

КОГЕРЕНТНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

Е. В. Аксенова^{a}, В. Л. Кузьмин^b, В. П. Романов^a*

*^a Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Санкт-Петербургский торгово-экономический институт
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 26 сентября 2008 г.

Рассмотрено многократное рассеяние света на флуктуациях директора в нематических жидких кристаллах. Считается, что однородная ориентация директора задается внешним магнитным полем. Исследуется эффект когерентного обратного рассеяния, заключающийся в существовании острого пика интенсивности при рассеянии света назад. Исходя из уравнения Бете–Солпитера, вычислена интенсивность многократного рассеяния с учетом вклада лестничных и циклических диаграмм. В рамках диффузионного приближения получено аналитическое выражение для угловой и поляризационной зависимостей интенсивности когерентного обратного рассеяния. Проведено сравнение результатов расчета с экспериментом. Показано, что теория позволяет количественно описать эллиптическую форму конуса обратного рассеяния, объяснить отсутствие когерентного вклада для перекрестных поляризаций и рассчитать относительную высоту пика.

PACS: 42.25.Bs, 42.70.Df, 42.25.Fx, 78.20.Bh

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из интенсивно развивающихся разделов физической оптики является изучение процессов многократного рассеяния света [1–5]. Интерес к этой проблеме особенно возрос в связи с практическим применением методов теории переноса излучения для анализа структуры самых разнообразных неоднородных диэлектрических сред, включая биологические объекты. В случае однократного рассеяния информация о среде описывается достаточно просто, в то время как обработка данных по многократному рассеянию требует сложного теоретического анализа.

Особое место в изучении переноса излучения занимает исследование когерентных и интерференционных эффектов в силу их чувствительности к особенностям структуры неоднородных сред [3, 6–8]. Одним из наиболее исследованных является эффект когерентного обратного рассеяния, который представляет собой оптический аналог эффекта сла-

бой андерсоновской локализации [9, 10]. Он состоит в существовании узкого пика в угловой зависимости интенсивности многократного рассеяния света в окрестности рассеяния строго назад. Поскольку высота и форма этого пика зависят от оптических параметров неоднородной среды, изучение когерентного обратного рассеяния может быть удобным бесконтактным методом исследования самых разнообразных сильно рассеивающих сред.

Детальное экспериментальное исследование этого эффекта проводилось для самых разнообразных суспензий, твердых диэлектриков, биологических объектов, неупорядоченных жидких кристаллов (ЖК) и т. д. [9–13]. Также изучалось усиление обратного рассеяния в материалах с анизотропным коэффициентом диффузии [14]. Последовательное теоретическое описание проводилось для изотропных сред со случайными неоднородностями [15, 16]. В последнее время большое внимание уделяется средам, обладающим анизотропией. В работах [17, 18] изучалось многократное рассеяние для систем с вызванной внешним полем слабой анизотропией. Си-

*E-mail: aksev@mail.ru

стемы с анизотропными рассеивателями рассмотрены в работе [19]. Расчеты проводились в приближении слабого рассеяния, когда длина экстинкции значительно больше длины световой волны. В работах [20–23] изучалось многократное рассеяние в ориентированных нематических ЖК (НЖК). В частности, исследовалось влияние анизотропии на коэффициент диффузии. Удалось рассчитать коэффициент диффузии света и транспортную длину. В работе [24] рассмотрено влияние анизотропии среды на диффузию скалярных волн.

Недавно были получены экспериментальные данные, подтверждающие наличие пика когерентного обратного рассеяния в ЖК. В работах [25, 26] проводились измерения эффекта когерентного обратного рассеяния в нематической фазе ЖК во внешнем магнитном поле. Был обнаружен пик обратного рассеяния, ширина которого оказалась на несколько порядков уже, чем, например, для суспензий латексов. Пик обратного рассеяния представлял собой эллиптический конус. Детального теоретического описания этого эффекта до сих пор не проводилось. Трудности вызваны тем, что, с одной стороны, НЖК — это одноосная среда со значительной оптической анизотропией. С другой стороны, в этих системах очень велики тепловые флуктуации ориентации, описание которых значительно сложнее, чем флуктуаций скалярных величин, таких как плотность или концентрация.

В настоящей работе проведено исследование эффекта когерентного обратного рассеяния в НЖК во внешнем магнитном поле. В рамках диффузионного приближения рассчитывались вклады лестничных и циклических диаграмм в интенсивность многократного рассеяния света. Получены аналитические выражения, описывающие пик обратного рассеяния. Ширина пика оказалась совпадающей с экспериментально наблюдаемой. Аналитические выражения описывают эллиптичность конуса обратного рассеяния, причем соотношение между полуосями эллипса близко к экспериментальному. При этом высота пика, полученная теоретически, оказалась выше, чем наблюдаемая на опыте.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 и 3 кратко приведены основные сведения о статистических и оптических свойствах НЖК. В разд. 4 обсуждается многократное рассеяние света в анизотропной среде, рассматриваются уравнение Бете–Солпитера и его решение в диффузионном приближении. В разд. 5 проводится расчет вкладов лестничных и циклических диаграмм в обратное рассеяние с учетом ограниченности среды. В разд. 6

рассчитывается интенсивность обратного рассеяния в конкретной геометрии и проводится сравнение с экспериментом. Наиболее громоздкие расчеты вынесены в Приложения.

2. ФЛУКТУАЦИИ ДИРЕКТОРА В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

Отличительной особенностью НЖК является наличие в широком интервале температур ориентационной упорядоченности. Однородная ориентация системы создается либо с помощью ориентирующих стенок кюветы, либо за счет внешнего поля. Будем рассматривать НЖК во внешнем магнитном поле. Ориентация в ЖК задается с помощью единичного вектора директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Свободная энергия искажения имеет вид [27]

$$F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \{ K_{11} (\text{div } \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2 - \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0)^2 \}. \quad (2.1)$$

Здесь K_{ll} , $l = 1, 2, 3$ — модули Франка, $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ — анизотропия магнитной восприимчивости, \mathbf{H}_0 — напряженность постоянного внешнего магнитного поля. Образец считается достаточно большим, так что можно пренебречь энергией взаимодействия с поверхностью. Для определенности будем полагать $\chi_a > 0$.

В состоянии равновесия вектор директора $\mathbf{n} = \mathbf{n}^0$ постоянен и в случае $\chi_a > 0$ направлен вдоль магнитного поля, $\mathbf{n}^0 \parallel \mathbf{H}_0$. Отклонения от равновесия $\delta\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n}^0$, т. е. флуктуации директора, в линейном приближении перпендикулярны \mathbf{n}^0 , $\delta\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^0 = 0$. Разложим флуктуации директора в спектр Фурье:

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \delta\mathbf{n}(\mathbf{q}). \quad (2.2)$$

Вектор $\delta\mathbf{n}(\mathbf{q})$ удобно представить в виде

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \delta n_1(\mathbf{q}) \mathbf{a}_1(\mathbf{q}_{\perp}) + \delta n_2(\mathbf{q}) \mathbf{a}_2(\mathbf{q}_{\perp}), \quad (2.3)$$

где для каждого \mathbf{q} введены единичные векторы $\mathbf{a}_1(\mathbf{q}_{\perp}) = \mathbf{q}_{\perp}/q_{\perp}$ и $\mathbf{a}_2(\mathbf{q}_{\perp}) = \mathbf{n}^0 \times \mathbf{a}_1(\mathbf{q}_{\perp})$, q_{\parallel} и q_{\perp} — компоненты вектора \mathbf{q} вдоль и поперек \mathbf{n}^0 , $q_{\parallel} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^0$, $\mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{q} - q_{\parallel} \mathbf{n}^0$. Заметим, что векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 ортогональны \mathbf{n}^0 . Тогда средний квадрат флуктуаций $\langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle$ можно найти, используя формулу (2.1). Имеем [27, 28]

$$\langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle = \frac{k_B T}{K_{ll} q_{\perp}^2 + K_{33} q_{\parallel}^2 + \chi_a H_0^2}, \quad l = 1, 2, \quad (2.4)$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение. Заметим, что векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 выбирались таким образом, что

$$\langle \delta n_1(\mathbf{q}) \delta n_2^*(\mathbf{q}) \rangle = 0.$$

В отсутствие внешнего поля флуктуации директора расходятся как $1/q^2$ при $q \rightarrow 0$, а радиус корреляции флуктуаций неограниченно возрастает. Наличие внешнего поля делает эти флуктуации конечными, а роль радиуса корреляции в данном случае играет магнитная длина когерентности $\xi_H = \sqrt{K_{33}/\chi_a H_0^2}$.

3. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНООСНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

По своим оптическим свойствам НЖК являются одноосными с тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_{\alpha}(\mathbf{r}) n_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

где ε_{\parallel} и ε_{\perp} — диэлектрические проницаемости вдоль и поперек директора \mathbf{n}^0 , $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$. Нас будут интересовать флуктуации тензора диэлектрической проницаемости, вызванные флуктуациями директора,

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \\ &= \varepsilon_a [n_{\alpha}^0 \delta n_{\beta}(\mathbf{r}) + n_{\beta}^0 \delta n_{\alpha}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_{\alpha}^0 n_{\beta}^0$ — равновесный тензор диэлектрической проницаемости. Система уравнений Максвелла для монохроматической волны в такой среде имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= ik_0 \hat{\mu}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -ik_0 \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме, $\hat{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости. В дальнейшем при описании поля будем учитывать, что $\chi_{\parallel, \perp} \ll 1$, так что $\mu_{\alpha\beta} \approx \delta_{\alpha\beta}$.

Исключая вектор \mathbf{H} из системы (3.3), получаем волновое уравнение для вектора \mathbf{E} :

$$[\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(\mathbf{r})] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.4)$$

Для равновесной среды уравнение (3.4) имеет вид

$$(\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}^0) \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.5)$$

Собственные моды $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ в одноосной среде представляют собой две плоские волны, обыкновенную (o) и необыкновенную (e), с волновыми векторами $\mathbf{k}^{(o)}$ и $\mathbf{k}^{(e)}$ [29]:

$$\mathbf{E}_{(j)}^0 = E_{(j)}^0 \mathbf{e}^{(j)} e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{r}}, \quad j = o, e.$$

Здесь $E_{(j)}^0$ — амплитуда поля, $\mathbf{e}^{(j)}$ — единичный вектор, задающий поляризацию, $k^{(j)} = k_0 n^{(j)}$,

$$n^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad n^{(e)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta}} \quad (3.6)$$

— показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн, θ — угол между векторами \mathbf{n}^0 и $\mathbf{k}^{(e)}$.

Единичные векторы $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$, задающие поляризацию волн, удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{n}^0, \quad \mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{k}^{(o)}, \quad \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(e)} \perp \mathbf{k}^{(e)},$$

где вектор $\mathbf{e}^{(e)}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{k}^{(e)}$ и \mathbf{n}^0 .

При описании распространения волн в неоднородной среде удобно записать уравнение (3.4) в интегральной форме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + k_0^2 \int d\mathbf{r}_1 \hat{G}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \quad (3.7)$$

где функция Грина $\hat{G}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ электромагнитного поля удовлетворяет уравнению

$$(\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}^0) \hat{G}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \hat{I}. \quad (3.8)$$

Здесь \hat{I} — единичная матрица, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ — дельта-функция. Поскольку рассматриваемая среда в состоянии равновесия является пространственно-однородной, функция Грина зависит только от разности аргументов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. Если перейти к спектру Фурье, то фурье-образ функции Грина можно записать в виде [30, 31]

$$\hat{G}^0(\mathbf{k}) = \sum_{j=o,e} \frac{n^{(j)2}(\mathbf{s})}{k^2 - k^{(j)2}(\mathbf{s})} \hat{T}^{(j)}(\mathbf{s}), \quad (3.9)$$

где

$$\hat{T}^{(j)}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})}{(\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}) \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}))},$$

$\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{k} . Здесь мы не учитываем вклад продольной волны.

