

О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНАХ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

*А. В. Кудрин**, *Е. Ю. Петров***

*Нижегородский государственный университет
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 28 августа 2009 г.

Исследуется возбуждение и распространение цилиндрических электромагнитных волн в нелинейной среде без дисперсии. Предполагается, что в рассматриваемой среде отсутствует центр симметрии и зависимость индукции электрического поля от его напряженности может быть аппроксимирована показательной функцией. Применительно к этому случаю предложен метод интегрирования системы уравнений Максвелла. С помощью данного метода получены точные решения нелинейной системы уравнений электромагнитного поля. Показано, что описываемые найденными решениями нелинейные эффекты могут проявляться в экспериментальных условиях.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия достигнут большой прогресс в исследовании нелинейных волновых процессов различной физической природы. Общее число работ, посвященных данной тематике, огромно (см., например, [1–8] и цитируемую там литературу). Хотя значение численных методов в теории нелинейных волн благодаря совершенствованию вычислительной техники постоянно возрастает [9, 10], точные решения уравнений математической физики и по сей день играют важную роль в понимании физических процессов, разработке новых вычислительных алгоритмов и асимптотических методов. Нельзя не отметить, что характерной особенностью подавляющего большинства опубликованных работ является исследование плоских нелинейных волн. Вполне понятно, что ничуть не меньший интерес представляют процессы распространения цилиндрических и сферических волн. Однако аналитическое исследование нелинейных эффектов в теории таких пространственно-симметричных волн связано с чрезвычайными математическими трудностями, поскольку соответствующие задачи сводятся к нелинейным уравнениям в частных производных, содержащим явно независимые переменные. Методы построения точных решений, являющиеся доста-

точно эффективными в теории плоских волн (метод обратной задачи рассеяния, преобразование Бэклунда) оказываются здесь неприменимыми. Фактически единственным на данный момент способом аналитического решения является поиск автомодельных подстановок. С помощью автомодельного подхода удалось получить ряд точных решений, описывающих распространение нелинейных пространственно-симметричных волн в средах без дисперсии. Так, например, в механике сплошных сред хорошо известны решения задач о сильном взрыве [11], о сходящейся сферической ударной волне [12, 13], а также решение уравнения Бюргерса для цилиндрических волн [14, 15]. В то же время авторам не известны работы, в которых были бы найдены точные аналитические решения электродинамических задач о распространении цилиндрических или сферических волн в нелинейных средах.

В настоящей работе предложен метод построения класса точных решений уравнений Максвелла, описывающих распространение цилиндрических электромагнитных волн в нелинейной среде без дисперсии. В рамках постановки рассматриваемой модельной задачи предполагается, что зависимость индукции электрического поля от его напряженности может быть аппроксимирована показательной функцией. Использование подобной зависимости возможно, когда в среде отсутствует центр симметрии.

*E-mail: kud@rf.unn.ru

**E-mail: epetrov@rf.unn.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в немагнитной бездиссипативной среде. Имея в виду возможность исследования в дальнейшем одноосных кристаллов, будем считать, что в среде существует ось симметрии, которую примем за ось z цилиндрической системы координат r, φ, z . В случае, когда поля не зависят от φ, z , уравнения Максвелла допускают решения, единственными отличными от нуля компонентами поля в которых являются E_z и H_φ (E -волны относительно оси симметрии). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением именно таких решений. Будем также пренебрегать дисперсионными эффектами и считать, что индукция D_z определяется значением напряженности E_z в тот же момент времени в той же точке пространства. Обозначив для краткости $E_z(r, t), D_z(r, t)$ и $H_\varphi(r, t)$ соответственно через E, D и H , запишем уравнения, которым удовлетворяют данные функции, в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} &= \frac{1}{c} \varepsilon(E) \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial E}{\partial r} &= \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE}. \tag{2}$$

Систему (1) можно, очевидно, свести к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon(E) \frac{\partial E}{\partial t} \right). \tag{3}$$

Оказывается, что уравнение (3) и система (1) интегрируются точно, если зависимость $\varepsilon(E)$ выбрать в виде

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 \exp(-\alpha E), \tag{4}$$

где ε_0 и α — некоторые постоянные.

Прежде чем перейти к описанию метода построения решений, рассмотрим вопрос о возможности использования экспоненциальной нелинейности (4). Для продольной компоненты индукции имеем

$$\begin{aligned} D &= D_0 + \frac{\varepsilon_0}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha E)] = \\ &= D_0 + \varepsilon_0 E - \varepsilon_0 \frac{\alpha}{2!} E^2 + \varepsilon_0 \frac{\alpha^2}{3!} E^3 + \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

где $D_0 = D(E = 0) = \text{const}$. Введем также стандартным образом поляризацию $P \equiv P_z$ и нелинейные восприимчивости $\chi^{(n)}$:

$$\begin{aligned} D &= E + 4\pi P = E + 4\pi(P_0 + \chi^{(1)} E + \\ &+ \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots). \end{aligned} \tag{6}$$

Величины $\chi^{(n)}$ в формуле (6) связаны с константами ε_0 и α соотношениями

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= \frac{\varepsilon_0 - 1}{4\pi}, \\ \chi^{(n)} &= \frac{\varepsilon_0}{4\pi} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Формула (5) показывает, что в разложении функции $D(E)$ в ряд присутствуют четные степени E . Таким образом, среда, в которой зависимость $\varepsilon(E)$ аппроксимируется функцией (4), не обладает центральной симметрией. Речь может идти, например, об одноосных пироэлектрических кристаллах (ось z , как уже отмечалось, должна совпадать с кристаллографической осью симметрии). Случай $P_0 \neq 0$ и $D_0 \neq 0$ отвечает наличию спонтанной поляризации в пироэлектрической среде. Как известно [16], все пироэлектрики являются в то же время и пьезоэлектриками. Наличие пьезоэлектричества в пиро- и сегнетоэлектриках приводит к влиянию упругих деформаций на электромагнитные свойства таких сред. Однако при исследовании волновых электромагнитных процессов в безграничной среде ее макроскопические движения могут не приниматься во внимание в силу большой (по сравнению со скоростью звука) скорости распространения электромагнитных возмущений [16]. Поэтому для описания подобных процессов достаточно использовать уравнения электродинамики, дополненные феноменологическими материальными уравнениями типа (5).

