

# ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦЫ, ВЫЛЕТАЮЩЕЙ ИЗ ВЕРШИНЫ ПРОВОДЯЩЕЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*А. В. Кольцов\**, *А. В. Серов\*\**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 мая 2009 г.

Определено пространственное распределение поля переходного излучения релятивистской частицы, вылетающей из вершины конической поверхности и движущейся вдоль ее продольной оси. Получены выражения, позволяющие вычислить угловые распределения интенсивности излучения при различных углах раствора от 0 до  $\pi$ . Проведено сравнение характеристик переходного излучения, генерируемого в рупоре и в двугранном угле.

PACS: 41.60.-m, 52.70.Gw

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Переходное излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела двух сред, обладает свойствами, позволяющими использовать его при решении различных задач. Физике данного явления посвящено много статей и несколько монографий [1–3]. Но до сих пор основное внимание было обращено на излучение, возникающее при пересечении одной или нескольких плоских границ раздела между средами. Случаи более сложных поверхностей раздела исследованы далеко не так подробно. Однако следует отметить, что особенности спектрально-угловых распределений переходного излучения на сложных поверхностях раздела позволяют ставить новые задачи и открывают дополнительные возможности в традиционных применениях этого излучения. Например, исследования переходного излучения, возникающего при пересечении частицей параболического зеркала [4] и линзы [5], показали, что излучение собирается в фокусе зеркала и в фокусе линзы. Использование таких границ раздела приводит к увеличению интенсивности излучения в фокусе и позволяет осуществить фокусировку излучения в стороне от траектории частицы. Переходное излучение в двугранном угле рассмотрено в работах [6–9]. Было показано, что в двугранном угле

распределение излучения более чувствительно к направлению движения излучающей частицы и к положению точки пересечения поверхности, чем излучение, возбуждаемое при пересечении плоской поверхности. Отмечено, что максимальная интенсивность в угловом распределении выше у излучения, возбуждаемого в малом двугранном угле, чем на плоской поверхности.

В настоящей работе рассматривается переходное излучение частицы, движущейся по оси конической поверхности, обладающей идеальной проводимостью. Полученные выражения позволяют описать поле излучения как в пространстве рупора, образованного конической поверхностью (излучение в рупоре), так и в пространстве вне рупора (излучение на конусе). Обсуждаются особенности пространственного распределения излучения, проводится сравнение с излучением в двугранном угле.

## 2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Геометрия задачи представлена на рис. 1. Введем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$ . Начало координат поместим в вершину конического рупора. Угол раствора, т. е. угол между осью рупора и образующей конуса, обозначим через  $\alpha$ . Частица с зарядом  $q$  вылетает из начала координат со скоростью  $v$  под углом инъекции  $\theta_0$  к оси рупора. Будем считать, что плоскость  $\varphi = 0$  проходит через ось ру-

\*E-mail: koltsov@x4u.lebedev.ru

\*\*E-mail: serov@x4u.lebedev.ru

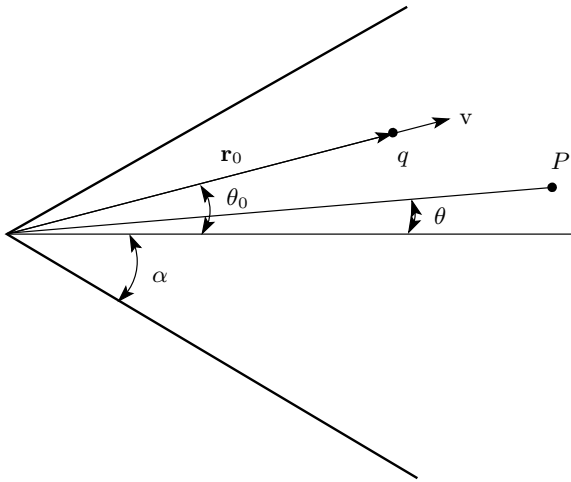


Рис. 1. Геометрия задачи

пора и вектор скорости частицы. Угол между осью рупора и прямой, направленной в точку наблюдения  $P$ , будем обозначать через  $\theta$ .

В дальнейшем используется система единиц, в которой скорость света  $c = 1$ .

