приближении по формулам из работы [15]. В системе координат, в которой ось X направлена вдоль длинной оси образца, ось Y — вдоль его широкой грани, а ось Z — поперек этой грани, размагничивающие факторы равны $\langle N_{ZZ}^{(1)} \rangle \approx 0.84, 0.86$, а $\langle N_{YY}^{(1)} \rangle \approx 0.16, 0.14$ соответственно для образцов TbGG_{Cz}-А, С. Величины $\langle N_{XX}^{(1)} \rangle$ практически равны нулю (используется нормировка, в которой $0 \leq \langle N^{(1)} \rangle \leq 1$). В приведенных ниже экспериментальных данных для образцов TbGG_{Cz} введена поправка на размагничивающее поле: $H = H_0 - 4\pi N^{(1)}M$, где H_0 — приложенное поле, а M — экспериментально определенная намагниченность. Зависимость $M(H)$ для нашего кристалла TbGG_{Cz}, измеренная при $\mathbf{H} \parallel (001)$ и $T = 5.1$ К, в полях до 3 Тл сильно нелинейна, что хорошо согласуется с результатами работ [16, 17], несмотря на то что при этих температурах TbGG является парамагнетиком. В поправках учитывалась также анизотропия намагничивания TbGG в соответствии с результатами работ [17, 18]. При расчете поправок к угловым зависимостям теплопроводности, $\kappa(\theta)$, зависимость размагничивающего фактора $N^{(1)}(\theta)$ принимали эллиптической и не учитывали угловую зависимость намагниченности в плоскости (100). Было найдено, что вектор внутреннего (истинного) поля \mathbf{H} «опережает» вектор \mathbf{H}_0 примерно на 4.1° вблизи оси [011] при вращении поля в плоскости (100) и на 4.4°, когда вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен вдоль оси [111] в плоскости (011).

Для образца TbGG_{fl} поправки, обусловленные размагничиванием, не вводились, потому что он имел сложную форму и тепловой поток был направлен вдоль оси с низкой симметрией.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Температурная зависимость теплопроводности

На рис. 1 представлены результаты измерений $\kappa(T)$ для TbGG, полученные в настоящей работе и

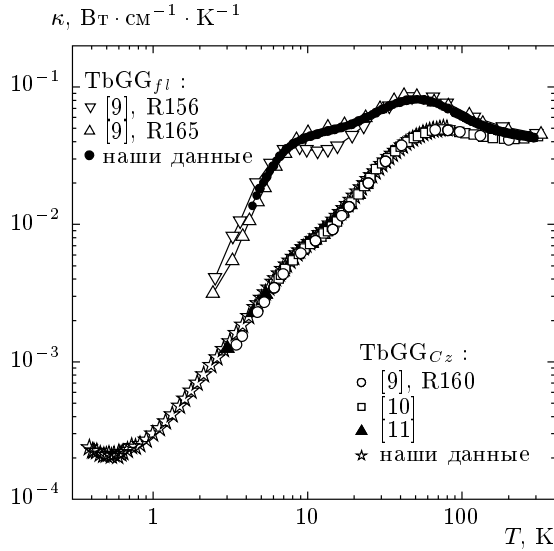


Рис. 1. Экспериментальные температурные зависимости теплопроводности монокристаллов TbGG_{Cz}-B,C (звездочки) и TbGG_{f1} (кружки). Для сравнения представлены данные работ [9] для образцов R156, R165, R160, [10] и [11]

в работах [9–11]. Видно, что данные хорошо согласуются друг с другом: для TbGG_{Cz} отклонение наших данных составляет менее 5 % по сравнению с данными работ [9–11], а для TbGG_{f1} — 10 % по сравнению с результатами работы [9] для образца R165.

Обратим внимание на тот факт, что теплопроводность TbGG_{f1} значительно выше, чем теплопроводность TbGG_{Cz}. При $T \approx 5$ К, например, отношение теплопроводностей равно примерно восьми. Можно предположить, что структурные дефекты в TbGG_{Cz}, обусловленные наличием примесных ионов тербия в *a*-позициях галлия, ответственны за столь сильное подавление их теплопроводности [9].

На зависимости $\kappa(T)$ имеется минимум при $T_{min} = 0.52$ К, а также «прогибы» при температурах около 12 и 170 К. Эти особенности возникают, очевидно, из-за сильного резонансного рассеяния фононов парамагнитными ионами тербия. Самая низкотемпературная особенность связана с переходом из основного состояния на первый возбужденный уровень. Из значения T_{min} можно получить грубую оценку для величины щели в электронном спектре иона Tb³⁺, равную примерно 2 К (ниже эта оценка будет уточнена).

Естественно предположить, что теплота в диэлектрическом TbGG переносится практически исключительно фононами. Поскольку TbGG является парамагнетиком с температурой Нееля $T_N \approx 0.24$ К

[8, 19], нет оснований ожидать существенного вклада магнонов в теплопроводность при температурах $T > T_N$. Анализ экспериментальных данных проведем в рамках дебаевской модели теплопроводности, которая применима, когда в рассеянии фононов доминируют резистивные процессы. Фононную теплопроводность можно представить в следующем виде [20]:

$$\kappa(T) = \frac{k_B}{2\pi^2 v_m} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \tau(x, T) \times \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx, \quad (1)$$

где $\tau^{-1}(x, T)$ — суммарная скорость рассеяния фононов, $x = \hbar\omega/k_B T$ — приведенная частота фонона, v_m — средняя скорость звука, а T_D — температура Дебая. Средняя по углам и поляризациям (j — индекс поляризации) скорость звука в TbGG,

$$v_m = 3^{1/3} \left(\int \sum_j \frac{d\Omega}{4\pi v_j^3} \right)^{-1/3} = 3.72 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1},$$

