

О СТАЦИОНАРНОЙ СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ И ДИЭЛЕКТРИКАХ

*А. Г. Куликовский**, *А. П. Чугайнова***

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 сентября 2009 г.

Приводится упрощенная система уравнений, описывающая нелинейные квазипоперечные волны небольшой амплитуды в упругой слабоанизотропной среде при наличии диссипации и дисперсии усложненного типа. Получена упрощенная система уравнений, описывающая распространение и эволюцию одномерных слабонелинейных электромагнитных волн в слабоанизотропном диэлектрике, которая оказалась того же типа, что и система уравнений для квазипоперечных волн в упругой среде. С использованием этой системы изучена стационарная структура слабых квазипоперечных разрывов и множество допустимых разрывов. При этом считалось, что вязкая диссипация, как обычно, описывается членами на единицу более высокого порядка дифференцирования, чем члены, составляющие гиперболическую систему, описывающую длинные волны, а члены, отвечающие за дисперсию, имеют еще на единицу более высокий порядок дифференцирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемые ниже модели сред таковы, что длинные волны описываются нелинейными гиперболическими уравнениями, в то время как при рассмотрении явлений меньшего масштаба в уравнениях необходим учет членов высшего порядка дифференцирования, отвечающих за процессы диссипации и дисперсии. Образование разрывов, типичное для нелинейных гиперболических уравнений, предотвращается упомянутыми членами высшего порядка, в результате чего вместо разрыва образуется узкая переходная зона с непрерывным изменением величин, которая называется структурой разрыва. Во многих случаях структура является бегущей волной и называется стационарной. Если характерный пространственный масштаб задачи достаточно велик, то решение, представляющее структуру разрыва, можно заменить разрывом, а в области непрерывности решения пользоваться гиперболической системой уравнений. Часто явно или неявно предполагается [1–4], что реально могут существовать разрывы, имеющие стационарную структуру. Такие разрывы называются допустимыми. Требование су-

ществования решения, представляющего стационарную структуру разрыва, приводит к соотношениям, связывающим величины по обе стороны от разрыва. В случае общего положения число таких соотношений равно или больше числа соотношений, которые следуют из законов сохранения гиперболической системы. Если на эволюционном разрыве выполняются только соотношения, следующие из законов сохранения, то такой разрыв называют априорно эволюционным. Если требования существования структуры помимо законов сохранения приводят к дополнительным соотношениям, то такие разрывы с учетом этих дополнительных соотношений оказываются эволюционными [4–6]. Эти разрывы будем называть особыми. Хорошо известным примером особого разрыва является фронт горения, скорость распространения которого зависит от процессов в структуре фронта, таких как теплопроводность, химическая кинетика и диффузия. Фронту горения на денотационной адиабате соответствует точка [7].

В случае учета вязкости без дисперсии структура слабых квазипоперечных ударных волн в анизотропных нелинейноупругих средах рассматривалась в работах [6, 8] и было показано, что всем априорно эволюционным разрывам соответствует структура, а особые разрывы отсутствуют.

*E-mail: kulik@mi.ras.ru

**E-mail: A.P.Chugainova@mi.ras.ru

Влияние дисперсии (при наличии вязкости) на структуру разрывов и поведение нелинейных волн в случае моделей, для которых гиперболическая, длинноволновая модель представляется одним уравнением первого порядка, изучалась в работах [4, 9–11], причем были выявлены характерные особенности строения допустимых разрывов на ударной адиабате.

В работах [10, 12–14] структура квазипоперечных разрывов в средах с дисперсией некоторого определенного типа и диссипацией изучалась в случае нелинейного упругого композита и в случае нелинейно намагничивающейся среды. Гиперболическая модель в этих случаях сводится к системе двух уравнений первого порядка. В перечисленных работах [4, 9–14] влияние дисперсии приводило к тому, что не все априорно эволюционные разрывы оказывались обладающими стационарной структурой. Кроме того, было обнаружено множество различных типов особых априорно неэволюционных разрывов, соответствующих на ударной адиабате множеству отдельных точек. Эти особые разрывы обладают стационарной структурой и было показано, что множество допустимых разрывов и число различных типов особых разрывов существенно зависят от соотношения между коэффициентами при членах, ответственных за процессы диссипации и дисперсии.

В работах [10, 12–14] дисперсия и диссипация описывались в уравнениях членами одного и того же порядка дифференцирования. В рассматриваемых ниже моделях порядок членов, описывающих дисперсию, на единицу выше порядка членов, описывающих процессы диссипации. Для такого случая постановка задачи нелинейной теории упругости о стационарной структуре разрывов в решениях уравнений и некоторые качественные выводы были сделаны в работе [15]. Ниже проведено подробное аналитическое и численное изучение стационарных структур указанных выше разрывов, причем устранены некоторые неточности, содержащиеся в работе [15].

Полученные ниже результаты исследования стационарной структуры квазипоперечных разрывов с дисперсией более высокого порядка расширяют класс сред, в которых существуют особые разрывы, а множество допустимых разрывов зависит от процессов внутри структуры, и вместе с предыдущими исследованиями [10–15] демонстрируют, что причиной этого является колебательный характер стационарной структуры независимо от вида порождающих колебания членов в уравнениях, описывающих модель.

В разд. 2 настоящей статьи сформулирована задача о нелинейных волнах малой амплитуды и стационарной структуре разрывов в слабоанизотропной упругой среде при наличии в упомянутой выше модели эффектов дисперсии и диссипации.

Раздел 3 посвящен выводу системы упрощенных модельных уравнений, описывающих нелинейные электромагнитные волны небольшой амплитуды в слабоанизотропном диэлектрике. Эта система используется для изучения структуры разрывов. Впервые электромагнитные волны в нелинейных средах и разрывы электромагнитного поля (электромагнитные ударные волны) были изучены в работе [16] (см. также [17]).

Изучалась структура электромагнитных ударных волн с учетом естественных дисперсии и диссипации в изотропных диэлектриках (см. книгу [18] и цитированную в ней литературу). Учет малой анизотропии диэлектрика потребовал нового вывода стандартной системы уравнений, учитывающей малые нелинейность, дисперсию и диссипацию. Эта система представляет собой два связанных за счет нелинейности уравнений Кортевега–де Фриза–Бюргерса и совпадает с системой уравнений разд. 2, описывающей квазипоперечные волны в нелинейно упругой среде с дисперсионными членами, представленными производными третьего порядка.

