

К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СВЕРХТЕКУЧЕГО ГЕЛИЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ

Э. А. Пашицкий*, А. А. Гурин

*Институт физики Национальной академии наук Украины
03028, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 5 мая 2010 г.

Показано, что наблюдавшееся в экспериментах работы [3] явление электрической активности сверхтекучего гелия (HeII) при возбуждении стоячих волн второго звука в акустическом резонаторе может быть описано в рамках феноменологического механизма инерционной поляризации атомов в диэлектрике, в частности, в HeII, когда индуцируемое в среде поле поляризации пропорционально механическому ускорению, по аналогии с эффектом Толмена–Стюарта. Возникающая в волне второго звука переменная относительная скорость $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ нормальной и сверхтекучей компонент HeII определяет среднюю групповую скорость ротоннов $\mathbf{V}_g \approx \mathbf{w}$, с равновесной концентрацией которых связана плотность нормальной компоненты в области температур $1.3 \text{ K} \leq T \leq 2 \text{ K}$. В связи с этим ускорение атомов ${}^4\text{He}$, принимающих участие в формировании ротонного возбуждения, пропорционально производной по времени от относительной скорости $\dot{\mathbf{w}}$. При этом следует учитывать линейные локальные соотношения между переменными значениями электрической индукции, напряженности электрического поля и вектора поляризации. В результате этого индуцированный в объеме HeII переменный ток смещения и соответствующая ему разность потенциалов не зависят от аномально малой поляризуемости жидкого гелия, что позволяет получить согласующееся с экспериментом отношение амплитуд колебаний температуры и потенциала в волне второго звука, которое почти не зависит от T в указанном температурном интервале. В то же время, отсутствие электрического отклика при возбуждении волн первого звука в линейном режиме связано с недостаточной мощностью звуковых колебаний. На основе экспериментальных данных по возбуждению первого и второго звуков получены оценки для феноменологического коэффициента пропорциональности между вектором поляризации и ускорением и для коэффициента увлечения атомов гелия ротонами в волне второго звука. Показано также, что наличие в HeII стационарного теплового потока с отличными от нуля продольными градиентами скорости и температуры за счет конечной вязкости и теплопроводности нормальной компоненты приводит к изменению фазовых скоростей волн первого и второго звуков и к экспоненциальному нарастанию во времени их амплитуд, что должно приводить к росту амплитуд электрических сигналов на частотах первого и второго звуков. Такая неустойчивость аналогична эффекту нарастания амплитуды длинных гравитационных волн на поверхности мелкой воды, распространяющихся в направлении уменьшения глубины бассейна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о возможности электрической поляризации сверхтекучего гелия (HeII) в области температур $T < T_\lambda \approx 2.18 \text{ K}$ при возбуждении в нем волн первого и второго звуков [1, 2] впервые изучался экспериментально в работе [3]. В этих экспериментах регистрировалась переменная разность потенциалов на частоте второго звука (ВЗ) с максималь-

ной амплитудой порядка $\Delta U \approx (10\text{--}100) \text{ нВ}$ между металлическим корпусом акустического резонатора, заполненного HeII, и изолированным от него измерительным электродом, который одновременно играл роль отражателя для образования стоячей волны ВЗ. Как было показано в работе [3], отношение амплитуды колебаний температуры ΔT в волне ВЗ, измеряемой с помощью болометра, к амплитуде переменного напряжения ΔU с точностью $\pm 25\%$ не зависит от температуры в интервале $1.4 \text{ K} \leq T \leq 1.8 \text{ K}$ и равно отношению удвоенного заряда электрона $2e$

*E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

к постоянной Больцмана k_B :

$$\frac{\Delta T}{\Delta U} \approx \frac{2e}{k_B}. \quad (1)$$

Наряду с этим, в работе [3] наблюдался обратный эффект: на резонансной частоте ВЗ с помощью переменной разности потенциалов, приложенной между торцевым электродом и изолированной металлической сеткой, возбуждалась стоячая волна ВЗ, регистрируемая по колебаниям температуры на противоположном конце резонатора с помощью болометра. Однако при этом на сеточный электрод приходилось подавать переменное напряжение с амплитудой, которая на несколько порядков превышала амплитуду потенциала, регистрируемого в прямом эффекте при возбуждении волн ВЗ.

Результаты по электрической активности HeII в стоячей волне ВЗ были подтверждены недавно в экспериментах [4] по возбуждению ВЗ в диэлектрическом резонаторе с несколькими изолированными электродами в виде металлических колец, расположенных на равных расстояниях вдоль длины резонатора. Эти измерения продемонстрировали объемный характер поляризации HeII в стоячей волне ВЗ.

Аналогичные измерения проводились также для волн первого звука (ПЗ), возбуждаемых с помощью пьезоэлектрического или электромеханического генератора [3, 4], однако электрический сигнал на частоте ПЗ не был зарегистрирован на уровне шумов в пределах точности эксперимента.

В работе [3] наблюдавшаяся электрическая активность HeII интерпретировалась как результат поляризации атомов ${}^4\text{He}$ при встречном движении нормальной и сверхтекучей компонент в волне ВЗ, но механизм такой поляризации не обсуждался. В дальнейшем в целом ряде теоретических работ [5–10] предпринимались попытки построения различных моделей данного явления, однако удовлетворительного решения вопроса о причине поляризации HeII в стоячей волне ВЗ к настоящему времени не было получено.

Наиболее продуктивной среди рассматривавшихся теоретических моделей представляется высказанная в работе [6] гипотеза о возможности инерционной поляризации атомов ${}^4\text{He}$ под действием переменного ускорения за счет существенной разницы масс электронов и атомных ядер, по аналогии с эффектом Толмена–Стюарта в металлах [11]. Как было показано в работе [6], вектор

макроскопической инерционной поляризации любой диэлектрической среды определяется соотношением

$$\mathbf{P} = -\gamma \dot{\mathbf{v}} \approx -\frac{M\kappa}{2Ze} \dot{\mathbf{v}}, \quad (2)$$

где γ — инерционная (или гравитационная) поляризуемость среды, $\dot{\mathbf{v}}$ — механическое ускорение, M — масса атома, Z — число электронов в его оболочке, а κ — макроскопическая поляризуемость среды (для HeII $M = m_4$ — масса атома ${}^4\text{He}$, $Z = 2$, $\kappa_4 \approx 4.5 \cdot 10^{-3}$).

Однако приведенная в [6] оценка величины γ является весьма грубой и требует уточнения в рамках микроскопического подхода (см. ниже). Кроме того, при вычислении поляризации HeII в стоячей волне ВЗ и соответствующей разности потенциалов ΔU на длине волны в [6] был сделан ряд необоснованных предположений, которые не позволили получить количественное согласие с экспериментальными данными [3].

Во-первых, предполагалось, что переменная во времени поляризация $\mathbf{P}(t)$ определяется усредненным по термодинамическим флуктуациям равновесного газа фоонов значением ускорения $\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle$, для которого на основе теоремы вириала о равенстве средних значений кинетической и потенциальной энергий фоонов, по аналогии с нормальными жидкостями [12], было получено следующее выражение:

$$\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{\delta W_{ph}}{c_1^2} \right) \nabla p - \frac{1}{3} C_{ph}(T) \nabla T, \quad (3)$$

где δW_{ph} и $C_{ph}(T)$ — энтальпия и теплоемкость бозе-газа фоонов. Первое слагаемое в (3), пропорциональное градиенту давления ∇p , соответствует продольным звуковым колебаниям ПЗ, связанным с возмущениями плотности и давления HeII.

Для волн ВЗ, для которых в меру малости коэффициента теплового расширения жидкого ${}^4\text{He}$ с большой точностью выполняется условие $\nabla p = 0$, из соотношений (2) и (3) находим

$$\mathbf{P} \approx \frac{m_4 \kappa_4}{12e} C_{ph}(T) \nabla T, \quad (4)$$

где ∇T — градиент возмущения температуры в волне ВЗ. Однако при получении выражения (3) в [6] не учитывался преобладающий при $T > 1$ К вклад равновесного бальмановского газа ротон в термодинамические свойства HeII.

Во-вторых, при вычислении разности потенциалов ΔU на длине полуволнового резонатора в [6] предполагалось, что электрическая индукция $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ в объеме HeII равна нулю. При этом для ΔU было получено следующее выражение:

$$\Delta U = - \int_0^l dx E(x) = 4\pi \int_0^l dx P(x) \approx - \frac{\pi m_4 \kappa_4}{3e} C_{ph}(T) \Delta T. \quad (5)$$

Отсюда следует, что отношение $\Delta T/\Delta U$ должно существенно зависеть от T в силу кубической температурной зависимости фоновой теплоемкости $C_{ph}(T) \propto T^3$, что не согласуется с экспериментальными данными [3], а величина $\Delta T/\Delta U$ на несколько порядков превышает полученное в [3] значение (1) за счет аномальной малости поляризуемости HeII.

Однако в электростатике диэлектриков (см. [13]) условие $\mathbf{D} = 0$ справедливо только в том случае, когда поляризованный диэлектрик окружен металлом, экранирующим поверхностные (сторонние) заряды. Если же поляризованный диэлектрик граничит с диэлектрической средой, то индукция может быть отлична от нуля, $\mathbf{D} \neq 0$, при наличии незранированных внешних зарядов и электрических полей рассеяния.

