

# ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ДВУХМОДОВОГО СЖАТИЯ И СТЕПЕНЬ ПЕРЕПУТЫВАНИЯ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РАССЕЙАНИИ СВЕТА

*Г. О. Рытиков, М. В. Чехова\**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 мая 2008 г.

Рассматривается генерация «пучков-близнецов» (света с двухмодовым сжатием) в однопроходном оптическом параметрическом усилителе, в качестве которого используется кристалл с отличной от нуля квадратичной восприимчивостью. При этом излучение на выходе нелинейного кристалла существенно многомодовое и возникает вопрос о влиянии объема детектирования на степень подавления шума разностного фототока детекторов. Кроме того, принципиально важен учет как продольного, так и поперечного размеров области, где происходит параметрическое преобразование. Показано, что для максимального подавления шума разностного фототока необходима высокая степень перепутывания двухфотонного света на выходе параметрического усилителя, определенная в работе [11] как отношение ширины распределения интенсивности к ширине функции корреляции. Объем детектирования должен выбираться исходя из обеих этих величин. С точки зрения величины степени перепутывания рассмотрены различные режимы однопроходовой генерации «пучков-близнецов»: режим неколлинеарного частотно-вырожденного и коллинеарного частотно-невырожденного синхронизма первого типа, а также коллинеарного частотно-вырожденного синхронизма второго типа.

PACS: 42.50.Lc, 42.50.Dv

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Среди неклассических оптических эффектов, лежащих в основе квантовой оптики и представляющих интерес для квантовой информатики, важную роль играют эффекты сжатия. В этом достаточно широком классе явлений можно выделить так называемое двухмодовое сжатие, а именно, наличие неклассических корреляций интенсивности между излучением в двух различных модах. В эксперименте обычно имеют дело с двумя коррелированными пучками (twin beams, «пучками-близнецами»). Корреляции проявляются в подавлении флуктуаций разностного числа фотонов в пучках ниже «стандартного квантового предела» — уровня, определяемого флуктуациями разностного числа фотонов для двух когерентных пучков с такой же средней интенсивностью. Один из видов двухмодового сжатия — поляризационное сжатие — характеризуется подавлением шумов переменных Стокса. С появлением чув-

ствительных детекторов с высокой квантовой эффективностью, а также эффективных нелинейных источников стало возможно генерировать сжатый свет без резонатора, в однопроходной схеме, например, за счет параметрического рассеяния (ПР) [1, 2]. В этом случае генерация сжатого света происходит в широком спектре частот и углов, без селекции частотных и угловых мод. Таким образом, одномодовое описание, обычно используемое в работах по сжатию, оказывается неприменимым. На свойства излучения влияет как продольный размер области, где происходит ПР, (обычно длина кристалла), так и поперечный размер (обычно диаметр пучка накачки). Ограниченность объема нелинейного взаимодействия в продольном и поперечном направлениях приводит к конечной ширине пространственной корреляционной функции — при этом у одной пространственной моды сигнального излучения имеется корреляция с целым набором пространственных мод холостого излучения. Аналогично, при возбуждении ПР импульсной накачкой фемтосекундной длитель-

\*E-mail: masha@qopt.phys.msu.ru

ности корреляция возникает между одной частотной модой сигнального излучения и набором частотных мод холостого излучения. Эффекты такого рода для случая спонтанного параметрического рассеяния интерпретируются как наличие частичного перепутывания двухфотонных состояний по непрерывным переменным (волновой вектор и частота), причем степень перепутывания определяется как отношение ширины спектра по соответствующей переменной к ширине корреляционной функции [3, 4].

Основной вопрос, который возникает при регистрации двухмодового сжатия на выходе однопроходного параметрического усилителя — это вопрос об оптимальном объеме детектирования (числе детектируемых мод), при котором уменьшение дисперсии разностного фототока двух детекторов ограничивалось бы только их квантовыми эффективностями и оптическими потерями. Заметим, что при детектировании квадратурного сжатия объем детектирования зависит от параметров «опорного» когерентного источника (local oscillator), излучение которого складывается со сжатым излучением на светоделителе для дальнейшего прямого детектирования. В случае же двухмодового сжатия используется прямое детектирование, причем объемы детектирования обоих детекторов выбираются одинаковыми.