Компоненты Фурье электромагнитных полей  $\mathbf{E}_\omega(\rho, \theta, \varphi)$  и  $\mathbf{H}_\omega(\rho, \theta, \varphi)$  определяются выражениями

$$\mathbf{E}_\omega(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(\rho, \theta, \varphi, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_\omega(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{H}(\rho, \theta, \varphi, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

Нижние индексы  $\omega$  у фурье-образов будут опускаться.

Анализ показывает [10], что если отлична от нуля только  $j_r$ -компонента тока, то  $H_r$  можно положить равным нулю и все поля будут выражаться через функцию  $U$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = -\frac{4\pi j_r}{ik}, \quad (3)$$

где  $k = \omega$ , и принимающую на конической поверхности нулевое значение  $U|_{\theta=\alpha} = 0$ . В этом случае электромагнитные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  выражаются через  $U$  согласно формулам

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U, & E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = i \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -i \frac{k}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Чтобы найти  $U$  построим сначала функцию Грина  $G$  для данной геометрии. Функция  $G$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + k^2 G = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6)$$

с граничным условием  $G|_{\theta=\alpha} = 0$ .

Для построения функции  $G$  определим систему собственных функций  $Q$ , удовлетворяющих однородному уравнению. Будем искать собственную функцию в виде произведения трех функций  $Q = R(r)P(\theta)F(\varphi)$  [10]. В качестве азимутальной функции  $F$  можно взять

$$F = e^{im\varphi}. \quad (7)$$

Индекс  $m$  должен быть целым числом, поскольку величина  $Q$  не изменяется при замене  $\varphi$  на  $\varphi + 2\pi$ . Величина  $m$  характеризует изменение поля по азимутальному углу и равна числу периодов колебаний поля при изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ .

Функция  $P$  определяется из решения уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (8)$$

Как известно [10], в качестве решения можно взять  $P_\nu^m(\cos \theta)$ , где  $P_\nu^m(x)$  — функция Лежандра. Для выполнения граничного условия необходимо, чтобы  $P_\nu^m(\cos \alpha) = 0$ . Граничное условие определяет спектр собственных значений уравнения (8). Отметим, что для данного  $m$  в общем случае будет существовать бесконечно много  $\nu$ , для которых выполнено уравнение  $P_\nu^m(\cos \alpha) = 0$ . Будем обозначать их через  $\nu_{mn}$ . Поскольку при целых  $m$  функция  $P_\nu^{-m}$  отличается от  $P_\nu^m$  только коэффициентом, будем использовать функции Лежандра, для которых  $m \geq 0$  и считать, что  $\nu_{mn} = \nu_{|m|n}$ .

Радиальная функция  $R(r)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} R + k^2 R = 0. \quad (9)$$

Представим функцию  $R$  в виде произведения  $R = \sqrt{r}Z(r)$ . Подставляя  $R$  в формулу (9), получаем для новой функции  $Z$  уравнение Бесселя порядка  $(\nu + 1/2)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{(\nu + 1/2)^2}{r^2} Z + k^2 Z = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta') \times \sqrt{r'} H_{\lambda_{mn}}^{(2)}(kr') \sqrt{r} J_{\lambda_{mn}}(kr) \quad \text{при } r < r', \quad (11)$$

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta') \times \sqrt{r} H_{\lambda_{mn}}^{(2)}(kr) \sqrt{r'} J_{\lambda_{mn}}(kr') \quad \text{при } r > r'. \quad (12)$$

В выражениях (11) и (12) через  $\lambda_{mn}$  обозначены  $(\nu_{mn} + 1/2)$ , а функция Ганкеля  $H_{\lambda_{mn}}^{(2)}(kr)$  выбрана для того, чтобы удовлетворялись граничные условия на бесконечности.