Тем не менее эффект электрической поляризации HeII при возбуждении ВЗ наблюдался как в металлическом [3], так и в диэлектрическом [4] акустических резонаторах. Это обусловлено тем, что в стоячей волне ВЗ возникает переменная во времени поляризация $\mathbf{P}(t)$, которая индуцирует отличные от нуля переменные значения индукции $\mathbf{D}(t)$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}(t)$ согласно соотношению

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\mathbf{D}(t) - \mathbf{E}(t)}{4\pi}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что это соотношение остается справедливым в так называемом квазистатическом приближении в области низких (звуковых) частот.

При этом эффекты частотной и пространственной дисперсии несущественны, так что имеет место линейная локальная связь между $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$:

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_4 \mathbf{E}(t), \quad (7)$$

где ε_4 — статическая диэлектрическая проницаемость жидкого гелия, которая в силу аномальной малости поляризуемости атомов ${}^4\text{He}$ и слабости эффектов локального поля в соотношении Клаузиуса–Моссотти [14] с хорошей точностью ($< 2\%$) определяется выражением

$$\varepsilon_4 = 1 + 4\pi\kappa_4. \quad (8)$$

Из (6)–(8) следует линейное соотношение между $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$:

$$\mathbf{P}(t) = \kappa_4 \mathbf{E}(t), \quad (9)$$

в силу которого индуцируемое в HeII переменное электрическое поле, согласно соотношению (2), определяется выражением

$$\mathbf{E}(t) = - \frac{\gamma}{\kappa_4} \dot{\mathbf{v}} \approx - \frac{m_4}{4e} \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (10)$$

которое не содержит поляризуемость $\kappa_4 \ll 1$.

Таким образом, если предположить, что в экспериментах [3, 4] измерялась непосредственно не поляризация (2), а напряженность индуцированного электрического поля (10) в объеме HeII или соответствующая ей разность потенциалов, то результат измерений не должен зависеть от аномально малой поляризуемости HeII.

С другой стороны, благодаря отличной от нуля переменной электрической индукции $\mathbf{D}(t)$, в объеме HeII возникает переменный ток смещения

$$\mathbf{j}(t) = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = - \frac{\varepsilon_4}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11)$$

и связанное с ним падение напряжения $U(t)$ за счет конечного волнового сопротивления диэлектрической среды $R_\omega = 1/C\omega$ с емкостью C на частоте звуковых колебаний ω , которое гораздо меньше омического сопротивления диэлектрической жидкости HeII. При этом на границе HeII с металлом вместо граничного условия $\mathbf{D} = 0$ для статической индукции следует использовать условие равенства тока смещения (11) и тока проводимости в металле в случае замкнутой электрической цепи. При разомкнутой цепи измеряется переменная ЭДС источника напряжения (поляризованного HeII). Именно с этим связан наблюдаемый эффект электрической активности HeII при возбуждении стоячей волны ВЗ в металлическом акустическом резонаторе [3].

В диэлектрическом резонаторе [4] переменный ток смещения (11) индуцирует переменные заряды и токи в металлических электродах, находящихся внутри диэлектрических стенок резонатора, так что в эксперименте регистрируются возникающие между ними переменные разности потенциалов.

В настоящей работе показано, что согласование теории с экспериментом может быть получено в рамках следующих предположений:

1) причиной электрической активности HeII является инерционный механизм поляризации атомов ${}^4\text{He}$, согласно которому вектор макроскопической поляризации среды и индуцируемое в ней электрическое поле пропорциональны механическому ускорению в стоячей волне ПЗ или ВЗ, причем коэффициент пропорциональности является феноменологической величиной, оценка которой может быть получена из сравнения теории с экспериментом;

2) роль ускорения в соотношении (2) для волн ПЗ играет производная по времени от среднемассовой гидродинамической скорости $\mathbf{v} = (\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) / \rho$, где $\rho = \rho_n + \rho_s$ — полная плотность HeII, ρ_n и ρ_s — парциальные плотности нормальной и сверхтекучей компонент, а \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s — их скорости;

3) для волн ВЗ, которые являются колебаниями температуры и энтропии, в качестве $\dot{\mathbf{v}}$ следует использовать величину, пропорциональную производной по времени от относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, поскольку в указанном выше интервале температур ($1.4 \text{ K} < T < 1.8 \text{ K}$) нормальная компонента представляет собой бoльцмановский газ ротон, средняя групповая скорость которых в волне ВЗ совпадает с \mathbf{w} , и происходит увлечение атомов ${}^4\text{He}$ ротонами, движущимися с переменной скоростью $\mathbf{w}(t)$;

4) между переменными значениями векторов поляризации $\mathbf{P}(t)$, электрической индукции $\mathbf{D}(t)$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}(t)$, которые индуцируются в объеме HeII ускорениями $\dot{\mathbf{v}}$ в волне ПЗ и $\dot{\mathbf{w}}$ в волне ВЗ, имеют место линейные локальные соотношения;

5) измеряемые в экспериментах [3, 4] переменные разности потенциалов на длине резонатора или между кольцевыми и торцевым электродами определяются падением напряжения при протекании переменного тока смещения (11) в объеме HeII и через диэлектрические промежутки между металлическими электродами и HeII благодаря конечному волновому сопротивлению диэлектрической среды R_ω на звуковой частоте;

6) напряженность переменного электрического поля $\mathbf{E}(t)$ в (11) определяется соотношением (10), так что падение напряжения $U(t) = I(t)R_\omega$, где $I(t) = j(t)S_0$ — полный ток смещения через поперечное сечение акустического резонатора площадью S_0 , не зависит от поляризуемости \varkappa_4 .

На основе такого феноменологического подхода удастся объяснить как эффект электрической активности HeII в волне ВЗ, так и отсутствие электрического сигнала в волне ПЗ в соответствии с экспериментальными данными [3, 4], а также понять причину обратного эффекта возбуждения ВЗ внешним переменным потенциалом [3].

В работе рассмотрено также влияние стационарного теплового потока в HeII на процессы возбуждения ПЗ и ВЗ и на электрическую активность HeII в этом случае. На основе уравнений двухжидкостной гидродинамики [2] в линейном приближении проведено рассмотрение распространения плоских волн ПЗ и ВЗ малой амплитуды вдоль стационарного теп-

лового потока и показано, что ненулевые постоянные скорости нормальной и сверхтекучей компонент в тепловом потоке приводят к изменению фазовых скоростей ПЗ и ВЗ. В то же время, продольные градиенты скорости теплового потока и температуры за счет конечной вязкости и теплопроводности нормальной компоненты приводит к экспоненциальному нарастанию амплитуд волн ПЗ и ВЗ по аналогии с известным эффектом нарастания амплитуды длинных гравитационных волн на поверхности жидкости [15] в мелком бассейне с меняющейся глубиной.

2. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим задачу о распространении волн ПЗ и ВЗ в цилиндрическом акустическом резонаторе, заполненном HeII. Предполагая, что амплитуда возбуждаемых волн достаточно мала, будем исходить из линеаризованных уравнений движения двухжидкостной гидродинамики для нормальной и сверхтекучей компонент [2]:

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}'_n}{\partial t} = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p' - \rho_s \sigma \nabla T', \quad (12)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p' + \rho_s \sigma \nabla T', \quad (13)$$

где \mathbf{v}'_n и \mathbf{v}'_s — малые возмущения гидродинамических скоростей нормальной и сверхтекучей компонент, а p' и T' — возмущения давления и температуры в волнах ПЗ и ВЗ. Символы без штрихов соответствуют невозмущенным равновесным значениям плотностей ρ_n , ρ_s и ρ и энтропии σ (в расчете на единицу массы).

Уравнения (12) и (13) следует дополнить линеаризованными уравнениями непрерывности для возмущений плотности ρ' и энтропии σ' :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_n \text{div } \mathbf{v}'_n + \rho_s \text{div } \mathbf{v}'_s = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \sigma \text{div } \mathbf{v}'_n = 0. \quad (15)$$

Суммируя уравнения (12) и (13), получаем уравнение для производной по времени от возмущения среднемассовой скорости

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{1}{\rho} \left(\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}'_n}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p', \quad (16)$$

которое совместно с уравнением непрерывности (14) и при учете адиабатического соотношения $p' = (\partial p / \partial \rho)_T \rho' = \gamma p \rho' / \rho$ (где γ — показатель адиабаты) приводит к волновому уравнению для ПЗ:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 \rho', \quad (17)$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — фазовая скорость ПЗ в HeII ($c_1 \approx 240$ м/с). При этом возмущения температуры и энтропии в силу малости коэффициента теплового расширения HeII с большой точностью можно считать равными нулю.

С другой стороны, разделив уравнения (12) и (13) соответственно на ρ_n и ρ_s и затем вычитая (13) из (12) и исключая градиент давления ∇p , получаем выражение для производной по времени от относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент в волне ВЗ:

$$\dot{\mathbf{w}} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_s) = -\frac{\rho\sigma}{\rho_n} \nabla T'. \quad (18)$$

При условии несжимаемости HeII ($\rho = \text{const}$), которое с большой точностью выполняется при распространении волн ВЗ, из уравнения (14) следуют соотношения

$$\mathbf{v}'_s = -\mathbf{v}'_n \frac{\rho_n}{\rho_s}, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_s) = \mathbf{v}'_n \frac{\rho}{\rho_s}, \quad (19)$$

откуда с учетом (15) находим

$$\text{div } \mathbf{w} \equiv \text{div}(\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_s) = -\frac{\rho}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma'}{\partial t}. \quad (20)$$

Дифференцируя уравнение (20) по времени и подставляя в него выражение (18), с учетом соотношения $\sigma' = (\partial \sigma / \partial T)_\rho T'$ получаем волновое уравнение для ВЗ:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = c_2^2(T) \nabla^2 T', \quad (21)$$

где $c_2(T) = \sigma(T) \sqrt{(\rho_s / \rho_n) (\partial \sigma / \partial T)^{-1}}$ — фазовая скорость ВЗ ($c_2 \approx 20$ м/с в интервале $1 \text{ К} < T < 2 \text{ К}$).