Кроме свойств самой среды, другим фактором, нарушающим центросимметричность, может являться наличие электростатического поля. Пусть, например, изотропная среда, в которой

$$D = (1 + 4\pi\chi^{(1)})E_z + 4\pi\chi^{(3)}E_z^3, \tag{8}$$

что соответствует используемому обычно приближению кубической нелинейности, находится в постоянном однородном электрическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 E_0$. Представляя в выражении (8) полное поле как $E_z = E_0 + E$, где переменная составляющая снова обозначена через E , получим, очевидно, слагаемое, пропорциональное E^2 . Нетрудно подсчитать, что для аппроксимации данной квадратичной нелинейности разложением (5) следует положить

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1 + 4\pi\chi^{(1)} + 12\pi\chi^{(3)}E_0^2, \\ \alpha &= -\frac{24\pi}{\varepsilon_0}\chi^{(3)}E_0, \\ D_0 &= (1 + 4\pi\chi^{(1)})E_0 + 4\pi\chi^{(3)}E_0^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, при соответствующем выборе постоянных ε_0 и α функция $\varepsilon(E)$ вида (4) правильно описывает диэлектрические свойства нецентросимметричных сред при слабой нелинейности, когда можно ограничиться первой, квадратичной по полю, поправкой к линейной зависимости D от E . Вполне понятно также, что получаемые далее результаты могут в равной степени относиться к нецентросимметричным магнитным средам (ферромагнитным кристаллам). При этом следует рассматривать H -волны относительно оси z , в которых $H_z \neq 0$, $E_\varphi \neq 0$,

$$\frac{dB_z}{dH_z} = \mu_0 \exp(-\nu H_z). \quad (10)$$

3. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Выполним в уравнениях (1) замену

$$E = \frac{1}{\alpha} (2\xi - u), \quad H = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\alpha} e^{-\xi} (2\eta - v), \quad (11)$$

где

$$\xi = \ln \frac{r}{r_0}, \quad \eta = \frac{ct}{r_0 \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (12)$$

$u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$, r_0 — произвольная постоянная размерности длины. В новых переменных получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = e^u \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) не содержат явной зависимости от ξ и η и формально совпадают с уравнениями, описывающими распространение плоских электромагнитных волн в среде с экспоненциальной нелинейностью. Система уравнений (13), (14) допускает частные решения, в которых одна из функций $u(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$ может быть выражена через другую: $v = v(u)$. Данные решения, полученные и исследованные в работах [17, 18] (см. также [16]), описывают простые волны и аналогичны решениям Римана в газодинамике [13, 19]. Соответствующие выражения для u и v имеют вид

$$\begin{aligned} u &= F \left(\xi \pm \eta e^{-u/2} \right), \\ v &= \pm 2(e^{u/2} - 1), \end{aligned} \quad (15)$$

где F — произвольная функция. Нетрудно, однако, убедиться в том, что в нашем случае, с учетом выполненных замен (11), (12), нельзя построить физически разумное решение для полей E_z и H_φ на основе формул (15). Рассмотрим данное обстоятельство более подробно. При анализе квазилинейных систем гиперболического типа, к которым относится система уравнений (13), (14), часто используется метод характеристик [1, 20]. Применительно к уравнениям (13), (14) характеристики представляют собой кривые на плоскости ξ, η . Простая волна, отвечающая конкретному выбору знака в формуле (15), есть возмущение, распространяющееся по одному из двух семейств характеристик. Обратимся теперь к постановке задачи Коши для данной системы. Пользуясь отмеченной выше формальной аналогией, будем вначале говорить о распространении плоских волн, интерпретируя ξ как декартову координату (например, y), а u и v — непосредственно как компоненты поля (E_z и H_x). Пусть в простейшем случае $u \equiv 0$ и $v \equiv 0$ при $\eta = 0$ всюду, за исключением отрезка $a \leq \xi \leq b$. В этом случае на плоскости ξ, η имеется область нелинейного взаимодействия волн, представляющая собой треугольник, одной из сторон которого является отрезок ab . Вне данной области начальное возмущение распадается на две простые волны, описываемые выражениями (15). Мы не приводим здесь соответствующие рисунки, поскольку данные сведения подробно изложены в монографии [1]. Вернемся к случаю цилиндрических волн. Положим $E_z \equiv 0$ и $H_\varphi \equiv 0$ при $\eta = 0$ всюду, кроме $a \leq r \leq b$. С учетом замен (11), (12) начальные значения для функции u , отвечающие данным E и H , будут отличны от нуля на всей прямой $-\infty < \xi < \infty$. Легко видеть, что такая ситуация будет наблюдаться при любых физически оправданных начальных условиях для полей E_z и H_φ . При этом область взаимодействия распространяется на всю полуплоскость $-\infty < \xi < \infty, \eta \geq 0$, и решение соответствующей задачи Коши для системы уравнений (13), (14) не может быть представлено в виде (15) ни при каких значениях ξ и η . В некотором смысле аналогичная картина наблюдается и в линейных задачах, где цилиндрическая волна может быть получена лишь в виде суперпозиции бесконечного числа плоских волн.

Метод определения решения системы уравнений (13), (14) в области взаимодействия был предложен Риманом [1, 19–21] и основывается на применении преобразования годографа. Принимая u, v за независимые переменные, а ξ и η — за зависимые, из (13), (14) получим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = e^u \frac{\partial \xi}{\partial v}. \quad (17)$$

Исключая из уравнений (16), (17) функцию η , находим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - e^u \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0. \quad (18)$$

Сделаем теперь замену

$$w = 2 e^{u/2}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) приводится к виду

$$\frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial w} \left(w \frac{\partial \xi}{\partial w} \right) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0. \quad (20)$$

Отметим замечательное свойство симметрии исходной системы (1) с экспоненциальной нелинейностью: после применения указанных подстановок и преобразования годографа эта система сводится к линейному волновому уравнению для цилиндрических волн. Решив данное уравнение и подставив функцию $\xi(u, v)$ в соотношения (16) и (17), можно найти $\eta(u, v)$. Полученные таким образом зависимости $\xi = \xi(u, v)$ и $\eta = \eta(u, v)$ с учетом замен (11), (12) будут определять точное решение исходной системы (1) в неявном виде. Аналогичным образом можно сначала получить из системы (16), (17) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \eta}{\partial w} \right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\eta}{w} \right) = 0 \quad (21)$$

для величины η , решив которое, затем определить ξ [21].

Таким образом, применение преобразования годографа позволяет в рассматриваемом нами случае существенно упростить вид исследуемых уравнений и свести их к линейным. При этом, однако, в переменных ξ и η значительно усложняются начальные условия. Для задачи Коши величины $E(\xi, 0)$ и $H(\xi, 0)$ — заданные в начальный момент времени функции:

$$E(\xi, 0) = \frac{1}{\alpha} (2\xi - u(\xi, 0)), \quad (22)$$

$$H(\xi, 0) = -\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\alpha} e^{-\xi} v(\xi, 0) \quad \text{при } \eta = 0.$$

Соотношения (22) определяют в параметрическом виде некоторую кривую в плоскости u, v , на которой заданы ξ и $\eta = 0$ [1]. Выражая ξ из формулы (22),

приходим к достаточно сложным зависимостям даже для сравнительно простых начальных данных, отвечающих, по крайней мере, непрерывным и обращающимся в нуль при $r \rightarrow \infty$ функциям $E(r, 0)$ и $H(r, 0)$. В итоге уравнение (20) с соответствующими краевыми условиями приходится решать численно, а описанный способ вряд ли дает какие-либо преимущества перед применением численных методов непосредственно к исходной системе (1).

Оказывается, однако, возможным предложить сравнительно простой аналитический метод, позволяющий находить физически интересные точные решения нелинейных уравнений поля (1). Получаемые при этом решения не соответствуют наперед заданным начальным данным¹⁾, но являются своеобразными аналогами хорошо известных решений линейных задач о распространении цилиндрических волн в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = \text{const}$. Под аналогией понимается возможность совершения предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$, при котором решение системы (1) переходит в решение изначально поставленной произвольной линейной задачи.

