

# КОНКУРЕНЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ МОД В ВОЛНОВОДНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

*Д. В. Высоцкий, А. П. Напартович\**

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 1 февраля 2008 г.,  
после переработки 24 августа 2008 г.

Разработана теория распространения монохроматического поля в волоконном усилителе. Показано, что конкуренция между когерентными полями мод в волноводе с неоднородным поперечным профилем усиления качественно отличается от взаимодействия некогерентных полей. Пространственные межмодовые биения интенсивности поля приводят к ограничению усиления моды с меньшей мощностью, даже если она имеет больший модовый коэффициент усиления. В зависимости от параметров входного пучка на выходе усилителя может преобладать та или иная мода волновода или их комбинация. Теория проиллюстрирована на примере усилителей в форме одного планарного волновода, а также систем из двух и трех тонких планарных волноводов.

PACS: 42.65.Wi, 42.55.Wd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические волноводы получили широкое распространение в таких установившихся приложениях, как оптическая связь, сенсоры, где важно их свойство переносить оптические сигналы без существенного изменения характеристик. Теория пассивных оптических волноводов на сегодняшний день хорошо развита [1, 2]. Имеются коммерческие численные программы для расчета собственных мод разнообразных волноводных структур как в скалярном рассмотрении, так и в векторном.

В последние годы бурно развиваются волоконные лазеры [3], волноводы активно используются и в других типах лазеров. В лазере, состоящем из волновода и его оболочки, усиление обычно сосредоточено внутри волноводов, но поле частично выходит во внешнюю оболочку. Влияние выхода поля в оболочку особенно существенно в одномодовых лазерах, в которых активная сердцевина должна удерживать поле только одной основной моды. Поля всех высших мод должны «вытекать» из волновода, обеспечивая различие в потерях мощности, которое и приводит к генерации только одной моды.

Существующая теория вполне удовлетворительно описывает весь спектр оптических мод для конкретных типов волноводов, свойства которых не изменяются по длине [1]. В волноводах, составленных из нескольких близко расположенных сердцевинок, для нахождения мод необходимо использовать численные методы, что также не представляет проблемы. При теоретическом описании распространения сигнала по составным волноводам обычно используется так называемая теория связанных мод, в которой поле оптической моды составного волновода представляется в виде линейной комбинации мод отдельных волноводов [4]. Закрытые уравнения для коэффициентов разложения полного поля по модам отдельных волноводов можно вывести только для предела слабосвязанных волноводов. В этом пределе наличие соседних волноводов рассматривается как малое возмущение для каждого из них. Переход к составным волноводам дает возможность увеличить апертуру, охваченную излучением, и полную мощность при сохранении плотности мощности. Нелинейные процессы ограничивают предельную плотность мощности в усилителе, приводя к искажению спектра и к потере качества пучка на выходе. Чтобы в системе волноводов одномодовое излучение было распределено по всем сердцевинам, необходима

\*E-mail: napart@mail.ru

сильная оптическая связь между ними. Это требование противоречит условию применимости теории связанных мод.

Недавно в эксперименте [5] был продемонстрирован эффект спонтанной фазовой синхронизации поля в волоконном лазере, содержащем семь активных (усиливающих) сердцевин, образующих ячейку гексагональной решетки. Измеренное распределение интенсивности выходного излучения в дальней зоне свидетельствовало о малой разности фаз полей в сердцевинах. Этот эффект в работе [6] на основе теории связанных мод был приписан влиянию нелинейной резонансной части коэффициента преломления. Численные расчеты методом распространяющихся пучков [7] показали, что эффект синхронизации поля действительно имеет место, однако наличие нелинейности коэффициента преломления практически не сказывается на эволюции распространяющегося поля, а основную роль играет неоднородность распределения насыщаемого усиления в сердцевинах. Анализ оптических мод волокна, проведенный в работе [8], выявил, что мода с синфазным распределением имеет наименьший коэффициент усиления среди семи направляемых мод системы. Это противоречит распространенному убеждению, что мода с максимальным коэффициентом усиления подавляет все остальные моды.

В данной работе развивается теоретический подход к описанию распространения монохроматического излучения по системе активных (усиливающих) сердцевин без использования теории связанных мод. За основу взяты оптические моды составных волноводов, предполагаемые известными (практически они должны находиться численно). Нетривиальность поставленной задачи заключается в необходимости корректного учета неоднородного распределения усиления по сечению в системе волноводов, которое приводит к связи между модами системы, что игнорируется в существующих подходах. Чтобы облегчить понимание необычного поведения поля в усилителе, основные уравнения анализируются на примере простейших волноводных систем, содержащих от одного до трех близко расположенных планарных волноводов.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим содержащий несколько параллельных волноводов усилитель, у которого в поперечном сечении коэффициент преломления (КП)  $n(x, y)$  представляет собой КП  $n_0$  общей оболочки волно-

водов и скачки КП  $\Delta n$  на границах волноводов,  $\Delta n = n(x, y) - n_0$ . (Профили КП в активных волноводах обычно можно приблизить ступенчатыми функциями.) Ограничимся случаем слабонаправляющих волноводов, когда  $\Delta n \ll 1$ , так что можно воспользоваться скалярным и параксиальным приближениями. В этом случае уравнение Гельмгольца для монохроматического стационарного поля  $\mathcal{E} = E(x, y, z) \exp(-i\omega t + ikn_0 z) + \text{c.c.}$  с несущей частотой  $\omega$  сводится [9] к двумерному нестационарному уравнению Шредингера

$$2ikn_0 \frac{\partial E}{\partial z} + \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) E + (2k^2 n_0 \Delta n - ikn_0 g) E = 0. \quad (1)$$

Здесь  $E(x, y, z)$  — комплексная амплитуда поля,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме,  $g(x, y, z)$  — материальный коэффициент усиления (КУ) в волноводе. Профиль КП играет роль потенциала в квантовой механике. Положительный скачок КП в сердцевине в квантовой аналогии соответствует потенциальной яме, в которой могут быть связанные состояния. Для условий волоконного лазера, работающего на длине волны порядка 1 мкм, выполняется условие  $4\pi\Delta n \gg \lambda g$ , так как скачок КП при нынешнем уровне технологии в волоконных лазерах может контролироваться с точностью не лучше чем  $10^{-3}$ , а КУ слабого сигнала (КУСС) обычно не превышает нескольких десятых обратного сантиметра. Следствием относительной малости КУСС является отсутствие его заметного влияния на оптические моды композитного волокна.

Наш подход к анализу уравнения (1) аналогичен известному в квантовой механике переходу к представлению взаимодействия [10], в котором решения уравнения Шредингера разлагаются по системе стационарных волновых функций так называемого «нулевого» гамильтониана системы. Для волноводов такой нулевой гамильтониан включает в себя профиль КП. Соответствующие стационарные функции (оптические моды) — это направляемые моды и моды сплошного спектра, поле которых распределено по всей системе волноводов [1]. Вследствие обычно имеющего место большого различия в площадях сердцевин, где сосредоточено усиление, и оболочки, моды сплошного спектра испытывает намного меньшее усиление, чем направляемые моды, поле которых сконцентрировано в сердцевинах. Поэтому нас интересуют только направляемые моды волновода, которым в квантовой механике соответствуют волновые функции связанных состояний.