Задавая возмущения плотности и температуры в HeII внутри цилиндрического акустического резонатора в виде

$$\rho'(r, z, t) = \tilde{\rho}(r) \exp\{i(kz - \omega t)\}, \quad (22)$$

$$T'(r, z, t) = \tilde{T}(r) \exp\{i(kz - \omega t)\}, \quad (23)$$

где k — продольный волновой вектор стоячей волны ПЗ или ВЗ, принимающий дискретные значения $k_n = n\pi/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а l — длина резонатора, получаем следующие уравнения для зависящих от r амплитуд возмущений:

$$\frac{d^2 \tilde{\rho}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\rho}}{dr} - \left(k_n^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \tilde{\rho}(r) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{T}}{dr} - \left(k_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) \tilde{T}(r) = 0. \quad (25)$$

Для стоячих волн ПЗ и ВЗ с дискретными частотами $\omega_n = k_n c_1$ и $\omega_n = k_n c_2$ решения уравнений (24) и (25), не имеющие логарифмической особенности в точке $r = 0$, соответствуют однородным по радиусу амплитудам возмущений плотности и температуры, т. е. плоским волнам ПЗ и ВЗ:

$$\rho'(z, t) = 2\tilde{\rho}(0) \cos(k_n z) \sin(k_n c_1 t), \quad (26)$$

$$T'(z, t) = 2\tilde{T}(0) \cos(k_n z) \sin(k_n c_2 t). \quad (27)$$

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ HEII В СТОЯЧЕЙ ВОЛНЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ

Прежде всего обсудим вопрос о точности оценки инерционной (гравитационной) поляризуемости γ , проведенной в работе [6] на основе соотношения

$$\mathbf{P} = -\gamma \dot{\mathbf{v}} = \varkappa \mathbf{E}_i, \quad (28)$$

где \mathbf{E}_i — эффективное электрическое поле, которое возникает внутри атомов при смещении ядра относительно «центра тяжести» электронной оболочки и может быть оценено из условия равенства инерционной $\mathbf{F} = m_4 \dot{\mathbf{v}}$ или гравитационной (при $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}$) сил, действующих на атомное ядро, возвращающей электрической силе, равной по порядку величины $2Ze\mathbf{E}_i$. Такая оценка электрической силы содержит достаточно большую степень произвола и требует уточнения на основе квантовомеханического расчета для конкретных атомов (см. Приложение А).

В рамках феноменологического подхода неопределенность в выборе величины γ для атомов ${}^4\text{He}$ можно устранить путем введения в соотношения (2) и (10) некоторого дополнительного безразмерного коэффициента $\alpha = \text{const}$, который в дальнейшем будет оценен из сравнения теоретических и экспериментальных результатов.

Рассмотрим эффект электрической активности HeII при распространении волн ПЗ и ВЗ в соответствии с предложенным в работе [6] инерционным механизмом поляризации атомов ${}^4\text{He}$ под действием механического ускорения.

3.1. Волны первого звука

Для волн ПЗ механическое ускорение среды $\dot{\mathbf{v}}$ в соотношении (2) определяется первой производной по времени от среднemasсовой гидродинамической скорости (16). С учетом приведенной выше локальной связи электрической индукции $\mathbf{D}(t)$ и

вектора макроскопической поляризации $\mathbf{P}(t)$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}(t)$ в объеме HeII (см. (7), (9)) и вытекающего из этого соотношения (10), индуцированное в стоячей волне ПЗ электрическое поле в объеме HeII с учетом дополнительного феноменологического коэффициента α равно:

$$\mathbf{E}_1 = \alpha \frac{m_4}{4e\rho} \nabla p' = \alpha \frac{m_4 c_1^2}{4e\rho} \nabla \rho'. \quad (29)$$

Для плоской волны ПЗ с возмущением плотности типа (26) распределение напряженности электрического поля в объеме HeII имеет вид

$$E_{1z}(z, t) = -\alpha \frac{m_4 c_1^2 k_n}{2e\rho} \tilde{\rho}(0) \sin(k_n z) \sin(k_n c_1 t). \quad (30)$$

Соответствующая амплитуда разности потенциалов на длине полуволнового резонатора $l = \lambda/2$ равна

$$\Delta U_1 = - \int_0^l dz E_{1z}(z) = \alpha \frac{m_4 c_1^2}{e} \frac{\Delta \rho}{\rho} = \alpha \frac{\Delta p}{e N_4}, \quad (31)$$

где N_4 — концентрация атомов ${}^4\text{He}$ в HeII ($\rho = m_4 N_4$).

Из соотношения (31) для параметров HeII получаем следующую оценку: $\Delta U_1 \approx \alpha \Delta \rho / \rho$ мВ. Поскольку в экспериментах [3] порог чувствительности измерения напряжений составлял приблизительно 5 нВ, для надежной регистрации эффекта поляризации HeII в стоячей волне ПЗ на уровне сигнала порядка 10 нВ необходимо, чтобы относительная амплитуда возмущения плотности удовлетворяла условию $\alpha \Delta \rho / \rho \geq 2 \cdot 10^{-5}$, что при не слишком большом значении α соответствует весьма большой мощности звуковых колебаний. По-видимому, в экспериментах [3] мощность пьезоэлектрического генератора ПЗ была недостаточной для наблюдения инерционной поляризации HeII в волне ПЗ.

Недавно в работе [4] для возбуждения ПЗ в акустическом резонаторе использовался электромеханический генератор, который создавал в объеме HeII максимальное звуковое давление $\Delta P \approx 0.2$ атм. Подставляя это значение в соотношение (31), получаем оценку $\Delta U_1 \approx 4\alpha$ нВ, которая соответствует уровню шумов при $\alpha \leq 1.5$. Таким образом, в линейном режиме возбуждения волн ПЗ электрическая активность HeII не могла наблюдаться при достигнутой в экспериментах [3, 4] точности измерений, если коэффициент $\alpha \leq 1.5$.

3.2. Волны второго звука

Как известно, волны ВЗ представляют собой колебания температуры (или энтропии), а следова-

тельно, плотности нормальной компоненты HeII. С другой стороны, в области температур $T > 1$ К плотность нормальной компоненты определяется, главным образом, плотностью бозе-газа ротонов [2]:

$$\rho_n \approx \rho_r = \frac{p_0^2}{3k_B T} N_r(T), \quad (32)$$

где p_0 — положение ротонного минимума в спектре квазичастиц ($p_0 \approx 1.9 \cdot 10^8$ см $^{-1}$ в единицах постоянной Планка \hbar), а $N_r(T)$ — концентрация ротонов, которая в равновесном состоянии определяется бозе-газовской функцией распределения квазичастиц. При наличии стационарного теплового потока в HeII или при распространении низкочастотных волн ВЗ, когда за период колебаний успевает установиться термодинамическое равновесие в газе ротонов, функция распределения ротонов имеет вид (см. [2])

$$n_r(\mathbf{p}, T, \mathbf{w}) = \exp \left\{ - \frac{\varepsilon_r(p, T) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{k_B T} \right\}. \quad (33)$$

Здесь $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ — относительная скорость нормальной и сверхтекучей компонент в волне ВЗ, а $\varepsilon_r(p, T)$ — спектр ротонов:

$$\varepsilon_r(p, T) = \Delta_r(T) + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu_r}, \quad (34)$$

где Δ_r — зависящая от температуры ротонная щель, а μ_r — эффективная масса ротонов ($\mu_r \approx 0.16 m_4$).

При условии, что $w \ll k_B T / p_0 \leq 15$ м/с при $T \leq T_\lambda$, с точностью до квадратичных по \mathbf{w} членов функция распределения (33) принимает вид

$$n_r(\mathbf{p}, T, \mathbf{w}) \approx \exp \left\{ - \frac{\varepsilon_r(p, T)}{k_B T} \right\} \times \left[1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{k_B T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{k_B T} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

Групповая скорость ротона в направлении относительной скорости \mathbf{w} , которое выберем в качестве полярной оси Z в импульсном пространстве, равна

$$V_g(p) = \frac{\partial \varepsilon_r(p)}{\partial p_z} = \frac{(p - p_0)}{\mu_r} \frac{p_z}{p}, \quad (36)$$

где $p_z = p \cos \theta$, а θ — полярный угол. Легко показать, что среднее по распределению (35) значение V_g с точностью до членов первого порядка по \mathbf{w} равно (см. Приложение В):

$$\overline{V_g} = \frac{1}{\mu_r N_r(T)} \times \int d\tau_p n_r(\mathbf{p}, T, \mathbf{w}) (p - p_0) \cos \theta \approx w. \quad (37)$$

Это означает, что каждый ротон в среднем и весь равновесный бoльцмановский газ ротонов в целом совершают колебания в волне ВЗ с переменной скоростью $\mathbf{w}(t)$ и испытывают при этом ускорение $\dot{\mathbf{w}}(t)$.