В разд. 4 приведены необходимые сведения относительно рассматриваемых квазипоперечных разрывов и сформулирована задача об их структуре. В разд. 5 проведено исследование структуры разрывов и множества допустимых разрывов.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ И МАЛЫМИ АНИЗОТРОПИЕЙ И ДИССИПАЦИЕЙ

Уравнения, описывающие длинные одномерные нелинейные волны в упругой среде, образуют гиперболическую систему седьмого порядка [6]. Необходимость учета диссипации и дисперсии требует добавления в систему членов более высокого порядка дифференцирования, описывающих эти процессы. Изучение стационарной структуры разрывов в виде бегущих волн проводится на основе системы обыкновенных уравнений, которая получается в предположении, что неизвестные величины зависят от переменной $\xi = -x + Wt$. Возможные упрощения уравнений, связанные с предположениями о малости нелинейности и анизотропии можно прово-

доть уже с обыкновенными уравнениями. Однако предпочтительнее другой путь, который был реализован в работах [4, 12–14, 19] для вязкоупругой среды с определенным типом дисперсии. В предположении наличия указанных свойств была получена приближенная система уравнений в частных производных, описывающая квазипоперечные одномерные волны, распространяющиеся только в положительном или только в отрицательном направлении оси x . Эта система уравнений позволяет с принятой степенью точности исследовать стационарную структуру разрывов и, кроме этого, вследствие своей простоты позволяет существенно проще численно изучать эволюцию решений. В длинноволновом приближении эта система является гиперболической и имеет вид [4, 6, 19]

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2, \quad f, g, \kappa = \text{const}. \quad (2.2)$$

Здесь $u_i = \partial w_i / \partial x$, w_i — перемещение частицы среды в направлении декартовой оси x_i , $x \equiv x_3$ — лагранжева координата частицы среды, u_i — компоненты сдвиговой деформации среды, ϱ_0 — начальная плотность среды. При написании выражения (2.2) направления осей x_1 и x_2 были выбраны так, чтобы отсутствовал член с произведением $u_1 u_2$. Система уравнений (2.1), (2.2) справедлива для описания квазипоперечных возмущений, распространяющихся по однородному фону, когда возмущения других типов достаточно малы.

Системе уравнений (2.1), (2.2) соответствуют соотношения на разрыве [4, 6]

$$\left[\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} \right] - W[u_\alpha] = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $W = dx/dt$ — скорость движения разрыва по лагранжевой координате. Квадратными скобками в формуле (2.3) обозначены скачки величин на фронте разрыва: $[u] = u^l - u^r$ (индексы r и l отвечают соответственно величинам непосредственно перед и за разрывом).

В работе [6] приведены формулы, позволяющие выразить константы f , g , κ через упругие коэффициенты среды. Константа g — параметр анизотропии, κ — постоянная, которая характеризует нелинейные эффекты, f — характеристическая скорость

при отсутствии нелинейности и анизотропии (т. е. при $\kappa = 0$, $g = 0$). Знак упругой константы κ существенно влияет на поведение квазипоперечных простых и ударных волн [6, 20, 21].

Аналогично тому, как это было сделано в работе [15], дополним уравнения (2.1), (2.2) членами, описывающими процессы диссипации и дисперсии

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R(u_1, u_2)}{\partial u_\alpha} \right) - \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + m \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь μ — коэффициент вязкости, m — коэффициент, отвечающий за дисперсию.

Дисперсионные члены взяты в виде производных третьего порядка в отличие от подробно исследованного ранее случая, когда дисперсия была представлена членами вида $m_{\alpha\beta} \partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2$ с антисимметричной матрицей $m_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ [10, 12–14]. Как было отмечено в работах [12–15], наличие дисперсионных членов с производными второго порядка предполагает присутствие в числе определяющих параметров среды псевдовектора. При его отсутствии дисперсионными членами низшего порядка дифференцирования оказываются члены третьего порядка, включенные в уравнения (2.4) [22]. При изучении волн малой амплитуды главную роль играют члены с низшим порядком дифференцирования, поскольку с уменьшением амплитуды разрыва его структура расширяется. В разд. 3 уравнения аналогичные (2.4) будут получены для описания электромагнитных волн в слабоанизотропном диэлектрике.

3. СЛАБЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Будем считать, что диэлектрик неподвижен и обладает малой анизотропией, а дисперсионные эффекты при распространении электромагнитных волн связаны с динамикой заряженных частиц, составляющих атомы и молекулы диэлектрика и испытывающие относительные смещения. Это могут быть движения электронов, относительные движения противоположно заряженных ионов в кристаллах или повороты жестких диполей. Соответствующие периоды собственных колебаний имеют порядок величин от 10^{-16} с до 10^{-10} с. Колебания заряженных частиц макроскопически проявляются как колебания вектора поляризации \mathbf{P} . Так, для случая, когда поляризация \mathbf{P} создается смещением

электронов внутри атомов, уравнения, которым удовлетворяют компоненты вектора поляризации, имеют вид [23]

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(P_k)}{\partial P_i} = \frac{N e^2}{m_e} \left(E_i + \frac{2\pi}{3} P_i \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Здесь N — численная плотность электронов, e и m_e — заряд и масса электрона, E_i — компоненты электрического поля. Первый член описывает инерцию электронов, второй — диссипацию, вызванную взаимодействием электронов с другими частицами среды ($\nu = \text{const}$ — параметр диссипации), третий — восстанавливающую силу, создаваемую взаимодействием электронов и ионов ($\Phi(P_k)$, $k = 1, 2, 3$, — с точностью до постоянного множителя соответствующая потенциальная энергия), а правая часть представляет действие на электроны эффективного внешнего электрического поля. В случае ионной поляризации или поляризации, связанной с поворотами диполей, уравнения, описывающие поляризацию, также имеют вид, подобный представленному равенством (3.1).

Электромагнитное поле подчиняется уравнениям Максвелла, которые в одномерном случае и в предположении, что свободные токи и заряды равны нулю, могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial D_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} = 0, & \alpha = 1, 2, \\ D_3 = \text{const} = D_3^0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial x} = 0, & H_3 = \text{const} = H_3^0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь D_i — компоненты вектора электрической индукции $D_i = E_i + 4\pi P_i$, $h_1 = H_2$, $h_2 = -H_1$, H_i — компоненты вектора напряженности магнитного поля.

В стационарном случае уравнения (3.1) позволяют выразить связь между P_i и E_i через функцию $\Phi(P_k)$. Если эта связь, которую будем считать слабо нелинейной, известна, то она определяет функцию $\Phi(P_k)$. В рассматриваемом случае, когда P_k малы, функцию $\Phi(P_k)$ будем представлять в виде разложения в степенной ряд по P_k и в этом разложении будем учитывать члены не выше четвертой степени. Квадратичные члены разложения $\Phi(P_k)$ соответствуют линейным членам уравнения (3.1). В силу предполагаемой малости анизотропии в разложении $\Phi(P_k)$ оставляем только квадратичные члены, ее выражающие. Коэффициенты при этих членах

предполагаются малыми, так чтобы в уравнениях члены, описывающие анизотропию, имели тот же порядок величины, что и члены, описывающие нелинейные эффекты, без учета анизотропии. Нелинейные члены и члены, описывающие анизотропию, считаются малыми. Члены более высокого порядка, описывающие эффекты анизотропии и нелинейности, не учитываются. Предполагается, что члены, описывающие дисперсию и диссипацию, по порядку величины не превосходят члены, описывающие нелинейность и анизотропию. Главными в уравнениях (3.1) считаются линейные члены, соответствующие изотропии. Если в (3.1) оставить только главные члены, то эти соотношения должны приобрести вид $E_i = 4\pi(\epsilon - 1)^{-1} P_i$, обеспечивающий выполнение равенства $D_i = \epsilon E_i$, где ϵ — диэлектрическая постоянная среды. Уравнения (3.1) при этом можно записать в виде

$$E_i = \frac{4\pi}{\epsilon - 1} P_i + \Delta_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

где Δ_i — малые члены, включающие перечисленные выше малые члены, описывающие нелинейность и анизотропию, диссипацию и дисперсию.