Ниже показано, что для наиболее простого и эффективного детектирования двухмодового сжатия необходима высокая степень перепутывания. Определены условия, при которых достигается высокая степень перепутывания по поперечному волновому вектору. В качестве конкретных примеров рассматриваются различные схемы получения двухмодового сжатия за счет параметрического рассеяния света.

Состояния неклассического света с частичным перепутыванием по частоте сравнительно много рассматривались в литературе в связи с параметрической генерацией двухфотонного [5] и сжатого [6, 7] света в поле фемтосекундной накачки. В то же время, частичное перепутывание по углу рассеяния (по поперечной компоненте волнового вектора) исследовалось лишь в связи с генерацией бифотонов [8–11]; в работах по сжатию поперечный размер области нелинейного взаимодействия предполагался бесконечно большим, а корреляционная функция — бесконечно узкой (см., например, [12]). Исключение составляет работа [13], где неявно предполагалась конечная степень перепутывания. Однако, как будет показано ниже, при параметрах нелинейных кристаллов и пучков накачки, обычно используемых в экспериментах по однопроходной генерации сжато-

го света, такие допущения несправедливы и степень перепутывания по углу невелика.

## 2. ДВУХМОДОВОЕ СЖАТИЕ В ОДНОПРОХОДНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛИТЕЛЕ

Рассмотрим генерацию света с двухмодовым сжатием за счет ПР в кристалле с отличной от нуля квадратичной восприимчивостью. Накачка предполагается, в общем случае, импульсной. Размер области нелинейного взаимодействия определяется в направлении волнового вектора накачки длиной  $L$  кристалла, в поперечном направлении — диаметром пучка накачки  $a$  (рис. 1). Предполагается, что режим параметрического взаимодействия либо неколлинеарный, либо невырожденный по частоте, либо соответствует синхронизму второго типа. Во всех этих случаях можно выделить два пучка (пучки-близнецы), между которыми имеются неклассические корреляции. Обозначим эти пучки индексами  $i$  (холостой) и  $s$  (сигнальный).

Эффект двухмодового сжатия заключается в корреляции флуктуаций числа фотонов для холостого и сигнального пучков. В эксперименте двухмодовое сжатие наблюдается как уменьшение флуктуаций разностного фототока (или разностного числа фотоотчетов) двух детекторов, один из которых регистрирует сигнальный пучок, а другой — холостой. В отличие от флуктуаций разностного числа фотонов на выходе параметрического усилителя, которые оказываются полностью подавленными, величина флуктуаций разностного фототока ограничена снизу двумя факторами: отличием от единицы квантовых эффективностей детекторов и неоптимальным сбором излучения. Ниже мы рассмотрим именно этот второй фактор, полагая, что детекторы, регистрирующие холостой и сигнальный пучки, имеют конечные частотные полосы соответственно  $D_{\omega i}$ ,  $D_{\omega s}$  (на практике это означает полосы оптических фильтров на входе в детекторы) и (или) конечные угловые апертуры соответственно  $D_{\theta i}$ ,  $D_{\theta s}$ . Иначе говоря, детекторы имеют конечные полосы  $D^3 k_i$ ,  $D^3 k_s$  в трехмерном пространстве волновых векторов. Если квантовые эффективности детекторов полагаются равными единице, то величина флуктуаций разностного фототока определяется дисперсией оператора

$$N_- \equiv N_s - N_i, \quad (1)$$

где

$$N_{s,i} \equiv \int_{D^3 k_{s,i}} d^3 k_{s,i} \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_{s,i}) \mathbf{a}(\mathbf{k}_{s,i}) \quad (2)$$