Кроме собственных мод в системе волноводов могут эффективно распространяться также «вытекающие моды», являющиеся аналогом функций квазидискретного состояния в квантовой механике [11]. Эти моды, принципиально имеющие потери за счет ухода из волновода, возникают за счет отражения от скачков КП. Их потери тем меньше, чем сильнее отражение от границ волноводов. Разность фаз отраженного и падающего полей близка к  $\pi$ , так что суммарное поле вблизи границы волновода близко к нулю. Поскольку усиление сосредоточено внутри волноводов, вытекающие моды в такой конфигурации имеют малое усиление и потери на выход наружу, так что они не могут конкурировать с удерживаемыми модами. Связь направляемых и не удерживаемых мод, возникающая из-за коэффициента усиления, мала по сравнению с усилением направляемых мод (соответствующие потери направляемых мод для типичных конструкций волноводных усилителей не превышают нескольких процентов на метр [12]). Поэтому искомое поле может быть представлено в виде разложения по направляемым модам, поле каждой из которых удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \Psi_i + 2k^2 n_0 \Delta n \Psi_i = 2kn_0 \tilde{\beta}_i \Psi_i. \quad (2)$$

Здесь комплексная амплитуда поля взята в виде  $E_i = \Psi_i \exp(i\tilde{\beta}_i z)$ , где  $\tilde{\beta}_i$  — постоянная распространения поля моды, отсчитываемая от величины  $kn_0$ , является собственным числом уравнения (2) для каждой из мод ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). В случае направляемых мод как собственные числа, так и собственные функции могут быть выбраны чисто вещественными. Чтобы не усложнять формулы, рассмотрим случай, когда направляемых мод всего две,  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Обобщение на произвольное число направляемых мод выполняется очевидным образом. Полное волновое поле как функция расстояния может быть представлено в виде

$$E = c_1(z) \Psi_1 + c_2(z) \Psi_2. \quad (3)$$

Здесь  $c_i(z)$  — коэффициенты разложения по модам ( $i = 1, 2$ ). Будем полагать, что поля мод нормированы на единицу,  $\iint \Psi^2 dx dy = 1$ . Подставляя разложение (3) в (1), в результате стандартной процедуры находим два уравнения для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dz} &= i\tilde{\beta}_1 c_1 + \frac{1}{2} G_{11} c_1 + \frac{1}{2} G_{12} c_2, \\ \frac{dc_2}{dz} &= i\tilde{\beta}_2 c_2 + \frac{1}{2} G_{22} c_2 + \frac{1}{2} G_{21} c_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Величины  $G_{11}$  и  $G_{22}$  являются стандартными модовыми коэффициентами усиления соответственно для первой и второй мод:

$$G_{ii} = \iint g(x, y) \Psi_i^2 dx dy, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Неоднородность распределения усиления по пространству приводит, несмотря на ортогональность мод, к возникновению связи между модами в уравнениях (4). Соответствующие коэффициенты связи имеют смысл перекрестных межмодовых коэффициентов усиления:

$$G_{12} = G_{21} = \iint g(x, y) \Psi_1 \Psi_2 dx dy. \quad (6)$$

В общем случае появление связи между модами системы приводит к тому, что если на вход в усилитель подается сигнал, совпадающий с одной из оптических мод системы, то при его распространении возбуждается также и другая мода. В пассивных волноводных структурах подобный эффект может возникнуть, если имеется нелинейная зависимость коэффициента преломления от поля [13]. При полях, характерных для волоконных усилителей, роль нелинейности КП незначительна [7].

В отсутствие перекрестного усиления ( $G_{12} = 0$ ) связь эволюции мод, согласно уравнениям (4), остается и определяется зависимостью КУ от суммарной интенсивности обеих мод. Однако, если входной сигнал совпадает с одной из мод, вторая мода при распространении не появляется.

Для анализа системы уравнений (4) удобно перейти к вещественным функциям, представив коэффициенты  $c_{1,2}$  в виде  $b_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$ , так что  $P_{1,2} = b_{1,2}^2$ , где  $P_{1,2}$  — мощность в первой или второй моде. Несложные выкладки приводят к следующей системе трех уравнений:

$$\frac{dP_1}{dz} = G_{11} P_1 + \sqrt{P_1 P_2} G_{12} \cos \varphi, \quad (7a)$$

$$\frac{dP_2}{dz} = G_{22} P_2 + \sqrt{P_1 P_2} G_{12} \cos \varphi, \quad (7б)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1 - G_{12} \left( \frac{P_2 + P_1}{\sqrt{P_1 P_2}} \right) \sin \varphi, \quad (7в)$$

где  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Уравнения (7) корректно описывают эволюцию мощностей в распространяющихся по усилителю модах, если можно пренебречь утечкой энергии, связанной с рассеянием на неоднородностях усиления, в моды, не удерживаемые активным волноводом. Уравнение (7в) содержит разность

постоянных распространения, которая, как правило, много больше перекрестного коэффициента усиления  $G_{12}$  (нас интересует случай сильносвязанных волноводов). Это означает, что за исключением специальных случаев, разность фаз полей меняется пропорционально разности постоянных распространения. Поэтому в дальнейшем вместо уравнения (7в) разность фаз полей задается приближенным выражением  $\varphi = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)z = \delta\beta \cdot z$ .

Первые члены в уравнениях (7а) и (7б) описывают конкуренцию мод, вызванную взаимным насыщением усиления с учетом пространственного биения в суммарной интенсивности. Этот эффект (gain spatial hole burning) традиционно исследовался отдельно для продольных [14, 15] и поперечных [16] решеток усиления. Именно решетки усиления, вызванные биениями полей, являются [16] наиболее распространенной причиной разрушения одномодового режима работа лазера и уширения спектра генерируемых продольных мод. В нашем случае перекрестное насыщение усиления (gain cross saturation) [17, 18], т. е. зависимость КУ отдельных мод ( $G_{11}$  и  $G_{22}$ ) от суммарной интенсивности определяется как поперечной, так и продольной структурой полей мод.

Явная зависимость от координаты  $z(\cos(\delta\beta \cdot z))$  и дополнительная связь между полями в уравнениях (7) ( $\sqrt{P_1 P_2} G_{12}$ ) могут привести к существенной модификации режима насыщенного усиления. Физические эффекты, вызванные появлением перекрестного межмодового усиления, анализируются в следующем разделе.