В случае распространения линейных волн в изотропной среде $P_3 = \text{const}$. Отсюда следует, что в рассматриваемом (почти линейном, почти изотропном) случае величина P_3 изменяется мало. Поэтому допустимо определять P_3 с некоторой малой относительной погрешностью. Пренебрегая в уравнениях (3.1) при $i = 3$ членами с производными от P_3 , а также нелинейными членами, содержащими P_3 , получим конечное уравнение, из которого выразим P_3 через P_1 и P_2 . Очевидно, что в силу малости анизотропии среды, главный член этого выражения имеет вид

$$P_3 = b(P_1^2 + P_2^2) + \text{const} \equiv P_3(P_1, P_2), \quad (3.4)$$

где b — некоторая постоянная, зависящая от вида функции $\Phi(P_1, P_2)$. Подставив (3.4) в степенное разложение функции $\Phi(P_1, P_2, P_3)$, получим функцию $\Phi(P_1, P_2, P_3(P_1, P_2))$, которая, как функция P_1 и P_2 , имеет вид, аналогичный виду функции $R(u_1, u_2)$ (2.2). При этом для Δ_α имеем

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \left[G(P_2^2 - P_1^2) - \frac{K}{4}(P_1^2 + P_2^2)^2 \right] + \frac{m_e}{N e^2} \left(\nu \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial t^2} \right). \quad (3.5)$$

Здесь G и K — коэффициенты разложения по переменным P_1 и P_2 функции $\Phi(P_1, P_2, P_3(P_1, P_2))$, стоящие при членах, отвечающих анизотропии и нелинейности свойств среды.

Комбинируя уравнения (3.2) и используя (3.3), можно получить соотношения, первое из которых соответствует волне, идущей в отрицательном направлении, а второе — в положительном направлении оси x :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(E_\alpha + \frac{h_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t},$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(E_\alpha - \frac{h_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t}.$$

Левые части этих уравнений содержат главные члены, а правые части представляют малые величины, отвечающие за нелинейность, анизотропию, дисперсию и диссипацию.

Изучаемые волны близки к линейным, все величины в которых зависят от $x - ct/\sqrt{\varepsilon}$, поэтому, принимая во внимание, что величины Δ_α малы, будем приближенно полагать, что

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

Это позволяет получить равенство

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta_\alpha.$$

Подставляя последнее соотношение в первое уравнение (3.6), соответствующее волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси x , и интегрируя, получим

$$E_\alpha + \frac{h_\alpha}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3}{2} \Delta_\alpha = \text{const.}$$

При интегрировании было предположено, что состояние при больших x перед изучаемыми волнами однородно. Выражая отсюда h_α и подставляя во второе уравнение (3.6), соответствующее волнам, распространяющимся в положительном направлении, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(E_\alpha + \frac{3}{4} \Delta_\alpha\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial t}.$$

Подставляя в последнее равенство E_α из (3.3) и используя (3.7), получим уравнения для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x} + \frac{(\varepsilon - 1)c}{8\pi\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial x} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.8)$$

В выражении (3.5) для Δ_α заменим также согласно (3.7) производные по t на производные по x . В результате получим систему двух уравнений, описывающую волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x . Эти уравнения имеют, с точностью до обозначения коэффициентов, тот же вид, что и уравнения (2.4). В связи с этим совпадением можно заметить, что вид этих уравнений — это общий вид уравнений, которые описывают поперечные или квазипоперечные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x , при учете малых нелинейности, анизотропии, диссипации и дисперсии, причем дисперсия представляется членами более высокого порядка дифференцирования, чем диссипативные члены.

Таким образом, при сделанных предположениях нелинейные волны в диэлектрике описываются той же математической моделью, что и нелинейные волны в нелинейно упругой среде.

4. РАЗРЫВЫ, ЭВОЛЮЦИОННОСТЬ, ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ

Для описания поведения слабонелинейных квазипоперечных волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , будем использовать систему уравнений (2.4), а при рассмотрении крупномасштабных явлений (пренебрегая процессами диссипации и дисперсии) — систему уравнений (2.1), (2.2). Системе уравнений (2.1), (2.2) соответствуют соотношения на разрыве (2.3).

Исключив W в системе уравнений (2.3), получим уравнение ударной адиабаты [6, 21]:

$$\begin{aligned} &((u_1^l)^2 + (u_2^l)^2 - (u_1^r)^2 - (u_2^r)^2) (u_1^r u_2^l - u_2^r u_1^l) + \\ &+ \frac{2g}{\kappa} (u_1^l - u_1^r)(u_2^l - u_2^r) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь буквами u_α^r и u_α^l обозначены значения величин u_α соответственно перед и за разрывом.

Ограничимся всюду ниже рассмотрением случая $\kappa < 0$. Этот случай соответствует в упругой среде нелинейному увеличению жесткости среды при сдвиговых деформациях и нелинейному увеличению возвращающей силы при смещениях электронов в диэлектриках.

На рис. 1а изображена ударная адиабата для параметров $u_1^r = 1$, $u_2^r = 0.1$, $f = 1$, $g = -1$, $\kappa = -2$. На этом рисунке изображена «энтропийная окружность» (окружность с центром в начале координат, проходящая через начальную точку u_1^r, u_2^r).

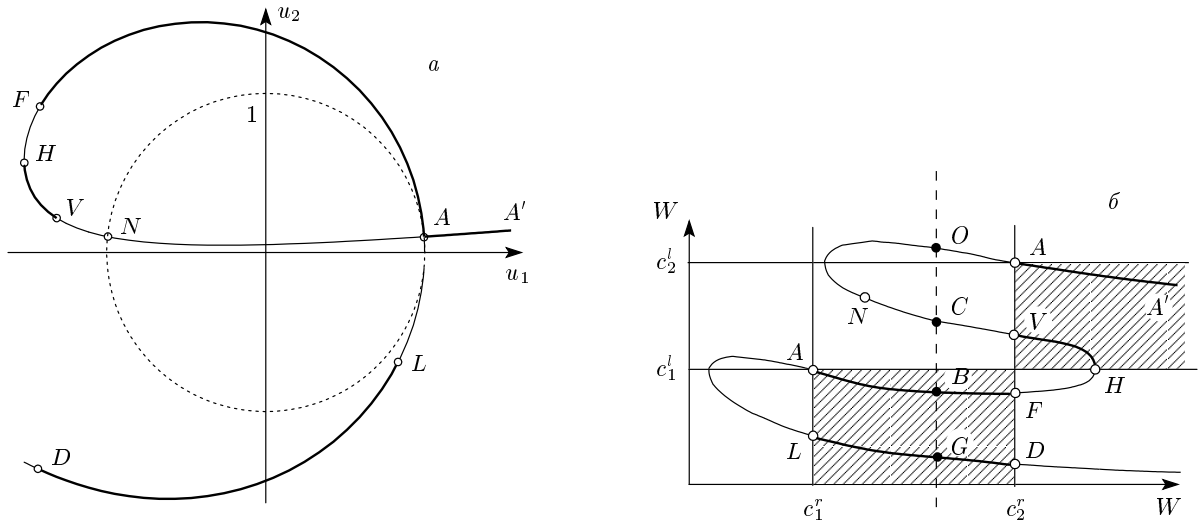


Рис. 1. Вид ударной адиабаты (а) и диаграмма эволюционности (б)

Она выделяет на ударной адиабате участки, отвечающие условию невозрастания механической или электрической энергии (условию неубывания энтропии при несколько более подробном описании явления, см. [6]), — это отрезки ударной адиабаты, попавшие вовне энтропийной окружности.