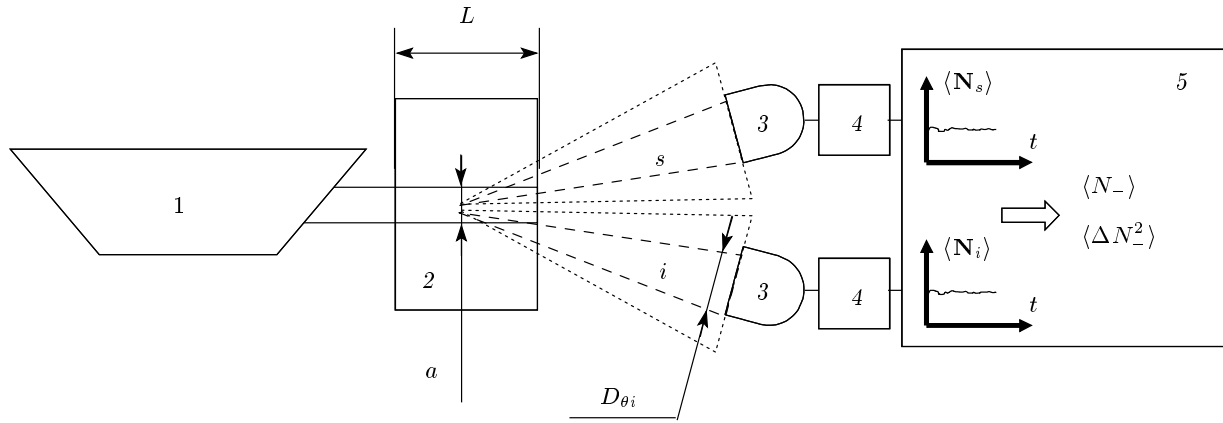


Рис. 1. Схема наблюдения двухмодового сжатия: 1 — лазер, 2 — нелинейный кристалл, 3 — детекторы, 4 — электронные блоки регистрации, 5 — компьютер

— интегральные операторы чисел детектируемых фотонов, выражающиеся через операторы рождения и уничтожения фотонов в соответствующих модах  $\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_s, i)$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{k}_s, i)$ .

Дисперсия разностного фототока определяется выражением

$$\Delta N_-^2 = \langle N_s^2 \rangle + \langle N_i^2 \rangle - 2\langle N_s N_i \rangle - [\langle N_s \rangle - \langle N_i \rangle]^2, \quad (3)$$

где усреднение проводится по квантовому состоянию излучения.

Наиболее просто найти квантовое состояние на выходе параметрического усилителя в случае, когда коэффициент параметрического усиления (КПУ) много меньше единицы (режим спонтанного параметрического рассеяния). В случае большого КПУ вычислить квантовое состояние сложнее, и для расчета средних значений и флуктуаций наблюдаемых величин обычно используется подход Гейзенберга, но при конечной ширине корреляционной функции соответствующие уравнения могут быть решены только численно (см., например, [7, 13]).

Поскольку величина двухмодового сжатия (в отличие от квадратурного сжатия) не зависит от КПУ, в данной работе мы ограничимся рассмотрением случая низкого КПУ. При этом можно считать, что сжатый свет содержит только двухфотонные состояния (бифотоны), так как вероятность генерации состояний с более высоким четным числом фотонов пренебрежимо мала. Вектор состояния света на выходе параметрического усилителя имеет вид [14]

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \int d^3 k_s \int d^3 k_i F(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_s) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_i) |\text{vac}\rangle, \quad (4)$$

где величина  $F(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  определяет амплитуду вероятности испускания бифотона в пару мод  $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$  и на-

зывается амплитудой бифотона. Поскольку в дальнейших расчетах абсолютная величина амплитуды бифотона не влияет на результат, удобно потребовать выполнения условия нормировки:

$$\iint d^3 k_s d^3 k_i |F(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)|^2 = 1.$$

