

АВТОФАЗИРОВКА СОЛИТОНОВ

С. В. Баталов^a, Е. М. Маслов^{b}, А. Г. Шагалов^a*

*^aИнститут физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия*

*^bИнститут земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова
Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

Исследуется воздействие на солитон нелинейного уравнения Шредингера внешнего волнового возмущения с медленно изменяющейся частотой. Получены уравнения, описывающие эволюцию во времени параметров возмущенного солитона. Найдены необходимые и достаточные условия захвата фазы солитона, связывающие скорость изменения частоты возмущения, его амплитуду, волновое число и фазу с начальными значениями параметров солитона.

PACS: 05.45.Yv

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление автофазировки (или, по другой терминологии, «авторезонанса») используется в настоящее время как эффективный способ управления динамикой нелинейных систем с помощью внешней накачки. Основная идея автофазировки восходит еще к работам [1, 2] по ускорению релятивистских частиц. Адекватная теория этого эффекта была предложена в работе [3] для простейшей модели нелинейного маятника, возбуждаемого периодической накачкой с частотой, медленно меняющейся вблизи частоты линейного резонанса системы. Если амплитуда накачки превышает некоторое критическое значение, зависящее от скорости изменения частоты, то фаза маятника оказывается захваченной внешней накачкой, что дает возможность эффективно управлять амплитудой колебаний маятника, плавно меняя частоту накачки. Существенной особенностью эффекта авторезонанса является возможность возбуждения в системе колебаний большой амплитуды, значительно (на порядки) большей, чем амплитуда самой накачки, что представляет особый интерес для различных приложений.

В настоящее время идея автофазировки получила развитие для ряда более сложных физических си-

стем (см., например, работу [4]) и, в частности, для нелинейных волн и солитонов. В последнем случае ключевой проблемой являлось возбуждение нелинейных волн большой амплитуды с заданными амплитудно-фазовыми характеристиками с помощью малых возмущений специального вида, включенных в уравнение, описывающее процесс. Так, в работах [5, 6] было показано, что волны на воде, описываемые уравнением Кортевега–де-Вриза, могут эффективно генерироваться возмущениями типа бегущих волн. В дальнейшем удалось показать, что метод автофазировки может быть использован для генерации многофазных периодических волн, описываемых уравнением Кортевега–де-Вриза, с полным контролем каждой из фаз генерируемой волны [7]. Исследование генерации периодических волн в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) проведено в работах [8, 9] как для однофазных, так и многофазных решений. В последнем случае предложен ряд устойчивых сценариев такой генерации.

Вместе с тем для многочисленных приложений в физике нелинейных явлений особый интерес представляют пространственно-локализованные решения солитонного типа, имеющие внутреннюю колебательную степень свободы. Для таких решений существует развитая теория возмущений [10], позволяющая построить адекватную теорию явления автофазировки. Для случая солитонов важнейшей

*E-mail: zheka@izmiran.ru

становится задача не генерации солитонов, а управления динамикой уже имеющихся солитонов, включая проблему захвата солитона конечной амплитуды внешним возмущением и дальнейшего управления амплитудой и фазой захваченного солитона. Такие исследования были проведены для уравнения синус-Гордон (СГ) [11] для специальных локализованных решений — бризеров. В данной работе мы исследуем возможность управления динамикой солитонов в НУШ, являющемся базовой моделью для многочисленных приложений в нелинейной оптике, гидродинамике, физике плазмы и физике магнитных явлений [12–14].

Будем рассматривать уравнение вида

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = \varepsilon f(x, t), \quad (1)$$

где возмущение в правой части предполагается малым ($0 < \varepsilon \ll 1$). При $\varepsilon = 0$ уравнение имеет солитонное решение

$$u = \varphi_s(x, t) = \frac{A}{\operatorname{ch} z} e^{i\Phi}, \quad (2)$$

где

$$\Phi = \frac{V}{A}z + \theta, \quad z = A(x - \xi), \quad (3)$$

A — амплитуда солитона, V — скорость, $\xi = Vt + \xi_0$, $\theta = \omega t + \theta_0$, $\omega = (A^2 + V^2)/2$, ξ_0 и θ_0 — константы. Амплитуда солитона и его скорость являются свободными параметрами решения, определяющими динамику остальных параметров — координаты, фазы и частоты. При наличии возмущения эта динамика значительно усложняется. Под управлением динамикой солитона мы подразумеваем контролируемое изменение этих параметров с помощью варьирования параметров внешнего возмущения. Ключевым вопросом здесь является подходящий выбор функции $f(x, t)$, при котором такое управление возможно. В настоящей работе мы рассмотрим возмущение в виде квазипериодической волны

$$f(x, t) = e^{ikx + i\psi(t)}, \quad (4)$$

где частота накачки $\psi_t = \Omega(t)$ является медленной функцией времени: $\Omega_t = O(\alpha)$ ($|\alpha| \ll 1$). Такое возмущение генерирует в системе фоновую волну малой (порядка ε) амплитуды, которая взаимодействует с солитоном. Это взаимодействие приводит к тому, что при некоторых начальных условиях и в некоторой области значений параметров возмущения происходит захват фазы солитона, в результате