Не все состояния u_1, u_2 , принадлежащие ударной адиабате и условию неубывания энтропии, могут быть состояниями за фронтом скачка. Помимо этого разрывные решения должны удовлетворять условиям эволюционности, которые обеспечивают корректность задачи о взаимодействии разрыва с малыми возмущениями. Условия эволюционности, полученные в предположении, что на разрыве выполнены только законы сохранения и нет дополнительных соотношений другого происхождения, называют априорными.

Условия априорной эволюционности для соотношений на разрывах (2.3) представляют собой две группы неравенств (4.2), (4.3) и определяют разрывы, которые называются быстрыми и медленными ударными волнами [6, 21]:

$$c_2^r \leq W, \quad c_1^l \leq W \leq c_2^l, \quad (4.2)$$

$$c_1^r \leq W \leq c_2^r, \quad W \leq c_1^l. \quad (4.3)$$

Здесь c_α^r и c_α^l ($\alpha = 1, 2$) — значения характеристических скоростей соответственно перед и за разрывом,

$$c_{1,2} = f - 2\kappa(u_1^2 + u_2^2) \mp \kappa[(u_1^2 - u_2^2 + g/\kappa)^2 + 4u_1^2 u_2^2]^{1/2}. \quad (4.4)$$

Могут существовать и другие, особые, разрывы (см. ниже), для эволюционности которых необходимо выполнение некоторых дополнительных условий, которые определяются как условия существования стационарной структуры.

Для наглядного представления неравенств (4.2), (4.3) используется диаграмма эволюционности. На диаграмме, изображенной на рис. 1б, по осям отложены значения скорости разрыва W и характеристические скорости $c_\alpha^{l,r}$. При этом на горизонтальной оси все скорости изображены в фиксированном масштабе, а по вертикальной оси — лишь качественно с сохранением неравенств между ними. На рис. 1б штриховкой выделены области, в которых выполняются неравенства (4.2), (4.3). На диаграмме эволюционности отображена ударная адиабата и жирными линиями отмечены эволюционные участки ударной адиабаты. Одинаковые буквы на ударной адиабате (рис. 1а) и на ее отображении на диаграмме эволюционности (рис. 1б) соответствуют одним и тем же состояниям за разрывами.

Рассмотрим задачу о стационарной структуре разрывов.

Для системы уравнений (2.4) разыскиваются решения вида $u_\alpha = u_\alpha(\xi)$, $\xi = -x + Wt$, такие что при $\xi \rightarrow -\infty$ величины u_α стремятся к значениям u_α^r , соответствующим состоянию перед разрывом, а при $\xi \rightarrow \infty$ они принимают значения u_α^l , соответствующие состоянию за разрывом, т. е. состоянию, представляемому некоторой точкой ударной адиабаты.

Путем однократного интегрирования системы уравнений (2.4) для функций $u_\alpha(\xi)$ получим систему

двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m u''_{\alpha} + \mu u'_{\alpha} = - \frac{\partial Z}{\partial u_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.5)$$

$$u'_{\alpha} = \frac{du_{\alpha}}{d\xi}, \quad u''_{\alpha} = \frac{d^2 u_{\alpha}}{d\xi^2},$$

$$Z(u_1, u_2) = R(u_1, u_2) - \frac{1}{2}W(u_1^2 + u_2^2) + Q_1 u_1 + Q_2 u_2, \quad (4.6)$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2,$$

$$Q_{\alpha} = \text{const}_{\alpha} = (W - f - (-1)^{\alpha}g) u_{\alpha}^r + \kappa((u_1^r)^2 + (u_2^r)^2) u_{\alpha}^r.$$

Состояниям при $\xi = -\infty$ и $\xi = \infty$ соответствуют особые точки системы (4.5). Решение задачи о структуре разрыва представляется интегральной кривой, идущей из одной особой точки в другую.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{m}{2}(u_1'^2 + u_2'^2) + Z(u_1, u_2) \right) = \\ = -\mu \left(\left(\frac{du_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{d\xi} \right)^2 \right) < 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Уравнения (4.5) имеют вид уравнений, описывающих движения материальной точки массы m с трением в потенциальном поле сил с потенциальной энергией Z . Переменная ξ играет роль времени. Неравенство (4.7) выражает убывание энергии материальной точки за счет трения, из него следует, что

$$Z(u_1^l, u_2^l) < Z(u_1^r, u_2^r). \quad (4.8)$$

Как видно из строения левых частей уравнений (4.5), при $\mu \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ и $m/\mu^2 = \text{const}$ форма структуры сохраняется (с точностью до масштаба), а ширина структуры убывает, так что в пределе решения системы уравнений (4.5) переходят в разрывы.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СТРУКТУРЕ РАЗРЫВОВ. ДОПУСТИМЫЕ РАЗРЫВЫ

Система уравнений (4.5) имеет четвертый порядок, координаты ее особых точек определяются системой уравнений

$$\frac{\partial Z}{\partial u_{\alpha}} = 0, \quad u'_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Функция $Z(u_1, u_2)$ может иметь одну, три или пять стационарных точек. Тип особой точки в фазовом пространстве u_1, u_2, u_1', u_2' определяется матрицей вторых производных $\partial^2 Z / \partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}$, т. е. типом стационарной точки функции $Z(u_1, u_2)$. Заметим, что собственные значения матрицы $\partial^2 R / \partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}$, как это следует из вида уравнений (2.1), представляют характеристические скорости c_1, c_2 этой системы уравнений. Из формулы (4.6) следует, что собственные значения матрицы $\partial^2 Z / \partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}$ равны

$$\lambda_{\alpha} = c_{\alpha} - W. \quad (5.1)$$

В зависимости от знаков величин λ_{α} стационарная точка функции $Z(u_1, u_2)$ может быть минимумом, седловой точкой или максимумом. Аналогия с движением материальной точки позволяет легко определить тип особой точки системы уравнений (4.5) в четырехмерном фазовом пространстве.

Если особая точка является минимумом функции $Z(u_1, u_2)$, то, очевидно, не существует интегральных кривых, выходящих из этой точки с ростом ξ . Соответственно, все интегральные кривые из окрестности этой особой точки входят в нее. Такая точка не может быть «начальной» точкой, соответствующей $\xi = -\infty$. Это означает отсутствие допустимых разрывов при $W < c_1^r$.

Если особая точка — седловая точка функции $Z(u_1, u_2)$, то имеется одно собственное значение, соответствующее экспоненциально растущему возмущению u_{α} в особой точке. Это собственное значение соответствует двум интегральным кривым, выходящим из особой точки в противоположных направлениях, параллельных соответствующему собственному вектору матрицы $\partial^2 Z / \partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}$. Решения, соответствующие этим интегральным кривым, описывают «скатывание» материальной точки с седловой точки. Входящие в особую точку интегральные кривые образуют трехмерную гиперповерхность. Такого типа точки могут соответствовать при $\xi = -\infty$ неравенствам $c_1^r < W < c_2^r$, а при $\xi = \infty$ — неравенствам $c_1^l < W < c_2^l$.