определена численным интегрированием; скорость в направлении телесного угла Ω находилась из решений уравнений Кристоффеля с использованием экспериментальных данных по упругим постоянным и плотности ($\rho = 7.22 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) из работы [21] при $T \rightarrow 0$. Температура Дебая $T_D = 487$ К найдена по формуле

$$T_D = (6\pi^2 N)^{1/3} \hbar / k_B v_m, \quad (2)$$

где $N = 8.52 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ — общее число атомов всех сортов в единице объема кристалла. Учтем четыре процесса рассеяния фононов — граничное (со скоростью рассеяния τ_b^{-1}), на точечных дефектах решетки (τ_{pd}^{-1}), в трехфононных процессах (τ_{3ph}^{-1}) и резонансное (τ_{res}^{-1}):

$$\tau^{-1} = \tau_b^{-1} + \tau_{pd}^{-1} + \tau_{3ph}^{-1} + \tau_{res}^{-1}. \quad (3)$$

Граничное рассеяние. При наименьших температурах ($T < T_D/30$) рассеяние фононов на границах образца может оказаться доминирующим процессом рассеяния фононов. В случае диффузного отражения фононов от границ образца скорость рассеяния имеет вид

$$\tau_b^{-1} = v_m / l_b, \quad (4)$$

где l_b — длина свободного пробега фононов, определяемая поперечными размерами образца. Значения

l_b для исследованных образцов, рассчитанные по формулам из работы [22], приведены выше в табл. 1. Теоретические расчеты $\kappa(T)$ (смотри ниже) показывают, что в широком диапазоне температур нашего эксперимента вклад граничного рассеяния незначителен, а режим граничного рассеяния в теплопроводности реализуется при температурах ниже 0.3 К. В силу этого параметр l_b не варьировали при аппроксимации экспериментальной зависимости $\kappa(T)$.

Рассеяние точечными дефектами. Скорость рассеяния фононов точечными дефектами в дебаевском приближении можно представить в виде (см., например, [23])

$$\tau_{pd}^{-1} = \frac{V_0}{4\pi v_m^3} g_2 \omega^4 \equiv A_{pd} x^4 T^4, \quad (5)$$

где V_0 — объем элементарной ячейки, приходящийся на формульную единицу, $V_0 = 235.4 \text{ \AA}^3$ для TbGG (постоянная решетки $a = 12.3486 \text{ \AA}$ при 25°C [24]). Примесные атомы тербия в галлиевых позициях дают вклад в упругое рассеяние фононов, обусловленное как дефектом массы, так и изменением объема элементарной ячейки. Этот вклад пропорционален

$$g_2^{imp} = f_{Tb} \left(\frac{M_{Tb} - M_{Ga}}{M_{TbGG}} + 2\gamma\beta \right)^2, \quad (6)$$

где f_{Tb} — концентрация избыточного тербия, β — относительное изменение объема ячейки при внедрении тербия вместо галлия, а γ — постоянная Грюнайзена [23]. Воспользовавшись данными для параметров решетки и концентрации избыточного тербия из работ [9, 24], можно оценить, что $\beta \approx 0.06$. За отсутствием данных о постоянной Грюнайзена для TbGG, примем $\gamma \approx 2$ — среднее значение для многих материалов. Формула (6) тогда дает $g_2^{imp} = 4.3 \cdot 10^{-3}$, причем вклад из-за изменения объема оказывается почти на порядок больше, чем из-за дефекта массы. Оценки скорости изотопического рассеяния фононов с использованием формул из работ [25, 26] показали, что атомы тербия в позициях галлия в тысячу раз сильнее рассеивают фононы, чем примесные изотопы (в основном изотопы тербия). Из выражения (5) получаем, что $A_{pd} \approx 460 \text{ c}^{-1} \cdot \text{K}^{-4}$.

Фонон-фононное рассеяние. Фонон-фононное рассеяние, обусловленное ангармонизмом динамики решетки, в значительной мере определяет теплопроводность при температурах выше температуры максимума на зависимости $\kappa(T)$. Для скорости рассеяния фононов в трехфононных процессах с перебросом при относительно низких температурах ис-

пользуем выражение, предложенное в работе [27] и основанное на теории Лейбфрида – Шлеманна [28],

$$\tau_U^{-1} = b_U \gamma^2 \frac{\hbar}{M_{av} v_m^2 T_D} \omega^2 T \exp\left(-\frac{T_D}{3T}\right) \equiv A_U x^2 T^3 \exp\left(-\frac{T_D}{3T}\right), \quad (7)$$

где M_{av} — средняя атомная масса (50.869 ат. ед. для TbGG), $b_U \sim 1$. Мы предположили, что $b_U = 2$, для того чтобы иметь высокотемпературный предел этой формулы равным оценке Клеменса [29]. Величина $A_U \approx 2.5 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1} \cdot \text{K}^{-3}$ не варьировалась.

Резонансное рассеяние. Для скорости упругого резонансного рассеяния фононов парамагнитными ионами тербия воспользуемся выражением, полученным в работах [30–32] для произвольной относительной концентрации f парамагнитных ионов с двухуровневым спектром в изотропном дебаевском приближении:

$$\tau_{res}^{-1} = \frac{3\pi f \epsilon^4 \omega_0^4 \omega^4}{2\omega_D^3 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} F(\omega_0, T), \quad (8)$$