чего частота солитона начинает следовать за изменяющейся частотой внешней накачки, а его амплитуда растет или убывает в зависимости от знака α . В настоящей работе мы получаем систему уравнений, описывающую захват и динамику захваченных колебаний вплоть до времен порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Анализ этих уравнений на начальных временах $t \ll O(\varepsilon^{-1})$ дает условия захвата. В частности, мы находим критические значения отношения $|\alpha/\varepsilon|$ как функцию начальных условий. Ниже этих значений происходит захват фазы солитона. Таким образом, становится возможным управлять параметрами солитона, варьируя частоту внешней накачки.

Постановка задачи о воздействии на солитон НУШ внешней периодической накачки вида $f = \exp(i\Omega t)$ или $f = \exp(ikx + i\Omega t)$ встречается в физике конденсированных сред [15], физике плазмы [16] и нелинейной оптике [17]. Для случая, когда влияние диссипации становится определяющим, эта задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [15, 18–21]). Там также был обнаружен эффект захвата фазы солитона внешним возмущением, однако частота накачки сохранялась постоянной и не ставилась задача управления динамикой солитона. В отличие от этих работ, мы рассматриваем случай, когда волновые свойства системы преобладают над диссипативными, а частота накачки изменяется со временем.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Под действием внешнего возмущения (4) в системе возникает фоновая волна $\chi(x, t) \sim \varepsilon$. Ввиду малости ее амплитуды можно считать, что она описывается линейным уравнением

$$i\chi_t + \frac{1}{2}\chi_{xx} = \varepsilon f(x, t). \quad (5)$$

Выделяя из решения уравнения (1) локализованную часть, полагаем

$$u(x, t) = \varphi(x, t) + \chi(x, t), \quad (6)$$

где $\varphi(x, t) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$). Нетрудно проверить, что в первом порядке по ε функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет возмущенному НУШ

$$i\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_{xx} + |\varphi|^2\varphi = -\chi^*\varphi^2 - 2\chi|\varphi|^2, \quad (7)$$

где возмущение в правой части локализовано на солитоне. Именно с этим уравнением будем иметь дело в дальнейшем.

2.1. Вариационный принцип

Уравнение (7) может быть получено из вариационного принципа $\delta \iint \mathcal{L} dx dt = 0$ с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [i(\varphi\varphi_t^* - \varphi^*\varphi_t) + |\varphi_x|^2 - |\varphi|^4] - |\varphi|^2(\varphi\chi^* + \varphi^*\chi). \quad (8)$$

Будем считать, что влияние волны $\chi(x, t)$ на солитон (2) сводится к медленному изменению его параметров со временем. Такое приближение обычно называется адиабатическим. В этом приближении мы подставляем в (8) вместо φ выражение (2) для φ_s , где теперь A, V, ξ и θ являются подлежащими определению функциями времени. Вычислив производные, получим

$$\mathcal{L} = \frac{A^2}{\text{ch}^2 z} \left[\theta_t - V\xi_t + \frac{V_t}{A}z - \frac{A^2}{\text{ch}^2 z} + \frac{1}{2}(A^2 + V^2) \right] - \frac{A^3}{\text{ch}^3 z} (\chi^* e^{i\Phi} + \chi e^{-i\Phi}). \quad (9)$$

Позже мы убедимся в правильности сделанного предположения, сравнив теоретические кривые с результатами численного моделирования уравнения (1). Интегрируя \mathcal{L} по x , для лагранжиана находим выражение

$$L = A \left(2\theta_t - 2V\xi_t + V^2 - \frac{1}{3}A^2 \right) - A^3 (Ie^{i\theta} + I^*e^{-i\theta}), \quad (10)$$

где

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iVz/A)}{\text{ch}^3 z} \chi^*(x, t) dx, \quad (11)$$

а z определено в (3).

Таким образом, если по известной функции $\chi(x, t)$ интеграл I может быть вычислен в явном виде, то лагранжиан (10) позволит определить искомые уравнения для параметров солитона исходя из вариационного принципа $\delta \int L dt = 0$.