Если функция $Z(u_1, u_2)$ имеет максимум в особой точке, то имеется двумерная поверхность, состоящая из выходящих из особой точки интегральных кривых, и двумерная поверхность, состоящая из входящих в особую точку интегральных кривых. Первые представляют решения, описывающие «скатывание» материальной точки с «бугра» по различным направлениям, а вторые — «вкатывание» материальной точки на бугор с различных направлений и последующую остановку ее на вершине бугра.

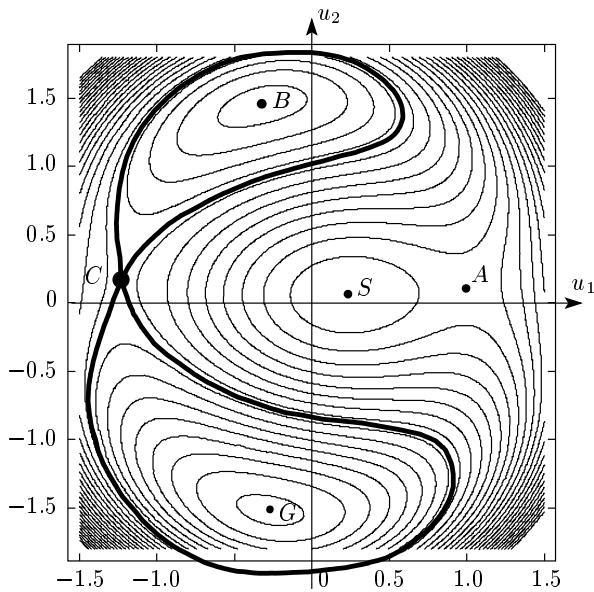


Рис. 2. Линии уровня $Z(u_1, u_2) = \text{const}$

Условия априорной эволюционности, как нетрудно проверить, соответствуют разрывам, представляющим или скачки из максимума ($\xi = -\infty$) в седло ($\xi = \infty$) функции $Z(u_1, u_2)$ или скачки из седла ($\xi = -\infty$) в минимум ($\xi = \infty$). Это следует из формул (4.2), (4.3) и (5.1). Аналогично, разрывы, соответствующие скачкам максимум \rightarrow максимум или седло \rightarrow седло требуют для эволюционности одного дополнительного условия. Разрывы максимум \rightarrow минимум определено неэволюционны. На них число граничных условий, вытекающих из законов сохранения, больше, чем требуется условиями эволюционности.

Один из вариантов расположения линий уровня функции $Z(u_1, u_2)$ изображен на рис. 2.

Перейдем к исследованию интегральных кривых, соединяющих особые точки.

График функции $Z(u_1, u_2)$ при $\kappa < 0$ напоминает круговой желоб переменной глубины. На рис. 2 изображен один из вариантов линий уровня функции $Z(u_1, u_2) = \text{const}$ для значений параметров $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = -2$. Точка A — седло, B и G — минимумы функции $Z(u_1, u_2)$, C — седло, S — максимум функции $Z(u_1, u_2)$.

Если $W > c_2^r$, то начальная точка ($\xi = -\infty$) представляется максимумом функции $Z(u_1, u_2)$ и является точкой S на рис. 2. Интегральные кривые, вышедшие из начальной точки, должны в силу неравенств (4.7) и (4.8) прийти в одну из особых точек A, C (седла) или в точки B, G (минимумы). Разрывы

$S \rightarrow B$ и $S \rightarrow G$ определено неэволюционны и, как это следует из общих представлений [4–6], их структура неоднозначна (содержит произвольный параметр). Эти неэволюционные разрывы могут распасться на систему волн, содержащую только эволюционные разрывы и представляющую решение задачи о распаде произвольного разрыва.

Разрывы $S \rightarrow A$ и $S \rightarrow C$ априорно эволюционны. Покажем, следуя работам [3, 24], что оба эти разрыва имеют структуру. Для большей наглядности рассмотрим трехмерное пространство u_1, u_2, u_3 , где

$$u_3 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}(u_1'^2 + u_2'^2)}. \quad (5.2)$$

Отображение пространства u_1, u_2, u_1', u_2' на пространство u_1, u_2, u_3 сохраняет непрерывность, так что если имеется некоторая непрерывная кривая в пространстве u_1, u_2, u_1', u_2' , то ей соответствует непрерывная кривая в пространстве u_1, u_2, u_3 .

Введем функцию M равенством

$$M = u_3^2 + Z(u_1, u_2) = \frac{m}{2}(u_1'^2 + u_2'^2) + Z(u_1, u_2),$$

так что M можно рассматривать как функцию переменных u_1, u_2, u_3 и как функцию переменных u_1, u_2, u_1', u_2' .

Согласно (4.7) на каждой интегральной кривой системы уравнений (4.5) $dM/d\xi \leq 0$, причем равенство имеет место только в особых точках.

Рассмотрим в пространстве u_1, u_2, u_1', u_2' двумерную поверхность, состоящую из всех интегральных кривых, вышедших из точки S , и рассмотрим на этой поверхности кривую $l(M_*)$, состоящую из точек, в которых

$$M(u_1, u_2, u_1', u_2') = M_* = \text{const}. \quad (5.3)$$

При значениях M_* близких к $Z(S)$ эта кривая будет замкнутой. Это следует из анализа решений, линеаризованных около точки S . При уменьшении M_* эта кривая будет раздуваться, оставаясь непрерывной замкнутой кривой, до тех пор, пока не встретит некоторую особую точку системы (4.5). Покажем, что это будет одна из седловых точек A или C , в которой значение функции $Z(u_1, u_2)$ является более близким к значению $Z(S)$ (на рис. 2 — точка A : $Z(C) < Z(A) < Z(S)$). Для этого рассмотрим в пространстве u_1, u_2, u_3 поверхность