В дальней зоне в координатном представлении функция Грина имеет вид [30, 31]

$$\begin{aligned} \hat{G}^0(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi R} \times \\ &\times \sum_{j=o,e} n^{(j)2} f_{(j)} \hat{T}^{(j)} \exp(i\mathbf{k}_{st}^{(j)} \cdot \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\mathbf{k}_{st}^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} k_0 \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\mathbf{k}_{st}^{(e)} = k_0 \left[\frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}{(\mathbf{R}(\hat{\varepsilon}^0)^{-1} \mathbf{R})} \right]^{1/2} (\hat{\varepsilon}^0)^{-1} \mathbf{R} \quad (3.11)$$

— векторы стационарной фазы обыкновенной и необыкновенной волн,

$$f_{(o)} = 1, \quad f_{(e)}^2 = \frac{(\mathbf{s} \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{s})(\mathbf{s} \hat{\varepsilon}^{02} \mathbf{s})}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}^2}. \quad (3.12)$$

Величины в (3.12) вычислены в случае, когда $\mathbf{s} = \mathbf{k}_{st}^{(j)} / k_{st}^{(j)}$ является вектором стационарной фазы.

В первом приближении решение интегрального уравнения (3.7) описывает однократное рассеяние на флуктуациях диэлектрической проницаемости $\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$. Выражение для интенсивности однократного рассеяния имеет вид [30]

$$I_{(i)}^{(s)} = I_{(i)}^0 \frac{V}{(4\pi)^2 R^2} \frac{1}{n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \frac{n^{(s)}}{\cos^3 \delta^{(s)}} \times$$

$$\times f_{(s)}^2 e_{\alpha}^{(s)} e_{\beta}^{(s)} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) e_{\mu}^{(i)} e_{\nu}^{(i)}, \quad (3.13)$$

где индексы «(i)» и «(s)» обозначают тип падающей и рассеянной волны ($i, s = o, e$), V — рассеивающий объем, R — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения,

$$\cos \delta^{(o)} = 1, \quad \cos \delta^{(e)} = \frac{(\mathbf{e}^{(e)} \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(e)})^{1/2}}{n^{(e)}}, \quad (3.14)$$

$\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$, $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновые векторы рассеянного и падающего света, $I_{(i)}^0$ — интенсивность (модуль вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_{(i)}$) падающего света,

$$I_{(i)}^0 = |\mathbf{S}_{(i)}| = \frac{c}{4\pi} E_{(i)}^{02} n^{(i)} \cos \delta^{(i)},$$

$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) = k_0^4 \langle \delta \varepsilon_{\alpha\mu} \delta \varepsilon_{\nu\beta}^* \rangle(\mathbf{q})$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости. Она связана с флуктуациями директора соотношением

$$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) = k_0^4 \varepsilon_a^2 \sum_{l=1}^2 \langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle (a_{l\mu} a_{l\nu} n_{\alpha}^0 n_{\beta}^0 +$$

$$+ a_{l\mu} a_{l\beta} n_{\alpha}^0 n_{\nu}^0 + a_{l\alpha} a_{l\nu} n_{\mu}^0 n_{\beta}^0 + a_{l\alpha} a_{l\beta} n_{\mu}^0 n_{\nu}^0). \quad (3.15)$$

Если подставить явное выражение для корреляционной функции в формулу (3.13) для интенсивности однократного рассеяния, то можно проанализировать особенности рассеяния на флуктуациях директора. Прежде всего нетрудно убедиться, что,

в силу ортогональности вектора поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ обыкновенного луча и директора \mathbf{n}^0 , нет рассеяния обыкновенного луча в обыкновенный, $(o) \rightarrow (o)$. Таким образом, возможны только рассеяния типа $(o) \rightarrow (e)$, $(e) \rightarrow (o)$ и $(e) \rightarrow (e)$. Также рассеяние отсутствует, если поляризации $\mathbf{e}^{(i)}$ и $\mathbf{e}^{(s)}$ параллельны директору \mathbf{n}^0 . В этом случае векторы поляризации ортогональны векторам \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . Обратим внимание, что рассеяние типа $(o) \rightarrow (e)$ и $(e) \rightarrow (o)$ характеризуется вектором \mathbf{q} длиной $q \sim k_0 |n^{(o)} - n^{(e)}|$, т. е. вектор рассеяния при всех углах остается конечным. Рассеяние типа $(e) \rightarrow (e)$ при малых углах имеет резкий пик, особенно в случаях малых полей, $H_0 \rightarrow 0$. При этом рассеяние $(e) \rightarrow (e)$ происходит в основном вперед. Это означает, что при распространении в ЖК необыкновенный луч трансформируется из падающей плоской волны в диффузный с небольшим расширением пучка.

Введем полное сечение рассеяния $\sigma_{(i)}$, определяемое как рассеянная единицей объема мощность, деленная на модуль плотности потока энергии $|\mathbf{S}_{(i)}|$ падающей волны [32],

$$\sigma_{(i)} = \frac{dP}{dV |\mathbf{S}_{(i)}|}.$$

Для вычисления рассеянной мощности P следует проинтегрировать выражение (3.13) по всем направлениям рассеянных лучей по поверхности сферы радиуса R . Тогда, суммируя по двум возможным типам рассеянных лучей, для полного сечения рассеяния в борновском приближении имеем

$$\sigma_{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e_{\alpha}^{(i)} e_{\beta}^{(i)}}{n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \times$$

$$\times \sum_{s=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) \frac{n^{(s)} e_{\mu}^{(s)} e_{\nu}^{(s)}}{\cos^2 \delta^{(s)}}, \quad (3.16)$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}}$ означает интегрирование по всем направлениям волновых векторов рассеянного света. Здесь мы перешли от интегрирования по направлениям лучевых векторов к интегрированию по направлениям волновых векторов и учли, что $|\mathbf{S}_{(i)}| = I_{(i)}^0$.

С полным сечением рассеяния связан коэффициент экстинкции $\tau_{(i)}$, определяющий коэффициент затухания электромагнитной волны в среде. Коэффициент экстинкции определяется мнимой частью тензора диэлектрической проницаемости. В анизотропных средах справедливо соотношение [33, 34]

$$\sigma_{(i)} = \tau_{(i)} \cos \delta^{(i)}. \quad (3.17)$$

Такое различие между коэффициентом экстинкции и полным сечением рассеяния связано с тем, что для

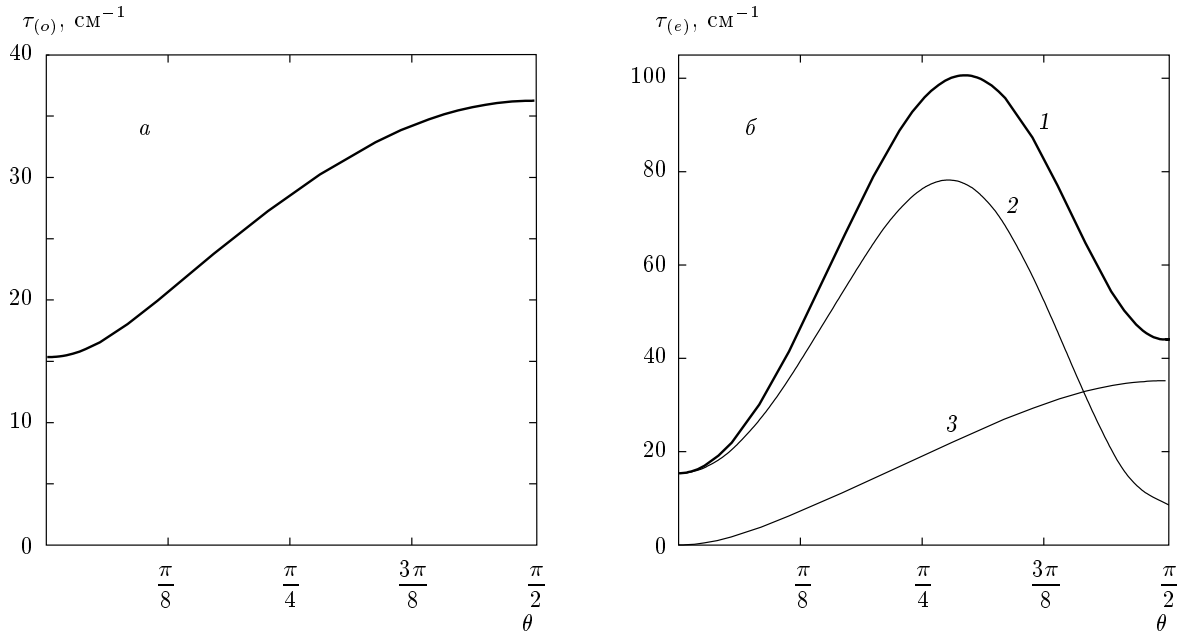


Рис. 1. Зависимость коэффициентов экстинкции обыкновенного (*a*) и необыкновенного (*b*) лучей от угла θ между волновым вектором падающей волны и оптической осью: 1 — полный коэффициент экстинкции; 2 и 3 — вклады в коэффициент экстинкции, связанные с рассеянием соответственно в необыкновенный и обыкновенный лучи. Кривые рассчитаны по формуле (3.18) для ЖК 5СВ. Необходимые параметры взяты из работ [25, 26]: $\varepsilon_{\perp} = 2.2$, $\varepsilon_a = 0.8$, $\lambda = 4.88 \cdot 10^{-5}$ см, $K_{33} = 6.1 \cdot 10^{-7}$ дин, $K_{11} = 0.79K_{33}$, $K_{22} = 0.43K_{33}$, $T = 301$ К, $\xi_H = 4.2 \cdot 10^{-4}$ см

необыкновенного луча в анизотропных средах направление переноса энергии (т.е. направление вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_{(i)}$) и направление волнового вектора $\mathbf{k}^{(i)}$ не совпадают. Используя выражения (3.16) и (3.17), получаем выражение для коэффициента экстинкции в анизотропной среде

$$\tau_{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e_{\alpha}^{(i)} e_{\beta}^{(i)}}{n^{(i)} \cos^2 \delta^{(i)}} \times \sum_{s=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) \frac{n^{(s)} e_{\mu}^{(s)} e_{\nu}^{(s)}}{\cos^2 \delta^{(s)}}. \quad (3.18)$$

Фактически, это соотношение, согласно оптической теореме, связывает коэффициент затухания электромагнитной волны в среде с ее рассеивающими свойствами [32].

На рис. 1 показана угловая зависимость коэффициента экстинкции для НЖК. Обратим внимание на то, что величина $\tau_{(e)}$, в отличие от $\tau_{(o)}$, сильно зависит от угла между волновым вектором падающей волны и оптической осью.