2.2. Уравнения для параметров солитона

Нетрудно проверить, что при накачке вида (4) в качестве решения уравнения (5) можно взять функцию (с ошибкой порядка $O(\varepsilon\alpha)$)

$$\chi(x, t) = -\frac{2\varepsilon}{2\Omega + k^2} e^{ikx + i\psi(t)}. \quad (12)$$

При этом интеграл (11) легко вычисляется и лагранжиан (10) принимает вид

$$L = A \left[2\delta_t - 2(V - k)\xi_t + V^2 - \frac{1}{3}A^2 + 2\Omega \right] + \varepsilon \frac{2A^2}{2\Omega + k^2} F \left(\frac{V - k}{A} \right) \cos \delta, \quad (13)$$

где

$$F(x) = \pi(1 + x^2) \text{sech} \frac{\pi x}{2} \quad (14)$$

и вместо θ введена разность фаз

$$\delta = \theta - \psi - k\xi. \quad (15)$$

В результате уравнения Эйлера–Лагранжа дают

$$A_t = -\varepsilon \frac{A^2}{2\Omega + k^2} F \left(\frac{V - k}{A} \right) \sin \delta, \quad (16)$$

$$V_t = \varepsilon \frac{A(V - k)}{2\Omega + k^2} F \left(\frac{V - k}{A} \right) \sin \delta, \quad (17)$$

$$\xi_t = V + \frac{\varepsilon}{2\Omega + k^2} F' \left(\frac{V - k}{A} \right) \cos \delta, \quad (18)$$

$$\delta_t = \Delta\omega - \varepsilon \frac{2A}{2\Omega + k^2} \times \left[F \left(\frac{V - k}{A} \right) - \frac{V - k}{A} F' \left(\frac{V - k}{A} \right) \right] \cos \delta, \quad (19)$$

где

$$\Delta\omega = \omega - \Omega - kV, \quad (20)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(A^2 + V^2) \quad (21)$$

(здесь и ниже штрих означает производную по указанному в скобках аргументу). Уравнения (16)–(19) образуют полную систему, описывающую эволюцию параметров солитона под действием возмущения (4) в интервале $0 \leq t \lesssim O(\varepsilon^{-1})$. Эта же система получается при использовании теории возмущений, основанной на методе обратной задачи [10].

Заметим, что из уравнений (16), (17) следует интересный закон сохранения «импульса»

$$P = A(V - k) = \text{const}. \quad (22)$$

Он означает в частности, что если в режиме автофазировки A растет, то V будет стремиться к k .

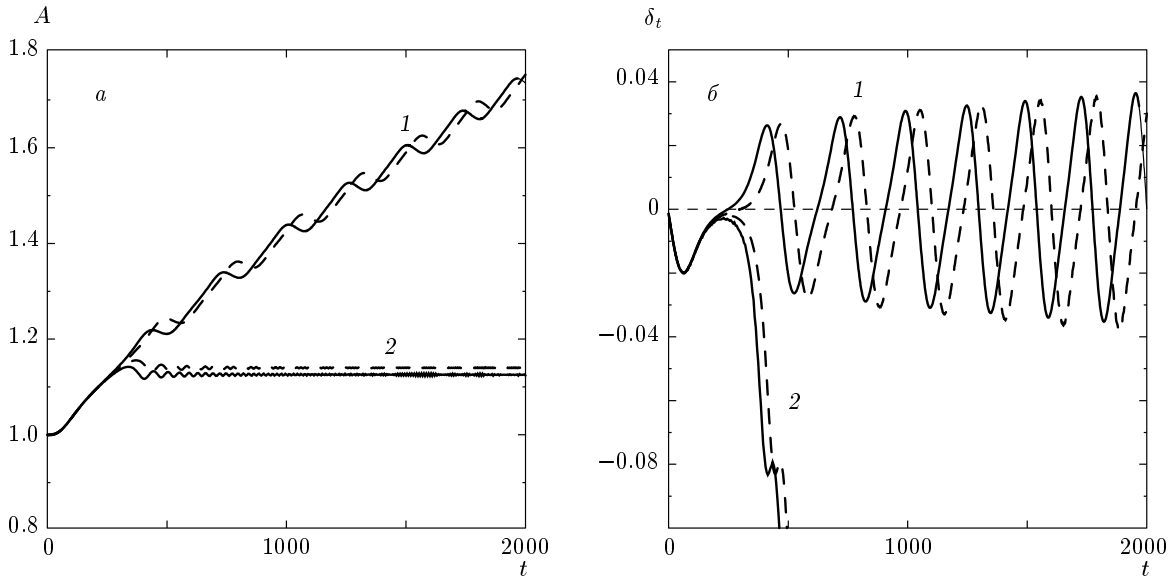


Рис. 1. Амплитуда (а) и расстройка частоты (б) солитона, полученные численным интегрированием НУШ при начальных условиях $u(x, 0) = \varphi_s(x, 0) + \chi(x, 0)$, $A(0) = 1$, $V(0) = k/2$, $\xi(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ и параметрах накачки $k = 0.25$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$, $\Omega_0 = [A^2(0) + V^2(0)]/2 - kV(0)$. Кривым 1 соответствует значение $\varepsilon = 2.185 \cdot 10^{-4}$ (режим автофазировки), кривым 2 — значение $\varepsilon = 2.18 \cdot 10^{-4}$ (отсутствие автофазировки). Штриховые кривые — результат численного интегрирования уравнений (23), (24) при тех же параметрах и начальных данных. При указанном значении α критическое значение амплитуды накачки равно $\varepsilon_{cr}^{NSE} = 2.1844 \cdot 10^{-4}$ для уравнения (1) и $\varepsilon_{cr}^{theor} = 2.18198 \cdot 10^{-4}$ для модели (23), (24)

Поскольку при этом второй член в уравнении (18) стремится к нулю, скорость солитона $\xi_t \rightarrow k$.