### 3. КОНКУРЕНЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ МОД В УСИЛИТЕЛЕ

Рассмотрим вначале режим усиления слабого сигнала, когда материальный КУ не зависит от поля. В этом приближении коэффициенты системы уравнений (4) не зависят от координат, так что собственные функции легко находятся в виде  $X_j \exp(i\lambda_j z)$ , где  $\mathbf{X}$  — двухкомпонентный вектор. В пределе  $G_{ij} \ll \delta\beta$ ,  $\delta\beta = \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1$ , характерном для волоконных усилителей, для собственных значений  $\lambda$  системы (4) имеем

$$\lambda_2 = \tilde{\beta}_2 + \frac{G_{12}^2}{4\delta\beta} - \frac{i}{2} G_2, \quad \lambda_1 = \tilde{\beta}_1 - \frac{G_{12}^2}{4\delta\beta} - \frac{i}{2} G_1.$$

Собственные векторы при этом имеют вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{iG_{12}}{2\delta\beta} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{iG_{12}}{2\delta\beta} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При  $G_{12} \neq 0$  моды усилителя отличаются от мод пассивной структуры тем, что каждая из них содержит малую примесь другой моды с фазой, сдвинутой относительно основной моды на  $\pi/2$ . Поскольку КУ мал по сравнению с  $\delta\beta$ , каждая из исходных мод слабо возмущается примесью другой моды: КУ каждой из них не меняется, а изменение постоянных распространения — малая второго порядка по величине перекрестного КУ. Таким образом, в линейном режиме усиления перекрестное усиление не приводит к заметным эффектам. В системе волноводов перекрестный КУСС при наличии соответствующей симметрии может точно обращаться в нуль. В этом случае другая мода не возбуждается до тех пор, пока насыщение усиления не создаст условия для развития возмущений с нарушением симметрии.

Хотя уравнения (7) имеют относительно простую структуру, их сложно анализировать, поскольку собственные моды системы волноводов, удовлетворяющие уравнению (2), могут быть найдены аналитически только для модельных структур, далеких от конструкций, представляющих практический интерес. Поэтому рассмотрим два варианта, когда анализ может быть выполнен более детально: 1) случай слабого насыщения усиления; 2) предел глубокого насыщения. В дальнейшем зависимость материального КУ от поля будем описывать простейшей формулой

$$g = \frac{g_0}{1 + J/J_s},$$

где  $g_0$  — КУСС,  $J$  — интенсивность суммарного поля,  $J_s$  — интенсивность насыщения. Кроме того, будем использовать безразмерные единицы для поля, нормируя его интенсивность на интенсивность насыщения:  $I = J/J_s$ . Суммарная интенсивность полей двух мод записывается в виде

$$I = P_1 \Psi_1^2 + P_2 \Psi_2^2 + 2\Psi_1 \Psi_2 \sqrt{P_1 P_2} \cos(\delta\beta \cdot z).$$

1) При слабом насыщении усиления ( $I \ll 1$ ) достаточно учесть зависимость КУ от локальной интенсивности в первом порядке, т. е. воспользоваться формулой  $g = g_0(1 - I)$ . Члены матрицы модовых КУ имеют вид

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{01} - \alpha_{11} P_1 - \alpha_{12} P_2 - \\ &\quad - 2\beta_{12} \sqrt{P_1 P_2} \cos(\delta\beta \cdot z), \\ G_{22} &= G_{02} - \alpha_{21} P_1 - \alpha_{22} P_2 - \\ &\quad - 2\beta_{21} \sqrt{P_1 P_2} \cos(\delta\beta \cdot z), \\ G_{12} &= G_{012} - \beta_{12} P_1 - \beta_{21} P_2 - \\ &\quad - 2\alpha_{12} \sqrt{P_1 P_2} \cos(\delta\beta \cdot z), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$G_{0n} = \int g_0 \Psi_n^2 dx dy, \quad n = 1, 2,$$

$$G_{012} = \int g_0 \Psi_1 \Psi_2 dx dy,$$

$$\alpha_{ik} = \int g_0 \Psi_i^2 \Psi_k^2 dx dy, \quad \beta_{ik} = \int g_0 \Psi_i^3 \Psi_k dx dy.$$

Система уравнений (7а) и (7б) с подстановкой в нее выражений (8) при  $G_{12} = 0$  и  $\beta_{ik} = 0$  соответствует пределу суммы некогерентных полей, каждое из которых описывается уравнением вида (1), а усиление насыщается суммой интенсивностей полей мод. Такая ситуация реализуется в двухчастотном усилителе, когда излучение двух мод различно по частоте, а также в случае, когда моды возбуждаются независимыми некогерентными источниками. В двухчастотном усилителе биение полей усредняется во времени, если частота биений много больше характерной скорости релаксации КУ. Интерференция некогерентных полей приводит к хаотическим пульсациям в суммарном поле, действие которых на усиление также может быть усреднено за время релаксации КУ.

Именно этот предел некогерентных полей при дополнительном предположении слабого насыщения усиления детально изучен в литературе. В частности, уравнения, следующие из (7а), (7б) и (8) при  $G_{12} = 0$  и  $\beta_{ik} = 0$ , фигурировали ранее в ряде работ, начиная с [17] (см. также [18]). Эти исследования были посвящены полуклассической теории динамики двухчастотного лазера с высокодобротным резонатором. Запаздыванием поляризации и динамикой населенностей лазерных уровней при этом пренебрегалось. Обобщение полуклассической модели, учитывающее динамику поляризации атомов и населенностей их уровней [18–21], привело к уравнениям, совпадающим по структуре с уравнениями (7а) и (7б) при подстановке в них выражений (8). Для этих уравнений была построена линейная теория устойчивости стационарных двухчастотных режимов работы лазера. Полная динамика генерации с учетом перекрестного усиления ранее не анализировалась. Рассматриваемая нами задача о стационарном усилении двухмодового монохроматического поля отличается тем, что поле эволюционирует в пространстве, а не во времени. Характер эволюции таков, что рост мощности по длине усилителя не прекращается.

2) Рассмотрим режим глубокого насыщения КУ полем основной моды, интенсивность которой не обращается в нуль внутри волноводов. В этом случае

КУ может быть записан в виде  $g \approx g_0/I$ . Представляет интерес рассмотрение предела, когда вторая мода является малой примесью к основной моде, т. е.  $P_1 \gg P_2$ . Если на входе в усилитель  $P_{10} \gg 1$ , то основная мода полностью снимает инверсию, так что

$$P_1 = P_{10} + g_0 S z,$$

где  $S$  — суммарная площадь сечений системы активных волноводов. Соответственно, изменение мощности во второй моде,  $P_2 = b_2^2$ , описывается формулой

$$P_2 = P_{20} + \left[ \int_S g_0 \Psi_2 \Psi_1^{-1} dx dy \int_0^z \frac{\cos(\delta\beta \cdot z')}{\sqrt{P_{10} + g_0 S z'}} dz' \right]^2. \quad (9)$$

В симметричных составных волноводах, в том числе в рассматриваемых ниже примерах, интеграл по сечению  $S$  волноводов обращается в нуль. В таком случае, при выводе уравнения для  $P_2$  необходимо учесть следующие члены малости по отношению  $P_2/P_1$ , что дает для мощности слабой моды зависимость

$$P_2 = P_{20} \exp \left[ - \left( \int_S g_0 \Psi_2^2 \Psi_1^{-2} dx dy \right) \times \left( \int_0^z \frac{\cos(2\delta\beta \cdot z')}{P_{10} + g_0 S z'} dz' \right) \right]. \quad (10)$$

Интегралы по координате  $z$  в формулах (9), (10) — быстроосциллирующие функции в обоих случаях. Поэтому при больших  $z$  мощность  $P_2$  второй моды осциллирует, что можно интерпретировать как вырожденное рассеяние двух волн на решетке усиления в условиях отсутствия фазового синхронизма между полями двух мод. Амплитуда осцилляций интегралов по  $z$  в формулах (9), (10) уменьшается с увеличением  $z$  и выходит на константу, которая стремится к нулю с ростом  $P_{10}$ . Этот результат не зависит от величины модового усиления второй моды.