Наличие флуктуаций диэлектрической проницаемости приводит к тому, что при вычислении среднего поля и средней интенсивности рассеяния необходимо использовать полную функцию Грина, усред-

ненную по неоднородностям среды. В приближении слабого рассеяния такая усредненная функция Грина в представлении Фурье имеет вид [20]

$$\langle \hat{G}^{R/A} \rangle(\mathbf{k}) = \sum_{j=o,e} [\langle G^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j \hat{T}^{(j)}(\mathbf{s}), \quad (3.19)$$

где индексы *A* и *R* обозначают опережающую и запаздывающую функции Грина, $\langle \hat{G}^A \rangle(\mathbf{r}) = [\langle \hat{G}^R \rangle(\mathbf{r})]^*$,

$$[\langle G^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j = \left[\frac{k^2 - k^{(j)2}(\mathbf{s})}{n^{(j)2}(\mathbf{s})} \mp \frac{ik_0}{n^{(j)}(\mathbf{s})l_{(j)}(\mathbf{s})} \right]^{-1}, \quad (3.20)$$

$l_{(j)}(\mathbf{s})$ — длина свободного пробега фотона для волны типа (*j*). Длина свободного пробега связана с коэффициентом экстинкции соотношением

$$l_{(j)}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\tau_{(j)}(\mathbf{s})}.$$

Наличие экстинкции приводит к тому, что величина $[\langle G^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j$ становится комплексной. Полагая $\tau_{(j)} \ll k^{(j)}$, можно получить

$$\text{Im}[\langle G^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j \approx \pm \frac{\pi}{2k_0} n^{(j)}(\mathbf{s}) \delta(k^{(j)}(\mathbf{s}) - k). \quad (3.21)$$

В координатном представлении усредненная функция Грина имеет вид

$$\langle \hat{G}^{R/A} \rangle(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j=o,e} n^{(j)2} f_{(j)} \hat{T}^{(j)} \times \exp \left(\pm i \mathbf{k}_{st}^{(j)} \cdot \mathbf{R} - \frac{R}{2l_{(j)} (k_{st}^{(j)}/k_{st}^{(j)})} \right). \quad (3.22)$$

4. МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Среднее поле $\langle E_\alpha \rangle(\mathbf{x})$ определяется средней функцией Грина

$$\langle E_\alpha \rangle(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}_1 \langle G_{\alpha\beta}^R \rangle(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) F_\beta(\mathbf{x}_1),$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$ — источник. В этом разделе и далее пространственные координаты будем обозначать буквами \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Свойства рассеянного света определяются функцией когерентности

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}_1) E_\beta^*(\mathbf{x}_2) \rangle.$$

Нас будет интересовать автокорреляционная функция

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \langle E_\alpha(\mathbf{x}) E_\beta^*(\mathbf{x}) \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \times \langle G_{\alpha\alpha'}^R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) G_{\beta'\beta}^A(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \rangle F_{\alpha'}(\mathbf{x}_1) F_{\beta'}^*(\mathbf{x}_2), \quad (4.1)$$

через которую выражается интенсивность рассеянного света. Заметим, что полная функция Грина $\hat{G}^{R/A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ зависит от двух пространственных аргументов, так как во флуктуирующей среде отсутствует трансляционная симметрия. Однако в среднем среда является однородной, и после усреднения функция $\langle \hat{G}^{R/A} \rangle(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ в безграничной среде будет зависеть лишь от разности пространственных аргументов.

Поскольку в НЖК флуктуации директора не малы, при распространении света в достаточно толстых образцах ЖК формируется режим многократного рассеяния. Для описания интенсивности многократного рассеяния удобно использовать уравнение Бете–Солпитера (см., например, работу [12]), которое имеет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) = \Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + \int d\mathbf{R}_2 d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times U_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \quad (4.2)$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle G_{\alpha\alpha'}^R \rangle(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \langle G_{\beta'\beta}^A \rangle(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1), \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle G_{\alpha\alpha'}^R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) G_{\beta'\beta}^A(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \rangle. \quad (4.4)$$

Функция \hat{G} учитывает пространственные корреляции функции Грина в неоднородной среде. Функция \hat{U} содержит неприводимые диаграммы оператора интенсивности. Здесь вместо координат $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, n = 1, \dots, 4$ введены переменные

$$\mathbf{R}_n = \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n}{2}, \quad n = 1, \dots, 4,$$

описывающие координаты «центров масс», и переменные

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n, \quad n = 1, \dots, 4,$$

характеризующие пространственную корреляцию полей в сильнонеоднородной среде. Уравнение (4.2) удобно представить в диаграммном виде:

где заштрихованный блок обозначает функцию \hat{G} (4.4), две параллельных линии — произведение средних функций Грина \hat{G}^0 (4.3), причем верхняя линия соответствует $\langle \hat{G}^R \rangle$, а нижняя — $\langle \hat{G}^A \rangle$, незаштрихованный блок \hat{U} учитывает всевозможные корреляции тензора диэлектрической проницаемости. Величины, соответствующие элементам нижней линии, комплексно сопряжены относительно элементов верхней линии. В каждой вершине проводится интегрирование по объему и суммирование по компонентам тензорных величин. Здесь для иллюстрации указаны пространственные координаты $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, n = 1, \dots, 4$.

В приближении слабого рассеяния, $l_{(j)} \gg \lambda$, где λ — длина световой волны, $j = 1, 2$, основной вклад в интенсивность рассеяния определяется выражением

$$U_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (4.5)$$

В этом случае уравнение Бете–Солпитера приводится к виду

$$\text{shaded square} = \text{horizontal line} + \text{diagram with wavy line and shaded square}, \quad (4.6)$$

где волнистая линия обозначает функцию \hat{B} . Построим итерационное решение уравнения (4.6) в диаграммном представлении:

$$\text{shaded square} = \text{horizontal line} + \text{diagram with wavy line and dot} + \text{diagram with two wavy lines and two dots} + \dots \quad (4.7)$$

Таким образом, использование выражения (4.5) соответствует учету лестничных диаграмм

$$L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) =$$

$$= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \quad (4.8)$$

Тогда итерационное решение уравнения (4.6) можно представить как

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) = \Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + \int d\mathbf{R}_2 d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4). \quad (4.9)$$

После статистического усреднения характеристики системы становятся пространственно-однородными, т.е. не зависят от абсолютных значений координат, а зависят только от их разностей. Поэтому функция $\hat{\Gamma}$ в (4.4) реально является функцией не четырех, а трех переменных: $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Для решения уравнения (4.6) удобно выполнить преобразование Фурье по всем трем пространственным переменным:

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int d(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \times \exp[-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2] \times \hat{\Gamma}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4.10)$$

Тогда уравнение (4.6) примет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) I_{\gamma\delta\alpha'\beta'}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \times \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2), \quad (4.11)$$

а его решение (4.9) —

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) I_{\gamma\delta\alpha'\beta'}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2), \quad (4.12)$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \langle G_{\alpha\gamma}^R(\mathbf{k} + \mathbf{K}/2) \langle G_{\delta\beta}^A(\mathbf{k} - \mathbf{K}/2) \rangle, \quad (4.13)$$

$$I_{\gamma\delta\alpha'\beta'}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times (\delta_{\gamma\alpha'} \delta_{\delta\beta'} + \delta_{\gamma\beta'} \delta_{\delta\alpha'})/2. \quad (4.14)$$

Заметим, что диаграммный вид (4.6) и (4.7) справедлив и в представлении Фурье. Только интегрирование по координатам заменяется на интегрирование по промежуточным волновым векторам с учетом векторного закона сохранения импульса в вершинах.

Решение уравнения (4.11) сводится к суммированию бесконечного ряда (4.7). Для скалярного поля и изотропной рассеивающей среды это уравнение было решено в работе [12] в приближении точечных рассеивателей. В этом случае все величины, входящие в уравнение (4.11), являются скалярами и уравнение можно записать в виде

$$\Gamma(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Gamma^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \Gamma^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) L(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Gamma^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2). \quad (4.15)$$

В скалярном изотропном случае функции G^0 и $\langle G^{R/A} \rangle$ имеют вид

$$G^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2}, \quad (4.16)$$

$$\langle G^{R/A} \rangle(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2 \mp ik_0/l},$$

где l — длина свободного пробега фотона. В приближении точечных рассеивателей функция B принимает вид

$$B(\mathbf{r}) = \gamma \delta(\mathbf{r}), \quad (4.17)$$

где γ — постоянная величина, связанная с длиной свободного пробега l оптической теоремой: $l = 4\pi/\gamma$. В этом случае ряд вида (4.8) легко суммируется и имеет вид геометрической прогрессии со знаменателем

$$Q(\mathbf{K}) = \gamma \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \langle G^R \rangle \left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{K}}{2} \right) \times \langle G^A \rangle \left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{K}}{2} \right) \approx 1 - \frac{1}{3} l^2 K^2. \quad (4.18)$$

Суммирование геометрической прогрессии дает

$$L(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\gamma}{1 - Q(K)} \approx \frac{3\gamma}{l^2 K^2} = \frac{\gamma}{\tau} \frac{1}{DK^2}, \quad (4.19)$$

где $D = lc/3$ — коэффициент диффузии, τ — среднее время жизни фотона. Использование асимптотики вида K^{-2} в выражении (4.19) соответствует расстояниям $R \gg l$, когда применимо диффузионное приближение уравнения переноса излучения [32]. В случае рассеяния на частицах конечных размеров диффузионное приближение приводит к замене длины свободного пробега l в (4.19) на транспортную длину l^* , которая может значительно превышать l .

В случае анизотропных систем и электромагнитного поля решение уравнения (4.11) в диффузионном приближении было получено в работе [20]. Сложность здесь состоит в том, что требуется учитывать векторный характер электромагнитного поля, различные поляризации собственных волн среды и конечное значение корреляционной длины. В этом случае, в отличие от модели точечных рассеивателей, члены ряда (4.8) представляют собой интегралы, которые нельзя просуммировать как простую геометрическую прогрессию, что было сделано при получении выражения (4.19). Поэтому решение уравнения Бете–Солпитера (4.11) методом итераций становится неэффективным, и был предложен метод решения, основанный на разложении по собственным функциям интегрального уравнения. Для этого уравнение Бете–Солпитера (4.11) представлялось в виде

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [I_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) - \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) \times B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})] \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2) = \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) I_{\mu\nu\alpha'\beta'}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (4.20)$$

Если собственные функции и собственные значения интегрального уравнения (4.20) обозначить как $\Psi_{\alpha\beta}^{(m)}(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ и $\lambda^{(m)}(\mathbf{K})$, $m = 0, \dots, \infty$, то

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [I_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) - \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) \times B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})] \Psi_{\mu\nu}^{(m)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \lambda^{(m)}(\mathbf{K}) \Psi_{\alpha\beta}^{(m)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1). \quad (4.21)$$

Тогда решение уравнения (4.20) можно представить

в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sum_{m=0} \frac{\Psi_{\alpha\beta}^{(m)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1) \bar{\Psi}_{\mu\nu}^{(m)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2)}{\lambda^{(m)}(\mathbf{K})} \times \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}^0(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2), \quad (4.22)$$

где $\bar{\Psi}_{\mu\nu}^{(m)}$ — собственные функции эрмитово-сопряженной задачи. Решение задачи на собственные функции и собственные значения (4.21) представляет значительные трудности. Построить решение удается только для случая очень малых K . Это соответствует нахождению интенсивности многократного рассеяния на больших расстояниях. Для малых K в сумме (4.22) было учтено только одно слагаемое, отвечающее самому маленькому собственному значению $\lambda^{(0)}$. В низшем порядке по K решение имеет вид [20]

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{(D)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{N} \frac{\text{Im}\langle G_{\alpha\beta}^R \rangle(\mathbf{k}_1) \text{Im}\langle G_{\alpha'\beta'}^R \rangle(\mathbf{k}_2)}{(\mathbf{K} \hat{D} \mathbf{K})}, \quad (4.23)$$

где

$$N = \frac{k_0^2}{16\pi^2 c} \sum_{j=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} n^{(j)3}(\mathbf{s}),$$

\hat{D} — тензорный коэффициент диффузии света, который для НЖК имеет вид

$$\hat{D} = D_{\perp} \hat{I} + (D_{\parallel} - D_{\perp}) \mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0, \quad (4.24)$$

D_{\parallel} и D_{\perp} — коэффициенты диффузии вдоль и поперек \mathbf{n}^0 . Для дальнейшего удобно выделить в функции $\hat{I}^{(D)}$ вклад, зависящий от переменной \mathbf{K} . Получим

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{(\mathbf{K} \hat{D} \mathbf{K})}. \quad (4.25)$$

Обратим внимание, что в модели точечных рассеивателей просуммировать ряд лестничных диаграмм удается при любых значениях K . Диффузионный полюс появляется для малых K , соответствующих расстояниям, значительно большим длины свободного пробега фотона. Решение, предложенное в работе [20], основано на противоположном подходе. В этом случае известно точное соотношение при $K = 0$, которое представляет собой тождество Уорда. На основе этого соотношения строится теория возмущений по малым значениям K , что также приводит к диффузионному приближению.