Подставляя формулы (11), (12) в уравнение (6), находим выражение для коэффициента  $A_{mn}$ :

$$A_{mn} = \frac{\pi}{i(r')^2} \frac{1}{S_{mn}}, \quad (13)$$

где

$$S_{mn} = \int_{\cos \alpha}^1 P_{\nu_{mn}}^{|m|}(x) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(x) dx.$$

С учетом (13) функция Грина имеет вид

$$G = -\pi i \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta') \frac{\sqrt{r'r}}{(r')^2} \times H_{\lambda_{mn}}^{(2)}(kr') J_{\lambda_{mn}}(kr) \quad \text{при } r < r', \quad (14)$$

$$G = -\pi i \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta') \frac{\sqrt{r'r}}{(r')^2} \times H_{\lambda_{mn}}^{(2)}(kr) J_{\lambda_{mn}}(kr') \quad \text{при } r > r'. \quad (15)$$

Функция  $U$  выражается через функцию Грина  $G$  при помощи соотношения

$$U = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{j_r}{ik} d\mathbf{r}'. \quad (16)$$

Частица с зарядом  $q$ , движущаяся вдоль координаты  $r$  создает ток, фурье-компонента которого описывается выражением

$$j_{\omega}^r = \frac{1}{2\pi} \int \frac{q\beta(t)\delta(r-r_0(t))}{r^2} \times \frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin \theta} \delta(\varphi-\varphi_0) e^{-i\omega t} dt, \quad (17)$$

где  $\beta$  — скорость частицы, а  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  — координаты частицы.

Подставляя формулы (15), (17) в соотношение (16) и учитывая асимптотику функции Ганкеля  $H_p^{(2)}$  при  $r \rightarrow \infty$ , получаем для функции  $U$

$$U = -\frac{q}{2k} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-ikr} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \times \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) \times e^{\frac{i\lambda_{mn}\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}} \int \frac{J_{\lambda_{mn}}(kr_0(t))\beta(t)}{(r_0(t))^{3/2}} e^{-i\omega t} dt. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в (4), (5), вычислим составляющие  $H_{\theta}$  и  $H_{\varphi}$  магнитного поля излучения. Можно показать, что  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , поэтому для данной нормировки энергия  $dW$ , излучаемая в интервал частот  $d\omega$  в единицу телесного угла  $d\Omega$ , равна

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = |\mathbf{H}|^2 r^2 dr^2 = (|K_{\theta}|^2 + |K_{\varphi}|^2), \quad (19)$$

где

$$K_{\theta} = \frac{q}{2 \sin \theta} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \exp(im(\varphi - \varphi_0)) \times \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) \times \exp\left(\frac{i\lambda_{mn}\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \int \frac{J_{\lambda_{mn}}(kr_0(t))\beta(t)}{(r_0(t))^{3/2}} \times \exp(-i\omega t) dt,$$

$$K_{\varphi} = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im(\varphi - \varphi_0)) \times \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} [P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta)] P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) \times \exp\left(\frac{i\lambda_{mn}\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \int \frac{J_{\lambda_{mn}}(kr_0(t))\beta(t)}{(r_0(t))^{3/2}} \times \exp(-i\omega t) dt.$$

При постоянной скорости выражения для  $K_\theta$  и  $K_\varphi$  (с точностью до несущественного фазового множителя) имеют вид

$$K_\theta = \frac{q}{\sin \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} \times \\ \times P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) H_{mn}(\beta), \quad (20)$$

$$K_\varphi = q \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi_0)} \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \\ \times [P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta)] P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) H_{mn}(\beta), \quad (21)$$

где функции  $S_{mn}$  и  $H_{mn}(\beta)$  описываются соотношениями

$$S_{mn} = \\ = \frac{\sin \alpha}{2\nu_{mn} + 1} P_{\nu_{mn}+1}^{m+1}(\cos \alpha) \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu^m(\cos \alpha) \Big|_{\nu=\nu_{mn}}, \quad (22)$$

$$H_{mn}(\beta) = \frac{\beta^{\nu_{mn}}}{4\pi\Gamma(\nu_{mn} + 3/2)} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\nu_{mn}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_{mn} + 1}{2}\right) \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{\nu_{mn}}{2}, \frac{\nu_{mn} + 1}{2}; \nu_{mn} + \frac{3}{2}; \beta^2\right), \quad (23)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция,  ${}_2F_1(x)$  — гипергеометрическая функция Гаусса, а производная  $\partial P_{\nu_{mn}}^m(\cos \alpha)/\partial \theta$  равна

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) = \\ = \frac{m}{tg \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) + P_{\nu_{mn}}^{|m|+1}(\cos \theta). \quad (24)$$

Выражения (19)–(24) позволяют рассчитать угловое распределение переходного излучения.