С помощью закона сохранения (22) проблема решения системы (16)–(19) сводится к нахождению решения уравнений для A и δ , которые принимают гамильтонов вид:

$$A_t = -\varepsilon \frac{g(A)}{2\Omega + k^2} \sin \delta, \tag{23}$$

$$\delta_t = \Delta\omega - \varepsilon \frac{g'(A)}{2\Omega + k^2} \cos \delta, \tag{24}$$

где

$$g(A) = A^2 F\left(\frac{P}{A^2}\right) \tag{25}$$

и, согласно соотношениям (20), (21),

$$\Delta\omega = \frac{1}{2A^2}(A^4 - k^2 A^2 + P^2) - \Omega. \tag{26}$$

Режим автофазировки означает, что разность фаз δ является медленно изменяющейся ограниченной функцией времени. Поэтому, согласно уравнению (24), в этом режиме величина $\Delta\omega$ должна быть мала и эта малость должна сохраняться на всем

временном интервале изменения Ω , т. е. вплоть до $t \sim |\alpha|^{-1}$. Отсюда следует, во-первых, что $\Delta\omega$ должна быть мала уже в начальный момент времени, и, во-вторых, согласно (26), что средняя скорость изменения A должна быть порядка скорости изменения Ω , т. е. $\varepsilon = O(\alpha)$. В дальнейшем для определенности мы будем считать, что частота накачки изменяется линейно, $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$.

Мы численно интегрировали уравнения (23), (24) при различных значениях $A(0)$, $\delta(0)$, P , k , Ω_0 , α , ε . При превышении ε некоторого критического значения ε_{cr} , зависящего от значений остальных параметров, мы наблюдали захват фазы солитона и переход в режим автофазировки. Эти результаты представлены на рис. 1 в виде зависимостей амплитуды и расстройки частоты солитона от времени. Там же для сравнения приведены кривые, полученные прямым численным интегрированием исходного НУШ (1). На рис. 2 представлена зависимость скорости солитона от времени. Здесь мы не показываем кривые, полученные из решения уравнений (23), (24), так как они практически совпадают с представленными. Наибольшее различие результатов численного интегрирования уравнений (23), (24) и НУШ наблюдалось вблизи порога захвата фазы. В случае силь-

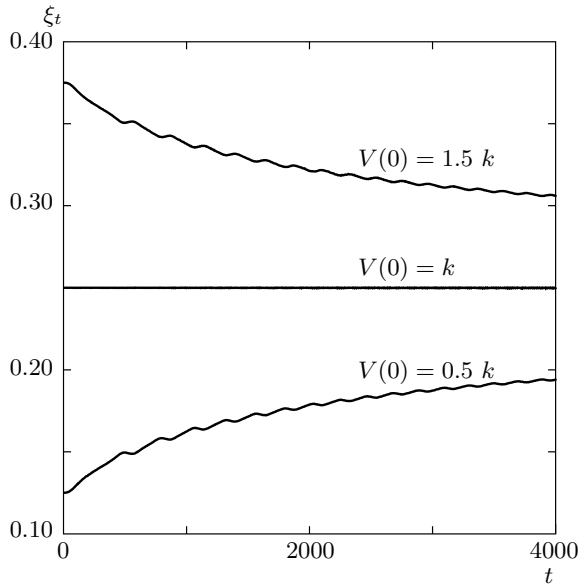


Рис. 2. Скорость солитона в режиме автофазировки, полученная численным интегрированием НУШ для трех значений $V(0)$, равных в единицах k соответственно 1.5, 1.0 и 0.5. Остальные начальные данные и параметры те же, что и в случае рис. 1

ного захвата ($\varepsilon \gg \varepsilon_{cr}$) решения модельных уравнений отличаются от решений, полученных из НУШ, на величину порядка одного процента. Подчеркнем, что именно благодаря эффекту автофазировки, когда система успевает подстраиваться под изменяющееся внешнее воздействие, мы можем существенно изменять параметры солитона, прикладывая возмущения с очень малыми амплитудами (порядка 10^{-4} в наших численных экспериментах). При таких возмущениях радиационные эффекты малы, и уравнения адиабатического приближения, следующие из вариационного принципа, очень хорошо описывают ситуацию (в отличие от случая, когда существенны релаксационные процессы [22]).