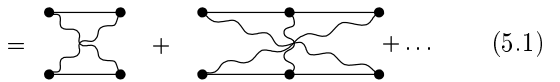
Выражения (4.19) и (4.23) описывают решение уравнения переноса излучения, когда все кратности рассеяния одного порядка. В этом случае уравнение переноса излучения сильно упрощается и принимает вид уравнения диффузии. В случае анизотропной среды коэффициент диффузии имеет тензорную структуру (4.24), что означает зависимость скорости диффузии от направления. Расчет коэффициентов D_{\parallel} и D_{\perp} представляет достаточно сложную задачу. Она была решена в работе [20] с учетом предположений, что нет взаимодействия между обыкновенными и необыкновенными волнами и корреляционная длина ξ_H флуктуаций директора меньше длины свободного пробега $l_{(j)}$ фотона.

5. КОГЕРЕНТНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

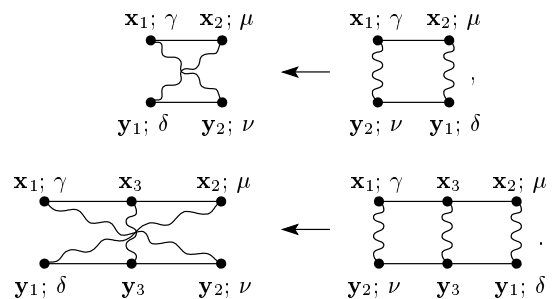
В предыдущем разделе было построено решение уравнения Бете – Солпитера в диффузионном приближении. Оно позволяет описать многократное рассеяние света во всех направлениях, кроме узкой окрестности рассеяния строго назад. В этой области становится существенным эффект когерентного обратного рассеяния. Физически он заключается в том, что поля, рассеянные на тех же неоднородностях, но в обратном порядке, являются когерентными. Это приводит к дополнительному вкладу и появлению узкого пика в угловой зависимости интенсивности рассеяния. Поясним возникновение когерентности на простом случае скалярных полей и изотропной среды. Рассмотрим последовательность из M рассеяний. Пусть падающая волна имеет волновой вектор \mathbf{k}_i . После рассеяния с номером m волна имеет волновой вектор \mathbf{k}_m . Наконец, волна, выходящая из среды, будет иметь волновой вектор $\mathbf{k}_M = \mathbf{k}_s$, т. е. в процессе рассеяния волновые векторы проходят последовательность $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{M-1}, \mathbf{k}_s$. Поскольку распределение рассеивателей считается случайным, любые последовательности, состоящие из M актов рассеяния, считаются нескоррелированными. Однако возможна ситуация, когда между такими последовательностями возникает интерференция. Рассмотрим последовательность с волновыми векторами $\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_{M-1}, -\mathbf{k}_{M-2}, \dots, -\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_s$, проходящую те же самые центры рассеяния, что и в исходной последовательности, но в обратном порядке. Нетрудно показать, что суммарный фазовый сдвиг между такими последовательностями составляет $(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_M)$, где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_M — положения первого и последнего рассеивающих центров. Тогда при $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_i$ эти две последовательности будут иметь одинаковую ампли-

туду и фазу, а значит, будут когерентными. Обозначим угол между \mathbf{k}_i и $-\mathbf{k}_s$ как Θ . Тогда разность фаз можно записать как $2\pi\Theta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_M|/\lambda$. Когерентность пропадает, если $\Theta \approx \lambda/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_M|$. Для самой короткой последовательности рассеяний ($M = 2$) среднее значение расстояния $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_M|$ представляет собой длину свободного пробега l фотона. Таким образом, можно ожидать увеличения интенсивности вплоть до двукратного в пределах конуса с углом раствора порядка λ/l .

Для описания этого увеличения интенсивности требуется учитывать последовательности рассеяний, происходящих в обратном порядке. Такие последовательности описываются циклическими диаграммами \hat{C} . Сумма циклических диаграмм имеет вид [3]

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) =$$


Как известно, вклад циклических диаграмм нетрудно получить из вклада лестничных, выполнив разворот нижней линии диаграмм на π , что соответствует развороту последовательности рассеяний:



Выполняя эту процедуру для каждой диаграммы, можно получить общее соотношение для всего ряда (подчеркнем, что такая связь лестничных и циклических диаграмм начинается с диаграммы, описывающей двукратное рассеяние):

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) =$$

$$= \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta} \left(\frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}{2} + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{4}, \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{4}, \right.$$

$$\left. \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right). \quad (5.2)$$

Здесь введено обозначение $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$ для суммы лестничных диаграмм, начинающейся с двукратного рассеяния,

$$\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta} = \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \dots \quad (5.3)$$

Нас интересует интенсивность многократно рассеянного света, содержащая вклады лестничных и циклических диаграмм. Будем считать, что рассеивающая среда занимает объем V_{sc} . Фурье-образ $J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})$ функции когерентности $\langle E_{\alpha}(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2)E_{\beta}^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \rangle$ по переменной \mathbf{r} пропорционален интенсивности излучения в точке \mathbf{R} с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$ [16]:

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}) \times \langle E_{\alpha}(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}) E_{\beta}^*(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}) \rangle, \quad (5.4)$$

или

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}) \times \int d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_3 \Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}, \mathbf{r}_3) J_{\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3), \quad (5.5)$$

где $J_{\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3)$ — интенсивность источника. При выполнении интегрирования по \mathbf{R}_3 и \mathbf{r}_3 необходимо учитывать, что точки с координатами $\mathbf{x}_3 = \mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_3/2$ и $\mathbf{y}_3 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{r}_3/2$ лежат внутри рассеивающего объема. Пусть на рассеивающий объем падает плоская волна. В этом случае

$$J_{\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3) = |E_0^{(i)}|^2 e_{\alpha'}^{(i)} e_{\beta'}^{(i)} \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_3) = I_{\alpha'\beta'}^{(i)} \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_3).$$

Учитывая в (5.5) вклады лестничных и циклических диаграмм в $\hat{\Gamma}$, получим

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) + J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}_1) \times [L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] \times \int_{S_{sc}} d\mathbf{R}_3 \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}^0(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}^{(i)}) I_{\alpha'\beta'}^{(i)}, \quad (5.6)$$

где S_{sc} — площадь освещаемой падающим полем поверхности. В выражении (5.6) выполнены интегрирования по разностным координатам \mathbf{r} .

В формулу (5.6) входит произведение средних функций Грина $\hat{\Gamma}^0$ в смешанном представлении.

Если воспользоваться приближением дальней зоны $r_1, r_2 \ll R$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, то функция $\hat{\Gamma}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ примет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 4\pi^4 \times \left[\frac{1}{R^2} \exp\left(-\frac{R}{l^{(o)}}\right) \delta\left(\mathbf{k}_1 - k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \frac{\mathbf{R}}{R}\right) \times \delta\left(\mathbf{k}_2 - k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \frac{\mathbf{R}}{R}\right) E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(o)}\left(k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \frac{\mathbf{R}}{R}\right) + P(\mathbf{R}) \delta\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R})\right) \delta\left(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R})\right) \times E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(e)}\left(\mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R})\right) \right], \quad (5.7)$$

где

$$P(\mathbf{R}) = \frac{R}{\varepsilon_{\perp} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} (\mathbf{R} \cdot \hat{\varepsilon}^{(0)} - 1 \mathbf{R})^{3/2}},$$

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(j)}(\mathbf{k}) = e_{\alpha}^{(j)}(\mathbf{k}) e_{\beta}^{(j)}(\mathbf{k}) e_{\gamma}^{(j)}(\mathbf{k}) e_{\delta}^{(j)}(\mathbf{k}).$$

Здесь в произведении двух функций Грина мы пренебрегли «недиагональными» членами, содержащими одновременно векторы поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$.

Для вычисления интенсивности (5.6) нам осталось получить вклады лестничных и циклических диаграмм. Воспользуемся для этого диффузионным приближением (4.23), которое в диаграммном представлении имеет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{(D)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \dots \quad (5.8)$$

Если из этого ряда вычесть вклад двух первых слагаемых и убрать внешние пропагаторы, то можно получить выражение для ряда $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$, а следовательно, и для суммы циклических диаграмм $C_{\gamma\delta\mu\nu}$. Однако проще между концевыми частями диаграмм в (5.8) включить корреляционные функции, т. е. провести замену

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \dots$$

Заметим, что в результате этой процедуры мы получаем ряд для $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$, в котором не учитывается однократное рассеяние. Формально такое включение корреляций имеет следующий вид:

$$\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1) \times \Gamma_{\mu'\delta'\gamma'\nu'}^{(D)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{r}_2). \quad (5.9)$$

Уравнение (5.6) является достаточно общим. Нас интересует когерентное обратное рассеяние в ограниченной среде, занимающей полупространство. Стандартный подход для учета границ состоит в следующем. Вычисляется сумма лестничных диаграмм в диффузионном приближении для безграничной среды. Полученное решение удовлетворяет уравнению диффузии, которое в стационарном случае имеет вид уравнения Лапласа. Учет ограниченности среды выполняется методом зеркальных отображений.

В анизотропной среде скорость диффузии света зависит от направления и сумма лестничных диаграмм не удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако, выполнив подходящую замену системы координат, можно привести уравнение для суммы лестничных диаграмм к уравнению Лапласа и использовать метод зеркальных отображений.

Рассмотрим геометрию, реально используемую в экспериментах [25, 26], когда НЖК ориентирован так, что оптическая ось параллельна границе раздела сред. Считаем, что рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$, оптическая ось направлена по оси x , $\mathbf{n}^0 = (1, 0, 0)$. В этом случае функция $\Phi(\mathbf{K})$ в (4.25) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{D_{\parallel} K_x^2 + D_{\perp} (K_y^2 + K_z^2)}. \quad (5.10)$$

Перейдем в новую систему координат, в которой

$$K'_x = \sqrt{\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}}} K_x, \quad K'_y = K_y, \quad K'_z = K_z.$$

Тогда $\Phi(\mathbf{K}') = 1/D_{\perp} K'^2$. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим

$$\Phi(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|}, \quad (5.11)$$

где координаты со штрихами связаны с исходными координатами соотношениями

$$R'_x = \sqrt{\frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}}} R_x, \quad R'_y = R_y, \quad R'_z = R_z.$$

В новой системе координат положение границы $z = 0$ не изменилось и нетрудно выполнить учет границы с помощью метода зеркальных отображений. Для полупространства получим

$$\Phi_b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \times \left[\frac{1}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{1}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2^*|} \right], \quad (5.12)$$

где $\mathbf{R}'_2^* = \mathbf{R}'_2 - 2(\mathbf{R}'_2 \cdot \mathbf{e}_z + z_b)\mathbf{e}_z$. Здесь $z = z_b \approx 0.71l$ — положение плоскости, на которой сумма лестничных диаграмм обращается в нуль [8]. Если в среде имеется поглощение, то соотношение (5.12) принимает вид

$$\Phi_b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \times \left[\frac{\exp(-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi)}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{\exp(-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2^*|/\xi)}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2^*|} \right], \quad (5.13)$$

где ξ — средняя длина поглощения.