Следует учесть, что средняя концентрация атомов ${}^4\text{He}$ в нормальной компоненте $N_n(T) = \rho_n(T)/m_4$, согласно соотношению (32), при $T \geq 1.3$ К равна

$$N_n(T) \approx \frac{p_0^2 N_r(T)}{3m_4 k_B T} \leq 10N_r(T),$$

так что в HeII на один ротон в среднем приходится порядка $15\rho/\rho_n(T)$ атомов ${}^4\text{He}$, которые принимают участие в формировании ротона как коллективного коротковолнового возбуждения квантовой бозе-жидкости HeII. Поскольку характерная длина волны ротона $\lambda = 2\pi\hbar/p_0 \approx 3.3A$ меньше, чем среднее расстояние между атомами в жидком гелии $\bar{r} = N_4^{-1/3} \approx 3.6A$, а волновой пакет ротонного возбуждения, согласно вариационным расчетам [17], имеет осциллирующую структуру, атомы ${}^4\text{He}$ должны эффективно увлекаться движением газа ротонов со средней скоростью $\mathbf{w}(t)$ в волне ВЗ и, следовательно, находятся в поле переменного ускорения $\dot{\mathbf{w}}(t)$, что должно приводить к их инерционной поляризации.

В связи с этим можно ввести феноменологический коэффициент увлечения атомов гелия ротонами $\beta \leq 1$, так что механическое ускорение атомов ${}^4\text{He}$ в волне ВЗ равно

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \beta \dot{\mathbf{w}}(t). \quad (38)$$

В результате, напряженность индуцированного электрического поля в волне ВЗ с учетом соотношения (18) равна

$$\mathbf{E}_2 \approx \alpha\beta \frac{\rho\sigma_4(T)}{4e\rho_n(T)} \nabla T', \quad (39)$$

где $\sigma_4 = m_4\sigma$ — энтропия, приходящаяся на один атом ${}^4\text{He}$ и имеющая размерность постоянной Больцмана k_B . Для плоской стоячей волны ВЗ в полуволновом цилиндрическом резонаторе согласно (27) получаем

$$E_{2z}(z, t) \approx -\alpha\beta \frac{\rho\sigma_4(T)k_1}{2e\rho_n(T)} \tilde{T}(0) \times \sin(k_1 z) \sin(k_1 c_2 t), \quad (40)$$

что соответствует максимальной разности потенциалов на длине резонатора

$$\Delta U_2 = - \int_0^l dz E_{2z}(z) \approx \alpha\beta \frac{\rho\sigma_4(T)}{e\rho_n(T)} \Delta T, \quad (41)$$

где $\Delta T = \tilde{T}(0)$. С другой стороны, падение напряжения на длине резонатора может быть получено, если учесть, что под действием переменной электрической индукции $\mathbf{D}(t) = \varepsilon_4 \mathbf{E}(t)$, как отмечалось во Введении, в объеме заполняющего резонатор сверхтекучего ${}^4\text{He}$ возбуждается переменный ток смещения (11) и возникает падение напряжения $U(t) = j(t)S_0/C\omega$.

В результате с учетом выражения (40) для $E_{2z}(z, t)$ получаем следующее распределение напряжения в HeII в полуволновом резонаторе в поле стоячей волны ПЗ:

$$U_2(z, t) = \frac{\varepsilon_4 S_0}{4\pi C} \frac{k_1 \alpha \beta \rho \sigma_4 \Delta T}{e \rho_n} \times \sin(k_1 z) \cos(k_1 c_2 t). \quad (42)$$

Легко видеть, что амплитуда напряжения (42) совпадает с величиной ΔU_2 в формуле (41), если электрическую емкость резонатора положить равной

$$C = \frac{\varepsilon_4 S_0 k_1}{4\pi} = \frac{\varepsilon_4 S_0}{4l}. \quad (43)$$

Соотношение (41) может быть представлено в виде

$$\frac{\Delta T}{\Delta U_2} \approx \frac{e}{k_B} \frac{f(T)}{\alpha\beta}, \quad (44)$$

где $f(T)$ — зависящий от температуры безразмерный множитель

$$f(T) = \frac{k_B \rho_n(T)}{\rho \sigma_4(T)}. \quad (45)$$

На рис. 1 показана полученная в работе [18] температурная зависимость безразмерного множителя $f(T)$, вычисленная на основе известных формул для энтропии (нормированной на k_B) в расчете на один атом и плотности нормальной компоненты (нормированной на ρ) с учетом вкладов равновесных фононов и ротонов (см. [2]):

$$\frac{\sigma_4(T)}{k_B} = \frac{2\pi^2}{45n} \left(\frac{k_B T}{\hbar c_1} \right)^3 + \frac{2p_0^2 \sqrt{m_r^* k_B T}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3 n} \times \left[\frac{\Delta(T)}{k_B T} + \frac{3}{2} \right] \exp \left\{ - \frac{\Delta(T)}{k_B T} \right\}, \quad (46)$$

$$\frac{\rho_n(T)}{\rho} = \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{k_B T}{\hbar c_1} \right)^3 \frac{k_B T}{\rho c_1} + \frac{2p_0^2 \sqrt{m_r^*}}{3(2\pi)^{3/2} \rho \sqrt{k_B T} \hbar^3} \times \exp \left\{ - \frac{\Delta(T)}{k_B T} \right\}, \quad (47)$$

где учтено уменьшение ротонной щели при повышении T от $\Delta(0)/k_B = 8.65$ К при $T \rightarrow 0$ до

$\Delta(T_\lambda)/k_B = 5.52$ К при $T \rightarrow T_\lambda$. При вычислениях $f(T)$ использовалась следующая аппроксимация:

$$\Delta(T) = \begin{cases} \Delta(0), & T < (3/4)T_\lambda, \\ \Delta(T_\lambda) + [\Delta(0) - \Delta(T_\lambda)][4(1 - T/T_\lambda)]^{1/4}, & (3/4)T_\lambda \leq T \leq T_\lambda. \end{cases} \quad (48)$$

Такая аппроксимация хорошо согласуется с эмпирической температурной зависимостью $\Delta(T)$, полученной в экспериментах [19, 20] по измерению ротонной щели с помощью СВЧ-метода.

Как видим, в области температур $1.3 \text{ К} \leq T \leq 2 \text{ К}$ множитель $f(T)$ имеет «плато», т. е. почти не зависит от температуры и близок к значению 1.25. Это означает, что соотношение (44) с точностью 25 % согласуется с эмпирическим соотношением (1), если произведение параметров $\alpha\beta \approx 1/2$.

Выше на основе экспериментальных данных [3, 4] о том, что электрический сигнал при возбуждении волн ВЗ в акустическом резонаторе не превышал уровня шумов $\Delta U_1 \approx 5$ нВ, было получено ограничение сверху на величину феноменологического коэффициента $\alpha \leq 1.5$. В результате этого из условия $\alpha\beta \approx 1/2$, которое позволяет согласовать теоретическое соотношение (44) с полученным в работе [3] эмпирическим соотношением (1), находим оценку для коэффициента увлечения атомов ^4He ротонами $\beta \leq 0.3$.

На низких частотах, соответствующих стоячим волнам ВЗ в резонаторе, индуцированное электрическое поле (39) с хорошей точностью можно считать потенциальным:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t), \quad (49)$$

так что для потенциала φ , возникающего в плоской продольной волне ВЗ, согласно (35), следует выражение (при $\alpha\beta \approx 1$)

$$\varphi(z, t) \approx \frac{\rho\sigma_4(T)k_1^2}{2e\rho_n(T)} \tilde{T}(0) \cos(k_1 z) \sin(k_1 c_2 t). \quad (50)$$

На рис. 2 показано распределение потенциала (39) вдоль полуволнового диэлектрического резонатора с четырьмя металлическими кольцевыми электродами, который использовался в экспериментах [4]. Разности потенциалов $\Delta\varphi_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) между измерительным электродом и разными кольцевыми электродами, расположенными на равном расстоянии друг от друга по длине резонатора, полностью соответствуют экспериментальным данным [4] как для одной полуволны ВЗ, так и для трех полуволн при соответствующей замене $k_1 = \pi/l$ на $k_3 = 3\pi/l$.

При этом напряжение, измеряемое с помощью кольцевых электродов, находящихся в диэлектрическом корпусе резонатора, может несколько отличаться от потенциала в объеме HeII за счет разных диэлектрических проницаемостей стенок резонатора и HeII.

В заключение этого раздела заметим, что с учетом (49) соотношение (39) может быть представлено в виде

$$\nabla T \approx \frac{4e\rho_n(T)}{\rho\sigma_4(T)} \nabla\varphi. \quad (51)$$

Отсюда следует возможность обратного эффекта электрической активности HeII, т. е. возбуждение колебаний температуры и волн ВЗ с помощью внешнего переменного во времени и неоднородного в пространстве потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$, который содержит пространственную фурье-компоненту со структурой, аналогичной структуре стоячей волны ВЗ в резонаторе. В экспериментах [3] неоднородность внешнего переменного потенциала, подаваемого на электрод в виде металлической сетки, определялась полями рассеяния в объеме резонатора и, следовательно, зависела от размеров ячеек этой сетки. По-видимому, относительная амплитуда пространственной фурье-компоненты полей рассеяния, совпадающая с распределением потенциала в стоячей волне ВЗ (50), в условиях эксперимента [3] была чрезвычайно мала, в силу чего для возбуждения волн ВЗ необходимо было прикладывать высокое переменное напряжение, на несколько порядков превышающее электрический потенциал, регистрируемый в стоячей волне ВЗ.

Более эффективным могло бы быть возбуждение волн ВЗ переменным электрическим полем в диэлектрическом резонаторе с распределенными по длине металлическими кольцевыми электродами [4], если бы на эти электроды независимо подавалось переменное напряжение на резонансной частоте ВЗ с разными амплитудами, которые соответствуют пространственному распределению индуцированного потенциала в волне ВЗ (50).