где ω_0 — резонансная частота, равная разности частот уровней, ω_D — дебаевская частота, ϵ — безразмерный параметр, характеризующий спин-фононную связь, а $F(\omega_0, T)$ — температурный множитель. Величина ϵ порядка 10^{-2} – 10^{-1} в случае слабой спин-фононной связи и порядка 10 для сильной связи [31]. Для некрамерсовского иона, каким является Tb³⁺, $\epsilon \propto \omega_0^{-1/2}$, а для крамерсовского иона $\epsilon \propto \omega_0^{1/2}$ (см., например, [33]). Множитель $F(\omega_0, T)$ возникает из-за интерференции между амплитудами рассеяния от разных ионов и в случае двухуровневого парамагнитного иона равен

$$F(\omega_0, T) = 1 - f(p_0 - p_1)^2, \quad (9)$$

где p_0 и p_1 — заселенности нижнего и верхнего уровней. Во взаимодействующей спин-фононной системе из-за этой интерференции возникают связанные спин-фононные моды. Поскольку в интересующем нас интервале температур энергии тепловых фононов сравнимы с энергиями многих электронных уровней иона Tb³⁺, скорость резонансного рассеяния фононов этими ионами представим в виде суммы выражений типа (8) с $f = 1$, отвечающих переходам между основным состоянием и возбужденными, а также между возбужденными состояниями. В последнем случае частота ω_0 представляет собой разность частот $\omega_m - \omega_n$ уровней m и n , а температурный множитель $F(\omega_0, T) = (p_m - p_n)^2$. Для

обозначения параметров процесса рассеяния фононов, связанного с переходами между уровнями m и n , используем пару индексов $\{mn\}$.

Для фононов с частотами ω достаточно близкими к ω_0 суммарная скорость рассеяния оказывается столь большой (за счет обращения в нуль знаменателя в формуле (8)), что длина пробега фонона формально становится меньше его длины волны λ . Для того чтобы исключить такую нефизическую картину, длина пробега фононов ограничивалась снизу величиной $l_{min}(\omega)$, равной половине длины волны [34],

$$l_{min}(\omega) = \lambda(\omega)/2 = \pi v_m / \omega.$$

Мы подогнали описанную теоретическую модель к экспериментальным данным по $\kappa(T)$ для кристаллов TbGG, используя итерационную методику. Для нулевой итерации использовали экспериментальные данные по $\kappa(T)$ для кристалла TbGG_{fl}, предполагая, что он не содержит примесных парамагнитных ионов. При подгонке методом наименьших квадратов в качестве варьируемых параметров использовали величины A_{pd} и ϵ_{mn} , описывающие спин-фононную связь для регулярных ионов тербия. Хорошее согласие между моделью и экспериментальными данными удалось достигнуть при учете резонансных рассеяний $\{01\}$, $\{23\}$ и $\{67\}$. При этом энергии уровней 2 и 3 (49 и 62 К) были взяты из работы [7], а энергия первого уровня (1.3 К) найдена из подгонки теории к данным для образца TbGG_{Cz}-В, поскольку для него имеются низкотемпературные данные по $\kappa(T)$. Энергии уровней 6 и 7 (220 и 380 К) были подобраны нами для аппроксимации прогиба кривой $\kappa(T)$ при $T \approx 170$ К (индексы 6 и 7 приписаны уровням условно, так как нет надежных экспериментальных данных об энергиях уровней с индексами больше 5).

Далее, используя полученные значения ϵ_{mn} , мы провели подгонку модели к данным для кристалла TbGG_{Cz} (образцы В и С). При этом мы полагали, что уменьшенная теплопроводность этого кристалла обусловлена дополнительными резонансными процессами рассеяния фононов примесными ионами тербия, относительная концентрация которых равна примерно 1.3 ат.%, как было определено в работе [9]. Меняя спектр примесных ионов и сравнивая результаты расчетов $\kappa(T)$ с разными экспериментальными данными, мы нашли, что удовлетворительное согласие можно достигнуть, если учесть резонансные рассеяния типа $\{01\}$ и $\{23\}$ и как минимум два сорта примесных ионов Tb³⁺ с несколько различными электронными спектрами. Энергии низколежащих уровней для половины примесных

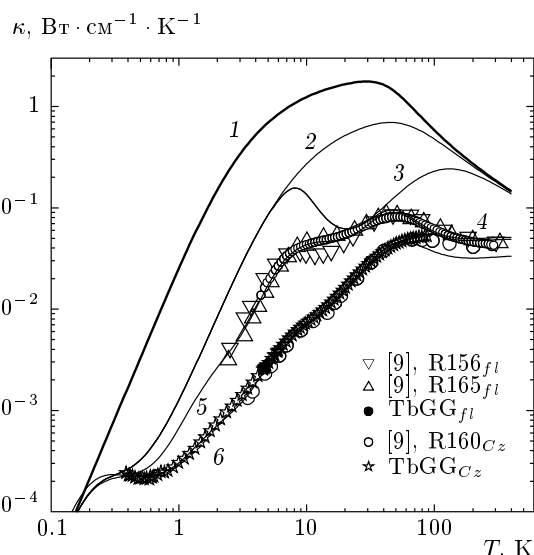


Рис. 2. Теплопроводность TbGG как функция температуры. Символы — экспериментальные данные работы [9] для разных кристаллов; сплошные линии — результаты подгонки теоретической моделью (см. текст). Кривые 5 и 6 — наилучшие аппроксимации данных для образцов TbGG_{fl} и TbGG_{Cz}-C

ионов (группа X) составили 0, 4, 23, 39 К, а для оставшихся (группа Y) — 0, 13, 23, 39 К. Константы спин-фононной связи ϵ_{mn}^{imp} были определены из наилучшей подгонки. Затем итерационная процедура повторялась, но при этом допускалось, что даже в «чистом» кристалле TbGG_{fl} имеется небольшое количество примесных ионов тербия, концентрация которых значительно меньше, чем в TbGG_{Cz}. Для концентрации примесных ионов Tb³⁺ в TbGG_{fl} получена оценка 0.13 ат. %.