Используя выражения (5.9) и (5.13), для вклада лестничных диаграмм с учетом границы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1)\mathcal{G}_{\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1)}{4\pi N\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|} \right\} \times \\ &\times \mathcal{G}_{\gamma'\nu'}(\mathbf{r}_2)B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{r}_2), \quad (5.14) \end{aligned}$$

где

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{Im}\langle \hat{G}^R \rangle(\mathbf{k}).$$

С учетом вклада однократного рассеяния, имеющего вид (4.5), найдем полный вклад лестничных диаграмм:

$$L_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + B_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (5.15)$$

Используя формулы (5.2) и (5.13), для циклических диаграмм получим

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{2\pi N\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} B_{\gamma\nu\mu'\delta'} \left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{\exp[-|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|/2\xi]}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|} - \frac{\exp[-|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 + 2(R_{1z} + R_{2z} - (r_{1z} - r_{2z})/2 + 2z_b)\mathbf{e}_z|/2\xi]}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 + 2(R_{1z} + R_{2z} - (r_{1z} - r_{2z})/2 + 2z_b)\mathbf{e}_z|} \right\} \times \\ &\times \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} \left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) B_{\gamma'\nu'\mu\delta} \left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right). \quad (5.16) \end{aligned}$$

Диффузионное приближение, в рамках которого была вычислена сумма лестничных диаграмм, фактически предполагает короткодействующие корреляционные функции. Для простоты будем полагать, что входящие в выражения (5.14) и (5.16) корреляционные функции имеют вид

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = \hat{B}_0 \delta(\mathbf{r}),$$

где

$$\hat{B}_0 = \int \hat{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \hat{B}(\mathbf{k} = 0).$$

Выражение для $\hat{B}(\mathbf{k} = 0)$ нетрудно получить из выражения (3.15), учитывая, что

$$\langle |n_l(\mathbf{q} = 0)|^2 \rangle = k_B T / \chi_a H^2, \quad l = 1, 2$$

и пару ортогональных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ при $\mathbf{q} = 0$ можно выбрать произвольно в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{n}^0 .

Выполняя преобразование Фурье по переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , получаем

$$\begin{aligned} L_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \frac{1}{4\pi N \sqrt{D_{\parallel} D_{\perp}}} \times \\ &\times B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k} = 0) \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k} = 0) \times \\ &\times \left\{ \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \right. \\ &\left. - \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|} \right\} + \\ &+ B_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{k} = 0) \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (5.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \frac{\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{4\pi N \sqrt{D_{\parallel} D_{\perp}}} \times \\ &\times B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k} = 0) \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k} = 0) \times \\ &\times \int d\mathbf{r}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_1] \left\{ \frac{\exp(-r'_1/\xi)}{r'_1} - \right. \\ &\left. - \frac{\exp[-|\mathbf{r}'_1 + 2(R_{1z} - r_{1z}/2 + z_b)\mathbf{e}_z|/\xi]}{|\mathbf{r}'_1 + 2(R_{1z} - r_{1z}/2 + z_b)\mathbf{e}_z|} \right\}, \quad (5.18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} &= \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r} = 0) = \\ &= \frac{k_0}{16\pi^2} \sum_{j=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} n^{(j)3}(\mathbf{s}) \hat{T}^{(j)}(\mathbf{s}). \quad (5.19) \end{aligned}$$

При выполнении интегрирования по переменной \mathbf{r}_1 в (5.18) следует учитывать, что точки $(\mathbf{R}_1 \pm \mathbf{r}_1/2)$ должны лежать внутри рассеивающей среды. Для полупространства $z > 0$ это приводит к условию $R_{1z} \pm r_{1z}/2 > 0$, или

$$-2R_{1z} < r_{1z} < 2R_{1z}.$$

Подставляя (5.7), (5.17) и (5.18) в (5.6), получаем явное выражение для интенсивности когерентного обратного рассеяния с учетом лестничных и циклических диаграмм.

6. РАСЧЕТ ПИКА КОГЕРЕНТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Проанализируем когерентное обратное рассеяние для наиболее простой геометрии (рис. 2). Эта геометрия фактически совпадает с использованной в экспериментах [25, 26]. Считаем, что свет падает по нормали к слою ЖК, $\mathbf{k}_{out}^{(i)} = k_0(0, 0, 1)$, и вектор поляризации $\mathbf{e}_{out}^{(i)} \parallel \mathbf{n}^0$. При входе в ЖК это соответствует поляризации необыкновенного луча, которая также параллельна директору, $\mathbf{e}^{(i)} \parallel \mathbf{n}^0$. Индекс «out» относится к величинам вне рассеивающего объема.

Интенсивность многократно рассеянного света измеряется на поверхности рассеивающей среды, причем регистрируется рассеянный свет с той же поляризацией, что и падающий свет, $\mathbf{e}_{out}^{(s)} \parallel \mathbf{n}^0$. Измеряется интенсивность когерентного обратного рассеяния в узком конусе с осью вдоль оси z : $\mathbf{k}_{out}^{(s)} \approx k_0(\Theta \cos \phi, \Theta \sin \phi, -1)$, где Θ — малый угол, отсчитываемый от направления, обратного положительному направлению оси z , угол ϕ пробегает значения от нуля до 2π . В дальнейших расчетах мы должны учесть преломление волновых векторов на границе ЖК. Для описанной геометрии получим $\mathbf{k}^{(i)}$ и $\mathbf{k}^{(s)}$ внутри ЖК:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(i)} &= \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} k_0(0, 0, 1), \\ \mathbf{k}^{(s)} &= k_0(\Theta \cos \phi, \Theta \sin \phi, -\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}). \quad (6.1) \end{aligned}$$

В дальнейших расчетах будем пренебрегать вкла-

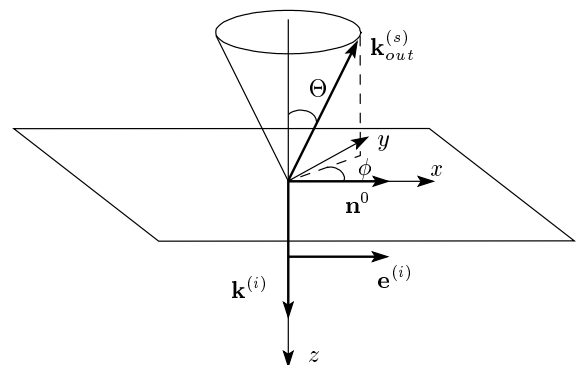


Рис. 2. Геометрия, используемая для расчета эффекта когерентного обратного рассеяния. Рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$

дом в функцию $\hat{\Gamma}^0$, связанным с обыкновенной волной. Это соответствует учету рассеяния только типа $(e) \rightarrow (e)$. Такое приближение оправдано, поскольку рассеяние $(o) \rightarrow (o)$ в НЖК отсутствует, а рассеяния типа $(e) \rightarrow (o)$ и $(o) \rightarrow (e)$ значительно слабее, чем рассеяние типа $(e) \rightarrow (e)$. Подставляя в выражение (5.6) для $J_{\alpha\beta}^{(C)}$ второе слагаемое выражения (5.7) для $\hat{\Gamma}^0$ и выражение (5.18) для \hat{C} , получим

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \times \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \frac{\pi}{2} P(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \exp\left(-\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|}{l_{(e)}}\right) \times \int_{-2R_{1z}}^{2R_{1z}} d\mathbf{r}_1 \exp[i(\mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}^{(i)}) \cdot \mathbf{r}_1] \left\{ \frac{\exp[-r'_1/\xi]}{r'_1} - \frac{\exp[-|\mathbf{r}'_1 + 2(R_{1z} - r_{1z}/2 + z_b)\mathbf{e}_z|/\xi]}{|\mathbf{r}'_1 + 2(R_{1z} - r_{1z}/2 + z_b)\mathbf{e}_z|} \right\} \times \frac{\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \int_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \frac{\pi}{2} P(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3) \times \exp\left(-\frac{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3|}{l_{(e)}}\right) \delta(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)) \times \delta(\mathbf{k}^{(i)} - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)), \quad (6.2)$$

где

$$M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) = E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(e)}(\mathbf{k}^{(s)}) N^{-1} B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k} = 0) \times \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k} = 0) E_{\mu\nu\alpha'\beta'}^{(e)}(\mathbf{k}^{(i)}) I_{\alpha'\beta'}^{(i)}. \quad (6.3)$$

В выражении (6.2) интегрирование по \mathbf{R}_3 выполняется по плоскости $Z_3 = 0$, которая при данной геометрии является освещаемой поверхностью, а также сняты два интегрирования за счет дельта-функций, а детали расчета интегралов можно найти в Приложении А. Вклад в интенсивность обратного рассеяния за счет циклических диаграмм имеет вид

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = J_{\alpha\beta}^{(C)}(\Theta, \phi) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1}{D_{\perp}} \frac{1}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}} \times \left[\frac{l_{(e)}}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2} + 1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2})}{(\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2} + 1/l_{(e)})^2} \right], \quad (6.4)$$

где

$$q'^2 = k_0^2 \left(\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} \Theta^2 \cos^2 \phi + \Theta^2 \sin^2 \phi \right).$$

Вклад в интенсивность от лестничных диаграмм $J_{\alpha\beta}^{(L)}$ рассчитывается аналогично вкладу от циклических. Имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \frac{\pi}{2} P(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \times \exp\left(-\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|}{l_{(e)}}\right) \left\{ \frac{M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \times \left[\frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|/\xi]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2(R_{2z} + 2z_b)\mathbf{e}_z|} \right] + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \right\} \times \int_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \frac{\pi}{2} P(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3) \exp\left(-\frac{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3|}{l_{(e)}}\right) \times \delta(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)) \times \delta(\mathbf{k}^{(i)} - \mathbf{k}_{st}^{(e)}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)), \quad (6.5)$$

где

$$M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) = E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(e)}(\mathbf{k}^{(s)}) \frac{1}{N} B_{\gamma\delta\mu'\delta'}(\mathbf{k} = 0) \times \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu'\mu\nu}(\mathbf{k} = 0) E_{\mu\nu\alpha'\beta'}^{(e)}(\mathbf{k}^{(i)}) I_{\alpha'\beta'}^{(i)}, \quad (6.6)$$

$$M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) = E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(e)}(\mathbf{k}^{(s)}) B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k} = 0) \times E_{\mu\nu\alpha'\beta'}^{(e)}(\mathbf{k}^{(i)}) I_{\alpha'\beta'}^{(i)}. \quad (6.7)$$

Здесь $M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})$ относится к сумме ряда лестничных диаграмм, начинающегося с члена для двукратного рассеяния, а коэффициент $M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})$ связан с однократным рассеянием. После вычисления интегралов в (6.5) получаем (см. Приложение А)

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \left\{ M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\xi}{D_{\perp}} \times \left[\frac{l_{(e)}}{1/\xi + 1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b/\xi)}{(1/\xi + 1/l_{(e)})^2} \right] + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) l_{(e)} \right\}. \quad (6.8)$$

Заметим, что в рассматриваемой геометрии $\mathbf{e}^{(i)} \parallel \mathbf{n}^0$ и $\mathbf{e}^{(s)} \parallel \mathbf{n}^0$. Из выражений (3.13) и (3.15) нетрудно показать, что в такой геометрии однократное рассеяние отсутствует [34], т. е. $M_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$.