Полная энергия, испущенная на данной частоте, равна

$$\frac{dW}{d\omega} = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (|K_\theta|^2 + |K_\varphi|^2) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (25)$$

После интегрирования по  $\varphi$  получаем

$$\frac{dW}{d\omega} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} H_{mn}(\beta) H_{ms}(\beta) \times \\ \times S_{mn}^{-1} S_{ms}^{-1} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0) P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta_0) \times \\ \times \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta) \right]. \quad (26)$$

Используя уравнение (8) и граничное условие  $P_{\nu_{mn}}^m(\cos \alpha) = 0$ , можно показать, что

$$\int_0^\alpha \sin \theta d\theta \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta) \right] = \\ = \int_0^\alpha \nu_{mn}(\nu_{mn} + 1) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta) P_{\nu_{ms}}^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ = \nu_{mn}(\nu_{mn} + 1) S_{mn} \delta_{ns}.$$

С учетом этого соотношения для энергии излучения получаем

$$\frac{dW}{d\omega} = 2\pi q^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \nu_{mn}(\nu_{mn} + 1) \times \\ \times S_{mn}^{-1} [H_{mn}(\beta) P_{\nu_{mn}}^{|m|}(\cos \theta_0)]^2. \quad (27)$$

### 3. ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЧАСТИЦЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ ПРОВОДЯЩУЮ КОНИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Были проведены расчеты распределения излучения в случае, когда частица движется по оси конической поверхности, т. е. угол инжекции  $\theta_0 = 0$ . При этих условиях электромагнитное поле становится азимутально-симметричным (не зависящим от угла  $\varphi$ ), поэтому в выражениях для  $K_\varphi$  и  $K_\theta$  нужно оставить только члены с  $m = 0$ . В этом случае  $K_\theta = 0$ , а для  $K_\varphi$  получаем

$$K_\varphi = q \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{-1} P_{\nu_n}^1(\cos \theta) H_n(\beta), \quad (28)$$

где функции  $S_n$  и  $H_n$  имеют вид

$$S_n = \frac{\sin \alpha}{2\nu_n + 1} P_{\nu_n}^1(\cos \alpha) \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu(\cos \alpha) \Big|_{\nu=\nu_n}, \quad (29)$$

$$H_n(\beta) = \frac{\beta^{\nu_n}}{4\pi\Gamma(\nu_n + 3/2)} \Gamma\left(\frac{\nu_n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_n + 1}{2}\right) \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n + 1}{2}; \nu_n + \frac{3}{2}; \beta^2\right). \quad (30)$$

При угле раствора  $\alpha = \pi/2$  коническая поверхность превращается в плоскость. В этом случае собственные значения  $\nu_n$  определяются соотношением  $\nu_n = 2n + 1$ , а  $S_n$  равно  $S_n = 1/(4n + 3)$ . Для  $K_\varphi$  имеем

$$K_\varphi = q \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^1(\cos \theta) (4n + 3) H_n(\beta), \quad (31)$$

а функция  $H_n(\beta)$  описывается выражением

$$H_n(\beta) = \frac{\beta^{2n+1}}{4\pi\Gamma(2n + 5/2)} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n + 1) \times \\ \times {}_2F_1\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; 2n + \frac{5}{2}; \beta^2\right). \quad (32)$$

Энергия излучения будет равна

$$\frac{dW}{d\omega} = 2\pi q^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2n+2)(4n+3) [H_n(\beta)]^2. \quad (33)$$

Выражение, описывающее угловое распределение излучения частицы, пересекающей плоскую границу раздела между вакуумом и идеальным проводником, было получено в первой работе Гинзбурга и Франка по теории переходного излучения [12]. Это выражение имеет вид [12, 13]

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (34)$$

Распределение излучения, вычисленное по соотношениям (19)–(24), для случая, когда  $\alpha = \pi/2$ , совпадает с расчетом по формуле (34).