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАЯТНИКА

Система (23), (24) описывает эволюцию величин A и δ на большом временном интервале $0 \leq t \lesssim O(\varepsilon^{-1})$. Однако сам захват фазы происходит на начальных временах, почти сразу после включения возмущения. Это хорошо видно на рис. 1. Следуя работе [11], воспользуемся этим обстоятельством для определения необходимых и достаточных условий захвата.

Прежде всего перейдем от системы (23), (24) к уравнению второго порядка для δ . Дифференцируя уравнение (24) и используя (23), получим

$$\delta_{tt} = -\varepsilon \frac{(\Delta\omega)'g(A) - \Delta\omega g'(A)}{2\Omega + k^2} \sin \delta - \alpha + O(\varepsilon^2, \alpha\varepsilon), \quad (27)$$

где $\Delta\omega$ определено в (26), $\Omega_t = \alpha$, а штрих означает дифференцирование по A . На начальном временном интервале $0 \leq t \ll O(\varepsilon^{-1})$, когда собственно и происходит захват фазы, можно пренебречь зависимостью от времени коэффициента при $\sin \delta$, взяв его значение, например, при $t = 0$. В результате приходим к уравнению нелинейного маятника

$$\delta_{\tau\tau} = \lambda \sin \delta - \beta, \quad 0 \leq \tau \ll O(\varepsilon^{-1/2}), \quad (28)$$

где $\tau = \varepsilon^{1/2}t$ — «медленное время», $\beta = \alpha/\varepsilon$,

$$\lambda = - \left[\frac{(\Delta\omega)'g(A) - \Delta\omega g'(A)}{2\Omega + k^2} \right]_{t=0}. \quad (29)$$

В частности, если в начальный момент величина $\Delta\omega$ равна нулю или достаточно мала, $\Delta\omega(t=0) \lesssim O(\varepsilon)$, то, согласно (26),

$$\lambda \approx \left[\frac{g(A)(P^2 - A^4)}{A(P^2 + A^4)} \right]_{t=0}. \quad (30)$$

Отсюда видно, что знак λ может быть любым в зависимости от начальных условий. Общие свойства решений уравнения (28) при $\lambda < 0$ в контексте задачи о захвате фазы СГ-бризера были проанализированы на фазовой плоскости в работе [11]. Здесь мы рассмотрим поведение решений при произвольных знаках λ и β .

Фазовые траектории уравнения (28) определяются первым интегралом (энергией)

$$E(\delta, \delta_\tau) = \frac{1}{2}\delta_\tau^2 + V(\delta), \quad V(\delta) = \lambda \cos \delta + \beta\delta. \quad (31)$$

Легко видеть, что при $|\beta/\lambda| > 1$, на фазовой плоскости неподвижных точек нет, все фазовые траектории неограничены, а соответствующие решения быстро растут со временем: $\delta(\tau) = -\beta\tau^2/2 + O(\tau)$ ($\tau \rightarrow \pm\infty$). Поэтому если частота накачки меняется слишком быстро или амплитуда накачки мала, т. е. отношение $\alpha/\varepsilon = \beta$ достаточно велико, то захват фазы невозможен. Если же величина β достаточно мала, так что

$$|\beta/\lambda| < 1, \quad (32)$$

то на фазовом портрете возникает последовательность неподвижных точек, устойчивых (центры) и неустойчивых (седла). Из каждого седла выходит сепаратрисная петля, охватывающая соседний центр. Замкнутые траектории внутри петли соответствуют периодическим решениям, т. е. режиму автофазировки. Для таких решений амплитуда солитона будет в среднем расти, если $\beta/\lambda < 0$, или убывать, если $\beta/\lambda > 0$. В этом можно убедиться, подставив в уравнение (23) $\sin \delta$ из уравнения (28) и усреднив (23) по колебаниям $\delta(t)$.

Неравенство (32) является необходимым, но не достаточным условием захвата. Необходимо также, чтобы начальная точка $(\delta(0), \delta_\tau(0))$ находилась внутри одной из сепаратрисных петель. Обозначим через $\delta_n^{(1)}$ и $\delta_n^{(2)}$ соответственно минимальное и максимальное значения δ на n -й сепаратрисной петле, и пусть $\delta_n^{(0)}$ — значение в устойчивой точке (центре) внутри этой петли: $\delta_n^{(1)} < \delta_n^{(0)} < \delta_n^{(2)}$. Тогда для периодичности функции $\delta(\tau)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого n выполнялись неравенства

$$\delta_n^{(1)} < \delta(0) < \delta_n^{(2)}, \quad (33)$$

$$E_n^{(0)} \leq E(\delta(0), \delta_\tau(0)) < E_n^{(s)}, \quad (34)$$

где $E_n^{(s)}$ и $E_n^{(0)}$ — значения первого интеграла на n -й сепаратрисной петле и в соответствующем центре: $E_n^{(s)} = V(\delta_n^{(1)}) = V(\delta_n^{(2)})$, $E_n^{(0)} = V(\delta_n^{(0)})$. С учетом того, что λ в нашей задаче может иметь любой знак, величины $\delta_n^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) определяются теперь следующим образом:

а) при $\beta < 0, \lambda < 0$

$$\begin{aligned} \delta_n^{(0)} &= 2n\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \\ \delta_n^{(2)} &= (2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (35)$$

$\delta_n^{(1)}$ есть корень уравнения

$$\begin{aligned} \cos \delta + \frac{\beta}{\lambda} \delta &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2} + \\ &+ \frac{\beta}{\lambda} \left((2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

лежащий в интервале $\delta_{n-1}^{(2)} < \delta_n^{(1)} < \delta_n^{(0)}$ (здесь и ниже \arcsin понимается в смысле главного значения: $-\pi/2 \leq \arcsin(\beta/\lambda) \leq \pi/2$);

б) при $\beta > 0, \lambda < 0$

$$\begin{aligned} \delta_n^{(0)} &= (2n+2)\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \\ \delta_n^{(1)} &= (2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (37)$$

$\delta_n^{(2)}$ есть корень уравнения (36), лежащий в интервале $\delta_n^{(0)} < \delta_n^{(2)} < \delta_{n+1}^{(1)}$;

в) при $\beta < 0, \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \delta_n^{(0)} &= (2n-1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \\ \delta_n^{(2)} &= 2n\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (38)$$

$\delta_n^{(1)}$ есть корень уравнения

$$\begin{aligned} \cos \delta + \frac{\beta}{\lambda} \delta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2} + \\ &+ \frac{\beta}{\lambda} \left(2n\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

лежащий в интервале $\delta_{n-1}^{(2)} < \delta_n^{(1)} < \delta_n^{(0)}$;

г) при $\beta > 0, \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \delta_n^{(0)} &= (2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \\ \delta_n^{(1)} &= 2n\pi + \arcsin \frac{\beta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (40)$$

$\delta_n^{(2)}$ есть корень уравнения (39), лежащий в интервале $\delta_n^{(0)} < \delta_n^{(2)} < \delta_{n+1}^{(1)}$.

Неравенства (32)–(34) являются необходимыми и достаточными условиями захвата фазы солитона НУШ внешним возмущением. Эти неравенства означают, что фазовый портрет уравнения (28) имеет сепаратрисные петли и начальная точка $(\delta(0), \delta_\tau(0))$ лежит в одной из этих петель. При $|\beta/\lambda| \rightarrow 0$ сепаратрисные петли расширяются, их размер вдоль оси δ стремится к 2π . При $|\beta/\lambda| \rightarrow 1$ петли стягиваются к точкам $\text{sign}(\beta/\lambda) \pi/2 + 2n\pi$.

Предположим, что начальная точка находится внутри n -й сепаратрисной петли. Будем теперь медленно увеличивать скорость изменения частоты накачки α (либо уменьшать амплитуду накачки ε). Критическое значение $\beta = \alpha/\varepsilon$, при котором произойдет срыв захвата, получается, когда стягивающаяся петля пересекает начальную точку. Таким образом, β_{cr} находится как корень уравнения

$$E(\delta(0), \delta_\tau(0); \beta, \lambda) = E_n^{(s)}(\beta, \lambda). \quad (41)$$

Если $\Delta\omega(t=0) = o(\varepsilon^{1/2})$, то в силу (24) величина $\delta_\tau(0)$ тоже мала и в левой части уравнения (41) можно пренебречь кинетическим членом. В этом случае (41) приобретает вид уравнения (36), если $\lambda < 0$, или уравнения (39), если $\lambda > 0$, где $\delta = \delta(0)$. Эти уравнения теперь определяют в неявной форме отношение β_{cr}/λ как функцию начальной разности фаз $\delta(0)$.