Интенсивность измеряется для рассеянного света, поляризованного вдоль оси x . Фактически это

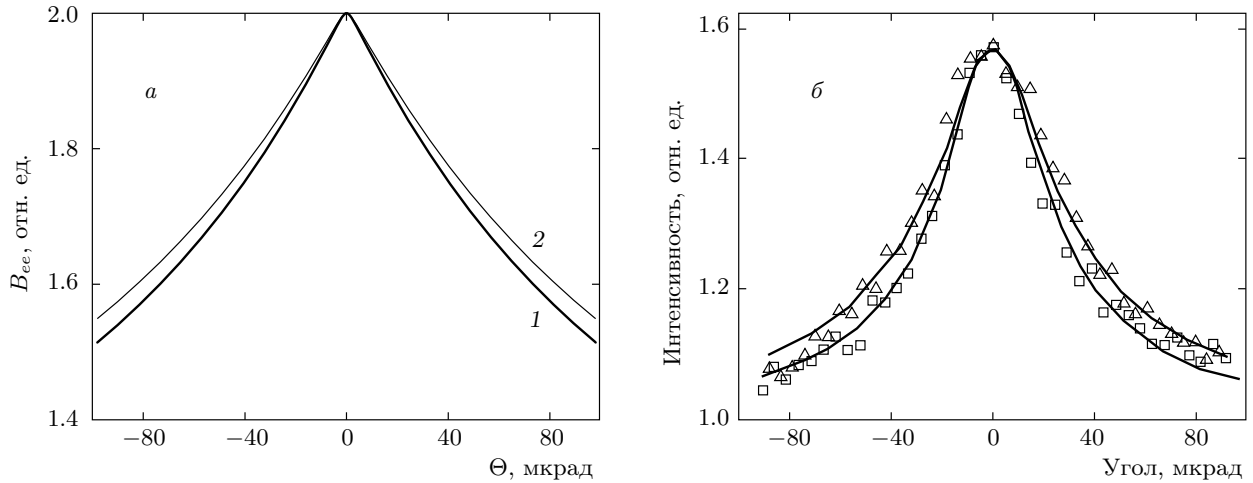


Рис. 3. Угловая зависимость пика интенсивности когерентного обратного рассеяния. Векторы поляризации падающей и рассеянной волн направлены вдоль директора. Расчеты (а) проведены по формулам (6.4) и (6.10) для ЖК 5СВ. Значения параметров такие же, как в случае рис. 1. Отношение коэффициентов диффузии $D_{\parallel}/D_{\perp} = 1.26$, коэффициент экстинкции необыкновенного луча при рассеянии назад $\tau_{(e)} = 44.0 \text{ см}^{-1}$, длина свободного пробега $l_{(e)} = 1/\tau_{(e)}$, длина поглощения $\xi = 4 \text{ см}$, $z_b = 0.71l_{(e)}$. Кривая 1 соответствует расчету при $\phi = 0$, т. е., для направления вдоль директора, кривая 2 — $\phi = \pi/2$, перпендикулярно директору. Экспериментальные кривые (б) взяты из работ [25, 26] для этого же ЖК в той же геометрии (квадраты соответствуют направлению сканирования вдоль директора, треугольники — перпендикулярно директору)

означает, что $\alpha = x$ и $\beta = x$. Поскольку зависимость от угла Θ в поляризациях, определяемых векторами $\mathbf{e}^{(i)}$ и $\mathbf{e}^{(s)}$, имеет высокий порядок малости, этим отличием можно пренебречь. Тогда, как показано в Приложении Б, поляризационные коэффициенты $M_{xx}^{(L)}$ и $M_{xx}^{(C)}$ совпадают и из выражений (6.4) и (6.8) имеем

$$J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = J_{xx}^{(C)}(\Theta = 0, \phi = 0). \quad (6.9)$$

Таким образом, пик относительной интенсивности когерентного обратного рассеяния описывается величиной

$$B_{ee}(\Theta, \phi) = \frac{J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) + J_{xx}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})}{J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})} = 1 + \frac{J_{xx}^{(C)}(\Theta, \phi)}{J_{xx}^{(C)}(0, 0)}. \quad (6.10)$$

Нетрудно видеть, что максимальная высота пика равна 2.

В случае падения на образец волны типа (o) и рассеяния волны типа (e), поляризационный множитель $M_{xx}^{(C)}$, как показано в Приложении Б, обращается в нуль. Это означает, что в случае скрещенных поляризаций падающего и рассеянного света пик когерентного обратного рассеяния отсутству-

ет и $B_{oe}(\Theta, \phi) \equiv 1$. Этот результат подтверждается экспериментально [25, 26]. Заметим также, что в режиме многократного рассеяния возможен случай падающей и рассеянной волн типа (o). Это связано с тем, что в процессе многократного рассеяния волна типа (o) может рассеяться в волну типа (e), а потом на выходе из образца волна типа (e) рассеется в волну типа (o). Как показано в Приложении Б, поляризационный множитель $M_{yy}^{(C)}$ в этом случае не обращается в нуль и возможно наблюдение пика когерентного обратного рассеяния. Пик обратного рассеяния, когда падающая и рассеянная волны являются обыкновенными, наблюдался экспериментально [25, 26].

Мы провели сравнение теоретических кривых с экспериментальными данными работ [25, 26]. Поскольку рассматривался образец конечной толщины W , а мы получили формулы для интенсивности рассеяния от полупространства, в расчетах, как это обычно делается [12], мы положили в качестве длины поглощения $\xi \approx W$. Расчеты проведены для жидкого кристалла 5СВ для длины волны $\lambda = 4.88 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $\varepsilon_{\perp} = 2.2$, $\varepsilon_a = 0.8$, $K_{33} = 6.1 \cdot 10^{-7} \text{ дин}$, $K_{11} = 0.79K_{33}$, $K_{22} = 0.43K_{33}$, $T = 301 \text{ К}$, $\xi_H = 4.2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Толщина образца в эксперименте составляла $W = 4 \text{ см}$. При расчетах зна-

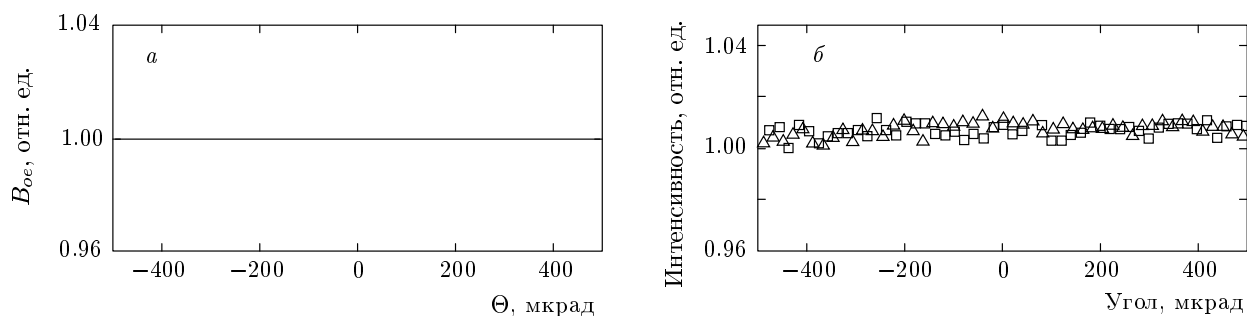


Рис. 4. Относительная интенсивность рассеяния в случае скрещенных поляризаций. Вектор поляризации падающей волн направлен перпендикулярно директору, а рассеянной — вдоль директора. В этом случае $B_{oe} \equiv 1$ — прямая (а). Экспериментальные точки для случая скрещенных поляризаций (б) взяты из работ [25, 26] (обозначения те же, что на рис. 3б)

чения коэффициентов диффузии D_{\parallel} и D_{\perp} были взяты из работы [35], где эти величины измерялись экспериментально, $D_{\parallel} = 4.56 \cdot 10^8 \text{ см}^2/\text{с}$, $D_{\parallel}/D_{\perp} = 1.26$. Длина свободного пробега $l_{(e)} = 1/\tau_{(e)}$. Коэффициент экстинкции необыкновенного луча рассчитан по формуле (3.18) и при рассеянии назад ($\theta = \pi/2$) составляет $\tau_{(e)} = 44.0 \text{ см}^{-1}$.

На рис. 3а показана угловая зависимость пиков интенсивности когерентного обратного рассеяния, $B_{ee}(\Theta, \phi = 0)$ и $B_{ee}(\Theta, \phi = \pi/2)$, для геометрии, приведенной на рис. 2. Векторы поляризации падающего и многократно рассеянного света направлены по оси x вдоль директора, что соответствует рассеянию типа $(e) \rightarrow (e)$. Для сравнения на рис. 3б показаны экспериментальные кривые [25, 26] для этого же ЖК в той же геометрии. Сравнение рис. 3а и 3б показывает, что ширины пиков практически совпадают. Также совпадает отношение ширин пиков при $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$ (отношение осей эллипса, лежащего в сечении пика обратного рассеяния). Отличие состоит в том, что теоретически рассчитанный пик имеет высоту 2, а экспериментально наблюдаемый — примерно 1.6.

На рис. 4 приведены теоретические и экспериментальные данные для случая скрещенных поляризаций. Видно, что пик когерентного обратного рассеяния отсутствует и имеется только фон, обусловленный лестничными диаграммами.

На рис. 5 приведены сечения пиков когерентного обратного рассеяния на разных высотах, рассчитанные теоретически и измеренные экспериментально [25, 26]. На верхних графиках показаны пики для падающей и рассеянной необыкновенных волн, на нижних — для падающей и рассеянной обыкновенных волн. График 5а рассчитан по формуле (6.10).

Значения параметров взяты такими же, как для рис. 3. График 5б также можно получить с помощью формулы (6.10), однако требуется учесть, что коэффициент экстинкции $\tau_{(o)}$ отличается от коэффициента экстинкции $\tau_{(e)}$. Коэффициент экстинкции обыкновенного луча при рассеянии назад составляет $\tau_{(o)} = 36.3 \text{ см}^{-1}$. В обоих случаях пик обратного рассеяния оказывается вытянутым в направлении, перпендикулярном директору. Пик для обыкновенной волны несколько уже пика для необыкновенной волны из-за меньшей экстинкции.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы провели расчеты и сравнили с экспериментом высоту и форму пика когерентного обратного рассеяния для ЖК. При расчетах мы не использовали ни одного подгоночного параметра. Как видно из рисунков, удается хорошо описать ширину пика обратного рассеяния, а также его анизотропию. В частности, экспериментально наблюдаемое отношение полуосей эллипса, лежащего в сечении пика, составляет 1.15–1.17, а расчетное — $\sqrt{D_{\parallel}/D_{\perp}} = 1.12$.