Зависимость амплитуды бифотона от пространственных размеров рассеивающей области рассматривалась в работах [8, 9]; учет анизотропии для излучения накачки был выполнен в работах [10, 11]. Выражение для амплитуды бифотона в случае импульсной фемтосекундной накачки (в предположении неограниченного поперечного размера взаимодействия) было получено в работах [15, 16]. Влияние на амплитуду бифотона частотной дисперсии нелинейного кристалла специально рассматривалось в работе [17]. С учетом всех этих факторов (ограниченность рассеивающего объема в продольном направлении, ограниченное сечение пучка накачки с гауссовским распределением интенсивности, конечная длительность импульса накачки, анизотропия и дисперсия нелинейного кристалла) зависимость амплитуды бифотона от волновых векторов в сигнальной и холостой модах имеет вид

$$F(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \propto E_p(\Delta_\omega) \times \exp\left[-\frac{1}{4} a^2 \Delta_\perp^2\right] \text{sinc}\left\{\frac{1}{2} L \Delta_z\right\}. \quad (5)$$

Здесь  $E_p(\omega)$  — спектральная амплитуда огибающей импульса накачки,  $\Delta_\omega = \omega_s + \omega_i - \omega_p$  — частотная расстройка,  $\omega_p$  — центральная частота накачки,  $\omega_s, \omega_i$  — частоты сигнальной и холостой мод,

$\Delta_{\perp} = q_s + q_i$  — поперечная (по отношению к направлению волнового вектора накачки) волновая расстройка,  $q_s, q_i$  — поперечные компоненты волновых векторов  $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$ . Продольная волновая расстройка  $\Delta_z$  имеет вид

$$\Delta_z = k_p(\omega_s + \omega_i) - k_{sz}(\omega_s) - k_{iz}(\omega_i),$$

где  $k_{sz}, k_{iz}$  — продольные компоненты волновых векторов  $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$  (ось  $z$  выбирается вдоль волнового вектора накачки). Длины волновых векторов удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$k_{s,i,p}(\omega) = n_{s,i,p}(\omega) \frac{\omega}{c}.$$

Учет анизотропии [10] приводит к зависимости  $k_p, k_{sz}, k_{iz}$  от поперечных компонент волновых векторов, т. е. в конечном итоге к зависимости продольной расстройки от поперечной. Будем считать задачу двумерной; это можно сделать либо при наличии аксиальной симметрии по отношению к волновому вектору накачки, либо при большой ширине рассеивающего объема по одному из поперечных направлений. В обоих случаях шестикратный интеграл в формуле (4) преобразуется в четырехкратный, а амплитуда бифотона в выражении (5) становится функцией четырех переменных: частот  $\omega_s, \omega_i$  и поперечных компонент волновых векторов  $q_s, q_i$ . Можно представить амплитуду бифотона в более удобном для сравнения с экспериментом виде — как функцию двух частот и двух углов рассеяния  $F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)$ , так как

$$q_{s,i} = k_{s,i}(\omega_{s,i}) \sin \theta_{s,i}, \quad k_{sz,iz} = k_{s,i}(\omega_{s,i}) \cos \theta_{s,i}.$$

Квадрат модуля амплитуды бифотона  $|F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2$  определяет корреляционную функцию бифотонного поля [8]. В то же время, интеграл от этого выражения по переменным, относящимся к холостому излучению, определяет частотно-угловой спектр сигнального излучения  $S_s(\omega_s, \theta_s)$  и аналогично для холостого излучения:

$$S_s(\omega_s, \theta_s) \propto \int |F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2 d\omega_i d\theta_i,$$

$$S_i(\omega_i, \theta_i) \propto \int |F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2 d\omega_s d\theta_s$$

[8]. Поэтому вид функции  $|F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2$  задает следующие характерные параметры бифотонного поля.