Сущность метода заключается в следующем. Вначале необходимо получить аналитическое решение задачи о распространении цилиндрических E -волн в среде с линейной зависимостью

$$D_z = D_0 + \varepsilon_0 E_z,$$

где D_0, ε_0 — константы. Будем полагать, что такое решение получено и нами определены функции $E_z(r, t)$ и $H_\varphi(r, t)$, удовлетворяющие линейным уравнениям поля, а также заданным начальным и граничным условиям. Определяемый данными условиями характерный пространственный масштаб задачи обозначим через a и введем безразмерные переменные

$$\rho = r/a, \quad \tau = ct/a\sqrt{\varepsilon_0}. \quad (23)$$

Решение линейной задачи удобно тогда представить в виде

$$E \equiv E_z = \mathcal{E}(\rho, \tau), \quad (24)$$

$$H \equiv H_\varphi = \sqrt{\varepsilon_0} \mathcal{H}(\rho, \tau). \quad (25)$$

Здесь функции \mathcal{E} и \mathcal{H} удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} + \frac{\mathcal{H}}{\rho} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}, \quad (26)$$

¹⁾ Начальные данные определяются уже после того, как точное решение нелинейных уравнений найдено.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}, \quad (27)$$

а каждая из них в отдельности — уравнениям

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} = 0 \quad (28)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{H}) \right) - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (29)$$

Построим теперь соответствующее решение нелинейной задачи. Заметим, что уравнение (28) для функции $\mathcal{E}(\rho, \tau)$ формально совпадает с уравнением (20) для функции $\xi(w, v)$, а уравнение (29) для $\mathcal{H}(\rho, \tau)$ — с уравнением (21) для функции $\eta(w, v)/w$. Учитывая данное обстоятельство, решения уравнений (20) и (21) запишем в виде

$$\xi = C_1 \mathcal{E}(w, v) + \ln \frac{w}{2}, \quad (30)$$

$$\eta = \frac{C_1}{2} w \mathcal{H}(w, v) + \frac{v}{2}, \quad (31)$$

где C_1 — произвольная постоянная. При составлении выражений (30) и (31) мы воспользовались тем, что функции $\ln w$ и v являются частными решениями уравнений (20) и (21), а также принципом суперпозиции, справедливым в силу линейности соответствующих уравнений. Зависимости (30) и (31) удовлетворяют также системе уравнений (16), (17), если \mathcal{E} и \mathcal{H} являются решениями системы (26), (27), в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием с учетом (19). Возвращаясь с помощью соотношений (11), (12), (19) к исходным величинам r, t, E, H , из (30), (31) имеем

$$E = \frac{2C_1}{\alpha} \times \mathcal{E} \left(\frac{2re^{-\alpha E/2}}{r_0}, \frac{2ct - \alpha rH}{r_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right), \quad (32)$$

$$H = \frac{2C_1}{\alpha} \sqrt{\varepsilon_0} e^{-\alpha E/2} \times \mathcal{H} \left(\frac{2re^{-\alpha E/2}}{r_0}, \frac{2ct - \alpha rH}{r_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right). \quad (33)$$

Константы C_1 и r_0 определим таким образом, чтобы в линейном случае ($\alpha \rightarrow 0$) выражения (32) и (33) переходили соответственно в (24) и (25). Для этого следует, очевидно, положить

$$C_1 = \alpha/2, \quad r_0 = 2a. \quad (34)$$

В итоге получим

$$E = \mathcal{E} \left(\rho e^{-\alpha E/2}, \tau - \frac{\alpha \rho H}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \right), \quad (35)$$

$$H = \sqrt{\varepsilon_0} e^{-\alpha E/2} \mathcal{H} \left(\rho e^{-\alpha E/2}, \tau - \frac{\alpha \rho H}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \right). \quad (36)$$

Выражения (35) и (36) в неявном виде дают точное решение исходной системы (1), описывающее распространение цилиндрических электромагнитных волн в рассматриваемой нелинейной среде. При известных функциях \mathcal{E}, \mathcal{H} , определяемых из решения линейной краевой задачи²⁾, и заданных значениях ρ, τ формулы (35) и (36) представляют собой систему двух трансцендентных уравнений для величин E и H . В случае $\alpha = 0$ построенное решение переходит в решение (24), (25) линейной задачи, однако при $\alpha \neq 0$ может отвечать несколько другим краевым условиям, нежели те, которым удовлетворяют функции (24) и (25). С физической точки зрения существенным является то обстоятельство, что при слабой нелинейности различие между краевыми значениями функций E и H , определяемых формулами (35), (36), и изначально задаваемыми краевыми значениями полей (24), (25) оказывается весьма малым. В результате приведенные точные решения являются аналогами решений исходных линейных задач, поскольку описывают поведение полей в нелинейной среде при «похожих» краевых условиях. Перейдем теперь к конкретным примерам, позволяющим лучше понять сущность метода.

4. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть в линейной среде с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = \text{const}$ заданы начальные распределения полей по радиальной координате:

$$E_z(r, t = 0) = \beta(1 + r^2/a^2)^{-3/2}, \quad (37)$$

$$H_\varphi(r, t = 0) \equiv 0,$$

где β, a — некоторые константы. Определим поля E_z и H_φ при $t > 0$. В безразмерных переменных ρ и τ задача сводится к решению волнового уравнения (28) с начальными условиями

$$\mathcal{E}(\rho, 0) = \beta(1 + \rho^2)^{-3/2}, \quad (38)$$

²⁾ Под краевой здесь понимается задача, в которой заданы начальные и (или) граничные условия.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}(\rho, 0) \equiv 0. \tag{39}$$

Применяя преобразование Фурье–Бесселя [22], решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho, \tau) &= \beta \operatorname{Re} \int_0^\infty \kappa e^{-(1-i\tau)\kappa} J_0(\kappa\rho) d\kappa = \\ &= \beta \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-i\tau}{[(1-i\tau)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \tag{40}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Отсюда для функции $\mathcal{H}(\rho, \tau)$ с учетом (27) имеем

$$\mathcal{H}(\rho, \tau) = \beta\rho \operatorname{Re} \left\{ i[(1-i\tau)^2 + \rho^2]^{-3/2} \right\}. \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) дают решение линейной начальной задачи для полей при $t > 0$.

Получим теперь соответствующее точное решение нелинейных уравнений (1). Согласно формулам (35), (36), оно запишется следующим образом:

$$E = \beta\varepsilon_0^{3/2} \operatorname{Re} \left\{ s[s^2\varepsilon_0 + \rho^2\varepsilon(E)]^{-3/2} \right\}, \tag{42}$$

$$H = \beta\varepsilon_0\rho\varepsilon(E) \operatorname{Re} \left\{ i[s^2\varepsilon_0 + \rho^2\varepsilon(E)]^{-3/2} \right\}, \tag{43}$$

где

$$s = 1 - i\tau + i\alpha\rho H/2\sqrt{\varepsilon_0}.$$

При заданных значениях ρ и τ компоненты электромагнитного поля E и H в нелинейной среде находятся из системы трансцендентных уравнений (42), (43). После того, как решение нелинейных уравнений (1) построено, нетрудно выяснить, каким начальным условиям оно отвечает. Подставляя в формулы (42), (43) $\tau = 0$, имеем

$$E = \beta(1 + \rho^2 \exp(-\alpha E))^{-3/2}, \tag{44}$$

$$H \equiv 0. \tag{45}$$

В итоге неявные функции $E(\rho, \tau)$, $H(\rho, \tau)$, определяемые формулами (42), (43), дают точное решение задачи Коши для системы (1) с начальными условиями (44), (45).