В результате, как видно из рис. 2, удалось вполне удовлетворительно аппроксимировать измеренные зависимости $\kappa(T)$ для обоих кристаллов в широком интервале температур. Для образца TbGG_{fl} на рисунке приведены расчетные зависимости $\kappa(T)$ при последовательном «включении» процессов рассеяния. Самая высоколежащая кривая 1 соответствует гипотетической ситуации, когда нет резонансных процессов рассеяния фононов, а имеется только рассеяние границами кристалла, точечными дефектами и в трехфононных процессах. Кривая 2 получена с учетом резонансного рассеяния фононов только основным (первым) квазидублетом регулярных ионов тербия. Ниже расположены кривые 3, 4 и 5, рассчитанные при последовательном добавлении резонансного рассеяния на втором квазидублете $\{23\}$, на высокочастотном квазидублете $\{67\}$ и на примес-

Таблица 2. Параметры спин-фононной связи, дающие наилучшее соответствие результатов теоретической модели и экспериментальных данных по температурной зависимости теплопроводности кристаллов TbGG

| ϵ_{01} | ϵ_{23} | ϵ_{67} | $\epsilon_{01,X}^{imp}$ | $\epsilon_{01,Y}^{imp}$ | ϵ_{23}^{imp} |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 9.00 | 17.3 | 4.42 | 10.0 | 7.10 | 28.1 |

ных ионах тербия. Видно, что при гелиевых температурах, при которых был обнаружен фононный эффект Холла, доминирует резонансное рассеяние на основном квазидублете регулярных ионов и на квазидублетах примесных ионов Tb³⁺. Рассеяние на квазидублете {67} проявляется при температурах выше примерно 40 К, а рассеяние на квазидублете {23} заметно в широком интервале от 8 до 200 К. В то же время для образца TbGG_{Cz} теплопроводность при гелиевых температурах определяется почти полностью резонансным рассеянием на примесных ионах, это рассеяние оказывается существенным при температурах от долей кельвина до почти 100 К. По-видимому, систематическое отклонение модельной кривой κ от экспериментальных точек связано с весьма упрощенной схемой уровней примесных ионов Tb³⁺, которую мы использовали. Заниженные расчетные значения $\kappa(T)$ при $T > 80$ К могут свидетельствовать о переоценке теорией скорости резонансного рассеяния фононов при температурах, значительно превышающих энергетическую щель дублета.

При температуре 5.13 К, при которой проведены исследования фононного эффекта Холла для кристаллов TbGG_{Cz} в работе [2], длина свободного пробега фононов с частотами вблизи резонансных частот переходов {01}, {23} для регулярных ионов и частот переходов {01}, {23} для примесных ионов Tb³⁺ оказалась порядка длины волны фонона. Например, для фононов с приведенной частотой $x \approx 2.54$, испытывающих сильное резонансное рассеяние на квазидублетах {23} и {01}_Y^{imp}, длина пробега составляет примерно 7 нм. Доминирующие в теплопроводности фононы с $x \approx 1.4$ имеют длину пробега примерно 20 мкм и 5 мкм соответственно в кристаллах TbGG_{fl} и TbGG_{Cz}.

Значения подгоночных параметров спин-фононной связи приведены в табл. 2; для рассеяния точечными дефектами найдено, что $A_{pd} = 170 \text{ с}^{-1} \cdot \text{К}^{-4}$ и $A_{pd} = 492 \text{ с}^{-1} \cdot \text{К}^{-4}$ соответственно для образцов

TbGG_{fl} и TbGG_{Cz}-С. Все параметры ϵ_{ij} имеют значения порядка 10, что свидетельствует о сильной спин-фононной связи как для регулярных, так и для примесных ионов Tb³⁺.

Добавление к резонансным процессам рассеяния на регулярных ионах Tb³⁺ других процессов, связанных с переходами между низколежащими уровнями, типа {02}, {12}, {03} и {13} позволяет получить примерно такую же по качеству подгонку модели к эксперименту, но полностью не исключает примесного резонансного рассеяния даже в случае кристалла TbGG_{fl} (теоретическая кривая $\kappa(T)$ при $T < 5$ К оказывается существенно выше как наших экспериментальных данных, так и данных работы [9]). Кроме того, если добавить в нашу модель так называемые прямые (орбаховские) процессы рассеяния фононов, которые могут быть существенными при сильной спин-спиновой связи, то качество подгонки опять-таки не улучшается и имеется упомянутое превышение теоретических результатов по сравнению с экспериментальными. Таким образом, полученные оценки концентрации примесных ионов Tb³⁺ и величины спин-фононной связи для них являются, по-видимому, корректными по порядку величины.

3.2. Зависимость теплопроводности от величины и ориентации магнитного поля

Поскольку магнитное поле оказывает сильное влияние на спектр иона тербия, представлялось интересным исследование теплопроводности в магнитном поле.

Экспериментальные данные по влиянию магнитного поля на теплопроводность кристалла TbGG_{fl} представлены на рис. 3, 4 и 5. Рисунок 3 показывает зависимости $\kappa(T)$ в нулевом поле и в поле $H_0 = 3$ Тл, приложенном под углом $\theta = 75^\circ$ к нормали широкой грани образца, которая примерно совпадает с плоскостью (211) (вдоль этого направления магнитолевой эффект максимален при $T = 16.15$ К, но минимален при $T = 5.1$ К). На вставке к рис. 3 показана температурная зависимость приведенной теплопроводности

$$\tilde{\kappa}(T, H_0 = 3 \text{ Тл}) = \frac{\kappa(T, H_0 = 3 \text{ Тл})}{\kappa(T, H_0 = 0)}$$

Видно, что магнитолевой эффект очень слабый при $T > 110$ К и кривая $\kappa(T, H_0 = 3 \text{ Тл})$ быстро приближается к $\kappa(T, H_0 = 0)$ с уменьшением температуры ниже 7 К.