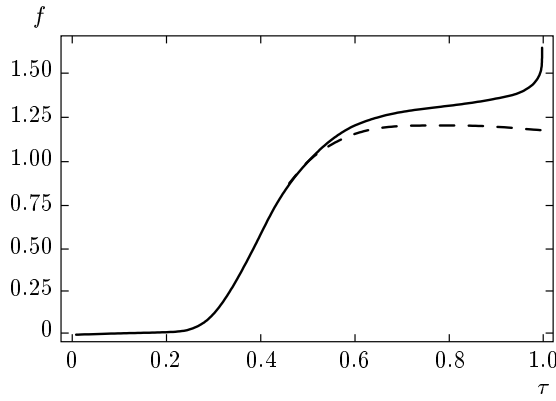


Рис. 1. Зависимость множителя $f(\tau) = \rho_n(\tau)k_B/\rho_0\sigma_0(\tau)$ от безразмерной температуры $\tau = T/T_\lambda$ для стоячей волны второго звука при постоянной ротонной щели $\Delta(0)/k_B = 8.65$ К (штриховая линия), а также с учетом температурной зависимости ротонной щели $\Delta(\tau)$ с помощью аппроксимации (48) (сплошная кривая)

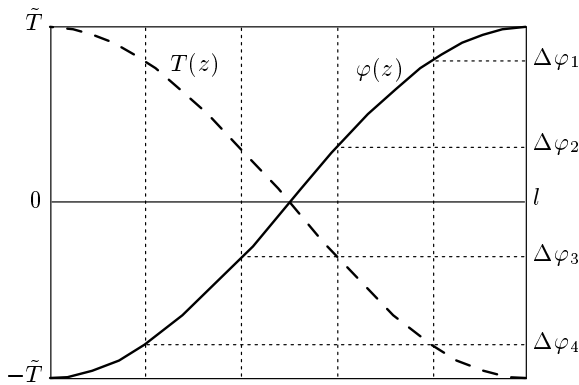


Рис. 2. Распределение температуры (штриховая кривая) и потенциала (сплошная кривая) в полуволновом резонаторе. Символами $\Delta\varphi_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) обозначены разности потенциалов между измерительным электродом и разными металлическими кольцами в диэлектрическом корпусе резонатора [4]

4. ВЛИЯНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ АКТИВНОСТЬ НЕII ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ СТОЯЧИХ ВОЛН ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ

В связи с тем, что скорость относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ является одной из важных характеристик НеII, определяющих его термодинамические свой-

ства [2], представляет интерес рассмотреть влияние стационарного теплового потока в НеII на распространение волн ПЗ и ВЗ и на связанную с ними электрическую активность НеII.

Для этой цели будем исходить из полной системы нелинейных уравнений двухжидкостной гидродинамики, описывающей макроскопические движения нормальной и сверхтекучей компонент в НеII при наличии теплового потока с точностью до квадратичных по \mathbf{w} членов [2]:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \text{div}(S \mathbf{v}_n) = 0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) + \nabla p + \mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n \cdot \nabla \rho_n) + \\ + \rho_n(\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n \text{div} \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s(\mathbf{v}_s \cdot \nabla \rho_s) + \\ + \rho_s(\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \rho_s \mathbf{v}_s \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla \mu = 0, \quad (55)$$

где

$$\tilde{\rho} = \rho \left[1 + \frac{\rho}{2} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right], \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} = S \left[1 + \frac{\rho}{2} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] + \\ + \frac{\rho}{2} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\nabla \mu = \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{S}{\rho} \nabla T - \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (58)$$

Здесь S — энтропия единицы объема НеII, а μ — химический потенциал.

Как известно, стационарный тепловой поток в НеII представляет собой встречное движение нормальной и сверхтекучей компонент с постоянными скоростями \mathbf{v}_{n0} и \mathbf{v}_{s0} , которые в условиях несжимаемости НеII, когда $\rho_0 = \rho_{n0} + \rho_{s0} = \text{const}$, и в отсутствие переноса массы связаны между собой соотношением

$$\rho_{n0} \mathbf{v}_{n0} + \rho_{s0} \mathbf{v}_{s0} = 0. \quad (59)$$

При этом нормальная компонента, движущаяся со средней гидродинамической скоростью $v_{n0} = w_0 \rho_{s0} / \rho_0$, состоит из потоков двух сортов квазичастиц — фононов и ротонов. В собственной движущейся системе координат квазичастицы за счет взаимного рассеяния находятся в термодинамически равновесном состоянии. В области низких температур, $T < 1$ К, основную роль играет бозе-газ фононов, тогда как в области $T > 1$ К преобладающий вклад в термодинамические и кинетические свойства HeII вносит бальмановский газ ротонов. Характерное время столкновений между ротонами зависит от температуры и определяется выражением [2]

$$t_r = \frac{\hbar^4}{2p_0 \mu_r |V_0|^2 N_r(T)}, \quad (60)$$

где $|V_0|^2$ — квадрат модуля амплитуды упругого рото-ротонного рассеяния.

Соответствующий коэффициент первой вязкости газа ротонов не зависит от температуры и равен [2]

$$\eta_r = \frac{p_0^2 t_r N_r}{15 \mu_r} = \frac{\hbar^4 p_0}{30 \mu_r^2 |V_0|^2}. \quad (61)$$

Однако экспериментальные измерения (см. [14]) указывают на наличие относительно слабой, но конечной температурной зависимости коэффициента вязкости нормальной компоненты HeII, который в области температур $1.6 \text{ К} \leq T \leq 2.1 \text{ К}$ изменяется в интервале $\eta_n \approx (12.5-16.5)$ мкП. Для среднего значения $\eta_n \approx 14.5$ мкП находим коэффициент кинематической вязкости $\nu_n = \eta_n / \rho_{n0} \approx 10^{-4} \rho_0 / \rho_{n0} \text{ см}^2/\text{с}$.

Благодаря конечной вязкости нормальной компоненты происходит торможение теплового потока, которое в стационарных условиях описывается гидродинамическим уравнением

$$v_{n0} \frac{\partial v_{n0}}{\partial x} - \nu_n \frac{\partial^2 v_{n0}}{\partial y^2} = 0, \quad (62)$$

где зависимость v_{n0} от поперечной координаты y определяется толщиной приповерхностного вязкого слоя $\lambda_n = \sqrt{2\nu_n/\omega_0}$ вблизи боковой стенки резонатора. Характерная частота ω_0 в данном случае определяется обратной величиной пролетного времени теплового потока на длине резонатора l и равна $\omega_0 \approx v_{n0}/l$. Учитывая, что по порядку величина $\partial^2 v_{n0}/\partial y^2 \approx v_{n0}/\lambda_n^2$, а $\partial v_{n0}/\partial x \approx v_{n0}/L$, где L — характерная длина торможения теплового потока, получаем следующую оценку $L \approx 2l$, которая указывает на весьма существенный эффект замедления стационарного теплового потока в акустическом резонаторе. Таким образом, в уравнениях двухжидкостной

гидродинамики (52)–(58) необходимо учитывать конечный продольный градиент скорости стационарного теплового потока в HeII, заполняющем резонатор.

4.1. Волны первого звука

Для волн ПЗ при $T = \text{const}$ и $S = \text{const}$, полагая $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho_n = \rho_{n0} + \rho'_n$, $\rho_s = \rho_{s0} + \rho'_s$, $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n0} + \mathbf{v}'_n$, $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s0} + \mathbf{v}'_s$, $p = p_0 + p'$, где штрихом обозначены малые возмущения соответствующих величин, зависящие от координат и времени, и учитывая, что в волне ПЗ колебания нормальной и сверхтекучей компонент происходят синфазно с одинаковыми скоростями $\mathbf{v}'_n = \mathbf{v}'_s$, в линейном приближении приведем уравнения (52), (54) и (55) с учетом (58) и (59) к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_{n0} \mathbf{v}'_n + \rho_{s0} \mathbf{v}'_s) + (\rho'_n \text{div} \mathbf{v}_{n0} + \rho'_s \text{div} \mathbf{v}_{s0}) + (\mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla \rho'_n) + (\mathbf{v}_{s0} \cdot \nabla \rho'_s) = 0, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{n0} \left[\frac{\partial \mathbf{v}'_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_n + (\mathbf{v}'_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_{n0} \right] + \\ & + \rho_{s0} \left[\frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_{s0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_{s0} \right] + \\ & + \rho_{n0} \text{div} \mathbf{v}'_n + \rho'_n \text{div} \mathbf{v}_{n0} + \nabla p' + \\ & + (\mathbf{v}_{n0} - \mathbf{v}_{s0}) \left[\frac{\partial \rho'_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla) \rho'_n \right] = 0, \quad (64) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_{s0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_{s0} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0. \quad (65)$$