$$M(u_1, u_2, u_3) = M_*. \quad (5.4)$$

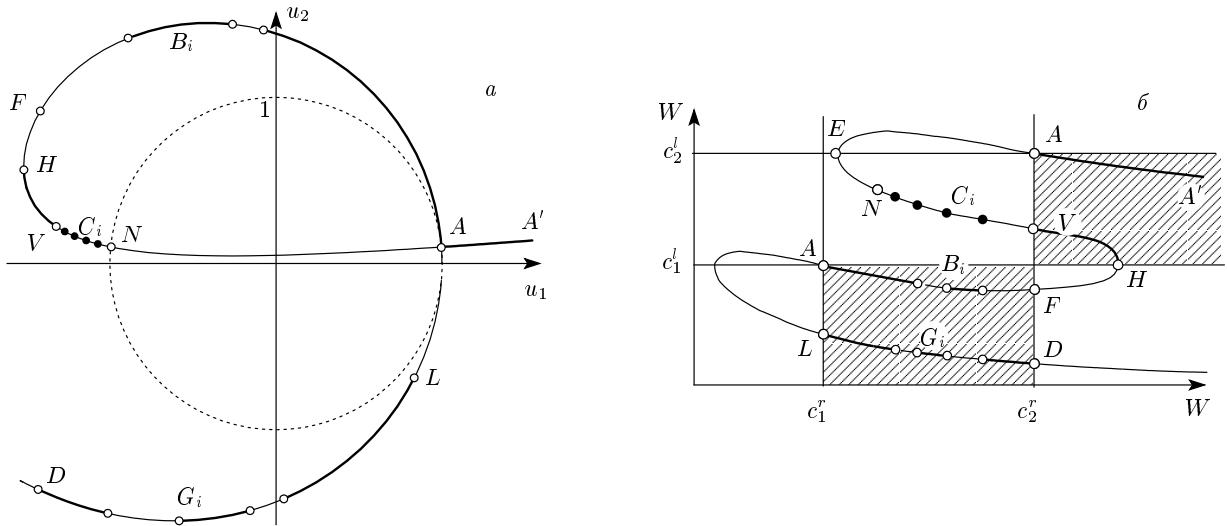


Рис. 3. Допустимая часть ударной адиабаты: жирные кривые и черные точки

На этой поверхности лежит отображение $l_1(M_*)$ линии $l(M_*)$ в пространство u_1, u_2, u_3 (для определенности при отображении выбираем знак «+» в равенстве (5.2)).

При значениях M_* близких к $Z(S)$ поверхность (5.4) имеет форму тора переменного сечения. Кривая $l_1(M_*)$ охватывает дырку тора. При уменьшении M_* тор становится тоньше, пока не разорвется при $M_* = Z(A)$. Поскольку до разрыва кривая $l_1(M_*)$ оставалась непрерывной, при $M_* = Z(A)$ по крайней мере одна из интегральных кривых, вышедших из точки S , приходит в точку A .

Покажем теперь существование интегральной кривой, соединяющей точки S и C . Как и ранее, рассмотрим в пространстве u_1, u_2, u'_1, u'_2 двумерную поверхность, состоящую из интегральных кривых, выходящих из точки S . На этой поверхности выделим точки, в которых

$$M(u_1, u_2, u'_1, u'_2) = \gamma(u_1, u_2)M_*,$$

$$M_* = \text{const}, \quad \gamma(u_1, u_2) > 0.$$

Тогда для непрерывной функции $\gamma(u_1, u_2)$ эти точки составят в пространстве u_1, u_2, u'_1, u'_2 непрерывную кривую $l_2(M_*)$, которая при значениях M_* близких к $Z(S)$ является замкнутой кривой. Как и ранее, кривая может разомкнуться только в результате прохождения этой кривой через особую точку системы (4.5). Распорядимся функцией $\gamma(u_1, u_2)$ таким образом, чтобы в некоторой окрестности точки C она была тождественно равна единице, а в окрестности точки A принимала бы достаточно малое значение, так чтобы $\gamma(u_1, u_2)M(C) < M(A)$. Тогда кри-

вая $l_2(M_*)$ останется замкнутой при изменении M_* от значения $M(S)$ до $M(C)$. Отображение l_3 кривой l_2 в пространство u_1, u_2, u_3 также будет оставаться непрерывной кривой при тех же значениях M_* . При каждом значении M_* , близком к $M(S)$, в окрестности точки C кривая l_3 лежит на поверхности (5.4), которая в этой окрестности при переходе M_* через значение $M(C)$ превращается из однополостного гиперболоида в двухполостный. При $M_* = Z(C)$ линия l_3 переходит через точку C , что обеспечивает существование интегральной кривой, идущей из особой точки S в особую точку C .

Пусть теперь $c_1^r < W < c_2^r$. Начальная точка является седлом. Пусть, для определенности, это точка A . Разрыв $A \rightarrow S$ невозможен из-за невыполнения неравенства (4.8). Разрывы $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow G$ априорно эволюционны, т. е. соединение соответствующих особых точек интегральной кривой не требует дополнительных граничных условий, а этим разрывам на ударной адиабате соответствуют отрезки на рис. 3, отмеченные жирными линиями.

Может оказаться, однако, что при некоторых соотношениях между параметрами один из разрывов $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow G$ не имеет структуры. Действительно, две интегральные кривые, выходящие из точки A в противоположных направлениях, могут при $\xi \rightarrow \infty$ прийти в одну и ту же конечную точку (например, в точку B). При этом ни одна интегральная кривая из точки A в другую особую точку (точку G) не приходит. При изменении скорости разрыва отрезки ударной адиабаты, где существует структура соответствующего разрыва и где структура не суще-