Представляется целесообразным обсудить роль изучаемых эффектов усиления монохроматического сигнала в процессе генерации в лазерах, когда добавляется резонатор. В отсутствие инжекции внешнего сигнала генерация развивается из спонтанных шумов в полосе частот, характерной для усиливающей среды. Таким образом, на стадии, когда усиление начинает насыщаться, имеется излучение, как

правило, на многих частотах, соответствующих частотам продольных мод резонатора. Спектр поперечных мод при выходе на стационарный режим формируется их модовыми коэффициентами усиления с учетом насыщения. Обсуждаемые в данной работе эффекты обязаны одночастотности полей. Найдено, что слабое поле на той же частоте, но с другой поперечной структурой, не может развиваться на фоне сильного поля. Развитие другой моды с отличающейся частотой не ограничено рассматриваемыми эффектами и приводит, как правило, к многомодовой генерации. Однако обнаруженные особенности конкуренции оптических мод в волноводных усилителях могут проявиться, если спектр излучения лазера контролируется извне (например, с помощью брэгговских или объемных голографических зеркал).

### 3.1. Планарный волновод

Простейшей задачей волновой оптики является расчет распространения излучения вдоль планарного волновода шириной  $2a$  (рис. 1а). Нахождение мод волновода сводится к решению одномерного стационарного уравнения Шредингера для потенциала в виде прямоугольной ямы. Симметрия позволяет ввести четные (индекс «1») и нечетные (индекс «2») направляемые моды, для которых поперечные компоненты волнового вектора внутри волновода определяются соответствующими трансцендентными уравнениями:

$$\operatorname{tg}(q_1 a) = \eta_1 / q_1, \quad \operatorname{ctg}(q_2 a) = -\eta_2 / q_2,$$

где  $\eta = \sqrt{2k^2 n \Delta n - q^2}$  — декремент затухания поля вне волновода,  $q$  — поперечная компонента волнового вектора моды внутри волновода. Модовый КУСС монотонно убывает с ростом  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ):

$$G_{jj} = g_0 \left( 1 - \frac{q_j^2}{2k^2 n \Delta n (\eta_j a + 1)} \right).$$

При выполнении условия  $\pi^2 \leq 2k^2 a^2 n \Delta n < 4\pi^2$  волновод удерживает две поперечные моды с профилями  $\psi_1 = A_1 \cos q_1 x$  и  $\psi_2 = A_2 \sin q_2 x$  полей мод внутри волновода, где  $A_1, A_2$  — нормировочные коэффициенты. Поперечный волновой вектор в волноводе для первой моды меньше, чем для второй,  $q_1 < q_2$ . Для одного волновода КУСС основной (четной) моды всегда больше, чем у следующей нечетной моды.

Перекрестный  $G_{ij}$  и модовые  $G_{jj}$  коэффициенты усиления, если учесть симметрию полей мод и взять усиление в виде  $g = g_0 / (1 + I)$ , можно записать в виде

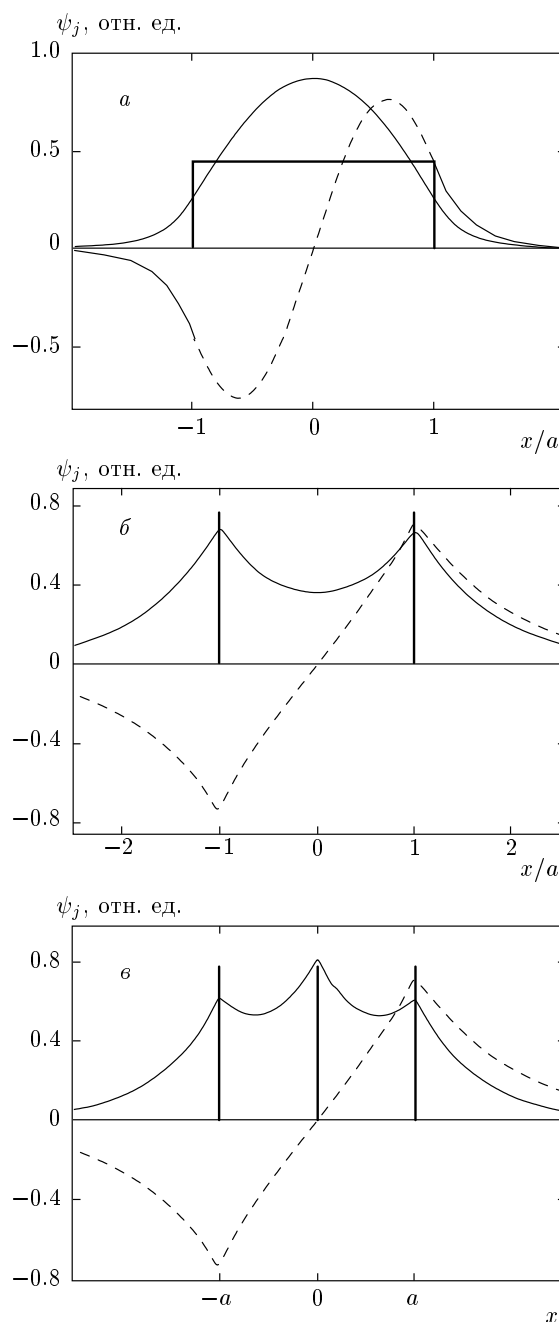


Рис. 1. Рассматриваемые геометрии волоконных усилителей с соответствующими профилями полей мод: а — планарный волновод, профили полей мод соответствуют  $k^2 a^2 n \Delta n = \pi^2$ ; б — система двух тонких планарных волноводов; в — система из трех тонких планарных волноводов, профили полей мод соответствуют  $\kappa' a = 1.2$

$$G_{12} = -4\sqrt{P_1 P_2} \cos(\delta\beta \cdot z) \int_0^a \frac{g_0 \psi_1^2 \psi_2^2 dx dy}{(1 + P_1 \psi_1^2 + P_2 \psi_2^2)^2 - 4P_1 P_2 \psi_1^2 \psi_2^2 \cos^2(\delta\beta \cdot z)},$$

$$G_{jj} = \int_0^a \frac{2g_0 \psi_j^2 (1 + P_1 \psi_1^2 + P_2 \psi_2^2) dx dy}{(1 + P_1 \psi_1^2 + P_2 \psi_2^2)^2 - 4P_1 P_2 \psi_1^2 \psi_2^2 \cos^2(\delta\beta \cdot z)}, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Член  $G_{12} \cos(\delta\beta \cdot z)$ , входящий в правые части уравнений (7а) и (7б), обращается в нуль, если одно из полей равно нулю, и имеет стопроцентную модуляцию на периоде биений  $\pi/\delta\beta$ . Кроме того, он нигде не является положительным. Поэтому перекрестное усиление ведет к уменьшению мощности, извлекаемой из среды, по сравнению со случаем некогерентных полей. Это уменьшение мощности имеет простой физический смысл: биение суммарной интенсивности приводит к неснятому усилению среды в местах деструктивной интерференции полей.