Из сравнения выражений (44) и (38) видно, что распределение поля $E(\rho, 0)$ в полученном решении нелинейной задачи отличается от распределения (38), которое было задано нами изначально при постановке «затравочной» линейной задачи. Вполне понятно, однако, что при слабой нелинейности ($|\alpha E| \ll 1$) различие между (44) и (38) будет мало.

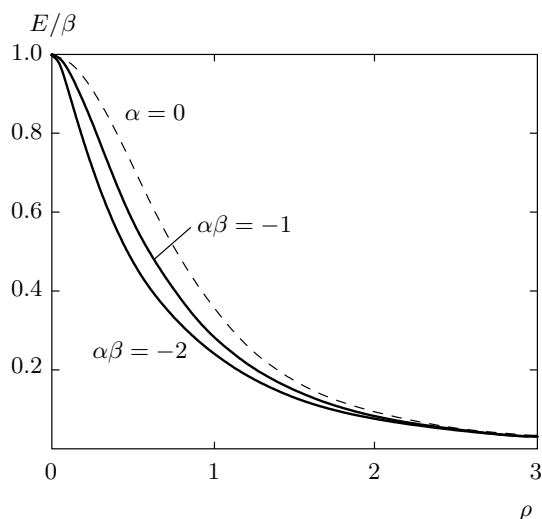


Рис. 1. Распределение электрического поля по координате ρ в начальный момент времени $\tau = 0$ при различных значениях $\alpha\beta < 0$ и $\alpha = 0$

Обратимся теперь к результатам численных расчетов компонент поля по формулам (42)–(44). Удобно рассматривать безразмерные величины E/β и H/β . Следует различать два случая: $\alpha\beta < 0$ и $\alpha\beta > 0$. На рис. 1 изображены распределения электрического поля E по координате ρ в начальный момент времени $\tau = 0$, найденные из формулы (44) при $\alpha\beta = -1$ и $\alpha\beta = -2$. Для сравнения штриховой линией показана функция $E(\rho, 0)/\beta$ в линейной среде ($\alpha = 0$), определяемая формулой (38). Хорошо видно, что даже для $\alpha\beta = -1$ отличие (44) от (38) мало. На рис. 2 сплошными линиями показаны распределения компонент поля по координате ρ (мгновенные снимки) для двух последующих моментов времени в случае $\alpha\beta = -1$. Штриховые кривые отвечают линейной среде ($\alpha = 0$) и формулам (40), (41)³⁾. Как видно из рис. 2, нелинейные искажения носят накапливающийся характер. В случае $\alpha\beta < 0$ функция $\varepsilon(E) = \varepsilon_0 \exp(-\alpha\beta E/\beta)$ возрастает с ростом E/β и точки профиля волны с большими значениями E/β бегут с меньшими скоростями, проходя к рассматриваемому моменту времени меньшие расстояния. В результате увеличивается крутизна участка, на котором E/β возрастает в направлении распространения волны, и в некоторой точке $\rho = \rho^*$ в момент времени $\tau = \tau^*$ возникает перегиб профиля (см. рис. 2).

³⁾ При сравнении эволюции возмущений в нелинейном и линейном случаях следует, однако, помнить, что построенные решения отвечают несколько различным начальным условиям (см. рис. 1).

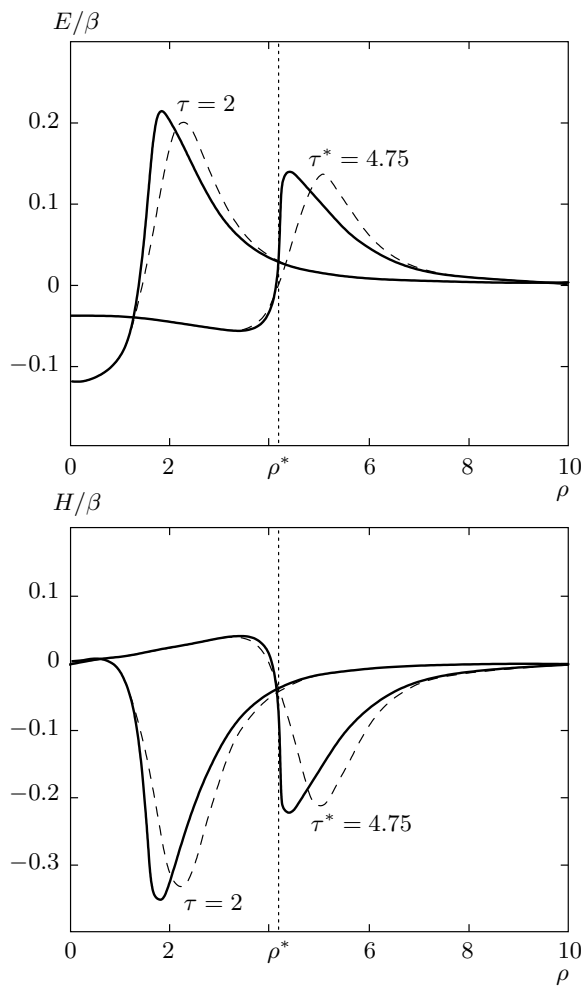


Рис. 2. Распределения компонент электрического и магнитного полей по координате ρ в различные моменты времени при $\alpha\beta = -1$, $\varepsilon_0 = 2$ (сплошные кривые). Штриховые кривые отвечают линейной задаче ($\alpha = 0$, $\varepsilon_0 = 2$)

При $\tau > \tau^*$ одному значению ρ соответствует по три различных значения величин E и H , удовлетворяющих соотношениям (42), (43), так что кривые $E(\rho)$ и $H(\rho)$ для заданного τ становятся неоднозначными. В действительности, как известно [16–18], в месте перегиба возникает разрыв соответствующих компонент поля, что отвечает формированию цилиндрической ударной электромагнитной волны. После появления разрывов решение, описываемое формулами (42), (43), становится, строго говоря, непригодным.

Рассмотрим теперь случай $\alpha\beta > 0$. Радиальные распределения $E(\rho, 0)/\beta$ для $\alpha\beta = 1$ и $\alpha\beta = 2$, а также для $\alpha = 0$, показаны на рис. 3, а мгновенные снимки компонент поля в последующие момен-

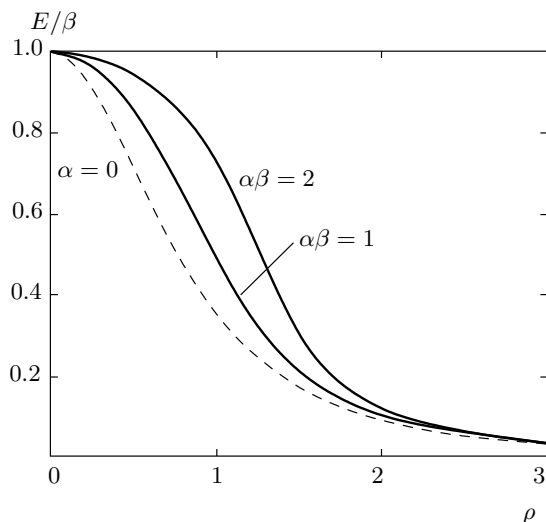


Рис. 3. Распределение электрического поля по координате ρ в начальный момент времени $\tau = 0$ при различных значениях $\alpha\beta > 0$ и $\alpha = 0$