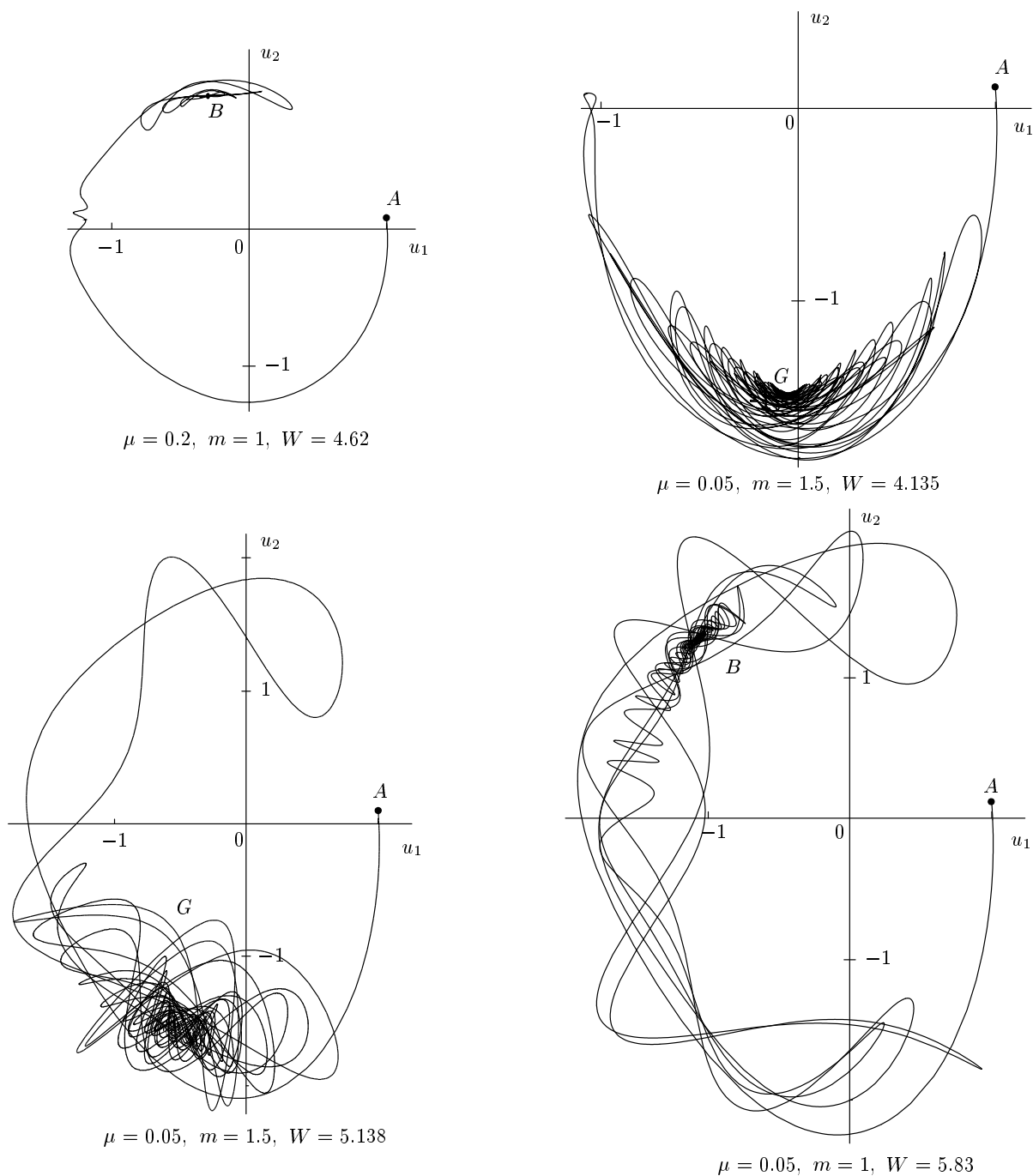


Рис. 4. Стационарные структуры

ствует, могут чередоваться. Очевидно, что при скоростях, соответствующих концам этих отрезков, одна из интегральных кривых, вышедших из точки A , приходит при $\xi = \infty$ в точку C . Разрыв $A \rightarrow C$ является особым, дополнительным соотношением на нем служит выделенное значение W^* , при котором он (разрыв) существует.

На рис. 4 изображены примеры стационарных структур, представленные траекториями, приходящими в особую точку B или в особую точку G , для значений параметров $u_1^r = 1, u_2^r = 0.1, f = 1, g = 1, \kappa = -2$ и различных значений μ, m, W (значения этой группы параметров приведены под каждым из графиков на рис. 4). На рис. 5 приведены примеры

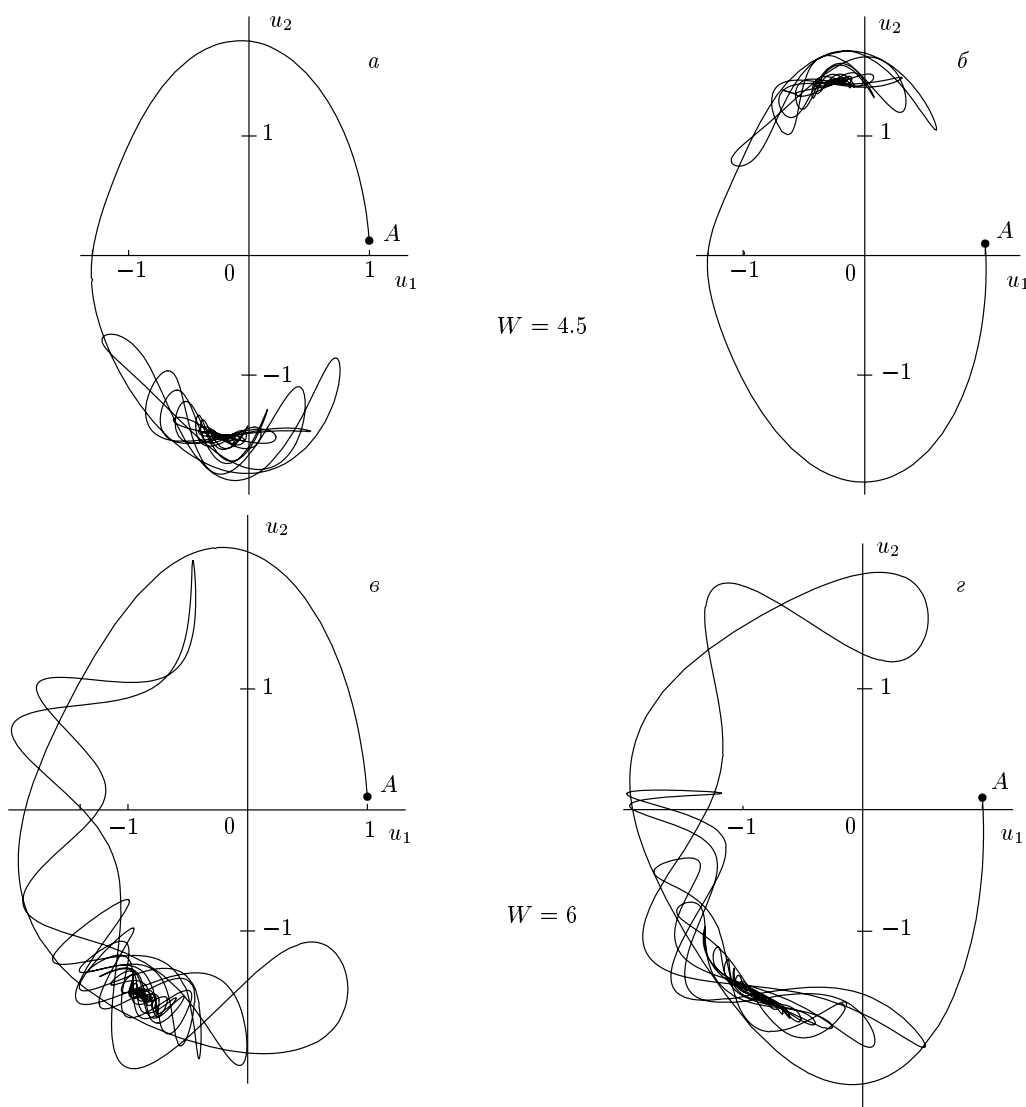


Рис. 5. Стационарные структуры

стационарных структур для тех же значений параметров $u_\alpha^{r,l}$, f , κ и значений $\mu = 0.1$, $m = 1$, представляющих две различные интегральные кривые, выходящие из точки A при $W = 4.5$ (рис. 5а,б) и $W = 6$ (рис. 5в,г). На рис. 5а интегральная кривая приходит в особую точку B , на рис. 5б — в особую точку G . На рис. 5в,г обе интегральные кривые, вышедшие из особой точки A , приходят в особую точку G . Приход интегральной кривой в седловую точку C следует рассматривать как исключительный случай, который возможен при специальном дискретном наборе значений скорости $W = W_i^*$.

Каждое значение W_i^* соответствует точке на ударной адиабате. Эта точка лежит на априорно

неэволюционной части ударной адиабаты, но поскольку ей соответствует выделенное значение W^* , которое следует рассматривать как дополнительное соотношение на разрыве, разрыв $A \rightarrow C$ оказывается эволюционным. Такие разрывы были названы особыми. Наличие множества отдельных точек на ударной адиабате говорит о существовании различных типов особых разрывов, различающихся значениями W^* и видом структуры этих разрывов.