Поскольку члены, описывающие перекрестное усиление в уравнениях (7а) и (7б), идентичны, они сказываются, в первую очередь, на усилении моды с меньшей мощностью, подавляя прирост мощности этой моды. Таким образом, когда на входе в планарный усилитель поле излучения близко к полю основной моды, перекрестное усиление расширяет область параметров, где она доминирует.

Пространственное биение мод, как следует из второго уравнения (11), увеличивает модовые КУ  $G_{11}$  и  $G_{22}$  по сравнению с некогерентным сложением полей, соответствующим условию  $\cos(\delta\beta \cdot z) = 0$ . Рисунок 2 демонстрирует, что в пучностях суммарного поля ( $\cos^2(\delta\beta \cdot z) = 1$ ) величины  $G_{11}$  и  $G_{22}$  всегда заметно больше, чем при условии  $\cos(\delta\beta \cdot z) = 0$ . В случае некогерентных полей мод их КУ падают с ростом полной мощности в соответствии с общепринятыми представлениями. Однако при когерентном сложении полей зависимость этих КУ от мощностей мод в пучностях может оказаться немоной. КУ отдельных мод могут увеличиваться как при перераспределении мощностей между ними (рис. 2а), так и с ростом мощности второй моды при постоянной мощности первой (рис. 2б). В действительности эти эффекты, обусловленные когерентностью полей, в значительной мере нивелируются наличием перекрестного усиления, вклад которого при  $\cos^2(\delta\beta \cdot z) = 1$  максимален.

### 3.2. Пара волноводов малой толщины

Простейшим многосердцевинным волноводом является пара параллельных планарных волноводов малой толщины (см. рис. 1б). В пределе малой тол-

щины профиль КП волноводов можно заменить потенциалом в виде дельта-функции. Формально волновод шириной  $d$  со скачком КП  $\Delta n$  переходит в дельта-образный потенциал в пределе  $d \rightarrow 0$  при условии  $d\Delta n = \text{const}$ . Физически потенциал в виде дельта-функции соответствует профилю КП одномодового волновода, для которого большая часть поля моды находится вне него, а профиль поля внутри волновода можно считать постоянным. Для размера сердцевин усилителя это сводится к выполнению условия  $k^2 d^2 n_0 \Delta n \ll 1$ .

Для пары таких волноводов уравнение для полей мод может быть записано в виде

$$\frac{dE}{dx^2} + \{-\eta^2 + 2\kappa[\delta(x-a) + \delta(x+A)]\} E = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\eta$  — декремент затухания поля вне волноводов,  $\eta^2$  — собственное число,  $\kappa = k^2 d n_0 \Delta n$  — амплитуда дельта-функции,  $2a$  — расстояние между волноводами. Постоянные распространения мод выражаются через собственные числа:  $\beta_j = \eta_j^2 / 2kn_0$ . Уравнение (12), как известно [22], имеет симметричное (индекс «1») и антисимметричное (индекс «2») решения, собственные числа которых определяются соответствующими трансцендентными уравнениями

$$\eta_1 = \kappa [1 + \exp(-2\eta_1 a)], \quad (13a)$$

$$\eta_2 = \kappa [1 - \exp(-2\eta_2 a)]. \quad (13b)$$

Если расстояние между волноводами мало,  $2ka \leq 1$ , то система волноводов удерживает только симметричную моду, а антисимметричная мода отсутствует. Если ввести в волноводы усиление, то амплитуда дельта-функции становится комплексной:  $\kappa = \kappa' - i\kappa''$ , где  $\kappa' = k^2 d n_0 \Delta n$ ,  $\kappa'' = g k n_0 d / 2$ . Следуя подходу, изложенному в разд. 2, введем оптические моды, соответствующие двум пассивным волноводам. (Свойства мод в системе двух дельта-функций описаны с учетом усиления в работе [23].) Для разных мод КУСС можно записать в виде

$$G_{11} = \frac{g}{k^2 n_0 \Delta n} \frac{\eta_1'^2}{1 + 2\kappa' a \exp(-2\eta_1' a)},$$

$$G_{22} = \frac{g}{k^2 n_0 \Delta n} \frac{\eta_2'^2}{1 - 2\kappa' a \exp(-2\eta_2' a)},$$

где  $\eta'$  — вещественная часть  $\eta$ , определяемая уравнениями (13). При расстоянии между волноводами  $2a = 1/\kappa' = \lambda^2/4\pi^2 dn_0 \Delta n$  КУСС антисимметричной моды обращается в нуль, тогда как для симметричной моды он равен  $G_{11} = 2\kappa'\kappa''/kn_0 = gk^2 d^2 n_0 \Delta n$ . Можно убедиться, что  $G_{22} > G_{11}$  при  $\kappa'a \gg 1$ . Численный расчет показывает, что модовые КУСС как функции  $\kappa'a$  пересекаются в точке  $\kappa'_{cr} a \approx 0.900126$ , что отличает систему двух тонких волноводов от одного планарного волновода, в котором КУСС для основной моды всегда больше, чем для других мод. Далее рассматривается представляющий основной интерес случай, когда КУСС антисимметричной моды сравним или больше КУСС основной моды.