Анализ результатов расчетов показывает, что при релятивистских энергиях ( $\gamma > 10$ ) угловые распределения излучения с точностью  $10^{-2}$  аппроксимируются выражениями

$$K_\varphi = \begin{cases} \frac{q\beta \sin \theta}{\pi(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}, & \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{q}{\pi \sin \theta}, & \theta \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (35)$$

т. е. излучение, направленное вперед ( $0 < \theta < \pi/2$ ), имеет угловое распределение переходного излучения частицы, пересекающей плоскую поверхность, а излучение, направленное назад ( $\pi/2 < \theta < \pi$ ), пропорционально  $1/\sin \theta$ . С увеличением  $\gamma$  точность аппроксимации повышается.

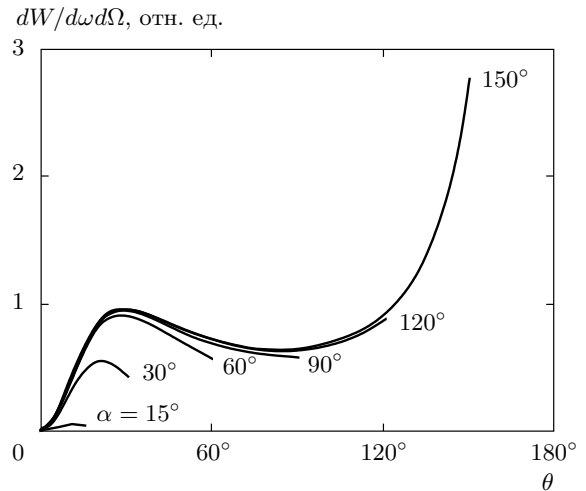


Рис. 2. Угловое распределение интенсивности переходного излучения при различных углах раствора конической поверхности;  $\beta = 0.9$

Рассмотрим некоторые особенности в угловом распределении переходного излучения на конической поверхности и сравним их с излучением в двугранном угле.

На рис. 2 показаны угловые распределения интенсивности  $dW/d\omega d\Omega$  при различных углах раствора  $\alpha$ . Скорость частиц  $\beta = 0.9$  (приведенная энергия  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 2.3$ ). Видно, что при углах раствора  $\alpha > \pi/2$  увеличение  $\alpha$  практически не изменяет интенсивность излучения, направленного в сторону движения частицы, но происходит существенный рост интенсивности излучения, направленного в противоположную сторону. Особенно увеличивается излучение под углами близкими к образующей конической поверхности.

Из рисунка следует, что при больших углах раствора первый максимум интенсивности наблюдается при  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ , т. е. под углом, характерным для излучения релятивистских частиц. При уменьшении угла раствора происходит снижение интенсивности в максимуме и сам максимум сдвигается в сторону малых углов. Отметим, что такая зависимость пространственного распределения от угла раствора характерна только для излучения в рупоре. Переходное излучение частицы в малых двугранных углах имеет обратную зависимость. В плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла, при уменьшении  $\alpha$  происходит увеличение интенсивности в максимуме [9]. На рис. 3 приведены угловые распределения интенсивности излучения частицы при пересечении конуса (сплошные кривые)

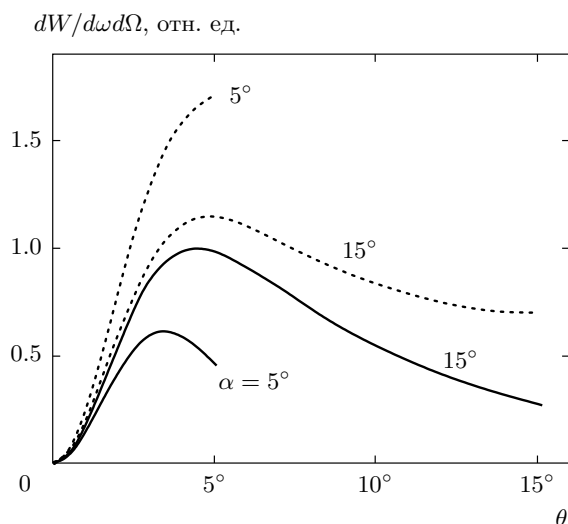


Рис. 3. Угловые распределения в конусе (сплошные кривые) и в двугранном угле (пунктирные кривые) при малых углах раствора;  $\gamma = 15$