1.  $\delta\theta_i, \delta\theta_s$  — угловые ширины корреляционной функции по отношению к холостому и сигнальному

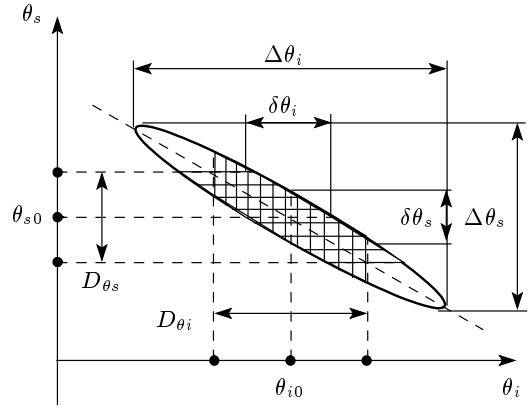


Рис. 2. Примерный вид проекции квадрата модуля амплитуды бифотона  $|F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2$  на плоскость углов рассеяния при фиксированных частотах  $\omega_s, \omega_i$  и некоторые характерные величины:  $\delta\theta_i, \delta\theta_s$  — угловые ширины корреляционной функции, соответствующие сигнальному и холостому излучениям;  $\Delta\theta_i, \Delta\theta_s$  — ширины угловых спектров сигнального и холостого излучения. Горизонтальной штриховкой показана область детектирования сигнального излучения, вертикальной штриховкой — область детектирования холостого излучения

излучениям. Эти величины можно определить экспериментально путем измерения числа совпадений фотоотсчетов двух детекторов с высоким угловым разрешением, один из которых неподвижен, а другой сканируется по углу.

2.  $\delta\omega_i, \delta\omega_s$  — соответствующие частотные ширины корреляционной функции. Эти величины измеряются аналогично угловым ширинам, но путем сканирования частот, а не углов.

3.  $\Delta\theta_i, \Delta\theta_s$  — угловые ширины спектров холостого и сигнального излучений, определяемые экспериментально путем измерения интенсивности холостого (сигнального) излучения в зависимости от положения соответствующего детектора.

4.  $\Delta\omega_i, \Delta\omega_s$  — соответствующие ширины частотных спектров.

Таким образом, например, величина  $\delta\theta_s$  определяет ширину распределения вероятности излучения сигнального фотона под определенным углом к накачке при условии, что холостой фотон был излучен в фиксированном направлении (ширина условного углового распределения для сигнального излучения). Величина  $\delta\theta_s$ , как и величина  $\delta\omega_s$ , связана с объемом когерентности двухфотонного излучения. В то же время,  $\Delta\theta_s$  — это просто ширина распределения вероятности излучения сигнального фотона

под определенным углом к направлению распространения излучения накачки (ширина маргинального углового распределения). На рис. 2 изображен примерный вид функции  $|F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i)|^2$  при фиксированных частотах сигнального и холостого излучений и показаны ее характерные размеры  $\delta\theta_i, \delta\theta_s, \Delta\theta_i, \Delta\theta_s$ . Отношение ширин маргинального и условного распределений вероятности может быть принято в качестве меры перепутывания по соответствующей переменной:  $R_\theta = \Delta\theta/\delta\theta$  [3, 4].

Спектр параметрического рассеяния света практически не ограничен по частоте и занимает широкий диапазон от частоты накачки до частот решеточных колебаний (исключение составляет трудно реализуемый в эксперименте случай частотно-вырожденного синхронизма с аномальной дисперсией групповой скорости [18]). Поэтому детектирование излучения ПР всегда предполагает либо частотную, либо угловую фильтрацию. Из-за неизбежных потерь, вносимых узкополосными частотными фильтрами, предпочтительной является угловая фильтрация, которую мы и рассмотрим ниже. В силу зависимости между частотами и углами рассеяния излучения (при ПР) угловая фильтрация автоматически приводит к выделению определенного частотного диапазона.