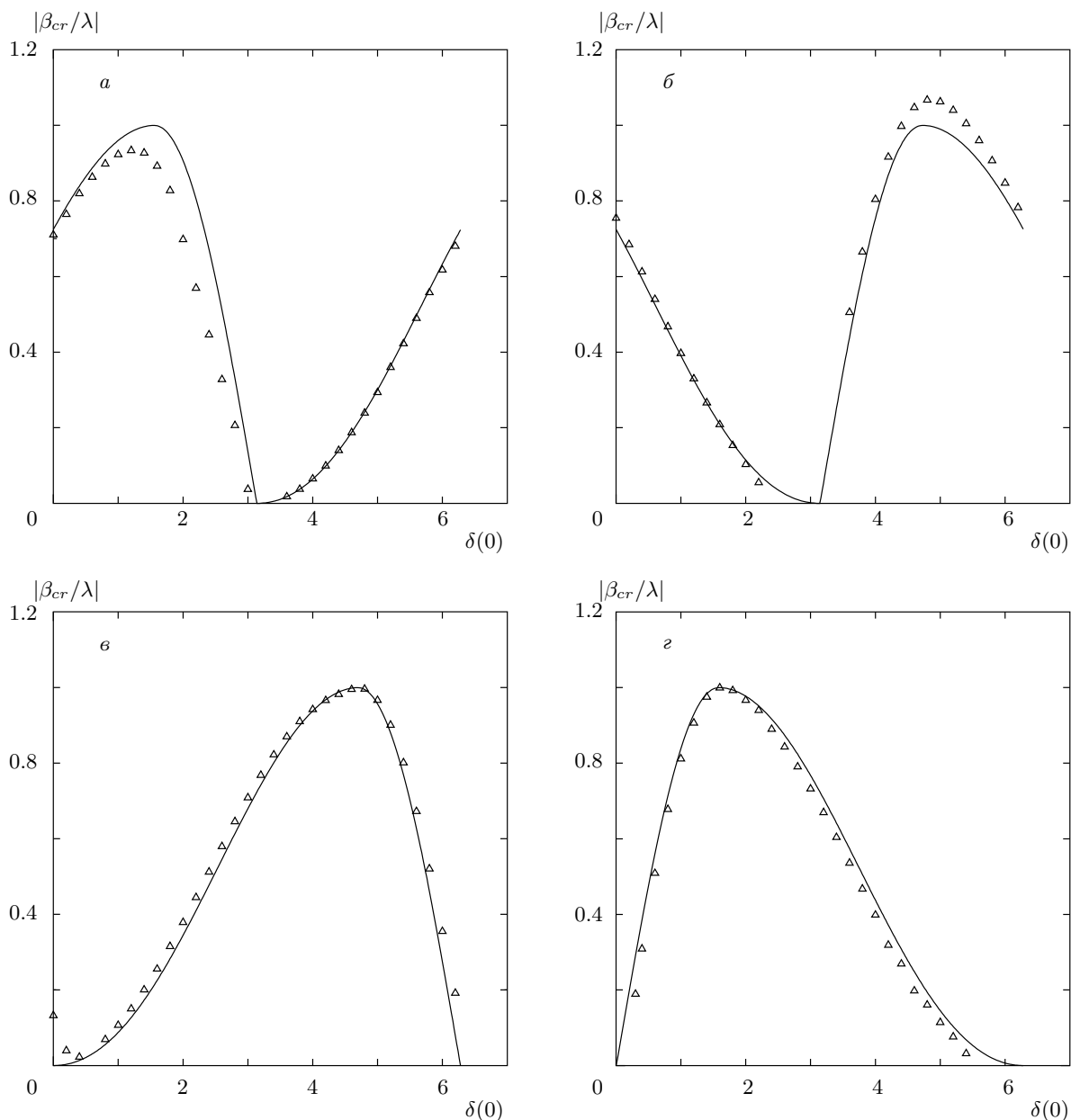


Рис. 3. Зависимость $|\beta_{cr}/\lambda|$ от начальной расстройки фазы $\delta(0)$: *a* — $\beta < 0, \lambda < 0$; *б* — $\beta > 0, \lambda < 0$; *в* — $\beta < 0, \lambda > 0$; *г* — $\beta > 0, \lambda > 0$. Сплошные кривые — решения уравнений (36), (39). Треугольники — значения, полученные путем численного интегрирования НУШ: *a* — $\alpha = -5 \cdot 10^{-4}, A(0) = 2, V(0) = k/2, k = 0.25, \lambda = -6.2286$; *б* — $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}, A(0) = 1, V(0) = k/2, k = 0.25, \lambda = -2.9898$; *в* — $\alpha = -5 \cdot 10^{-4}, A(0) = 1, V(0) = -1.5, \lambda = 0.826$; *г* — $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}, A(0) = 1, V(0) = -1.5, \lambda = 0.826$. Остальные параметры имеют те же значения, что и в случае рис. 1

Пусть, например, $\Delta\omega(t = 0) = 0$, а начальная разность фаз $\delta(0)$ распределена в интервале от 0 до 2π . Чтобы построить в этом интервале зависимость β_{cr}/λ от $\delta(0)$ для всех четырех рассмотренных выше комбинаций знаков β и λ , необходимо в каждом случае соответствующим образом выбирать в уравнениях (36) и (39) число n (номер сепаратрисной петли, связанной с рассматриваемым интервалом). А именно, в уравнении (36) следует брать $n = 0$ ($0 \leq \delta(0) < \pi$) и $n = 1$ ($\pi \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *a* и $n = -1$ ($0 \leq \delta(0) < \pi$) и $n = 0$ ($\pi \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *б*. В уравнении (39) полагаем $n = 1$ ($0 \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *в* и $n = 0$ ($0 \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *г*. При этом из уравне-