Рассматриваемая система волноводов симметрична по поперечной координате, так что каждая из мод имеет равные мощности в волноводах и одинаковые интенсивности внутри волноводов. Если ввести фактор удержания поля в одном активном волноводе,  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , как долю мощности моды в нем, то интенсивность  $j$ -й моды в волноводах может быть записана в виде  $I_j = P_j \Gamma_j$ , а модовый КУСС как  $G_{jj} = 2\Gamma_j g d/a$ . Насыщение усиления в анализируемой системе учитывается введением множителей Ригрода  $(1 + I_j)^{-1}$  перед дельта-функциями. Тогда коэффициенты  $G_{ij}$  в системе уравнений (7) можно представить в виде

$$G_{11} = G_1 \frac{1 + I_1 + I_2}{C}, \quad (14a)$$

$$G_{22} = G_2 \frac{1 + I_1 + I_2}{C}, \quad (14б)$$

$$G_{12} = -\frac{4\kappa''}{kn_0} \frac{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 I_1 I_2}}{C} \cos(\delta\beta \cdot z), \quad (14в)$$

где  $C = (1 + I_1 + I_2)^2 - 4I_2 I_1 \cos^2(\delta\beta \cdot z)$ . Как следует из уравнения (14в), член  $G_{12} \cos(\delta\beta \cdot z)$ , содержащий перекрестный коэффициент усиления, в анализируемой конструкции всегда неполюжителен. Для пары тонких волноводов отношение модовых КУ не зависит от мощностей мод и совпадает с отношением коэффициентов удержания  $G_{11}/G_{22} = \Gamma_1/\Gamma_2$ , т. е. полностью определяется конструкцией усилителя. Подставляя выражения (14) в систему (7) и переходя к безразмерной длине  $\zeta = z/L_R$ ,  $L_R = ka^2/2$ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{d\zeta} &= \frac{2\kappa''\Gamma_1 I_1}{C} [1 + I_1 - I_2 \cos(2L_R \delta\beta \cdot \zeta)], \\ \frac{dI_2}{d\zeta} &= \frac{2\kappa''\Gamma_2 I_2}{C} [1 + I_2 - I_1 \cos(2L_R \delta\beta \cdot \zeta)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) интегрировались в случаях  $\kappa' = \kappa_{cr}$  и  $\kappa'a = 1.2$  программным пакетом Mathcad, использующим метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Результаты расчетов представлены на рис. 3 в виде зависимости доли мощности, содержащейся в четной моде,  $P_1/P$ , от полной мощности  $P = P_1 + P_2$  при  $\kappa'' = 0.0001$ . Волоконный усилитель в виде системы двух тонких планарных волноводов рассматривался ранее в работе [23], где, в частности, было показано, что некогерентная смесь двух мод усиливается так, что выделения одной моды не происходит. Наличие перекрестного усиления при равенстве модовых КУ (рис. 3а) приводит к «разбеганию» кривых от сепаратрисы ( $P_1/P = 1/2$ ): любое превышение мощности в одной из мод приводит к ее доминированию в результате усиления. Сепаратриса превращается в кривую линию, когда КУСС одной из мод (антисимметричной на рис. 3б) больше, чем другой. В целом поведение системы сохраняется: если доля мощности входного сигнала в симметричной моде такова, что начальная точка попадает выше сепаратрисы на рис. 3б, то эта доля будет продолжать расти в ходе усиления, хотя ее модовый КУ постоянно меньше (напомним, что в данной системе отношение модовых КУ не зависит от мощностей). При этом рост мощности во второй моде насыщается по мере усиления.

### 3.3. Три волновода малой толщины

В исследовавшейся экспериментально [5] и численно [7, 8] схеме усилителя один волновод находится в центре сборки, а шесть других располагаются симметрично по ее периметру. Две из направляемых мод усилителя обладают аксиальной симметрией, тогда как остальные соответствуют угловым гармоникам. Вследствие симметрии системы поле угловых мод в центральном волноводе мало. В этом случае реализуется новая ситуация, не описываемая предыдущими примерами. А именно, инверсия в одном из волноводов не может эффективно сниматься угловыми модами. В таком случае конкуренция аксиально-симметричной и угловых мод приобретает новые черты. Подобный режим можно промоделировать на системе из трех волноводов малой толщины (см. рис. 1в).

Будем считать, что КП во всех волноводах одинаковы. Тогда оптические моды делятся на симметричные и антисимметричные. Собственное число антисимметричной моды по-прежнему определяется дисперсионным уравнением (13б), тогда как для сим-



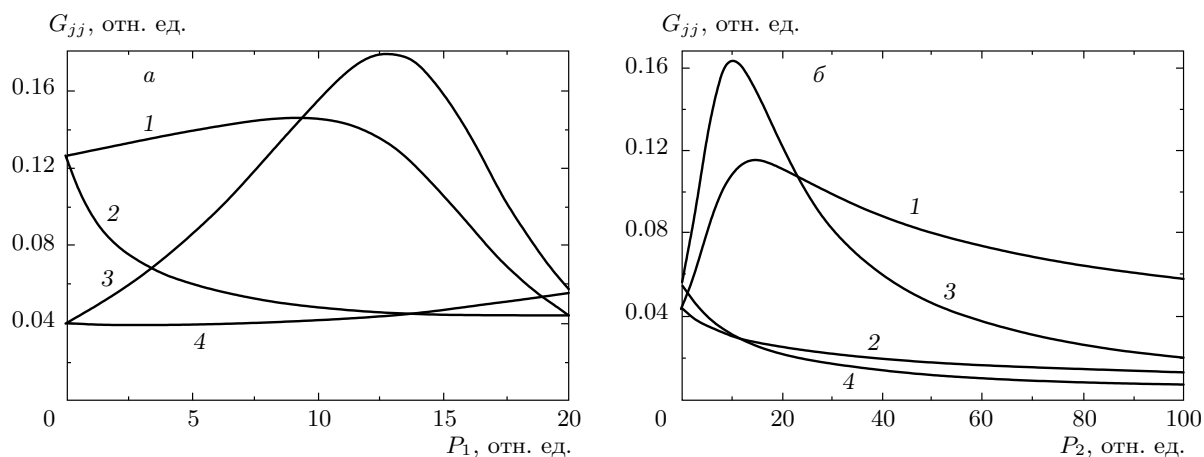


Рис. 2. Зависимости модовых коэффициентов усиления от мощности в симметричной моде при постоянной суммарной мощности  $P = 20$  (а) и от мощности в антисимметричной моде при постоянной мощности симметричной моды  $P_1 = 20$  (б): 1, 2 — симметричные моды; 3, 4 — антисимметричные моды; 1, 3 —  $\cos \varphi = 1$ ; 2, 4 —  $\cos \varphi = 0$

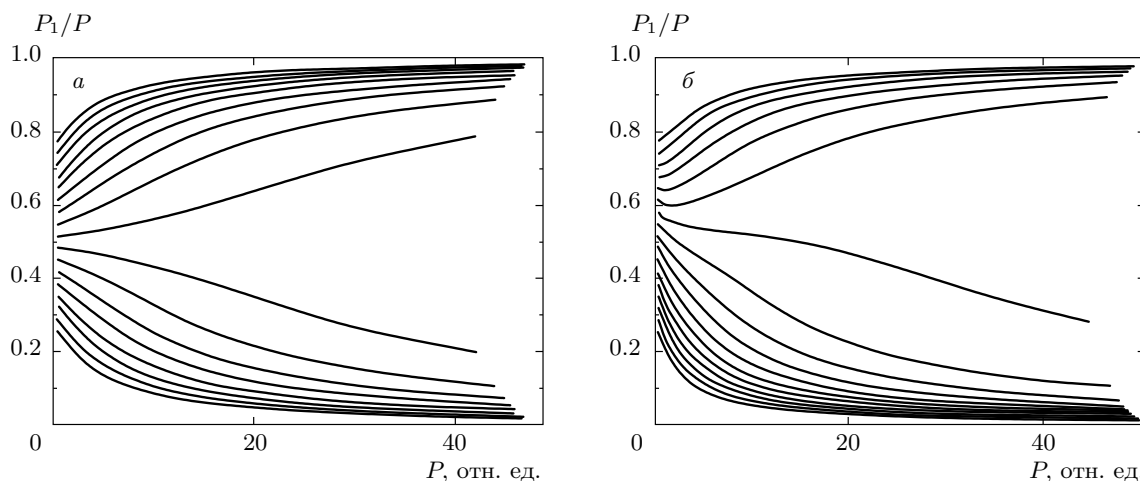


Рис. 3. Зависимости  $P_1/P$  от полной мощности  $P = P_1 + P_2$  при распространении излучения по паре тонких волноводов: а —  $\kappa'a = 0.900126$  ( $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ); б —  $\kappa'a = 1.2$  ( $\Gamma_2 = 1.112\Gamma_1$ )