ты времени для $\alpha\beta = 1$ — на рис. 4. При $\alpha\beta > 0$ большими скоростями обладают точки профиля волны с большими значениями E/β . Поэтому увеличивается крутизна участков профиля, на которых E/β убывает в направлении распространения волны и нелинейные искажения приводят вначале к формированию разрыва на переднем фронте импульса в точке $\rho = \rho_1^*$ в момент времени $\tau = \tau_1^*$ (рис. 4). Появление ударной волны нарушает применимость полученного решения, однако на физическом уровне строгости можно утверждать, что дальнейшее распространение импульса приведет к образованию второго разрыва на заднем фронте при $\rho = \rho_2^*$, $\tau = \tau_2^*$. В итоге на больших расстояниях от источника в одиночном импульсе формируется два разрыва. Соответствующий профиль показан на рис. 5 и в литературе часто называется *N*-волной [1]. Отметим, что для случая $\alpha\beta > 0$ процесс распространения цилиндрического электромагнитного импульса в нелинейной среде во многом аналогичен процессу распространения цилиндрического звукового импульса, в котором тоже образуются две ударные волны [13]. Случай же $\alpha\beta < 0$ не имеет аналогов в газодинамике.

Возникновение разрывов электромагнитных величин является следствием идеализации, допущенной при постановке рассматриваемой задачи, — пренебрежения дисперсией и диссипацией. Влияние дисперсии (инерционности) среды приводит к тому, что в реальных условиях поля меняются непре-

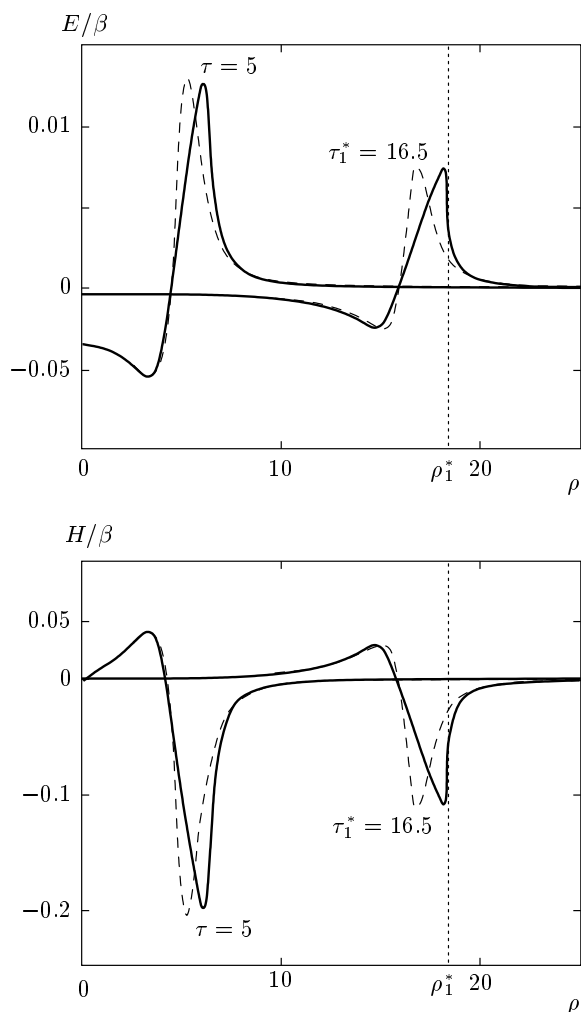


Рис. 4. Распределения компонент электрического и магнитного полей по координате ρ в различные моменты времени при $\alpha\beta = 1$, $\varepsilon_0 = 2$ (сплошные кривые). Штриховые кривые отвечают линейной задаче ($\alpha = 0$, $\varepsilon_0 = 2$)

рывно. Под ударной электромагнитной волной при этом понимается достаточно быстрое их изменение на некотором движущемся интервале [23]. Толщина данного интервала (ударного фронта) должна быть такой, чтобы поляризация среды успела «перестроиться» от одного значения до другого [24]. Хорошо известно, однако, что если не интересоваться структурой ударного фронта, ударную волну можно рассматривать как скачок компонент поля, связанных между собой граничными условиями на движущейся поверхности [16].

Место и момент образования ударной волны (ρ^* и τ^*) определяются из двух уравнений, в качестве которых можно выбрать

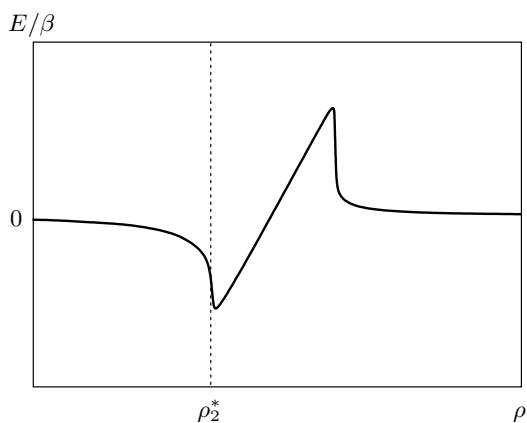


Рис. 5. Профиль одиночного импульса на больших расстояниях от источника в случае $\alpha\beta > 0$ ($\tau = \text{const}$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial E^2} = 0. \tag{46}$$

Аналитически найти точные значения ρ^* и τ^* из формул (42), (43) и (46) не представляется возможным. Учитывая, однако, данные численных расчетов, можно записать весьма простое выражение для оценки координат формирования ударных волн:

$$R = A (\alpha\beta)^{-2}. \tag{47}$$

Здесь при $\alpha\beta < 0$ следует положить $R = \rho^*$, $A \approx 4.5$, а при $\alpha\beta > 0$ — $R = \rho_1^*$, $A \approx 20$.

Вследствие уменьшения амплитуды полей в расходящихся цилиндрических электромагнитных волнах накопление нелинейных искажений происходит медленнее, чем это имеет место для плоских нелинейных (простых) волн [17, 18]. Тем не менее, пренебрежение дисперсией и диссипацией приводит к тому, что ударная волна образуется при сколь угодно малых значениях начальной амплитуды поля $\beta = E(0, 0)$ и параметра нелинейности α . В действительности, конечно, будет происходить «распыливание» ударных фронтов и в большинстве ситуаций цилиндрическая волна превратится в волну малой амплитуды, описываемую формулами линейного приближения, прежде чем в ней успеют образоваться разрывы. Для формирования же ударной волны могут потребоваться большие значения амплитуды поля β и параметра нелинейности α .