Для плоских волн ПЗ, распространяющихся вдоль неоднородного теплового потока, система уравнений для безразмерных возмущений скорости $\tilde{v} = v'_n/w_0$ и плотностей $\tilde{\rho}_n = \rho'_n/\rho_0$ и $\tilde{\rho} = \rho'/\rho_0$ с экспоненциальной зависимостью от продольной координаты и времени, аналогично (22) и (23), приводится к виду

$$\begin{aligned} & (\omega + kv_{s0}) \tilde{v} + \\ & + \left\{ (\omega - kv_{n0}) + i \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} \left[1 + \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_{n0}^2}{\rho_{s0}^2} \right) \right] \frac{dw_0}{dx} \right\} \tilde{\rho}_n - \\ & - \left(\frac{kc_1^2}{w_0} - i \frac{\rho_{n0}^2}{\rho_0^2} \frac{dw_0}{dx} \right) \tilde{\rho} = 0, \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(\omega - kv_{s0}) - i \frac{\rho_{n0}}{\rho_0} \frac{dw_0}{dx} \right] \tilde{v} + i \frac{dw_0}{dx} \tilde{\rho}_n - \\ & - \left(\frac{kc_1^2}{w_0} + i \frac{\rho_{n0}}{\rho_0} \frac{dw_0}{dx} \right) \tilde{\rho} = 0, \quad (67) \end{aligned}$$

$$kw_0\tilde{v} + \left(kw_0 - i\frac{dw_0}{dx}\right)\tilde{\rho}_n - \left[(\omega - kv_{s0}) - i\frac{\rho_{n0}}{\rho_0}\frac{dw_0}{dx}\right]\tilde{\rho} = 0. \quad (68)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы линейных однородных уравнений (66)–(68) при $w_0 \ll c_1$ с точностью до линейных по w_0 и dw_0/dx членов может быть представлено в виде

$$D_0(\omega + i\gamma_1) + iD_1(\omega) = 0, \quad (69)$$

где γ_1 — инкремент нарастания (при $\gamma_1 > 0$) или декремент затухания (при $\gamma_1 < 0$) волн ПЗ за счет отличного от нуля градиента $w_0(x)$. Равенство нулю реальной части детерминанта D_0 при условии $\gamma_1 \rightarrow 0$ соответствует следующему дисперсионному уравнению:

$$(\omega - kv_{n0})(\omega - kv_{s0})^2 - k^2c_1^2(\omega + kv_{n0}) = 0. \quad (70)$$

В отсутствие теплового потока кубическое относительно частоты ω уравнение (70) сводится к виду

$$\omega(\omega^2 - k^2c_1^2) = 0 \quad (71)$$

и имеет три корня $\omega_{1,2} = \pm kc_1$ и $\omega_3 = 0$. При наличии теплового потока, но при условии, что скорости v_{n0} и v_{s0} по абсолютной величине малы по сравнению со скоростью звука c_1 , дисперсионное уравнение (70) упрощается:

$$\omega^3 - (2kv_{s0} + kv_{n0})\omega^2 - k^2c_1^2\omega - k^3c_1^2v_{n0} = 0. \quad (72)$$

Легко убедиться в том, что уравнение (72) имеет три вещественных корня, которые с точностью до главных членов равны

$$\omega_{1,2} \approx \pm |k| \left[c_1 - w_0 \frac{\rho_{n0}}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_{s0}}{2\rho_{n0}} \right) \right], \quad (73)$$

$$\omega_3 \approx -kw_0 \frac{\rho_{s0}}{\rho_0}.$$

Отсюда следует, что при наличии стационарного теплового потока фазовая скорость волн ПЗ в зависимости от соотношения между плотностями нормальной и сверхтекучей компонент может как увеличиваться, так и уменьшаться. Кроме того, появляется медленная волна, направленная навстречу тепловому потоку.

Приравняв нулю сумму мнимой части D_0 и iD_1 в предположении, что $\gamma_1 \ll \omega$, с точностью до главных членов получаем

$$2ik^2c_1^2\gamma_1 + i\omega^2\frac{\rho_{n0}}{\rho_0}\frac{dw_0}{dx} = 0, \quad (74)$$

откуда при $\omega^2 = k^2c_1^2$ и при условии $dw_0/dx < 0$ получаем следующее выражение для инкремента γ_1 :

$$\gamma_1 \approx \frac{\rho_{n0}}{\rho_0} \left| \frac{dw_0}{dx} \right| = \frac{\rho_{n0}}{\rho_{s0}} \left| \frac{dv_{n0}}{dx} \right| > 0. \quad (75)$$

Это означает, что при учете торможения теплового потока за счет конечной вязкости нормальной компоненты, независимо от направления распространения волн ПЗ относительно направления теплового потока, происходит экспоненциальное нарастание их амплитуды во времени, так что в акустическом резонаторе как падающая, так и отраженная звуковые волны должны усиливаться вплоть до включения стабилизирующих эффектов из-за нелинейности колебаний (см. ниже).

Такая неустойчивость во многом аналогична эффекту нарастания амплитуды длинных гравитационных волн на поверхности мелкой воды в бассейне с меняющейся глубиной (см. Приложение С). Однако в последнем случае нарастают только те волны, которые распространяются в направлении уменьшения глубины бассейна, тогда как волны противоположного направления затухают. В двухжидкостной гидродинамике, благодаря встречному движению нормальной и сверхтекучей компонент в стационарном тепловом потоке, нарастание амплитуды волн ПЗ происходит независимо от направления их распространения.

При этом амплитуда разности потенциалов на длине полуволнового резонатора на линейной стадии развития неустойчивости экспоненциально нарастает во времени:

$$\Delta U_1(t) \approx \alpha \frac{m_4 c_1^2}{2e} \Delta \tilde{\rho} e^{\gamma_1 t} \quad (76)$$

и, в принципе, может достигать значений, регистрируемых в экспериментах типа [3, 4].

Оценим максимально допустимое значение ΔU_1 , обусловленное ограничением экспоненциального роста возмущений за счет нелинейных гидродинамических эффектов, когда $\partial|v'_n|/\partial t = \gamma_1|v'_n|$ сравнивается по порядку величины с нелинейным (конвективным) членом $v'_n \partial v'_n / \partial x \approx |v'_n|^2 / \lambda$. Поскольку $\gamma_1 \approx w_0 \rho_{n0} / \rho_0 L$, а $L \approx 2l = \lambda$ для полуволнового резонатора, получаем оценку $|v'_n|_{max} \approx w_0 \rho_{n0} / \rho_0$. С другой стороны, из уравнения (68) с точностью до главных членов следует $|\tilde{\rho}| \approx |v'_n| / c_1$, т. е. $\Delta \tilde{\rho}_{max} \approx w_0 \rho_{n0} / \rho_0 c_1$. Подставляя это значение в (76) вместо $\Delta \tilde{\rho} e^{\gamma_1 t}$, получим

$$\Delta U_1^{max} \approx \alpha \frac{m_4 c_1 w_0 \rho_{n0}}{2e \rho_0}. \quad (77)$$

При $\alpha \leq 3$, $w_0 \leq 1$ м/с и $\rho_{n0} \leq \rho_0/2$ получаем оценку $\Delta U_1^{max} \leq 3$ мкВ, что указывает на возможность надежной регистрации электрического сигнала в волне ПЗ при наличии в HeII стационарного теплового потока.

4.2. Волны второго звука

Поскольку фазовая скорость волн ВЗ при $T > 1$ К гораздо меньше, чем скорость ПЗ ($c_2 \ll c_1$), при рассмотрении условий распространения ВЗ при наличии стационарного теплового потока, наряду с градиентом скорости теплового потока ($dw_0/dx \neq 0$) за счет конечной вязкости нормальной компоненты ($\eta_n \approx \eta_r \neq 0$), необходимо учитывать также градиенты температуры $dT_0/dx \neq 0$ и энтропии $d\sigma_0/dx \neq 0$ вдоль теплового потока, которые обусловлены конечной теплопроводностью HeII при $T \neq 0$. В случае преобладающего вклада газа ротон в кинетические свойства HeII его коэффициент теплопроводности равен [2]

$$\kappa_r = \frac{\Delta_r^2 \hbar^4}{6\rho_0 \mu_r^2 |V_0|^2 T} = \frac{5\Delta_r^2}{\rho_0^2 T} \eta_r. \quad (78)$$

В связи с этим линеаризованная система уравнений (53), (54) и (55) при $\rho = \text{const}$ и $p = \text{const}$ принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial t} + \sigma_0 \text{div } \mathbf{v}'_n + \sigma' \text{div } \mathbf{v}_{n0} + (\mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla \sigma') + (\mathbf{v}'_n \cdot \nabla \sigma_0) = 0, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \rho_{n0} \left[\frac{\partial \mathbf{v}'_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_n + (\mathbf{v}'_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_{n0} + \mathbf{v}_{n0} \text{div } \mathbf{v}'_n + \mathbf{v}'_n \text{div } \mathbf{v}_{n0} \right] + \\ + \rho_{s0} \left[\frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_{s0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_{s0} + \mathbf{v}_{s0} \text{div } \mathbf{v}'_s + \mathbf{v}'_s \text{div } \mathbf{v}_{s0} \right] = 0, \quad (80) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_{s0} \cdot \nabla) \mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_{s0} - \sigma_0 \nabla T' - \sigma' \nabla T_0 - \frac{\rho_{n0}}{\rho_0} [(\mathbf{w}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w}' + (\mathbf{w}' \cdot \nabla) \mathbf{w}_0] = 0, \quad (81)$$

где $\sigma_0 = S_0/\rho_0$ и $\sigma' = S'/\rho_0$ — невозмущенная энтропия и ее возмущение в расчете на единицу массы, $\nabla \sigma_0 = (\partial \sigma_0 / \partial T_0) \nabla T_0$, $T' = (\partial \sigma_0 / \partial T_0)^{-1} \sigma'$, а $\mathbf{w}' = \mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_s$, причем \mathbf{v}'_n и \mathbf{v}'_s связаны соотношением

$$\rho_{n0} \mathbf{v}'_n + \rho_{s0} \mathbf{v}'_s = 0. \quad (82)$$

В результате этого для плоских волн ВЗ, распространяющихся вдоль теплового потока, уравнения (79)–(81) сводятся к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\omega - kv_{n0} + i \frac{dv_{n0}}{dx} \right) \sigma' - \\ - \left(k\sigma_0 - \frac{\omega w_0}{\rho_{s0}} \frac{\partial \rho_{n0}}{\partial T} - i \frac{\partial \sigma_0}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) v'_n = 0, \quad (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\omega - k\tilde{w}_0 + i \left(\frac{dv_{n0}}{dx} + 2 \frac{dw_0}{dx} \right) \right] v'_n - \\ - \frac{\rho_{s0}}{\rho_{n0}} \left[k\sigma_0 \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial T_0} \right)^{-1} - i \frac{dT_0}{dx} \right] \sigma' = 0, \quad (84) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{w}_0 = w_0 \left[2 + \frac{\rho_{s0}}{\rho_{n0}} - \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \right)^{-1} \frac{\partial \rho_{n0}}{\partial T} \frac{\sigma_0}{\rho_{n0}} \right]. \quad (85)$$