Было показано, что вклад циклических диаграмм в геометрии эксперимента [25, 26] должен строго обращаться в нуль при скрещенных поляризациях, когда падающий луч имеет поляризацию (o) , а рассеянный — (e) или наоборот. Единственный факт, который объяснен с недостаточной точностью, — это относительная высота пика обратного рассеяния над фоном: предсказанная высота пика примерно на 20% больше, чем наблюдаемая в эксперименте. Наиболее вероятная причина такого расхождения состоит в следующем. В наших расчетах относительная высота пика определяется отношением интенсивности рассеяния, обусловлен-

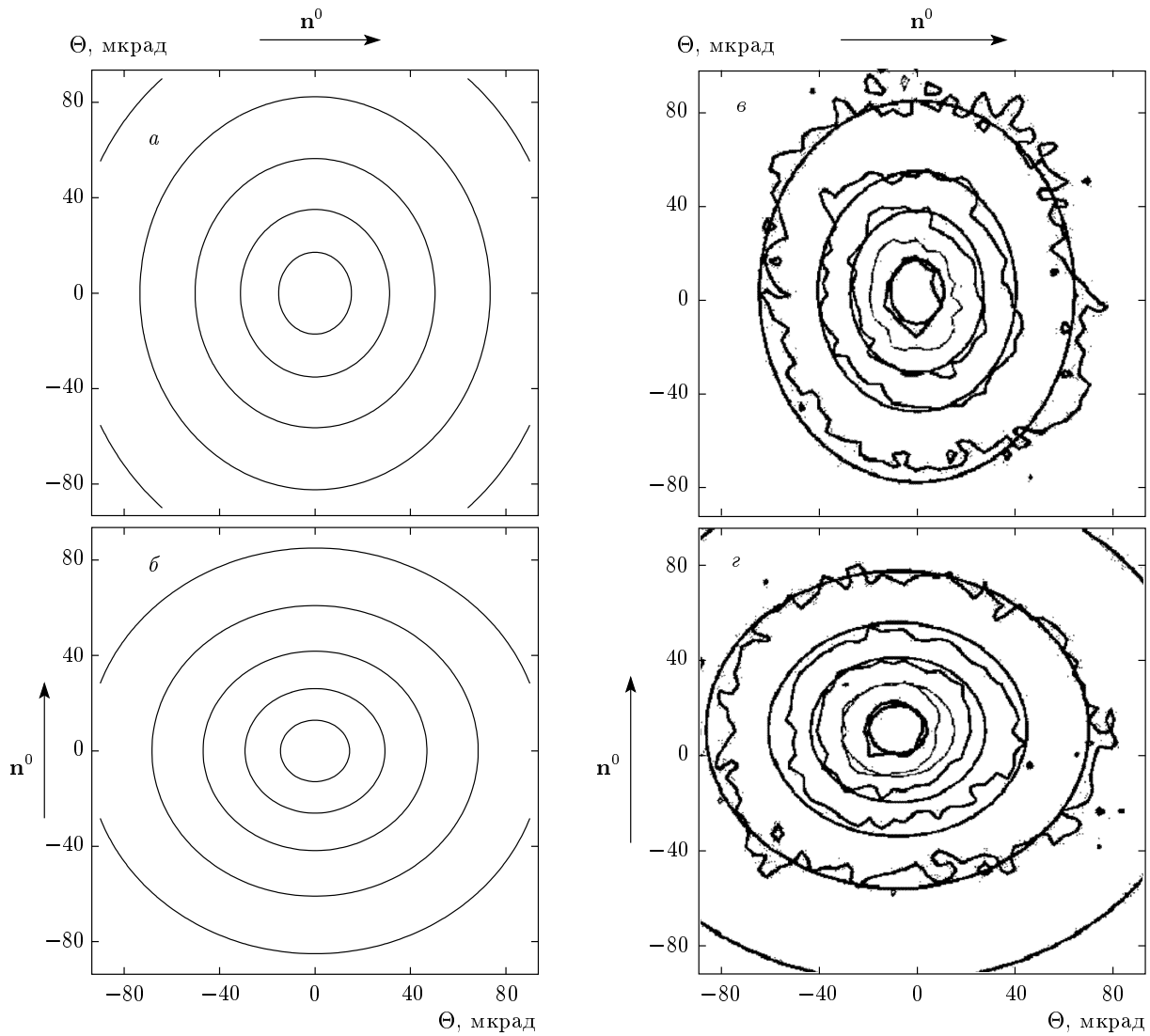


Рис. 5. Сечения пиков интенсивности когерентного обратного рассеяния на разных высотах: *а, б* — расчеты по формуле (6.10) на высотах 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5; *в, г* — ломаные линии показывают экспериментальные данные [25, 26], эллипсы — результат их обработки с помощью подгоночных параметров; сечения выполнены в интервале высот 1.1–1.6. Рассмотрены случаи, когда падающая и рассеянная волны — необыкновенные (*а, в*) и обыкновенные (*б, г*)

ного циклическими диаграммами, к интенсивности, связанной с лестничными. При рассеянии строго назад эти интенсивности в точности совпадают, поскольку вклад однократного рассеяния в рассмотренной геометрии равен нулю. Возможная причина расхождения состоит в том, что мы учитывали только наиболее сильное рассеяние $(e) \rightarrow (e)$. Однако заметным может быть также вклад перекрестных рассеяний типа $(o) \rightarrow (e)$ или $(e) \rightarrow (o)$. Как мы видели, при перекрестном рассеянии пик отсутствует за счет обращения в нуль вклада циклических диаграмм. Вместе с тем такой вклад

в лестничных диаграммах существует. Таким образом, учет промежуточных перекрестных рассеяний должен увеличить интенсивность, обусловленную лестничными диаграммами, и практически не изменит интенсивность рассеяния, связанную с циклическими диаграммами. Это и должно привести к снижению относительной высоты пика обратного рассеяния.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 06-02-16287-а) и Федерального агентства по образованию (грант РНП.2.1.1.1712).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Расчет вкладов лестничных и циклических диаграмм в интенсивность рассеяния

Проведем расчет интегралов в выражении (6.2). Две дельта-функции в уравнении (6.2) фактически фиксируют направления векторов $\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3$. С учетом выражений (6.1) для волновых векторов внутри ЖК получим $\tilde{\mathbf{R}}_2 \parallel \mathbf{e}_z$, т.е.

$\tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_z$ и $\tilde{\mathbf{R}}_1 \parallel -\hat{\varepsilon}^0 \mathbf{k}^{(s)}$, что дает

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \tilde{Z}_1 \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\varepsilon_{\perp}} \Theta \cos \phi, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \Theta \sin \phi, 1 \right), \quad \tilde{R}_1 \approx \tilde{Z}_1.$$

Перейдем от интегрирования по \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 к интегрированию по $\tilde{\mathbf{R}}_1$ и $\tilde{\mathbf{R}}_2$. Запишем интегралы в сферических координатах. Дельта-функции от волновых векторов снимут интегралы по углам. Имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{4k_0^6} \int_0^{\infty} \tilde{Z}_1^2 d\tilde{Z}_1 \int_0^{\infty} \tilde{Z}_2^2 d\tilde{Z}_2 \int_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \int_{-2(\tilde{Z}_1+R_z)}^{2(\tilde{Z}_1+R_z)} d\mathbf{r}_1 \frac{1}{4\pi\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \times$$

$$\times \frac{\exp(-\tilde{Z}_1/l_{(e)})}{\tilde{Z}_1} \frac{\exp(-\tilde{Z}_2/l_{(e)})}{\tilde{Z}_2} \delta \left(-\tilde{Z}_1 \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\varepsilon_{\perp}} \Theta \cos \phi \mathbf{e}_x - \tilde{Z}_1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \Theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \tilde{Z}_1 \mathbf{e}_z + \mathbf{R} - \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3 \right) \times$$

$$\times \exp \left[i(\mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}^{(i)}) \cdot \mathbf{r}_1 \right] \left\{ \frac{\exp(-r'_1/\xi)}{r'_1} - \frac{\exp \left[-\left| \mathbf{r}'_1 + 2 \left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right| / \xi \right]}{\left| \mathbf{r}'_1 + 2 \left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right|} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Выполняя интегрирование по переменной \mathbf{R}_3 , получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \int_0^{\infty} d\tilde{Z}_1 \int_0^{\infty} d\tilde{Z}_2 \exp \left(-\frac{\tilde{Z}_1}{l_{(e)}} - \frac{\tilde{Z}_2}{l_{(e)}} \right) \delta \left(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2 + R_z \right) \times$$

$$\times \int_{-2(\tilde{Z}_1+R_z)}^{2(\tilde{Z}_1+R_z)} d\mathbf{r}_1 \exp \left[i(\mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}^{(i)}) \cdot \mathbf{r}_1 \right] \left\{ \frac{\exp[-r'_1/\xi]}{r'_1} - \frac{\exp \left[-\left| \mathbf{r}'_1 + 2 \left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right| / \xi \right]}{\left| \mathbf{r}'_1 + 2 \left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right|} \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Введем обозначения

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}^{(i)} \approx k_0(\Theta \cos \phi, \Theta \sin \phi, 0),$$

$$\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} + r_{1z} \mathbf{e}_z.$$

Поскольку мы полагаем, что интенсивность считывается с поверхности образца, положим $R_z = 0$. Вычислим интеграл по переменной \tilde{Z}_2 . Получим

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \int_0^{\infty} d\tilde{Z}_1 \exp \left(-\frac{2\tilde{Z}_1}{l_{(e)}} \right) \times$$

$$\times \int_{-2\tilde{Z}_1}^{2\tilde{Z}_1} dr_{1z} \int d\rho e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} \left\{ \frac{\exp \left(-\sqrt{\rho'^2 + r_{1z}} / \xi \right)}{\sqrt{\rho'^2 + r_{1z}}} - \frac{\exp \left[-\sqrt{\rho'^2 + (2\tilde{Z}_1 + 2z_b)^2} / \xi \right]}{\sqrt{\rho'^2 + (2\tilde{Z}_1 + 2z_b)^2}} \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Сделаем замену переменных

$$r_{1z} = z_1 - z_2, \quad \tilde{Z}_1 = (z_1 + z_2)/2.$$

Получим

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{D_{\parallel}D_{\perp}}} \int_0^{\infty} dz_1 \int_0^{\infty} dz_2 \exp\left(-\frac{z_1+z_2}{l_{(e)}}\right) \times \\ \times \int d\rho e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} \left\{ \frac{\exp\left[-\sqrt{\rho'^2 + (z_1-z_2)^2/\xi}\right]}{\sqrt{\rho'^2 + (z_1-z_2)^2}} - \frac{\exp\left[-\sqrt{\rho'^2 + (z_1+z_2+2z_b)^2/\xi}\right]}{\sqrt{\rho'^2 + (z_1+z_2+2z_b)^2}} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Введем переменную \mathbf{q}' такую, чтобы $\mathbf{q}\cdot\rho = \mathbf{q}'\cdot\rho'$:

$$\mathbf{q}' = \left(\sqrt{\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}}} q_x, q_y, q_z \right).$$

Перейдем в выражении (A.4) к интегрированию по переменной ρ' . Введем полярные координаты. Получим интегралы вида

$$\int d\rho e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} \frac{\exp\left[-\sqrt{\rho'^2 + a^2}/\xi\right]}{\sqrt{\rho'^2 + a^2}} = \\ = \sqrt{\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}}} \int_0^{\infty} d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\exp\left[-\sqrt{\rho'^2 + a^2}/\xi\right]}{\sqrt{\rho'^2 + a^2}} \times \\ \times \exp(iq'\rho' \cos\psi). \quad (\text{A.5})$$