Заметим, что с точки зрения практических приложений более интересной является постановка задачи излучения, при которой задаются не начальные значения самих компонент E и H , а распределения в пространстве и времени источников поля —

сторонних зарядов и токов⁴⁾. Анализу вопросов излучения электромагнитных волн заданными источниками в различных линейных средах посвящена обширная литература (см., например, [25]). В нелинейной среде до настоящего времени аналитического рассмотрения подобных задач, по-видимому, не проводилось. Используя предложенный метод, мы получим далее соответствующие решения и проведем некоторые оценки возможностей наблюдения обсуждаемых нелинейных эффектов.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

Рассмотрим задачу об излучении импульсного источника. Для того чтобы построить решение нелинейной задачи, необходимо сначала записать решение ее линейного аналога (случай $\alpha = 0$ в формуле (4)). Пусть в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = \text{const}$ задан источник в виде бесконечно тонкого электрического тока, направленного вдоль оси z . Плотность тока представим как

$$\mathbf{j} = \mathbf{z}_0 j_z = \mathbf{z}_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r} I(t), \quad (48)$$

где δ — дельта-функция Дирака, I — полный ток в момент времени t . Функцию $I(t)$ определим как $I(t) = I_0 f(t/T)$, где

$$f(\chi) = (\chi^2 + 1)^{-1}, \quad (49)$$

I_0 и T — некоторые постоянные (величина T имеет смысл характерной длительности импульса). Поле, возбуждаемое в линейной среде током (48), описывается уравнениями

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (51)$$

Введем безразмерную радиальную координату и безразмерное время, которые будем, как и прежде, обозначать соответственно через ρ и τ . В качестве характерного пространственного масштаба a данной задачи естественно выбрать величину $a = cT/\sqrt{\varepsilon_0}$. Тогда

$$\rho = \frac{r}{a} = \frac{r\sqrt{\varepsilon_0}}{cT}, \quad \tau = \frac{ct}{a\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{t}{T}. \quad (52)$$

⁴⁾ Во многих ситуациях задачи излучения могут рассматриваться как предельные случаи задачи Коши [20].

Исключив поле H из (50), (51), с учетом (24), (52) получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} = \frac{2I_0}{c^2 T} \frac{\delta(\rho)}{\rho} f'(\tau), \quad (53)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Решение уравнения (53), отвечающее расходящейся цилиндрической волне, излучаемой источником (48), записывается в виде [1]

$$\mathcal{E}(\rho, \tau) = \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty f'(\tau - \rho \operatorname{ch} \zeta) d\zeta, \quad (54)$$

где $\gamma = -4I_0/c^2 T$. Подставляя далее выражение (54) в (27), находим $\mathcal{H}(\rho, \tau)$:

$$\mathcal{H}(\rho, \tau) = -\frac{\gamma}{2} \int_0^\infty f'(\tau - \rho \operatorname{ch} \zeta) \operatorname{ch} \zeta d\zeta. \quad (55)$$

Зависимости (54) и (55) удовлетворяют линейным уравнениям (26) и (27) всюду за исключением точки источника $\rho = 0$ и дают решение задачи об излучении импульсного тока в среде с $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Поля не удается здесь выразить через известные функции. Тем не менее, формулы типа (54), (55) удобны для численных расчетов ввиду быстрой сходимости данных интегралов.

Соответствующее решение нелинейной задачи легко «сгенерировать», полагая, что функциональные зависимости \mathcal{E} и \mathcal{H} в (35) и (36) имеют вид (54) и (55):

$$E = \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty f'(\chi_{E,H}) d\zeta, \quad (56)$$

$$H = -\frac{\gamma}{2} \sqrt{\varepsilon(E)} \int_0^\infty f'(\chi_{E,H}) \operatorname{ch} \zeta d\zeta, \quad (57)$$

где

$$\chi_{E,H} = \tau - \frac{\alpha \rho H}{2\sqrt{\varepsilon_0}} - \rho \sqrt{\frac{\varepsilon(E)}{\varepsilon_0}} \operatorname{ch} \zeta. \quad (58)$$

При $r \neq 0$ функции $E(r, t)$ и $H(r, t)$, заданные в неявном виде соотношениями (56)–(58), удовлетворяют системе (1) и дают точное решение задачи об излучении импульсного источника в нелинейной среде. Заметим, что функция f в записанных выше формулах в значительной степени может выбираться произвольно. Необходимо лишь обеспечить

сходимость интегралов в выражениях (54), (55). Совершенно аналогичные результаты будут, например, получаться для гауссовой зависимости $f(\chi)$.

В случае $\alpha = 0$ решение (56)–(58) переходит в решение исходной линейной задачи, определяемое выражениями (54), (55), однако при $\alpha \neq 0$ отвечает несколько другой зависимости $f^\alpha(t/T)$ тока источника от времени по сравнению с той, которая была задана изначально (см. (49)). Для того чтобы определить ток источника в нелинейной среде, необходимо выяснить характер особенности неявных функций (56), (57) в точке $\rho = 0$. Используем для этого уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_0 f^\alpha \left(\frac{t}{T} \right) + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds, \quad (59)$$

где $\mathbf{H} = \varphi_0 H(r, t)$, $\mathbf{D} = z_0 D(r, t)$. Криволинейный интеграл в формуле (59) берется по окружности радиуса r в плоскости $z = \text{const}$, а поверхностный — по кругу, ограниченному данной окружностью. Величина $I_0 f^\alpha(t/T)$ представляет собой полный ток источника (при $\alpha = 0$, очевидно, $f^\alpha(\tau) \equiv f(\tau)$, где f задано соотношением (49)). Устремляя радиус окружности (контура L) к нулю и используя теорему о среднем для вычисления поверхностного интеграла, из (59) имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho H = -\frac{\gamma}{2} \sqrt{\varepsilon_0} f^\alpha(\tau) + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \exp(-\alpha E) \frac{\partial E}{\partial \tau}, \quad (60)$$

где E и H даются формулами (56)–(58). Соотношение (60) позволяет найти зависимость $f^\alpha(\tau)$. Ввиду сложности соответствующих формул нам не удалось это сделать аналитически и в дальнейшем были использованы численные методы (итерационным способом из системы трансцендентных уравнений (56), (57) находились величины E и H , которые затем подставлялись в (60)). На рис. 6 показаны графики функций $f^\alpha(\tau)$ при $\alpha\gamma = \pm 2$ и $\alpha = 0$. Как видно из представленных данных, отклонение $f^\alpha(\tau)$ от $f(\tau)$ невелико даже в случае $|\alpha\gamma| = 2$ (ниже мы приведем оценки, показывающие, что в реальных физических условиях, как правило, $|\alpha\gamma| \ll 1$ и $f^\alpha(\tau) \approx f(\tau)$).

Перейдем теперь к анализу распространения в нелинейной среде импульса (сигнала), генерируемого нестационарным излучателем (48). На рис. 7 сплошными линиями показаны распределения компонент поля по поперечной координате ρ (мгновенные снимки) для двух моментов времени в случае

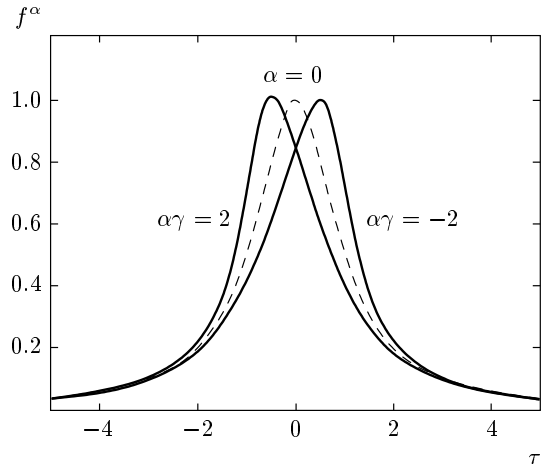


Рис. 6. Графики функций $f^\alpha(\tau)$ при $\alpha\gamma = \pm 2$. Штриховая кривая отвечает $\alpha = 0$ и зависимости (49)

$\alpha\gamma < 0$ ($\alpha\gamma = -0.4$), а на рис. 8 — те же распределения при $\alpha\gamma > 0$ ($\alpha\gamma = 0.4$). Если не рассматривать область $\rho \ll 1$ вблизи источника, то процесс распространения одиночного импульса, излучаемого осевым током, качественно аналогичен рассмотренной нами ранее (см. рис. 2, 4) эволюции начального возмущения, заданного формулами (44), (45). При $\alpha\gamma < 0$ увеличивается крутизна участка профиля, на котором E/γ возрастает в направлении распространения волны и в точке $\rho = \rho^*$ в момент $\tau = \tau^*$ возникает ударная волна (рис. 7). В случае $\alpha\gamma > 0$ происходит увеличение крутизны участков, на которых E/γ убывает в направлении распространения и разрыв вначале формируется на переднем фронте импульса $\rho = \rho_1^*$, $\tau = \tau_1^*$ (см. рис. 8). Дальнейшее распространение приведет к образованию второго разрыва на заднем фронте при $\rho = \rho_2^*$, $\tau = \tau_2^*$ и профиль примет вид N -волны (см. рис. 5).