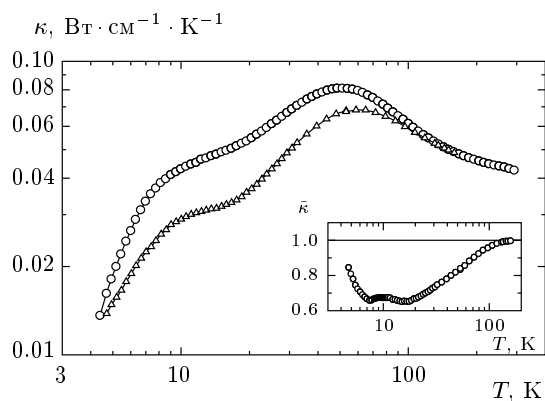


Рис. 3. Теплопроводность кристалла TbGG_{fl} как функция температуры в поле $H_0 = 0$ (кружки) и $H_0 = 3$ Тл (треугольники), приложенном под углом $\theta = 75^\circ$ к оси [211], нормальной к широкой грани образца, и перпендикулярно тепловому потоку. На вставке показана зависимость $\tilde{\kappa}(T, H_0 = 3 \text{ Тл})$

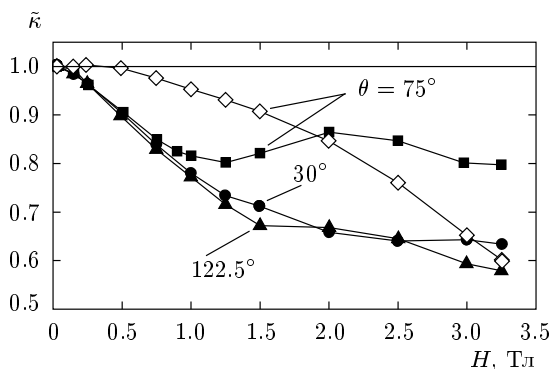


Рис. 4. Полевые зависимости теплопроводности кристалла TbGG_{fl} для разных ориентаций поля \mathbf{H}_0 при $T = 5.1$ К. Ромбами показаны данные, полученные при $T = 16.15$ К

Из полевых зависимостей $\tilde{\kappa}(H_0)$ (рис. 4) видно, что теплопроводность монотонно уменьшается с ростом приложенного поля за исключением случая $\theta = 75^\circ, T = 5.1$ К. Угловые зависимости теплопроводности, представленные на рис. 5, демонстрируют симметрию оси второго порядка, что обусловлено не формой образца, а ориентацией теплового потока, не совпадающей с высокосимметричным кристаллографическим направлением. Интересно, что зависимости $\tilde{\kappa}(\theta)$, измеренные при $T = 5.1$ К и $T = 16.15$ К, оказались «противофазными», т. е. сдвинутыми относительно друг друга на угол примерно 45° так, что минимумы на одной зависимости примерно совпадают с максимумами другой и наоборот. На кри-

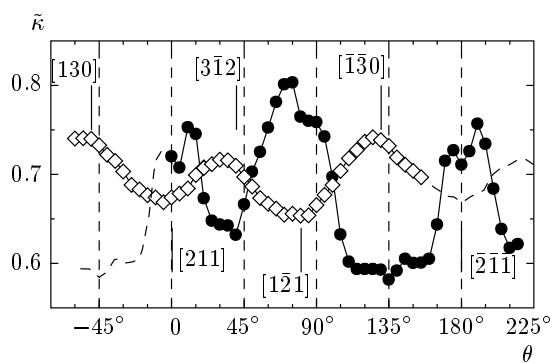


Рис. 5. Угловые зависимости теплопроводности кристалла TbGG_{fl} в поле $H_0 = 3$ Тл при $T = 5.1$ К (кружки) и $T = 16.15$ К (ромбы). Штриховые линии — данные, полученные сдвигом экспериментальных значений на 180°

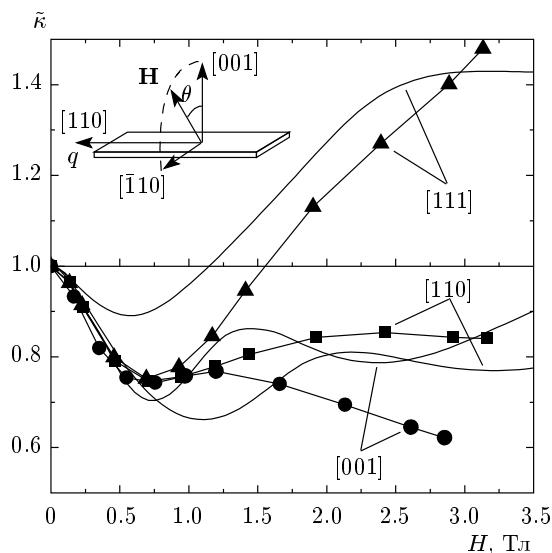


Рис. 6. Зависимость приведенной теплопроводности TbGG_{Cz}-С от внутреннего магнитного поля H при $T = 5.1$ К для ориентаций \mathbf{H} вдоль направлений $\langle 001 \rangle$, $\langle 011 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$. Во всех случаях вектор \mathbf{H} перпендикулярен тепловому потоку \mathbf{q} . Экспериментальные данные показаны символами, а теоретические — жирными линиями

вой $\tilde{\kappa}(\theta)$ при $T = 5.1$ К наблюдается ряд достаточно резких особенностей, а при $T = 16.15$ К кривая выглядит существенно более гладкой.