Далее мы ограничимся рассмотрением случая ПР от непрерывной накачки (или импульсной накачки со временем когерентности, значительно превышающим время когерентности сигнального и холостого излучений). При этом выражение для амплитуды бифотона в переменных  $\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i$  приобретает вид

$$F(\omega_s, \omega_i, \theta_s, \theta_i) \propto \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \times \exp \left[ -\frac{a^2}{4} (k_s(\omega_s) \sin \theta_s + k_i(\omega_i) \sin \theta_i)^2 \right] \times \text{sinc} \left\{ \frac{L}{2} [k_p(\omega_p, \theta_s, \theta_i) - k_s(\omega_s, \theta_s) \cos \theta_s - k_i(\omega_i, \theta_i) \cos \theta_i] \right\}. \quad (6)$$

Здесь зависимость модулей волновых векторов от углов  $k_s(\theta_s), k_i(\theta_i)$  появляется из-за учета эффектов анизотропии, причем длина волнового вектора накачки оказывается зависящей от комбинации углов  $\theta_s, \theta_i$  [10, 11]. При фиксированной частоте сигнального излучения  $\omega_s$  получим для средних, входящих в формулу (3), выражения

$$\langle N_s \rangle = \langle N_s^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i \times \int_{D_{\theta_s}} d\theta_s |F(\omega_s, \omega_p - \omega_s, \theta_s, \theta_i)|^2, \quad (7)$$

и аналогично для  $\langle N_i \rangle, \langle N_i^2 \rangle$ . Равенство первого и второго моментов числа фотонов является следствием того, что в состоянии (4) в силу малости КПУ в сигнальной и холостой модах присутствуют лишь вакуумные и однофотонные компоненты. Далее имеем

$$\langle N_s N_i \rangle = \int_{D_{\theta_i}} d\theta_i \int_{D_{\theta_s}} d\theta_s |F(\omega_s, \omega_p - \omega_s, \theta_s, \theta_i)|^2. \quad (8)$$

Последнее слагаемое в правой части (3) есть квадрат среднего значения разностного числа фотонов в детектируемых наборах мод. При регистрации двухмодового сжатия это среднее значение стараются обратить в нуль путем правильного выбора величин и положений угловых апертур детекторов  $D_{\theta_s}, D_{\theta_i}$ . Это означает, что должно быть выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i \int_{D_{\theta_s}} d\theta_s |F(\theta_s, \theta_i)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_s \int_{D_{\theta_i}} d\theta_i |F(\theta_s, \theta_i)|^2 \quad (9)$$

(здесь и далее мы опускаем частотные переменные). Тогда дисперсия разностного числа фотонов имеет вид

$$\Delta N_-^2 = 2 \int_{D_{\theta_s}} d\theta_s \int_{D_{\theta_i}} d\theta_i |F(\theta_s, \theta_i)|^2, \quad (10)$$

где  $\int_{D_{\theta_s}} d\theta_s$  означает интегрирование по всей области углов  $\theta_s$ , исключаяющей  $D_{\theta_s}$ . Признаком двухмодового сжатия является малость дисперсии разностного числа фотонов  $\Delta N_-^2$  по сравнению со средним значением суммарного числа фотонов,

$$\langle N_+ \rangle \equiv \langle N_s \rangle + \langle N_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i \int_{D_{\theta_s}} d\theta_s |F(\theta_s, \theta_i)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_s \int_{D_{\theta_i}} d\theta_i |F(\theta_s, \theta_i)|^2. \quad (11)$$

Величина (11) определяет пуассоновский уровень дисперсии разностного числа фотонов (фототока) — минимально возможный уровень шума в

классической оптике. Обычно степень двухмодового сжатия характеризуют так называемым коэффициентом подавления шума (noise reduction factor),  $\text{NRF} \equiv \Delta N_-^2 / \langle N_+ \rangle$ .