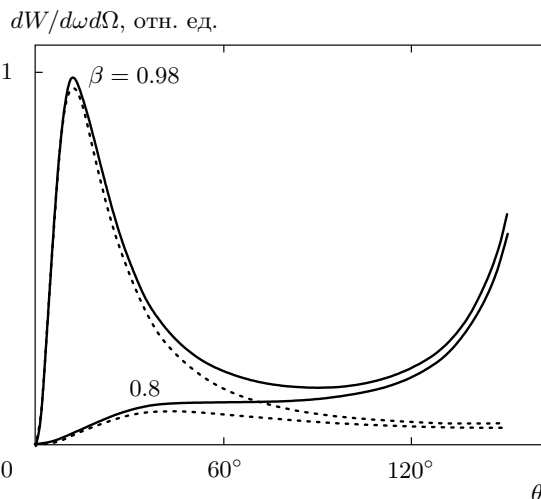


Рис. 5. Угловые распределения в конусе (сплошные кривые) и в двугранном угле (пунктирные кривые) при различных скоростях частиц;  $\alpha = 150^\circ$

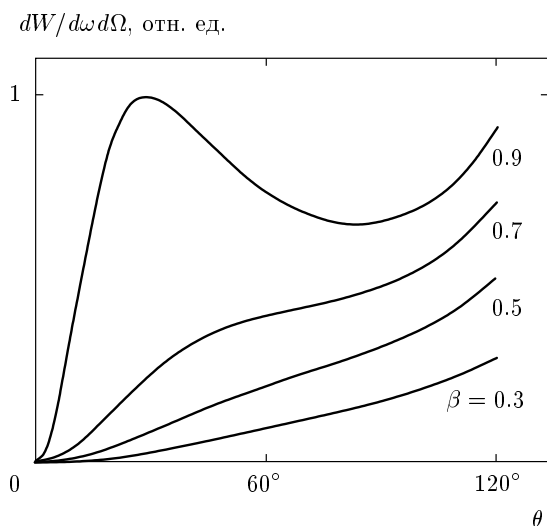


Рис. 4. Зависимости углового распределения излучения от начальной скорости частицы;  $\alpha = 120^\circ$

и двугранного угла (пунктирные кривые). Энергия частиц  $\gamma = 15$ , углы раствора  $\alpha = 15^\circ$  и  $\alpha = 5^\circ$ . Видно, что при одинаковом угле раствора  $\alpha = 5^\circ$  в двугранном угле интенсивность излучения в максимуме более чем в 2 раза выше, чем в конусе. Как показывают расчеты, при увеличении угла раствора различие в угловых распределениях для конуса и двугранного угла уменьшается, а при  $\alpha = \pi/2$ , когда конус и двугранный угол превращаются в плоские поверхности, угловые распределения совпадают.

Укажем еще на одну особенность, касающуюся углового распределения поля снаружи рупора, образованного конической поверхностью. Из расчетов следует, что при углах наблюдения  $\theta > 90^\circ$  с увеличением  $\theta$  интенсивность излучения возрастает (см. кривые, соответствующие  $\alpha = 120^\circ$  и  $\alpha = 150^\circ$  на рис. 2). На рис. 4 показаны угловые распределения для частиц с различной начальной скоростью. Угол раствора  $\alpha = 120^\circ$ . Как видно на рисунке, слаборелятивистские частицы излучают, в основном, в сторону, противоположную направлению движения. При увеличении скорости частиц усиливается излучение вперед и при  $\beta > 0.8$  в угловом распределении интенсивности появляется максимум при  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ . При скоростях частицы  $\beta > 0.9$  и углах раствора  $\alpha > \pi/2$  интенсивность как функция угла  $\theta$  имеет два максимума: при  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$  и вдоль образующей конуса  $\theta = \alpha$ . Интенсивность излучения проходит через минимум при  $\theta \approx \pi/2$ . Расчеты показывают, что интенсивность излучения в максимуме, расположенном под углом  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ , пропорциональна квадрату энергии частицы  $dW/d\omega d\Omega \sim \gamma^2$ , а интенсивность излучения, направленного вдоль образующей конуса  $\theta \approx \alpha$ , практически не зависит от  $\beta$ .