Равенство нулю вещественной части детерминанта системы линейных однородных уравнений (83)–(84) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 - k \left(\tilde{w}_0 + v_{n0} - \frac{c_2^2 w_0}{\sigma_0 \rho_{s0}} \frac{\partial \rho_{n0}}{\partial T} \right) \omega - k^2 c_2^2 = 0. \quad (86)$$

При условии $w_0 \ll c_2$ с точностью до квадратичных по w_0/c_2 членов корни уравнения (86) равны

$$\omega_{1,2} \approx \pm |k| \left[c_2 + w_0 \left(1 + \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} - \frac{c_2^2}{\sigma_0 \rho_{s0}} \frac{\partial \rho_{n0}}{\partial T} \right) \right], \quad (87)$$

что соответствует изменению фазовой скорости ВЗ при наличии теплового потока.

В то же время, приравнявая нулю мнимую часть детерминанта, с точностью до членов первого порядка по dw_{n0}/dx и dT_0/dx находим выражение для инкремента γ_2 нарастания волн ВЗ при условии $dw_0/dx < 0$ и $dT_0/dx < 0$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \approx \left\{ \left| \frac{dw_0}{dx} \right| \left(1 + \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_0}{2c_2} \left| \frac{dT_0}{dx} \right| \left(1 + \frac{\rho_{s0}}{\rho_{n0}} \right) \right\} > 0. \quad (88) \end{aligned}$$

Таким образом, благодаря замедлению скорости теплового потока и падению температуры вдоль теплового потока за счет конечной вязкости и теплопроводности нормальной компоненты возникает неустойчивость волн ВЗ, которая сопровождается ростом амплитуд колебаний температуры ΔT и индуцированного электрического потенциала ΔU_2 в волне ВЗ (при $\alpha\beta \approx 1$):

$$\Delta U_2(t) \approx \frac{\rho_0 m_4 \sigma_0(T)}{2e\rho_{n0}(T)} \Delta T e^{\gamma_2 t}, \quad (89)$$

что соответствует усилению электрического сигнала на частоте ВЗ.

Оценим максимальное значение ΔU_2 , ограниченное нелинейными гидродинамическими эффектами. Приравнявая между собой по порядку величины линейный $\partial|v'_n|/\partial t = \gamma_2|v'_n|$ и нелинейный $v'_n \partial v'_n / \partial x \approx |v'_n|^2 / \lambda$ члены при условии $w_0 \ll c_2$, когда $\gamma_2 \approx w_0 / \lambda$, и учитывая, что v'_n и T' в волне ВЗ, согласно уравнению (84), с точностью до главных членов связаны соотношением $v'_n \approx \rho_{s0} \sigma_0 T' / \rho_0 c_2$, находим $\Delta T_{max} \approx \rho_0 c_2 w_0 / \rho_{s0} \sigma_0$. Подставляя ΔT_{max} вместо $\Delta T e^{\gamma_2 t}$ в (89), получим

$$\Delta U_2^{max} \approx \frac{m_4 \rho_0^2 c_2 w_0}{2e\rho_{n0}\rho_{s0}}. \quad (90)$$

При $w_0 \approx 1$ м/с и $c_2 \approx 20$ м/с с учетом того, что $\rho_0^2 / \rho_{n0}\rho_{s0} \geq 4$, из (90) получаем оценку $\Delta U_2^{max} \geq 1.5$ мкВ, что указывает на возможность существенного усиления электрического сигнала в волне ВЗ при наличии в HeII стационарного теплового потока.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе показано, что наблюдавшееся в работе [3] явление электрической активности HeII в стоячей волне ВЗ может быть описано на основе инерционного механизма поляризации диэлектрических сред [6] при учете локальной связи индуцированного электрического поля $\mathbf{E}(t)$ с электрической индукцией $\mathbf{D}(t) = \varepsilon_4 \mathbf{E}(t)$, а также с вектором поляризации $\mathbf{P}(t) = \varkappa_4 \mathbf{E}(t)$. При низких температурах ($T < 1$ К) отношение амплитуд колебаний температуры и потенциала в волне ВЗ зависит от T , но в интервале $1.4 \text{ К} \leq T \leq 1.8 \text{ К}$, в котором проводились измерения [3], это отношение почти постоянно и близко к полученному в [3] эмпирическому значению (1) при соответствующем выборе феноменологических коэффициентов α и β .

Полученное в экспериментах [4] в диэлектрическом резонаторе распределение потенциала по длине резонатора подтверждает объемный характер поляризации HeII и полностью согласуется с теоретическим распределением индуцированного в стоячей волне ВЗ потенциала электрического поля (34), если амплитуду разности потенциалов (35) отсчитывать независимо на разных участках между измерительным электродом и изолированными металлическими кольцами в корпусе резонатора (рис. 2).

Проведенное рассмотрение позволило также понять причину наблюдавшегося в работе [3] обратного эффекта электрической активности HeII по возбуждению волны ВЗ с помощью внешней переменной разности потенциалов на частоте ВЗ.

Для более полного сопоставления теории с экспериментом необходимо провести дополнительные измерения отношения $\Delta T / \Delta U$ в более широком интервале температур при $T < 1.4$ К и $T > 1.8$ К с целью проверки температурной зависимости безразмерного фактора $f(T)$ (см. рис. 1), а также проверить возможность использования кольцевых электродов в диэлектрическом резонаторе [4] для возбуждения волн ВЗ внешними переменными потенциалами разной амплитуды с пространственной структурой, воспроизводящей распределение индуцированного потенциала в стоячей волне ВЗ. Это позволит провести измерения коэффициентов трансформации переменных токов смещения и напряжений в объеме HeII в электрические сигналы в регистрирующих электродах.

Кроме того, в настоящей работе показано, что существование в HeII стационарного теплового потока с продольной неоднородностью скорости и температуры приводит к неустойчивости распространяющихся вдоль теплового потока плоских волн ПЗ и ВЗ, независимо от направления их фазовых скоростей. Неоднородность скорости теплового потока обусловлена торможением нормальной компоненты HeII, обладающей конечной вязкостью за счет рассеяния квазичастичных возбуждений (в частности, ротоннов) друг на друге и на боковых стенках резонатора, а неоднородность температуры возникает за счет конечной теплопроводности нормальной компоненты.

Эта неустойчивость аналогична неустойчивости длинных гравитационных волн в бассейне с меняющейся глубиной при распространении их в сторону уменьшения глубины. В данном случае нарастание амплитуд волн ПЗ и ВЗ происходит независимо от направления их распространения благодаря встречному движению нормальной и сверхтекучей компонент в тепловом потоке. В силу этого прямая и отраженная волны ПЗ и ВЗ в акустическом резонаторе в неоднородном тепловом потоке обладают абсолютной неустойчивостью, что может быть причиной значительного усиления электрического сигнала на частотах ПЗ и ВЗ.

Авторы выражают благодарность А. С. Рыбалко за предоставление экспериментальных данных до их опубликования, Э. Я. Рудаевскому, С. М. Рябченко,

А. Н. Омелянчуку и С. И. Шевченко за полезные дискуссии и критические замечания, В. Ф. Гантмахеру, В. И. Долгополову, В. Б. Тимофееву и другим участникам семинара в ИФТТ РАН за конструктивное обсуждение данного круга вопросов, а также К. В. Гририну, Б. И. Льву и Е. Н. Ткаченко за сотрудничество на первоначальном этапе теоретических исследований данной проблемы. Один из авторов (Э. А. П.) благодарит фонд Уральского научно-технологического центра за финансовую поддержку данной работы (проект № 3718).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Внутриатомное электрическое поле E_i , возникающее в результате смещения атомного ядра относительно центра симметрии электронной оболочки под действием инерционной (гравитационной) силы может быть вычислено с помощью квантовомеханической теории возмущений, если учесть, что кулоновский потенциал ядра с нарушенной из-за смещения сферической симметрией при малой величине смещения l в направлении оси z имеет вид

$$V_c(r, \theta) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{l}|} \approx -\frac{Ze^2}{r} \left(1 - \frac{l}{r} \cos \theta\right). \quad (\text{A.1})$$

Вычислим поправку второго порядка к энергии электронов, возникающую под действием малого анизотропного возмущения:

$$W(r, \theta) = \frac{Ze^2 l}{r^2} \cos \theta. \quad (\text{A.2})$$

В явном виде это можно сделать только для водородоподобного атома или иона, для которого известны волновые функции и энергии основного и всех возбужденных состояний [16]. Поправка второго порядка к энергии основного состояния равна

$$\delta E_1^{(2)} = \sum_{n>1} \frac{|W_{1n}|^2}{E_1 - E_n}, \quad (\text{A.3})$$