Существуют две возможности выбора апертур  $D_{\theta_s}, D_{\theta_i}$ , при которых дисперсия разностного числа фотонов  $\Delta N_-^2$  точно обращается в нуль. Первая возможность состоит в том, что детектируются все моды сигнального и холостого излучений. Однако на практике это не всегда осуществимо, поскольку, как указывалось выше, частотно-угловой спектр ПР неограничен. Вторая возможность заключается в специальном выборе  $D_{\theta_s}, D_{\theta_i}$  не как апертур с резко ограниченными краями, а в виде пространственных фильтров, соответствующих так называемым модам Шмидта.

Известно [5, 19], что амплитуду бифотона, входящую в вектор состояния (4), всегда можно однозначным образом представить в виде разложения по ортонормированным наборам функций  $\varphi_\alpha(\mathbf{k}_s), \psi_\alpha(\mathbf{k}_i)$ :

$$F(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \sum_\alpha \sqrt{\lambda_\alpha} \varphi_\alpha(\mathbf{k}_s) \psi_\alpha(\mathbf{k}_i),$$

$$\int d^3 k_s \varphi_\alpha(\mathbf{k}_s) \varphi_\beta^*(\mathbf{k}_s) = \int d^3 k_i \psi_\alpha(\mathbf{k}_i) \psi_\beta^*(\mathbf{k}_i) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

В частности, если амплитуда бифотона рассматривается как функция лишь угловых переменных, то вектор состояния бифотона представим в виде следующей суперпозиции факторизованных состояний сигнальных и холостых фотонов:

$$|\Psi\rangle = \sum_\alpha \sqrt{\lambda_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_s \varphi_\alpha(\theta_s) \mathbf{a}_s^\dagger(\theta_s) |\text{vac}\rangle \otimes \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i \psi_\alpha(\theta_i) \mathbf{a}_i^\dagger(\theta_i) |\text{vac}\rangle. \quad (13)$$

Выделение в сигнальном канале моды  $\varphi_\beta$  разложения Шмидта означает, что оператор числа детектируемых фотонов имеет вид [ср. с (2)]

$$\mathbf{N}_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \varphi_\beta(\theta) \varphi_\beta^*(\theta') \mathbf{a}_s^\dagger(\theta) \mathbf{a}_s(\theta'). \quad (14)$$

Если при этом в холостом канале выделяется мода  $\psi_\gamma$ , то коррелятор числа фотонов при усреднении по состоянию (13) оказывается равным

$$\langle \mathbf{N}_s \mathbf{N}_i \rangle = \lambda_\beta \delta_{\beta\gamma}. \quad (15)$$

Таким образом, при переходе к базису мод Шмидта у одной моды сигнального излучения имеется корреляция лишь с одной модой холостого излучения и наоборот. В контексте нашего рассмотрения важно то, что среднее значение числа детектируемых фотонов в обоих каналах оказывается равным коррелятору (15). Действительно, усреднение оператора (14) по состоянию (13) дает

$$\langle \mathbf{N}_s \rangle = \lambda_\beta \quad (16)$$

и аналогично

$$\langle \mathbf{N}_i \rangle = \lambda_\gamma. \quad (17)$$

Как и в соотношении (7), средние значения квадратов чисел фотонов принимают такие же значения:

$$\langle \mathbf{N}_i^2 \rangle = \langle \mathbf{N}_i \rangle, \quad \langle \mathbf{N}_s^2 \rangle = \langle \mathbf{N}_s \rangle. \quad (18)$$

Итак, дисперсию разностного числа фотонов можно точно обратить в нуль, если в обоих каналах детектировать сопряженные моды Шмидта. Однако расчет конкретного вида мод Шмидта представляет сложную, часто не решаемую аналитически задачу. Кроме того, реализация в эксперименте детектирования с селекцией мод Шмидта в соответствии с (14) технически сложна. Поэтому далее мы рассмотрим способ приближенного обращения в нуль дисперсии разностного числа фотонов.