В отличие от образца TbGG_{fl}, образцы TbGG_{Cz} были изготовлены в форме почти идеальных прямоугольных параллелепипедов с ребрами, ориентированными вдоль высокосимметричных кристаллографических осей. Для этих образцов введены поправ-

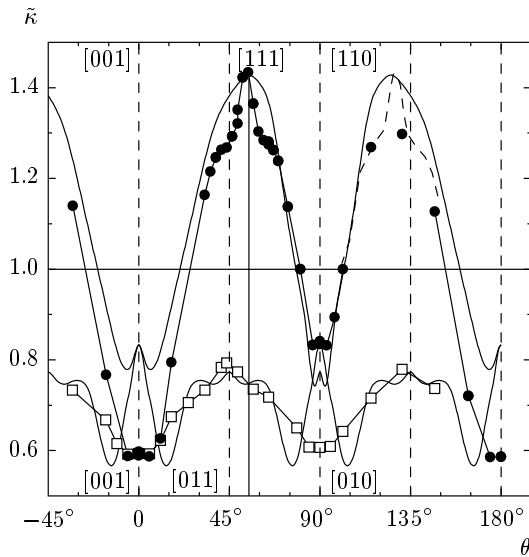


Рис. 7. Угловые зависимости $\tilde{\kappa}$ для образцов А (квадраты) и С (кружки) при $T = 5.1$ К. Штриховая линия для образца С воспроизводит данные, измеренные для углов вблизи $\theta \approx 54^\circ$, после операции инверсии относительно направления $\theta = 90^\circ$. Символы — экспериментальные данные, толстые линии — теоретические зависимости

ки на размагничивающее поле и магнитополевые зависимости представлены как функция внутреннего магнитного поля \mathbf{H} . На рис. 6 представлена зависимость $\tilde{\kappa}(H)$ для образца TbGG_{Cz}-С при $T = 5.1$ К для разных ориентаций поля \mathbf{H} . В случаях $\mathbf{H} \parallel \langle 001 \rangle$ и $\mathbf{H} \parallel \langle 110 \rangle$ теплопроводность в магнитном поле оказывается ниже, а в достаточно сильных полях (больше 1.5 Тл) при $\mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$ выше, чем в нулевом поле. В полях до 1 Тл кривые $\tilde{\kappa}(H)$ для симметричных направлений \mathbf{H} оказываются очень близкими друг к другу и имеют локальный минимум при $H \approx 0.7$ Тл. Относительные величины магнитополевого эффекта близки к таковым для кристалла TbGG_{fl}, что достаточно неожиданно, поскольку в этом кристалле вклад дефектов в рассеяние фононов явно меньше.

Экспериментальные данные для приведенной теплопроводности $\tilde{\kappa}$ от угла θ между \mathbf{H} и осью [001] в поле $H = 3$ Тл и $T = 5.1$ К показаны на рис. 7. Для образца А поле \mathbf{H} вращалось от оси [001] к оси [010] в плоскости (001), а для образца С — от [001] к [011] в плоскости (011) (геометрия эксперимента показана на рис. 6). Отметим ряд особенностей полученных угловых зависимостей. Для образца А в пределах экспериментальной погрешности зависимость $\tilde{\kappa}(\theta)$ показывает симметрию оси четвертого порядка, что можно было ожидать из ориентаций теплового

потока и магнитного поля относительно кристаллографических осей. Минимумы на кривой $\tilde{\kappa}(\theta)$ имеют при ориентации \mathbf{H} вдоль направления $\langle 001 \rangle$, а максимумы — вдоль $\langle 011 \rangle$. Для образца С угловая зависимость $\tilde{\kappa}(\theta)$ показывает симметрию оси второго порядка; локальные минимумы имеют при ориентации \mathbf{H} вдоль $\langle 001 \rangle$ и $\langle 011 \rangle$, а максимумы — при $\mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$.

Обратим внимание на то, что зависимость $\tilde{\kappa}(\theta)$ для образцов А и С почти не меняется с углом в пределах $\pm 5^\circ$ вблизи направлений $\langle 001 \rangle$ и $\langle 011 \rangle$: для углов, совпадающих с этими направлениями, теплопроводность немного (не более 1 %) выше, чем для углов, отклоняющихся на 5° от этих направлений. Кроме того, кривая $\tilde{\kappa}(\theta)$ для образца С имеет относительно острый пик вблизи направления $\langle 111 \rangle$.

В рамках предложенной модели полевые эффекты в теплопроводности обусловлены влиянием приложенного магнитного поля на электронный спектр ионов Tb³⁺. Как известно, расщепление энергетических уровней Tb³⁺ зависит от величины и ориентации магнитного поля, оно различно для неэквивалентных позиций в решетке TbGG и для разных квазидублетов [35]. Выберем локальные системы координат в этих неэквивалентных позициях так, чтобы их оси совпадали с поворотными осями второго порядка, причем оси z ориентированы вдоль кристаллографических направлений $\langle 001 \rangle$, а оси x и y — вдоль $\langle 110 \rangle$. В приближении изолированного квазидублета, которое хорошо выполняется в полях до 2 Тл, расщепление первого квазидублета определяется выражением

$$\omega_0^{(1)}(H) = \sqrt{(\omega_0^{(1)}(0))^2 + (\mu_B g_z^{(1)} H_z)^2}, \quad (10)$$

где $\omega_0^{(1)}(0)$ — расщепление в нулевом поле, $g_z^{(1)}$ и H_z — z -компоненты g -тензора и магнитного поля в локальной системе координат (верхний индекс в скобках обозначает номер квазидублета). Компоненты $g_x^{(1)}$ и $g_y^{(1)}$ равны нулю, что обусловлено изинговским поведением иона тербия в гранате. Согласно результатам низкотемпературных оптических исследований эффекта Зеемана [18], $\omega_0^{(1)}(0) = 2.6 \pm 0.6$ К, а $g_z^{(1)} = 14.7 \pm 0.4$. Большая величина g -тензора свидетельствует о сильном влиянии магнитного поля на расщепление уровней; так, в поле 3 Тл, ориентированном вдоль $\langle 100 \rangle$, щель достигает почти 30 К.

Для второго квазидублета отличной от нуля является x -компонента g -тензора [16]. Соответственно, энергетический зазор $\omega_0^{(2)}(H)$ между уровнями этого квазидублета увеличивается с магнитным полем

при наличии ненулевой локальной компоненты H_x . Будем полагать, что для $\omega_0^{(2)}(H)$ справедлива формула, аналогичная (10), где вместо $g_z^{(1)}$ и H_z используются соответственно $g_x^{(2)}$ и H_x , причем $g_x^{(2)} = 18$, а $g_y^{(2)} = g_z^{(2)} = 0$ [16].