Приближенно найти координаты формирования ударных волн можно, исходя из следующей простой формулы, аналогичной (47):

$$R = A (\alpha\gamma)^{-2}, \quad (61)$$

где $R = \rho^*$, $A \approx 1.8$ при $\alpha\gamma < 0$ и $R = \rho_1^*$, $A \approx 9$ при $\alpha\gamma > 0$. Численные расчеты также показывают, что расстояние ρ_2^* , на котором образуется второй разрыв в случае $\alpha\gamma > 0$, много больше ρ_1^* . Если в области $\rho > \rho_1^*$ продолжать пользоваться полученным решением, пренебрегая отражением волн от цилиндрической поверхности разрыва на переднем фронте импульса, то значение ρ_2^* можно найти по формуле (61), где нужно считать $R = \rho_2^*$, $A \approx 450$.

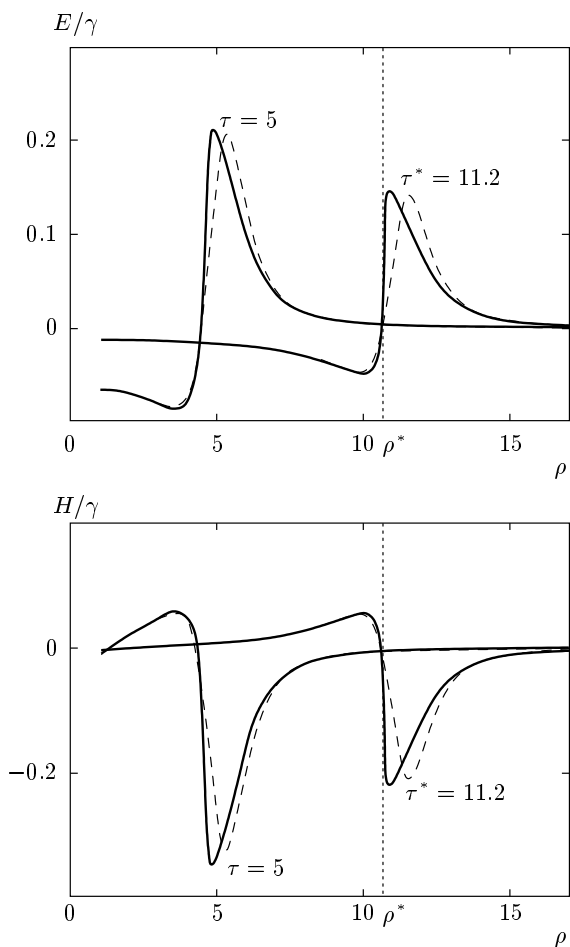


Рис. 7. Распределения компонент электрического и магнитного полей импульсного источника по координате ρ в различные моменты времени при $\alpha\gamma = -0.4$, $\varepsilon_0 = 2$ (сплошные кривые). Штриховые кривые отвечают линейной задаче ($\alpha = 0$, $\varepsilon_0 = 2$)

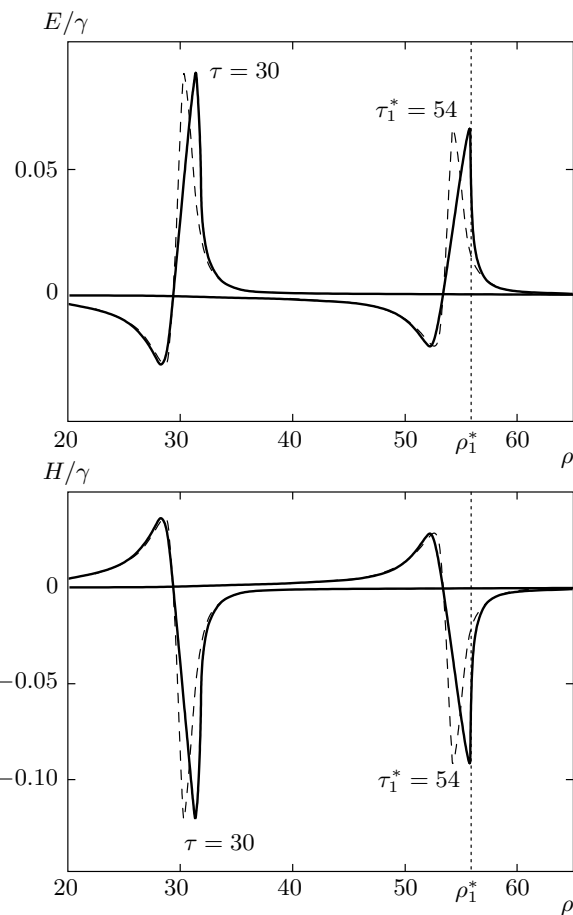


Рис. 8. Распределения компонент электрического и магнитного полей импульсного источника по координате ρ в различные моменты времени при $\alpha\gamma = 0.4$, $\varepsilon_0 = 2$ (сплошные кривые). Штриховые кривые отвечают линейной задаче ($\alpha = 0$, $\varepsilon_0 = 2$)

Оценим теперь возможность наблюдения рассмотренных волновых процессов в реальных условиях. Заметим, что экспериментальным исследованиям формирования ударных электромагнитных волн в волноводах, заполненных нелинейной средой, а также в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами, посвящено довольно большое число работ (см., например, [26–28]). В случае цилиндрических волн ситуация существенно усложняется, поскольку для создания ударного фронта требуется наличие слабодиспергирующих нелинейных материалов достаточно большого объема и мощных источников электромагнитного излучения, обладающих соответствующей симметрией. Необходимые условия могут, по-видимому, реализовываться при распростране-

нии волн СВЧ-диапазона в сегнетоэлектрических кристаллах. Будем полагать, что амплитуда тока источника $I_0 = 200 \text{ A} = 6 \cdot 10^{11}$ ед. СГС, а длительность импульса $T = 10^{-9}$ с (спектр такого сигнала сосредоточен в области частот $\omega/2\pi < T^{-1} = 10^9$ Гц). Параметры среды примем равными $\varepsilon_0 = 10^4$, $\alpha = 0.5 \text{ см}\cdot\text{кВ}^{-1} = 0.15$ ед. СГС. Эти величины относятся к кристаллу SrTiO_3 при низких температурах $T \approx 20 \text{ K}$ [29]. Кристаллы титаната стронция обладают в СВЧ-диапазоне малыми диэлектрическими потерями. Подставляя приведенные значения в формулу (61) ($\alpha\gamma = -0.4$, $A = 1.8$), для координаты разрыва имеем $r^* = cT\rho^*/\sqrt{\varepsilon_0} \approx 3.4$ см, что является сравнимым с типичными размерами кристаллов. Сделанные оценки показывают принципиальную возможность наблюдения описанных явлений. Формирование ударных волн в одиночном

цилиндрическом импульсе может наблюдаться при пробое кристаллических диэлектриков, когда в образце на короткое время возникает токовая нить малого радиуса (так называемое шнурование тока). Амплитуда I_0 в этом случае принимает весьма большие значения.

6. ОБ ИЗЛУЧЕНИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ТОКА

Рассмотрим случай, когда ток $I(t)$ в формуле (48) меняется по гармоническому закону

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t),$$

где $\omega = \text{const}$. Решение задачи об излучении такого источника в линейной среде с $\varepsilon_0 = \text{const}$ хорошо известно и представляет собой расходящуюся цилиндрическую монохроматическую волну:

$$\mathcal{E}(\rho, \tau) = \gamma [J_0(\rho) \cos \tau + Y_0(\rho) \sin \tau], \quad (62)$$

$$\mathcal{H}(\rho, \tau) = -\gamma [J_1(\rho) \sin \tau - Y_1(\rho) \cos \tau], \quad (63)$$

где

$$\gamma = -\frac{\pi I_0 \omega}{c^2}, \quad \rho = \frac{r \omega \sqrt{\varepsilon_0}}{c}, \quad \tau = \omega t,$$

J_n и Y_n — функции Бесселя соответственно первого и второго рода.

Подставляя (62) и (63) в (35) и (36), имеем

$$E = \gamma [J_0(\varrho) \cos \theta + Y_0(\varrho) \sin \theta], \quad (64)$$

$$H = -\gamma \sqrt{\varepsilon(E)} [J_1(\varrho) \sin \theta - Y_1(\varrho) \cos \theta], \quad (65)$$

где

$$\varrho = \rho \sqrt{\frac{\varepsilon(E)}{\varepsilon_0}}, \quad \theta = \tau - \frac{\alpha \rho H}{2\sqrt{\varepsilon_0}}.$$

Функции $E(r, t)$ и $H(r, t)$, определяемые соотношениями (64) и (65), удовлетворяют системе (1), однако, вообще говоря, неправильно описывают реальное распределение компонент поля в нелинейной среде без дисперсии. При излучении монохроматического тока нелинейные искажения тоже приводят к образованию разрывов начиная с некоторого расстояния $\rho = \rho^*$ даже в случае сколь угодно малых I_0 и α . В отличие от рассмотренных нами ранее нестационарных задач, здесь ударная волна (с пилообразным профилем поля) существует при любых значениях времени $-\infty < t < \infty$. Наличие же разрывов компонент поля в нелинейной среде означает су-

ществование скачков диэлектрической проницаемости. Поэтому для правильного описания поля в данном случае дифференциальные уравнения (1) необходимо дополнить граничными условиями на движущихся цилиндрических поверхностях таких разрывов. Поля E и H , определяемые формулами (64) и (65), заведомо не удовлетворяют граничным условиям, поскольку соответствующие формулы описывают только расходящуюся волну, распространяющуюся в одном направлении, и не учитывают отражения от ударного фронта.

Тем не менее, полученное точное решение (64), (65) может представлять определенный интерес. Вполне понятно, что при слабой нелинейности разрыв в распределениях полей монохроматического источника образуется на больших расстояниях от оси ($\rho^* \gg 1$), где амплитуда цилиндрической волны является малой. В этом случае отражением от разрыва можно пренебречь и обсуждаемые формулы будут с хорошей точностью описывать накопление соответствующих нелинейных искажений. Отметим, что такой подход часто используется в гидродинамике, где волну малой амплитуды можно считать простой и при наличии разрывов [13]. Другой возможной областью применения соотношений (64), (65) являются асимптотические методы. Наличие малых потерь в среде можно, по-видимому, учесть введением малых поправок к этим формулам.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен новый метод построения точных решений уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные поля с цилиндрической симметрией в нелинейной среде без дисперсии. Использованная теоретическая модель экспоненциальной зависимости D от E отвечает диэлектрическим свойствам нецентросимметричных сред при слабой нелинейности. В отличие от автоматического подхода, позволившего получить некоторые точные, физически интересные решения нелинейных неавтономных уравнений гиперболического типа [11–13], существенным достоинством предложенного метода является возможность находить решения, содержащие характерные масштабы длины или времени. Данное обстоятельство расширяет круг рассматриваемых задач. Вместе с тем, применяемый математический аппарат достаточно прост и опирается фактически на замену переменных. В данной работе построены точные решения начальной задачи об эволюции локализованного цилиндри-

чески-симметричного распределения поля, а также задачи излучения импульсного осевого тока в нелинейной среде без дисперсии. Показано, что описываемые данными решениями нелинейные эффекты могут проявляться в экспериментальных условиях.

В заключение заметим, что для различных приложений может представлять интерес рассмотрение колебаний электромагнитного поля в ограниченном цилиндрическом объеме (резонаторе), заполненном нелинейной средой, а также исследование нелинейных эффектов в сходящихся цилиндрических электромагнитных волнах. Упомянутые задачи могут быть решены с помощью метода, примененного в настоящей работе, но они требуют отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00164-а), а также программы «Ведущие научные школы» (проект № НШ-5180.2008.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
2. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
3. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).
4. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Изд-во ИПФ РАН, Нижний Новгород (1997).
5. И. А. Молотков, *Аналитические методы в теории нелинейных волн*, Физматлит, Москва (2003).
6. A. S. Fokas and Q. M. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3293 (1994).
7. A. S. Fokas, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 190201 (2006).
8. В. М. Журавлев, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 11 (2002).
9. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, Москва (2001).
10. A. V. Brovko, A. V. Manenkov, and A. G. Rozhnev, *Opt. Quant. Electron.* **35**, 395 (2003).
11. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, Москва (1977).
12. G. Guderley, *Luftfahrtforschung* **19**, 202 (1942).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
14. О. В. Руденко, С. И. Солуян, *ДАН СССР* **190**, 815 (1970).
15. О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, Москва (1975).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
17. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, *ЖЭТФ* **36**, 957 (1959).
18. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, *Изв. вузов. Радиофизика* **3**, 79 (1960).
19. Б. Риман, *Сочинения*, Гостехиздат, Москва (1948).
20. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1964).
21. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения*, Физматлит, Москва (2002).
22. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).
23. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, *Изв. вузов. Радиофизика* **10**, 1376 (1967).
24. Л. А. Островский, *УФН* **116**, 315 (1975).
25. Л. Фелсен, Н. Маркувиц, *Излучение и рассеяние волн*, т. 1, 2, Мир, Москва (1978).
26. И. Г. Катаев, *Ударные электромагнитные волны*, Сов. радио, Москва (1963).
27. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Э. Я. Дауме и др., *ЖЭТФ* **47**, 1699 (1964).
28. Ю. К. Богатырев, *Изв. вузов. Радиофизика* **8**, 1171 (1965).
29. И. В. Иванов, *УФН* **132**, 695 (1980).