На рис. 6 приведены примеры стационарных структур особых разрывов $A \rightarrow C$, полученные численно для значений параметров диссипации $\mu = 0.05$, дисперсии $m = 0.3$ и прежних значений $u_1^r = 1$, $u_2^r = 0.1$, $f = 1$, $g = 1$, $\kappa = -2$. На

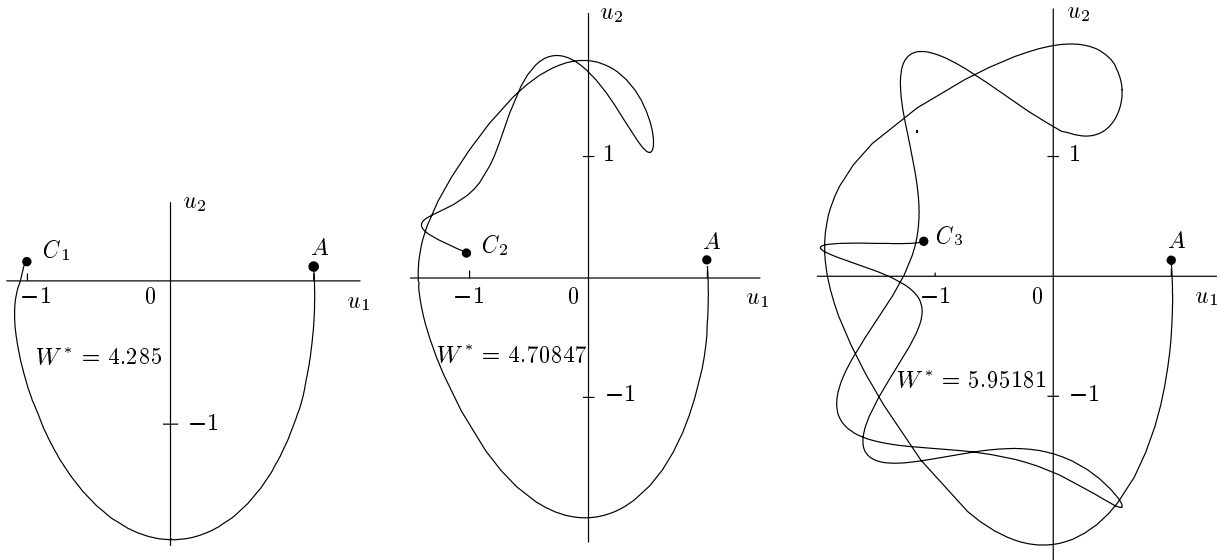


Рис. 6. Стационарные структуры особых разрывов

рис. 6 указаны значения W^* для каждого изображенного случая. Первая из представленных на рис. 6 структура особого разрыва (при наименьшем значении W^*) — простая; при больших значениях W^* образуются сложные структуры, демонстрирующие различные виды колебаний внутри и около выделенной жирной линией на рис. 2 «восьмерки».

При выбранном отношении $m/\mu^2 = 120$ в результате численного счета найден набор значений W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 7$), при которых одна из двух возможных интегральных кривых, вышедших из начальной седловой точки A в противоположных направлениях, приходит в седловую точку C_i ($i = 1, 2, \dots, 7$). Значения W_i^* ($i = 1, 2, \dots, 7$) соответствуют особым разрывам и одновременно определяют концы отрезков, для точек которых определенная интегральная кривая (одна из двух, выходящих из точки A) представляет стационарную структуру медленной ударной волны. На рис. 3 на диаграмме эволюционности жирными линиями и черными точками отмечены возможные состояния за допустимыми разрывами при начальном состоянии A . Эволюционные отрезки AF и LD ударной адиабаты разбиваются на участки, причем часть из них (отмеченная тонкими линиями) не отвечает допустимым разрывам.

При увеличении значения m/μ^2 число отдельных точек и отрезков ударной адиабаты, соответствующих допустимым разрывам, увеличивается.

В рассмотренных выше случаях координаты точки A выбраны так, что эта точка находится вбли-

зи оси u_1 . Изучение картины интегральных кривых при увеличении координаты u_2 точки A показало, что наличие отдельных точек C_i , соответствующих особым разрывам, возможно только при существенном увеличении значения параметра m/μ^2 .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предположениях малой нелинейности и малой анизотропии свойств диэлектриков получена приближенная система уравнений в частных производных (2.4), описывающая эволюцию электромагнитных волн, распространяющихся в положительном направлении оси x при наличии эффектов дисперсии и диссипации. Эта система уравнений представляет собой систему двух связанных нелинейными членами уравнений Кортевега–де Фриза–Бюргерса и лишь обозначениями отличается от подобной системы уравнений, описывающей нелинейные квазиперечные волны в слабоанизотропных упругих средах.

С помощью полученных уравнений изучена стационарная структура ударных волн. Новым обстоятельством является то, что дисперсия в используемых уравнениях описывается членами, содержащими более высокие производные от неизвестных функций, чем в ранее рассмотренных моделях. Установлено, что стационарная структура разрывов и соответствующее множество допустимых разрывов качественно подобны ранее рассмотренным [4, 12–14] с другим видом членов,

отвечающих за дисперсию. Как и в упомянутых работах, разрывы, движущиеся со скоростью, большей обеих характеристических скоростей перед разрывом, обладают стационарной структурой и представляют собой быстрые ударные волны. Не все медленные ударные волны (т.е. ударные волны, скорость которых лежит между характеристическими скоростями перед разрывом) имеют стационарную структуру, а на ударной адиабате имеются чередующиеся отрезки допустимых и недопустимых разрывов. В этом же интервале скоростей на ударной адиабате имеются отдельные точки, соответствующие особым разрывам, дополненными соотношениями на которых является дискретный набор значений их скоростей. Число упомянутых отрезков и отдельных точек неограниченно растет с ростом относительного влияния дисперсии в структуре разрывов по сравнению с вязкостью. Как показано в работах [4, 12–14], такое строение ударной адиабаты приводит к неединственности решений автомодельных задач с зависимостью решений от x/t , которые строятся в рамках гиперболической модели и состоят из допустимых разрывов и волн Римана.

Авторы выражают благодарность А. Н. Голубятникову, обратившему их внимание на проблему распространения нелинейных электромагнитных волн в диэлектрике.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00618), программы РАН «Математические методы нелинейной динамики» и гранта поддержки научных школ (НШ 1959.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, УМН **14**(2), 87 (1959).
2. С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск (1998).
3. С. К. Годунов, ДАН СССР **136**, 272 (1961).
4. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, Москва (2001).
5. А. Г. Куликовский, ПММ **32**, 1125 (1968).
6. А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, *Нелинейные волны в упругих средах*, Московский лицей, Москва (1998).
7. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе, *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, Москва (1980).
8. А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, ПММ **51**, 926 (1987).
9. А. Г. Куликовский, ДАН СССР **275**, 1349 (1984).
10. А. Г. Куликовский, Н. И. Гвоздовская, Труды МИ РАН **223**, 63 (1998).
11. А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **44**, 1119 (2004).
12. А. П. Чугайнова, ТМФ **147**, 240 (2006).
13. А. П. Чугайнова, ПММ **71**, 775 (2007).
14. А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, УМН **63**(2), 85 (2008).
15. Н. И. Гвоздовская, А. Г. Куликовский, ПМТФ **40**(2), 174 (1999).
16. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ **36**, 957 (1959).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
18. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск (2000).
19. А. Г. Куликовский, ПММ **50**, 597 (1986).
20. Е. И. Свешникова, ПММ **46**, 642 (1982).
21. А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, ПММ **46**, 831 (1982).
22. Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит, Докл. РАН **370**, 1 (2000).
23. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
24. А. Г. Куликовский, ПММ **26**, 631 (1962).