Теплопроводность в магнитном поле была рассчитана в предположении, что спектр регулярных ионов Tb^{3+} изменяется в поле в соответствии с приведенной выше картиной, а спектр примесных ионов Tb^{3+} не подвержен влиянию магнитного поля. Последнее было принято произвольно, поскольку нам не известны работы, посвященные электронной структуре ионов тербия, находящихся в галлиевых позициях TbGG. При этом учитывалось, что параметры спин-фононной связи зависят от магнитного поля в соответствии с теорией [33]: $\epsilon_{01} \propto \omega_0^{-1/2}(H)$. Рассчитанная таким образом зависимость $\kappa(T)$ в поле $H = 3$ Тл ($\theta = 75^\circ$) для образца TbGG_{fl} оказалась почти на порядок величины меньше экспериментальной. Такое подавление теплопроводности в поле обусловлено сильным ростом скорости резонансного рассеяния, поскольку $\tau_{res}^{-1} \propto \epsilon^4 \omega_0^4 \propto \omega_0^2$ (см. выражение (8)), а ω_0 как для первого, так и для второго квазидублета растет почти линейно с полем в достаточно сильных полях.

Для кристаллов с большим содержанием примесных ионов Tb^{3+} теоретические данные гораздо лучше совпадают с измеренными в магнитном поле. Расчетные зависимости $\tilde{\kappa}(H)$ показаны сплошными линиями на рис. 6. Как видно из рисунка, расчетные зависимости воспроизводят локальные минимумы в слабых полях и анизотропию $\tilde{\kappa}(H)$. Наличие минимумов обусловлено ростом разности энергий $\omega_0^{(1)}(H)$ уровней первого квазидублета с магнитным полем, что приводит к немонотонному изменению скорости резонансного рассеяния (8). Полевая зависимость уровней второго квазидублета практически не проявляется в теплопроводности: разность значений $\tilde{\kappa}(H)$ с учетом и без учета соответствующего эффекта Зеемана для $\omega_0^{(2)}(H)$ составляет менее 1% в полях до 4 Тл. Удивительно, что учет эффекта Зеемана только для регулярных ионов тербия позволяет в рамках предложенной модели приблизительно воспроизвести основные особенности полевых зависимостей теплопроводности. Возможно, что лучшее согласие теории с экспериментом для кристалла TbGG_{fl} связано с меньшим вкладом регулярных ионов тербия в рассеяние на относительно большом фоне от примесных ионов тербия. Имеющееся количественное несовпадение модели с экспериментом может быть обусловлено, в частности, тем обстоя-

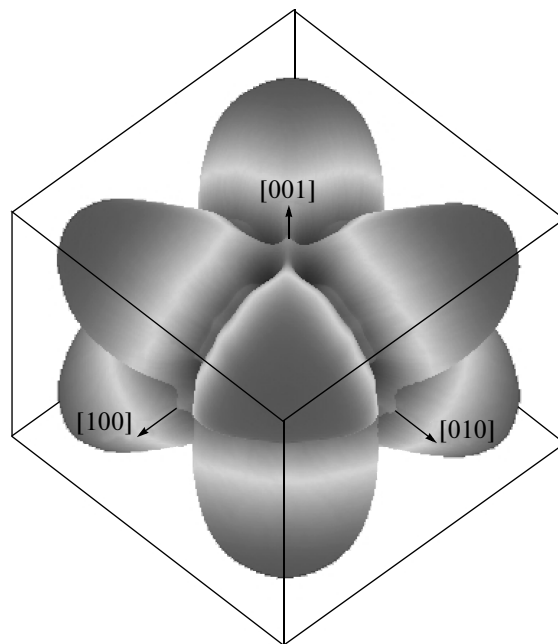


Рис. 8. Зависимость приведенной теплопроводности $\tilde{\kappa}$ от направления внутреннего поля \mathbf{H} для кристаллов TbGG_{Cz} при $T = 5.1$ К

тельством, что модель не учитывает влияния поля на спектр примесных ионов тербия.

На рис. 7 сплошными линиями показаны угловые зависимости теплопроводности от направления вектора \mathbf{H} ($H = 3$ Тл): верхняя кривая соответствует случаю вращения поля в плоскости (110), а нижняя — (001). Как видно, имеется удовлетворительное согласие теоретических данных с экспериментальными. Например, теоретические зависимости правильно показывают угловое положение глобальных минимумов и максимумов и их ширину, за исключением минимума при $\mathbf{H} \parallel \langle 001 \rangle$ для образца А, а также наличие небольшого пика вдоль направлений, эквивалентных $\theta = 45^\circ$ (образец А). Однако расчетная кривая не имеет острого пика в направлении $\langle 111 \rangle$.

На рис. 8 представлена трехмерная картина зависимости приведенной теплопроводности кристаллов TbGG_{Cz} от направления вектора $\mathbf{H} = 3$ Тл в системе координат, определяемой главными кристаллографическими осями, при температуре 5.1 К. При ориентациях поля вблизи симметричных плоскостей {100} имеет место подавление теплопроводности, а в других направлениях — рост теплопроводности в поле. Теплопроводность достигает максимума при $\mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$. Такое поведение обусловлено тем обстоя-

ятельностью, что в случае, когда \mathbf{H} находится вблизи плоскостей $\{100\}$, как минимум в двух позициях ионов Tb^{3+} из неэквивалентных шести расщепление первого квазидублета остается достаточно малым в поле 3 Тл. Однако когда поле направлено примерно вдоль $\langle 111 \rangle$, расщепление во всех шести позициях оказывается много большим (примерно 20 К), чем энергия доминирующих в теплопроводности фононов, и скорость резонансного рассеяния уменьшается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены измерения температурных, магнитополевых и угловых зависимостей теплопроводности монокристаллов TbGG , выращенных методами Чохральского и из раствора. Значительно более низкая теплопроводность кристаллов TbGG , выращенных методом Чохральского, обусловлена сильным рассеянием фононов избыточными ионами тербия, которые содержатся в них.