ратрисной петли, связанной с рассматриваемым интервалом). А именно, в уравнении (36) следует брать $n = 0$ ($0 \leq \delta(0) < \pi$) и $n = 1$ ($\pi \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *a* и $n = -1$ ($0 \leq \delta(0) < \pi$) и $n = 0$ ($\pi \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *б*. В уравнении (39) полагаем $n = 1$ ($0 \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *в* и $n = 0$ ($0 \leq \delta(0) \leq 2\pi$) в случае *г*. При этом из уравне-

ний (36), (39) видно, что в случаях a и b при $\delta(0) = \pi$ и в случаях v и g при $\delta(0) = 0$, 2π захват фазы никогда не происходит, так как в этих точках $\beta_{cr}/\lambda = 0$. Напротив, в случаях a и g при $\delta(0) = \pi/2$ и в случаях b и v при $\delta(0) = 3\pi/2$ захват происходит при любых $|\beta/\lambda| < 1$. Графики зависимости $|\beta_{cr}/\lambda|$ от $\delta(0)$, соответствующие случаям $a-g$, представлены на рис. 3. Захвату фазы отвечают значения $|\beta/\lambda|$ ниже сплошных кривых. На этом же рисунке изображены значения $|\beta_{cr}/\lambda|$, найденные с помощью численного интегрирования НУШ (1). Видно, что, несмотря на определенную грубость приближения нелинейного маятника, полученные результаты достаточно хорошо согласуются с результатами численного интегрирования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, используя эффект автофазировки, мы продемонстрировали возможность управления динамикой солитона путем воздействия на него внешней волновой накачки с медленно изменяющейся частотой. В зависимости от конкретных приложений волновая накачка в уравнении (1) может иметь различную физическую природу. Так, в нелинейной оптике это может быть квазистационарная плоская световая волна, инжектируемая в волоконный световод [23, 24], или эффективное внешнее возмущение, вызванное взаимодействием волн в асимметричном двулучевом световоде [17]. При описании волн плотности заряда в конденсатах накачка возникает, например, при наложении внешнего переменного электрического поля [15], а в плазме — при воздействии на ленгмюровские солитоны высокочастотного электрического поля [16, 25, 26]. Во всех этих случаях параметры накачки можно легко изменять и таким образом управлять динамикой солитона. Уравнения, описывающие воздействие накачки на солитон, получены нами в разд. 2. Однако не при всех значениях параметров и начальных данных возможно управление динамикой солитона. Для этого нужно, чтобы система перешла в режим автофазировки. Необходимые и достаточные условия перехода в этот режим получены в разд. 3. Мы проверили эти условия путем сравнения с результатами прямого численного интегрирования уравнения (1) и получили хорошее согласие.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Векслер, ДАН СССР **44**, 346 (1944).
2. Е. М. McMillan, Phys. Rev. **68**, 143 (1945).

3. Б. В. Чириков, ДАН СССР **125**, 1015 (1959).
4. J. Fajans and L. Friedland, Amer. J. Phys. **69**, 1096 (2001).
5. I. Aranson, B. Meerson, and T. Tatjima, Phys. Rev. A **45**, 7500 (1992).
6. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and P. Sakov, Stud. Appl. Math. **97**, 235 (1996).
7. L. Friedland and A. G. Shagalov, Phys. Rev. Lett. **90**, 074101 (2003).
8. L. Friedland and A. G. Shagalov, Phys. Rev. Lett. **81**, 4357 (1998).
9. L. Friedland and A. G. Shagalov, Phys. Rev. E **71**, 036206 (2005).
10. В. И. Карпман, Е. М. Маслов, ЖЭТФ **73**, 537 (1977).
11. Е. М. Маслов, Л. А. Калякин, А. Г. Шагалов, ТМФ **152**, 356 (2007).
12. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
13. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
14. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наук. думка, Киев (1983).
15. D. J. Kaup and A. C. Newell, Phys. Rev. B **18**, 5162 (1978).
16. K. Nozaki and N. Bekki, Physica D **21**, 381 (1986).
17. G. Cohen, Phys. Rev. E **61**, 874 (2000).
18. D. J. Kaup and A. C. Newell, Proc. Roy. Soc. London A **361**, 413 (1978).
19. I. V. Barashenkov and Yu. S. Smirnov, Phys. Rev. E **54**, 5707 (1996).
20. I. V. Barashenkov and E. V. Zemlyanaya, Physica D **132**, 363 (1999).
21. G. Terrones, D. W. McLaughlin, E. A. Overman, and A. J. Pearlstein, SIAM J. Appl. Math. **50**, 791 (1990).
22. E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, and I. A. Shomkhin, Physica D **87**, 201 (1995).
23. M. Haelttermann, S. Trillo, and S. Wabnitz, Opt. Comm. **91**, 401 (1992).
24. S. Wabnitz, Opt. Lett. **18**, 601 (1993).
25. G. J. Morales and Y. C. Lee, Phys. Rev. Lett. **33**, 1016 (1974).
26. А. А. Галеев, Р. Э. Сагдеев, Ю. С. Сигов, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Физика плазмы **1**, 10 (1975).