метричных мод дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\frac{(\eta_1 - \kappa)^2}{\eta_1 + \kappa} = \kappa \exp(-2\eta_1 a). \tag{16}$$

Рассматриваемая система удерживает одну симметричную моду при условии  $2\kappa a < 1$  и две моды (четную и нечетную как функции  $x$ ) при условии  $1 \leq 2\kappa a < 3$ . Ограничимся анализом случая, когда система удерживает две моды, показанные на рис. 1в. Учтем усиление в волноводах, предполагая, как и выше, что можно пренебречь влиянием усиления на собственные функции и собственные числа системы. В боковых волноводах КУСС предполага-

ются одинаковыми, а в центральном волноводе — считается  $\mu$  раз кратным КУСС в боковых волноводах.

Поле нечетной моды в центральном волноводе равно нулю. Отношение  $\rho$  интенсивностей симметричной моды в центральном и боковом волноводах, используя дисперсионное уравнение, можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{4} \left| 1 - \frac{\eta_1}{\kappa} \right|^2 \exp(2\eta_1' a).$$

Если переопределить  $\Gamma_1$  как фактор перекрытия поля симметричной моды с одним боковым волноводом, то коэффициенты  $G_{12}$  и  $G_{22}$  по-прежнему опре-

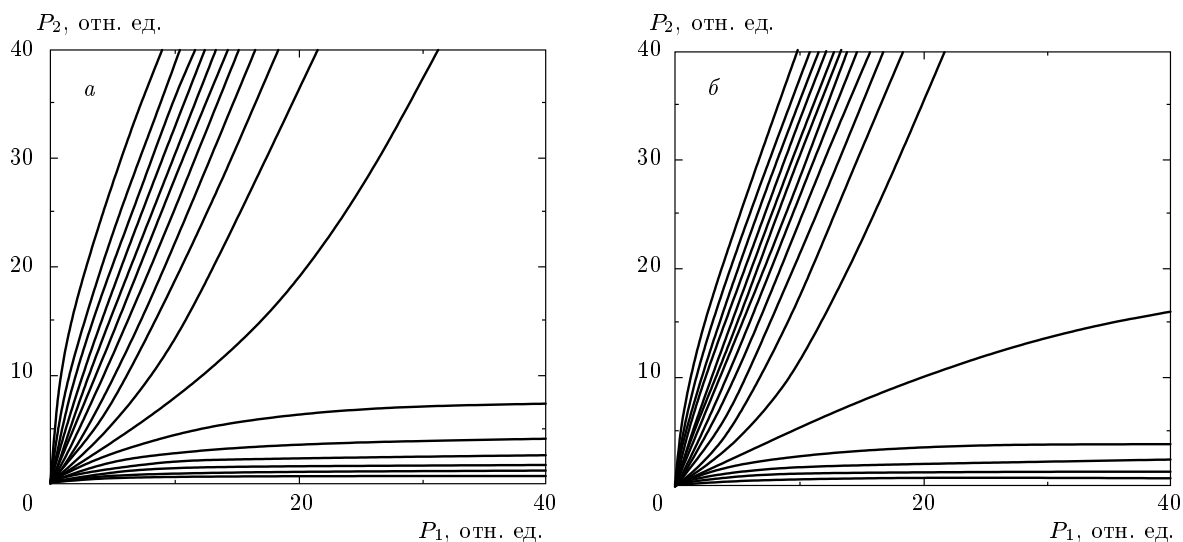


Рис. 4. Зависимости  $P_2(P_1)$  при распространении излучения по системе из трех тонких волноводов:  $a - \kappa'a = 1.139$  ( $\Gamma_1 = \Gamma_2$ );  $b - \kappa'a = 1.45$

деляются соответственно формулами (14б) и (14в). Для  $\Gamma_1$  можно получить выражение

$$\Gamma_1 = \frac{\kappa'}{1 + \mathcal{J}\kappa'/\rho},$$

где введено сокращение

$$\mathcal{J} = \left(1 + \left|\frac{\kappa}{\eta_1}\right|^2\right) \text{sh}(2\eta'_1 a) - \frac{\kappa'}{\eta'_1} [1 + \text{ch}(2\eta'_1 a)] + 2\eta'_1 a \left(1 - \left|\frac{\kappa}{\eta_1}\right|^2\right).$$

Полный фактор перекрытия четной моды с учетом усиления для случая слабого сигнала равен

$$\Gamma_1^{tot} = \Gamma_1(2 + \mu/\rho),$$

а для коэффициента  $G_{11}$  можно получить выражение

$$G_{11} = \frac{\kappa''\Gamma_1}{kn_0} \left[ 2 \frac{1 + P_1\Gamma_1 + P_2\Gamma_2}{C} + \frac{\mu/\rho}{1 + P_1\Gamma_1/\rho} \right].$$

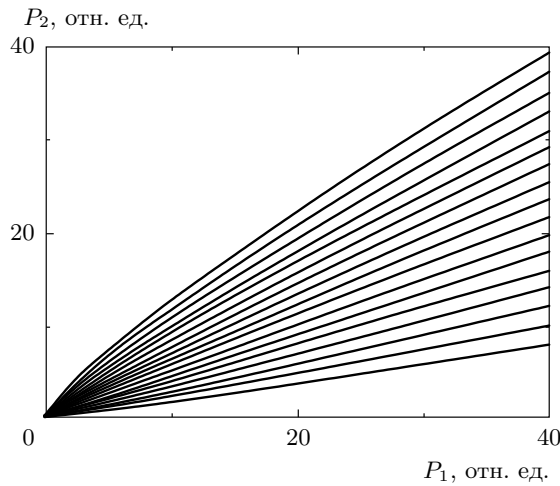
На рис. 4 приведены зависимости  $P_2(P_1)$  для  $\kappa'' = 0.0001$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $\kappa' = 1.139$ , что соответствует равенству КУСС мод, и  $\kappa' = 1.45$ , когда нечетная мода имеет больший фактор перекрытия с областью усиления.