Сравнение экспериментальных данных с данными теоретической модели теплопроводности свидетельствует о наличии сильного спин-фононного взаимодействия для ионов Tb^{3+} в TbGG , что (согласно теории) является необходимым условием наблюдения фононного эффекта Холла. Доминирующим процессом рассеяния фононов при низких температурах является резонансное рассеяние ионами Tb^{3+} , причем при гелиевых температурах и в магнитных полях до 4 Тл, при которых был обнаружен фононный эффект Холла, главную роль играет рассеяние на первом квазидублете электронного спектра Tb^{3+} . Расщепление уровней этого квазидублета в нулевом поле составляет примерно 1.3 К. Основные особенности поведения теплопроводности кристаллов TbGG_{Cz} в магнитном поле обусловлены, видимо, эффектом Зеемана в электронном спектре ионов тербия. Формула (8) дает довольно грубое описание скорости резонансного рассеяния фононов в случае TbGG , в частности его зависимость от магнитного поля и частотную зависимость при $T \gg \omega_0$.

Авторы благодарят И. А. Иванову и Б. В. Милю за предоставленные монокристаллы TbGG , А. А. Буша за проведение рентгенодифракционных измерений и А. С. Лагутину за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00759).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Strohm, G. L. J. A. Rikken, and P. Wyder, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 155901 (2005).

2. А. В. Инюшкин, А. Н. Талденков, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 436 (2007).
3. L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, *Rev. Lett.* **96**, 155901 (2006).
4. Yu. Kagan and L. A. Maksimov, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 145902 (2008).
5. Ю. Каган, Л. А. Максимов, *ЖЭТФ* **134**, 740 (2008).
6. J.-S. Wang and L. Zhang, *Phys. Rev. B* **80**, 012301 (2009).
7. J. A. Koningstein and C. J. Kane-Maguire, *Can. J. Chem.* **52**, 3445 (1974).
8. J. Hammann and P. Manneville, *J. de Phys.* **34**, 615 (1973).
9. G. A. Slack and D. W. Oliver, *Phys. Rev. B* **4**, 592 (1971).
10. П. А. Попов, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Московский педагогический государственный университет, Москва (1993).
11. C. Strohm, PhD Thesis, University of Konstanz, Konstanz (2003).
12. I. A. Ivanov, A. M. Bulkanov, E. A. Khazanov et al., in *Proc. Int. Conf. on High Power Laser Beams*, Nizhny Novgorod (2006), p. 3.
13. B. L. Brandt, D. W. Liu, and L. G. Rubin, *Rev. Sci. Instr.* **70**, 104 (1999).
14. A. V. Inyushkin, K. Leicht, and P. Esquinazi, *Cryogenics* **38**, 299 (1998).
15. R. I. Joseph and L. Schlömann, *J. Appl. Phys.* **36**, 1579 (1965).
16. M. Guillot, A. Marchand, V. Nekvasil, and F. Tcheou, *J. Phys. C* **18**, 3547 (1985).
17. N. P. Kolmakova, R. Z. Levitin, A. I. Popov et al., *Phys. Rev. B* **41**, 6170 (1990).
18. Н. П. Колмакова, С. В. Кошциг, Г. С. Кринчик и др., *ФТТ* **32**, 1406 (1990).
19. J. Hammann and M. Ocio, *J. de Phys.* **38**, 463 (1977).
20. R. Berman, *Thermal Conduction in Solids*, Clarendon Press, Oxford (1976).
21. K. Araki, T. Goto, and Y. Nemoto et al., *Eur. Phys. J. B* **61**, 257 (2008).
22. A. K. McCurdy, H. J. Maris, and C. Elbaum, *Phys. Rev. B* **2**, 4077 (1970).

23. L. A. Turk and P. G. Klemens, *Phys. Rev. B* **9**, 4422 (1974).
24. C. D. Brandle and R. L. Barns, *J. Cryst. Growth* **26**, 169 (1974).
25. S. Tamura, *Phys. Rev. B* **30**, 849 (1984).
26. S. Tamura, *Phys. Rev. B* **27**, 858 (1983).
27. G. A. Slack and S. Galginitis, *Phys. Rev.* **133**, A253 (1964).
28. G. Leibfried and E. Schlömann, *Nach Ges. Wissenschaften Goettingen Mathematik und Physik*, K1, IIa, 71 (1954).
29. P. G. Klemens, in *Thermal Conductivity*, Vol. 1, ed. by R. P. Tye, Acad. Press, London (1969), p. 1.
30. F. W. Sheard and G. A. Toombs, *Sol. St. Comm.* **12**, 713 (1973).
31. G. A. Toombs and F. W. Sheard, *J. Phys. C* **6**, 1467 (1973).
32. F. W. Sheard, in *Proc. Second Int. Conf. on Phonon Scattering in Solids*, University of Nottingham, August 27–30, 1975, ed. by L. J. Challis, V. W. Rampton, and A. F. G. Wyatt, Plenum Press, New York (1976), p. 154.
33. R. J. Elliott and J. B. Parkinson, *Proc. Phys. Soc. London* **92**, 1024 (1967).
34. D. G. Cahill, S. K. Watson, and R. O. Pohl, *Phys. Rev. B* **46**, 6131 (1992).
35. А. К. Звездин, В. М. Матвеев, А. А. Мухин, А. И. Попов, *Редкоземельные ионы в магнитоупорядоченных кристаллах*, Наука, Москва (1985).