Для вычисления интеграла по углу, воспользуемся соотношением [12, 36]

$$\int_0^{2\pi} d\psi \exp(iq'\rho' \cos\psi) = 2\pi J_0(q'\rho'),$$

где $J_0(q'\rho')$ — функция Бесселя первого рода. Для вычисления интеграла по координате воспользуемся соотношением [37]

$$\int_0^{\infty} d\rho' \rho' \frac{\exp\left[-\sqrt{\rho'^2 + a^2}/\xi\right]}{\sqrt{\rho'^2 + a^2}} J_0(q'\rho') = \\ = \frac{\exp\left[-|a|\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}\right]}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}}.$$

Тогда для выражения (A.4) получим

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \times \\ \times \frac{1}{D_{\perp}} \frac{1}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}} \int_0^{\infty} dz_1 \int_0^{\infty} dz_2 \exp\left(-\frac{z_1+z_2}{l_{(e)}}\right) \times \\ \times \left[\exp\left(-|z_1-z_2|\sqrt{q'^2 + \frac{1}{\xi^2}}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(-|z_1+z_2+2z_b|\sqrt{q'^2 + \frac{1}{\xi^2}}\right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Оставшиеся интегралы легко вычисляются. В результате, вклад в интенсивность обратного рассеяния за счет циклических диаграмм имеет вид

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = J_{\alpha\beta}^{(C)}(\Theta, \phi) = \\ = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1}{D_{\perp}} \frac{1}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}} \times \\ \times \left[\frac{l_{(e)}}{\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2} + 1/l_{(e)}} - \right. \\ \left. - \frac{\exp\left(-2z_b\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2}\right)}{\left(\sqrt{q'^2 + 1/\xi^2} + 1/l_{(e)}\right)^2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Отсюда можно получить зависимость интенсивности от углов Θ и ϕ , учитывая, что

$$q'^2 = k_0^2 \left(\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} \Theta^2 \cos^2\phi + \Theta^2 \sin^2\phi \right).$$

Вклад в интенсивность рассеяния лестничных диаграмм (6.5) рассчитывается аналогичным образом. В этом случае имеется существенное упрощение, поскольку отсутствует зависимость от вектора \mathbf{q} . После снятия дельта-функций от волновых векторов имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{4k_0^6} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty d\tilde{Z}_2 \int_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \exp\left(-\frac{\tilde{Z}_1}{l_{(e)}}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{Z}_2}{l_{(e)}}\right) \left\{ \frac{M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \times \right. \\ \times \left[\frac{\exp\left[-|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}'_3|/\xi\right]}{|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}'_3|} - \frac{\exp\left[-|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}'_3 + 2(\tilde{Z}_2 + R_{3z} + z_b)\mathbf{e}_z|/\xi\right]}{|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}'_3 + 2(\tilde{Z}_2 + R_{3z} + z_b)\mathbf{e}_z|} \right] + \\ \left. + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})\delta\left(\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R} - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3\right) \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Выполняем интегрирование по \mathbf{R}_3 :

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{4k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty d\tilde{Z}_2 \times \\ \times \exp\left(-\frac{\tilde{Z}_1}{l_{(e)}}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{Z}_2}{l_{(e)}}\right) \left\{ M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \times \right. \\ \times \frac{2\pi\xi}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \left[\exp\left[-\frac{|\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2|}{\xi}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\frac{|\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + 2z_b|}{\xi}\right] \right] + \\ \left. + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})\delta(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2) \right\}. \quad (\text{A.9})$$

В результате получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \left\{ M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\xi}{D_\perp} \times \right. \\ \times \left[\frac{l_{(e)}}{1/\xi + 1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b/\xi)}{(1/\xi + 1/l_{(e)})^2} \right] + \\ \left. + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})l_{(e)} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Расчет поляризационных множителей в интенсивности рассеяния

Рассмотрим вид коэффициентов $M_{\alpha\beta}^{(L)}$ и $M_{\alpha\beta}^{(C)}$ в зависимости от поляризаций падающего и рассеянного света. Величина $B_{\alpha\beta\mu\nu}$ при $\mathbf{k} = 0$ примет вид

$$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k} = 0) = \frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \times \\ \times [(\delta_{y\mu}\delta_{y\nu} + \delta_{z\mu}\delta_{z\nu})\delta_{x\alpha}\delta_{x\beta} + (\delta_{y\beta}\delta_{y\mu} + \delta_{z\beta}\delta_{z\mu})\delta_{x\alpha}\delta_{x\nu} + \\ + (\delta_{y\alpha}\delta_{y\nu} + \delta_{z\alpha}\delta_{z\nu})\delta_{x\beta}\delta_{x\mu} + \\ + (\delta_{y\alpha}\delta_{y\beta} + \delta_{z\alpha}\delta_{z\beta})\delta_{x\mu}\delta_{x\nu}]. \quad (\text{B.1})$$

В выражениях (2.4) и (3.15) мы положили $\mathbf{q} = 0$. Векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 выбраны вдоль ортов системы координат, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_y$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_z$.

Величина $\hat{\mathcal{G}}$ определяется выражением (5.19), и для ее вычисления требуется найти векторы поляризаций для произвольного направления волнового вектора \mathbf{s} . Будем считать, что \mathbf{s} имеет вид

$$\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta\cos\chi, \sin\theta\sin\chi).$$

Тогда из условий для векторов поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$, приведенных в разд. 2, можно получить

$$\mathbf{e}^{(o)} = (0, \sin\theta\sin\chi, \sin\theta\cos\chi), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{e}^{(e)} = a(\varepsilon_\perp \sin^2\theta, -\varepsilon_\parallel \cos\theta\sin\theta\cos\chi, \\ -\varepsilon_\parallel \cos\theta\sin\theta\sin\chi), \quad (\text{B.3})$$

где

$$a = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\varepsilon_\perp^2 \sin^2\theta + \varepsilon_\parallel^2 \cos^2\theta}}.$$

Из выражений (B.2) и (B.3) нетрудно видеть, что после интегрирования по углам в (5.19) все недиагональные элементы $\hat{\mathcal{G}}$ будут равны нулю. Диагональные элементы в нуль не обращаются.

Рассмотрим сначала наиболее интересный случай, когда и падающая, и рассеянная волны имеют поляризацию типа (e) , направленную вдоль оси x , т. е. $e_\alpha^{(i)} = \delta_{x\alpha}$, $e_\alpha^{(s)} = \delta_{x\alpha}$. Тогда, выполняя суммирование по повторяющимся индексам, получим

$$M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} B_{xx\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\mu'\delta'} \mathcal{G}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu'xx} = \\ = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 (\mathcal{G}_{yy} + \mathcal{G}_{zz})^2. \quad (\text{B.4})$$

Заметим, что $M_{xx}^{(C)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)})$ будет совпадать с $M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)})$ в рассмотренной геометрии. Поскольку $M_{xx}^{(C)}$ отличается от $M_{xx}^{(L)}$ лишь порядком

суммирования индексов, при совпадающих поляризациях падающей и рассеянной волн эта разница исчезает.

Далее рассмотрим случай скрещенных поляризаций, когда падает волна типа (o) , а рассеивается волна типа (e) , тогда $e_\alpha^{(i)} = \delta_{y\alpha}$, $e_\alpha^{(s)} = \delta_{x\alpha}$. В этом случае вклады лестничных и циклических диаграмм различаются. Выполняя суммирование, получим

$$M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 (\mathcal{G}_{yy} + \mathcal{G}_{zz}) \mathcal{G}_{xx}, \quad (\text{Б.5})$$

$$M_{xx}^{(C)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 \mathcal{G}_{yx} \mathcal{G}_{xy} = 0. \quad (\text{Б.6})$$

Вклад циклических диаграмм в этой геометрии обращается в нуль, поскольку в коэффициенте $\hat{\mathcal{G}}$ недиагональные члены обращаются в нуль.

Наконец, рассмотрим случай, когда и падающая, и рассеянная волны имеют поляризацию типа (o) , направленную вдоль оси y , т. е. $e_\alpha^{(i)} = \delta_{y\alpha}$, $e_\alpha^{(s)} = \delta_{y\alpha}$. В этом случае отсутствует однократное рассеяние, однако многократное рассеяние возможно. Вклады лестничных и циклических диаграмм здесь будут совпадать:

$$M_{yy}^{(L)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(o)}) = M_{yy}^{(C)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(o)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 \mathcal{G}_{xx}^2. \quad (\text{Б.7})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wave Scattering in Complex Media: from Theory to Applications*, ed. by B. A. van Tiggelen and S. E. Skripetrov, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2003).
2. B. van Tiggelen and H. Stark, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 1017 (2000).
3. Yu. N. Barabanenkov, Yu. A. Kravtsov, V. D. Ozrin, and A. I. Saichev, in *Enhanced Backscattering in Optics*, Progress in Optics, Vol. 29, ed. by E. Wolf, North Holland, Amsterdam (1991), p. 67.
4. *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications*, ed. by M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and J. W. Hovenier, Acad. Press, San Diego (2000).
5. Ping Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*, Academic, San Diego (1995).
6. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, *УФН* **166**, 247 (1996).
7. В. В. Тучин, *УФН* **167**, 517 (1997).
8. M. C. W. van Rossum and Th. M. Nieuwenhuizen, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).
9. M. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
10. P. E. Wolf and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
11. M. B. van der Mark, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **37**, 3575 (1988).
12. F. C. MacKintosh and S. John, *Phys. Rev. B* **37**, 1884 (1988).
13. F. C. MacKintosh and S. John, *Phys. Rev. B* **40**, 2383 (1989).
14. B. P. J. Bret and A. Lagendijk, *Phys. Rev. E* **70**, 036601 (2004).
15. А. А. Голубенцев, *ЖЭТФ* **86**, 47 (1984).
16. M. J. Stephen and G. Cwilich, *Phys. Rev. B* **34**, 7564 (1986).
17. B. A. van Tiggelen, R. Maynard, and Th. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. E* **53**, 2881 (1996).
18. D. Lacoste and B. A. van Tiggelen, *Phys. Rev. E* **61**, 4556 (2000).
19. L. V. Kuz'min, V. P. Romanov, and L. A. Zubkov, *Phys. Rev. E* **54**, 6798 (1996).
20. H. Stark and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. E* **55**, 514 (1997).
21. H. Stark, M. H. Kao, K. A. Jester, T. C. Lubensky, and A. G. Yodh, *J. Opt. Soc. Amer. A* **14**, 156 (1997).
22. B. A. van Tiggelen, R. Maynard, and A. Heiderich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 639 (1996).
23. B. A. van Tiggelen, A. Heiderich, and R. Maynard, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **293**, 205 (1997).
24. B. C. Kaas, B. A. van Tiggelen, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 123902 (2008).
25. R. Sapienza, S. Mujumdar, C. Cheung, A. G. Yodh, and D. Wiersma, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 033903 (2004).
26. R. Sapienza, D. S. Wiersma, and D. Delande, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **429**, 193 (2005).

27. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
30. M. Lax and D. F. Nelson, in *Proc. III Rochester Conference on Coherent and Quantum Optics*, Plenum Press, New York (1973), p. 415.
31. M. Lax and D. F. Nelson, in *Proc. I Soviet-American Conf. on Theory of Light Scattering in Condensed Media*, Vol. 2, Nauka, Moscow (1976), p. 452.
32. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, т. 2, Мир, Москва (1981).
33. D. Langevin and M.-A. Bouchiat, *J. de Phys.* **36** (Colloq. C-1), 197 (1975).
34. А. Ю. Вальков, В. П. Романов, *ЖЭТФ* **90**, 1264 (1986).
35. D. S. Wiersma, A. Muzzi, M. Colocci, and R. Righini, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4321 (1999).
36. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981), с. 389.
37. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1981), с. 189.