На рис. 5 показаны угловые распределения интенсивности излучения частицы, движущейся со скоростью  $\beta = 0.8$  и  $\beta = 0.98$  по оси конуса (сплошные кривые) и по биссектрисе двугранного угла (пунктирные кривые). Во всех случаях угол раствора  $\alpha = 150^\circ$ . Сравнение показывает, что при углах

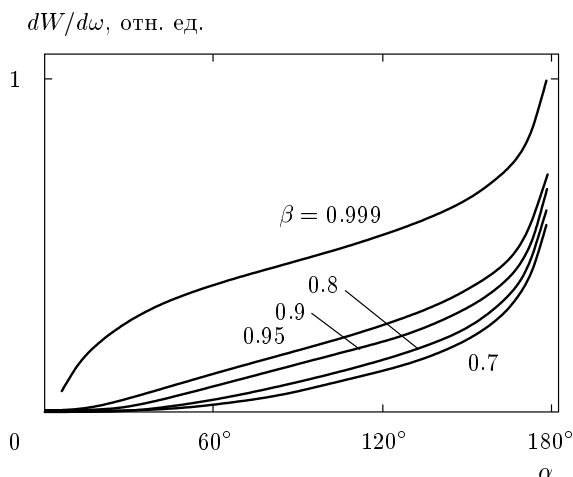


Рис. 6. Зависимость энергии излучения от угла раствора конической поверхности  $\alpha$

наблюдения  $0 < \theta \leq 2\sqrt{1 - \beta^2}$  распределения интенсивности на конусе и двугранном угле практически совпадают, а при углах  $\theta > 60^\circ$  интенсивность излучения в двугранном угле существенно ниже.

Энергия излучения на данной частоте  $dW/d\omega$  в случае, когда частица движется вдоль оси конуса, описывается выражением

$$\frac{dW}{d\omega} = 2\pi q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n(\nu_n + 1) S_n^{-1} [H_n(\beta)]^2. \quad (36)$$

На рис. 6 показаны зависимости  $dW/d\omega$  от угла раствора конуса  $\alpha$  при различных значениях скорости частиц  $\beta$ . На рисунке видно, что увеличение скорости частиц по-разному влияет на излучение вперед (углы наблюдения  $0 < \theta < \pi/2$ ) и излучение назад (углы наблюдения  $\pi/2 < \theta < \pi$ ). Характер зависимости  $dW/d\omega$  от  $\alpha$  для излучения вперед существенно изменяется от почти линейного при малых скоростях до явно нелинейного при релятивистских скоростях частиц. Для излучения назад характер зависимости не изменяется.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача возбуждения переходного излучения частицей, пересекающей коническую поверхность. Получены выражения, описывающие пространственное распределение излучения. Показано, что переходное излучение на конусе обладает

некоторыми особенностями в угловом распределении излучения, отличающими его от излучения на плоской поверхности и на двугранном угле. Положение максимума интенсивности в угловом распределении определяется не только энергией частицы, но и величиной угла раствора конуса. Для конусов с углом раствора больше  $\pi/2$  и при скоростях частиц  $\beta > 0.8$  угловое распределение интенсивности излучения имеет два максимума. Один максимум наблюдается при  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ , а второй при  $\theta = \alpha$ .

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, *Переходное излучение и переходное рассеяние*, Наука, Москва (1984).
2. М. Л. Тер-Микаелян, *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*, Изд-во АН Армянской ССР, Ереван (1969).
3. Г. М. Гарибян, Ян Ши, *Рентгеновское переходное излучение*, Изд-во АН Армянской ССР, Ереван (1983).
4. М. И. Рязанов, И. С. Тилинин, *ЖЭТФ* **71**, 2078 (1976).
5. M. I. Ryazanov and A. N. Safronov, *Laser Phys.* **6**, 708 (1996).
6. А. В. Серов, Б. М. Болотовский, *ЖЭТФ* **131**, 994 (2007).
7. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 8 (2007).
8. А. В. Серов, *Кратк. сообщ. по физике ФИАН* **2**, 26 (2009).
9. А. В. Кольцов, А. В. Серов, *ЖЭТФ* **136**, 44 (2009).
10. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и связь*, Москва (1988).
11. Л. Фелсен, Н. Маркувиц, *Излучение и рассеяние волн*, Мир, Москва (1978).
12. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, *ЖЭТФ* **16**, 15 (1946).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).