Как и для системы двух тонких волноводов, диаграммы на рис. 4 характеризуются наличием сепаратрис, делящих плоскость в переменных  $(P_1, P_2)$

на две области с различным асимптотическим поведением кривых. Однако, если на рис. 3а (равные КУСС) области выше и ниже сепаратрисы различались только видом доминирующей моды (мощность другой моды при этом насыщалась), то на рис. 4а кривые в области выше сепаратрисы соответствуют одновременному росту мощностей обеих мод. Скорость нарастания мощности антисимметричной моды при этом оказывается выше. Такое поведение усилителя в форме системы трех тонких волноводов обязано, очевидно, тому обстоятельству, что интеграл перекрытия поля антисимметричной моды с областью усиления равен нулю. В таком случае инверсия в центральном волноводе может быть снята только симметричной модой, что и приводит к неограниченному росту ее мощности.

В области ниже сепаратрисы, что соответствует преобладанию симметричной моды во входном пучке, усиление приводит к доминированию симметричной моды, а рост мощности антисимметричной моды асимптотически прекращается. Это поведение качественно не отличается от наблюдаемого в системе двух тонких волноводов.

Поведение кривых на расчетной диаграмме качественно остается таким же и в случае, когда антисимметричная мода имеет больший КУСС. Изменяется лишь положение сепаратрисы, разделяющей различные режимы усиления. Чтобы входной сигнал попал на рис. 4б под сепаратрису и, соответственно, четная мода доминировала в усиленном



**Рис. 5.** Зависимости  $P_2$  ( $P_1$ ) при распространении излучения по системе из трех тонких волноводов для случая некогерентных полей,  $\kappa'a = 1.139$  ( $\Gamma_1 = \Gamma_2$ )

сигнале, необходимо, чтобы входное поле мало отличалось от поля четной моды. Это реализуется при малом разбросе фаз полей в отдельных волноводах, что качественно согласуется с результатами трехмерных расчетов семиканального усилителя [7].

Влияние когерентности полей мод на эволюцию поля в усилителе может быть проиллюстрировано сравнением со случаем, когда поля мод некогерентны. Их эволюция описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\zeta} &= \kappa'' \left[ \frac{2\Gamma_1 P_1}{1 + P_1 \Gamma_1 + P_2 \Gamma_2} + \frac{\Gamma_1 P_1 \mu / \rho}{1 + P_1 \Gamma_1 / \rho} \right], \\ \frac{dP_2}{d\zeta} &= \frac{2\kappa'' \Gamma_2 P_2}{1 + P_1 \Gamma_1 + P_2 \Gamma_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 5 приведены численно найденные зависимости  $P_2$  ( $P_1$ ) для системы из трех тонких волноводов при  $\kappa'a = 1.139$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  (ср. с рис. 4а). Для фазовых кривых в случае некогерентных полей характерно отсутствие сепаратрисы. В пределе больших мощностей,  $P_{1,2} \gg 1$ , система уравнений (17) может быть проинтегрирована в явном виде:

$$P_1 \approx \frac{P_2 \mu}{1 - \gamma} + \vartheta P_2^\gamma, \quad \gamma \neq 1,$$

$$P_1 \approx P_2 \mu (\ln P_2 + \vartheta), \quad \gamma = 1,$$

где  $\gamma = (1 + \mu)\Gamma_1/\Gamma_2$ ,  $\vartheta$  — константа. Таким образом, в некогерентном случае отношение выходных мощностей стремится к  $\mu/(1 - \gamma)$  при  $\gamma < 1$ . При  $\gamma > 1$  мощность излучения в четной моде растет быстрее,

чем в нечетной моде. В отличие от случая конкуренции когерентных полей близость выходного поля к комбинации полей мод или к полю четной моды не зависит от начального соотношения мощностей мод, а определяется только конструкцией усилителя.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная теория распространения монохроматического излучения в многоканальном волноводе показывает важную роль сосредоточенного расположения насыщаемого усиления по пространству, что может привести к преимущественному усилению поля моды с большей мощностью, даже если ее коэффициент усиления меньше. Обнаруженный эффект приводит к доминированию основной моды в волоконном усилителе, если вводимое поле имеет распределение интенсивности, близкое к профилю моды.

На примере системы двух тонких волноводов найдены условия для входного поля, при которых на выходе усилителя преобладает симметричная мода. На примере трех тонких волноводов показано, что если конкурирующая с основной мода не может снимать энергию в одном из волноводов, то возможны два варианта. В одном из них выходное распределение поля представляет собой когерентную смесь полей мод, если входное поле близко к полю конкурирующей моды, в противном случае, на выходе преобладает основная мода. Описанное поведение полей мод в усилителе радикально отличается от случая, когда поля двух конкурирующих мод некогерентны.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 07-02-01112-а, 07-02-12166-офи) и гранта Президента РФ поддержки ведущих школ РФ (№ НШ-1573.2008.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Снайдер, Дж. Лав, *Теория оптических волноводов*, Радио и Связь, Москва (1987).
2. Г. Агарвал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
3. V. Gapontsev, D. Gapontsev, N. Platonov et al., in *Europhys. Conf. Abstracts CLEO/Europe* (Munich, June 12–17, 2005), Vol. 29B, p. 508.
4. A. Yariv, *IEEE J. Quant. Electr.* **9**, 919 (1973).

5. P. K. Cheo, A. Liu, and G. G. King, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **13**, 439 (2001).
6. E. J. Bochove, P. K. Cheo, and G. G. King, *Opt. Lett.* **28**, 1200 (2003).
7. Д. В. Высоцкий, Н. Н. Ёлкин, А. П. Напартович, *КЭ* **36**, 73 (2005).
8. N. N. Elkin, A. P. Napartovich, V. N. Troshchieva et al., *Opt. Comm.* **277**, 390 (2007).
9. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и Связь*, Москва (1988).
10. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва, (1973), с. 147, 148.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989), с. 645–652.
12. N. N. Elkin, A. P. Napartovich, V. N. Troshchieva, and D. V. Vysotsky, in *Proc. IV Conf. on FDM: Theory and Application* (Lozenetz, 2006), Rousse Univ., Bulgaria (2007), p. 167.
13. А. А. Майер, *УФН* **165**, 1037 (1995).
14. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раугиан, *ФТТ* **5**, 2105 (1963).
15. C. L. Tang, H. Statz, and G. A. de Mars, *J. Appl. Phys.* **34**, 2289 (1963).
16. Ю. А. Ананьев, *ЖТФ* **37**, 139 (1967).
17. W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.* **134**, A1429 (1964).
18. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000), гл. 19.
19. Л. А. Островский, *ЖЭТФ* **48**, 1087 (1965).
20. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, *ЖЭТФ* **49**, 895 (1965).
21. Я. И. Ханин, *Динамика квантовых генераторов*, Советское Радио, Москва (1975).
22. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1992), с. 27.
23. А. Р. Напартович and D. V. Vysotsky, *Phys. Rev. A* **76**, 063801 (2007).