где W_{1n} — матричный элемент перехода между состояниями с энергиями E_1 и E_n :

$$W_{1n} = \int d\mathbf{r} \psi_1^*(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}, \theta) \psi_n(\mathbf{r}), \quad (\text{A.4})$$

$\psi_1(\mathbf{r})$ — волновая функция основного состояния:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{Zr}{a_0}\right\}, \quad (\text{A.5})$$

$a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус электрона, а $\psi_n(\mathbf{r})$ — волновая функция возбужденного состояния. В данном случае можно ограничиться учетом только одного квантового перехода в возбужденное состояние $2p$, волновая функция которого анизотропна и равна

$$\psi_{210}(r, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0\sqrt{3}} \times \exp\left\{-\frac{Zr}{2a_0}\right\} \cos \theta. \quad (\text{A.6})$$

При этом матричный элемент W_{12} с учетом (A.2) и (A.4)–(A.6) равен

$$W_{12}(l) = \frac{Zl}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2Ze}{3a_0}\right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Учитывая, что $E_1 = -(Ze)^2/2a_0$ и $E_2 = -(Ze)^2/8a_0$, для $\delta E_1^{(2)}$ получаем выражение

$$\delta E_1^{(2)} = \frac{|W_{12}|^2}{E_1 - E_2} = -\frac{64Z^4 e^2 l^2}{2187a_0^3}. \quad (\text{A.8})$$

Возвращающая кулоновская сила, возникающая при смещении атомного ядра, равна

$$F_c = -\frac{d}{dl}(\delta E_1^{(2)}) = \frac{128Z^4 e^2 l}{2187a_0^3}, \quad (\text{A.9})$$

а внутриатомное электрическое поле E_i определяется соотношением

$$F_c = 2ZeE_i.$$

Для атома гелия ${}^4\text{He}$ величину E_i можно оценить по порядку величины, если положить $Z = 2$ и заменить боровский радиус a_0 квантовомеханическим радиусом атома гелия $r_0 \approx 1.22 \text{ \AA}$. В результате получаем оценку:

$$E_i = F_c/4e \approx 1.86 \cdot 10^{16} \text{ В/см}. \quad (\text{A.10})$$

Если приравнять поле E_i измеряемому в экспериментах [3] минимальному значению измеряемого электрического поля $E_e \approx 10 \text{ нВ/см}$, то для величины смещения атомного ядра получаем значение $l \approx 5.4 \cdot 10^{-17} \text{ \AA}$.

В то же время, оценка величины l с помощью выражения для индуцированного дипольного момента атома ${}^4\text{He}$ в поле E_e

$$d_0 = el = \frac{Z_4}{N_4} E_e, \quad (\text{A.11})$$

где $N_4 \approx 2.2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ — концентрация атомов в HeII, при $E_e \approx 10 \text{ нВ/см}$ приводит к еще меньшему

значению $l \approx 3 \cdot 10^{-18}$ Å. Расхождение на порядок с оценкой l по формуле (A.10) отражает меру той погрешности, которую вносит модель водородоподобного атома применительно к атому ^4He . При феноменологическом подходе неопределенность, возникающая при вычислении E_i и, соответственно, параметра γ , можно компенсировать путем введения в соотношение (10) дополнительного множителя α , который может быть оценен путем сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

При наличии относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент в HeII со скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, например, в волне ВЗ или в стационарном тепловом потоке, концентрация ротонов, определяющая плотность нормальной компоненты при $T > 1$ К, при условии $w \ll k_B T/p_0$ с учетом функции распределения (35) с точностью до квадратичных по w членов после интегрирования по угловым переменным равна

$$N_r(T, w) = \int d\tau_p n_r(\mathbf{p}, T, \mathbf{w}) \approx \frac{2 \exp\{-\Delta_r(T)/k_B T\}}{(2\pi)^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{pw}{k_B T} \right)^2 \right] \times \exp \left\{ -\frac{(p-p_0)^2}{2\mu_r k_B T} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Внося значение импульса в точке $p = p_0$ в предэкспоненциальном множителе из под знака интеграла и делая замену переменных $y = (p-p_0)/\sqrt{2\mu_r k_B T}$, с учетом условия $y_0 = p_0/\sqrt{2\mu_r k_B T} \gg 1$ при $T < 2$ К с экспоненциальной точностью получаем

$$N_r(T, w) \approx \frac{2p_0^2 \sqrt{\mu_r k_B T}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^2} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{p_0 w}{k_B T} \right)^2 \right] \times \exp \left\{ -\frac{\Delta_r(T)}{k_B T} \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Средняя групповая скорость ротона с учетом функции распределения (35) после интегрирования по угловым переменным с точностью до члена первого порядка по w имеет вид

$$\bar{V}_g = \frac{2w \exp\{-\Delta_r(T)/k_B T\}}{3(2\pi)^2 \hbar^3 N_r(T, 0) \mu_r k_B T} \times \int_0^\infty dp p^3 (p-p_0) \exp \left\{ -\frac{(p-p_0)^2}{2\mu_r k_B T} \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Подставляя в (B.3) значение концентрации ротонов (B.2) при $w = 0$ и делая указанную выше замену переменных, получаем

$$\bar{V}_g = \frac{4w \mu_r k_B T}{3\sqrt{\pi} p_0^2} \int_{-y_0}^\infty dy (y_0 + y)^3 y e^{-y^2}. \quad (\text{B.4})$$

Учитывая большую величину параметра $y_0 \gg 1$ и разлагая кубический бином до линейного по y члена, с той же экспоненциальной точностью получаем значение $\bar{V}_g \approx w$.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

В качестве примера рассмотрим задачу о распространении длинных гравитационных волн на поверхности несжимаемой жидкости, заполняющей обширный бассейн, глубина которого мала по сравнению с длиной гравитационных волн и медленно убывает в направлении оси X . Исходные уравнения гидродинамики для таких волн имеют вид [15]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.2})$$

где $h = h_0(x) + \xi(x, t)$, а $\xi(x, t)$ — малое возмущение поверхности несжимаемой жидкости под действием колебаний в длинной гравитационной волне ($|\xi| \ll h_0$). В линейном приближении по возмущенным скоростям уравнение (C.2) при учете изменения глубины бассейна в направлении оси X принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{dh_0}{dx} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Дифференцируя уравнение (C.3) по t и подставляя в него производную скорости из (C.1), получаем следующее волновое уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - g \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dh_0}{dx} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Задавая возмущения всех величин в виде $\sim \exp\{i(k_x x - \omega t)\}$, приходим к дисперсионному уравнению распространяющихся вдоль оси X ($k_x > 0$) гравитационных волн в бассейне с меняющейся глубиной:

$$\omega^2 = k_x^2 g h_0 - i k_x g \frac{dh_0}{dx}. \quad (\text{C.5})$$

Отсюда следует, что при уменьшении глубины бассейна вдоль оси X ($dh_0/dx < 0$) и при условии, что

характерная длина изменения глубины L гораздо больше длины волны ($k_x L \gg 1$), комплексные корни уравнения (С.5) имеют вид

$$\omega_{1,2} \approx \pm \left(k_x \sqrt{gh_0} + \frac{i}{2} \sqrt{g/h_0} \left| \frac{dh_0}{dx} \right| \right). \quad (\text{С.6})$$

Это соответствует экспоненциальному нарастанию во времени амплитуды волны, распространяющейся в направлении оси X ($\omega/k_x > 0$). В то же время волна, распространяющаяся в противоположном направлении ($\omega/k_x < 0$), согласно (С.6), экспоненциально затухает. Причиной нарастания амплитуды поверхностной гравитационной волны, распространяющейся в сторону менее глубокого слоя жидкости, в данном случае является замедление фазовой скорости волны $\sqrt{gh_0(x)}$ при необходимости прокачивания одного и того же количества несжимаемой жидкости через более мелкий канал. Хорошо известным следствием этого эффекта является возрастание высоты морских волн, набегающих на берег с пологим дном, с последующим опрокидыванием волн на нелинейной стадии (морской прибой).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941); L. D. Landau, J. Phys. (USSR) **11**, 91 (1947).
2. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
3. А. С. Рыбалко, ФНТ **30**, 1321 (2004).
4. А. С. Рыбалко, В. А. Тихий, ФНТ **36** (2010).
5. А. М. Косевич, ФНТ **31**, 50 (2005).
6. L. A. Melnikovsky, J. Low Temp. Phys. **148**, 559 (2007).
7. В. Д. Нацик, ФНТ **33**, 999 (2007).
8. Э. А. Пашицкий, С. М. Рябченко, ФНТ **33**, 12 (2007).
9. В. М. Локтев, М. Д. Томченко, ФНТ **34**, 337 (2008).
10. С. И. Шевченко, А. С. Рукин, Письма в ЖЭТФ **90**, 46 (2009).
11. R. C. Tolman and T. D. Stewart, Phys. Rev. **8**, 97 (1916).
12. А. Ф. Андреев, Письма в ЖЭТФ **31**, 175 (1980).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1972).
14. Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванцов и др., *Растворы квантовых жидкостей He³-He⁴*, Наука, Москва (1973).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1975).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1963).
17. D. E. Galli, E. Cecchetti, and L. Reatto, Phys. Rev. Lett. **77**, 5401 (1996).
18. Э. А. Пашицкий, Е. Н. Ткаченко, К. В. Григоришин, Б. И. Лев, УФЖ **54**, 93 (2009).
19. A. Rybalko, E. Rudavskii, S. Rubets et al., J. Low Temp. Phys. **148**, 527 (2007).
20. A. Rybalko, E. Rudavskii, S. Rubets et al., Phys. Rev. B **76**, 140503 (2007).