На рис. 2 схематически показаны области интегрирования в пространстве переменных  $\theta_s, \theta_i$ , определяющие корреляторы из формулы (3). Область с горизонтальной штриховкой соответствует первому слагаемому в правой части, т.е.  $\langle \mathbf{N}_s^2 \rangle$ , область с вертикальной штриховкой — второму слагаемому ( $\langle \mathbf{N}_i^2 \rangle$ ), а их пересечение — коррелятору  $\langle \mathbf{N}_s \mathbf{N}_i \rangle$ . При выборе конечных пределов интегрирования величина дисперсии разностного фототока в соответствии с формулой (10) всегда отлична от нуля. Тем не менее, из рис. 2 видно, что при условиях  $D_{\theta_s} \gg \delta\theta_s, D_{\theta_i} \gg \delta\theta_i$ , которые в силу (9) должны быть выполнены одновременно, обеспечивается подавление шума разностного числа фотонов значительно ниже пуассоновского уровня,

$$\Delta N_-^2 \ll \langle \mathbf{N}_+ \rangle, \quad (19)$$

т.е. коэффициент подавления шума  $\text{NRF} \ll 1$ . Поэтому для эффективной регистрации двухмодового сжатия достаточно сделать объемы детектирования много большими объема когерентности. Это условие оказывается противоположным условию, накладываемому при измерении корреляционных функций Глаубера, при котором для достижения высокого

контраста следует, по возможности, делать детектирование одномодовым, т. е. объем детектирования равным или меньшим объема когерентности [20].

Если в эксперименте невозможно детектировать весь угловой спектр  $\Delta\theta_s, \Delta\theta_i$ , то выполнение условий  $D_{\theta_s} \gg \delta\theta_s, D_{\theta_i} \gg \delta\theta_i$  означает высокую степень перепутывания состояния (4) по углу:  $\Delta\theta_s \gg \delta\theta_s, \Delta\theta_i \gg \delta\theta_i$ . Чтобы выяснить, в каких случаях реализуется такая ситуация, рассмотрим некоторые характерные примеры.

### 3. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ПЕРЕПУТЫВАНИЯ ПО УГЛУ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим несколько конкретных способов получения двухмодового сжатия за счет спонтанного параметрического рассеяния (СПР) от непрерывной накачки, длину волны которой будем считать равной 351 нм (одна из линий генерации аргонового лазера). Отдельно будут рассматриваться следующие режимы СПР: коллинеарный невырожденный по частоте, неколлинеарный вырожденный по частоте и коллинеарный вырожденный по частоте с синхронизмом второго типа. При этом сигнальный и холостой пучки всегда можно разделить по какому-либо параметру (частота, направление, поляризация).

Во всех случаях амплитуда бифотона рассчитывалась как функция углов рассеяния  $\theta_s, \theta_i$  сигнального и холостого излучений при фиксированных частотах  $\omega_s, \omega_i$ . Значения поперечных расстройек  $\Delta_{\perp}(\theta_s, \theta_i)$  вычислялись с учетом анизотропии показателя преломления для «необыкновенной» компоненты бифотонного излучения в случае синхронизма типа II. Анизотропия показателей преломлений для «необыкновенной» волны накачки учитывалась как зависимость продольной расстройки от поперечной,  $\Delta_z(\Delta_{\perp})$  [10, 11]. В результате при фиксированных  $\omega_s, \omega_i$  для расчета амплитуды бифотона использовалось выражение

$$F(\theta_s, \theta_i) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{4}a^2 [k_s(\varphi + \theta_s) \sin \theta_s + k_i(\varphi + \theta_i) \sin \theta_i]^2 \right\} \times \\ \times \operatorname{sinc} \left\{ \frac{1}{2}L [k_p(\varphi + \theta_p) - k_s(\varphi + \theta_s) \cos \theta_s - k_i(\varphi + \theta_i) \cos \theta_i] \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между пучком накачки и оптической осью; угол  $\theta_p$  ( $\theta_s, \theta_i$ ) определяется связью, следующей из равенства нулю поперечной расстройки для каждой угловой фурье-компоненты амплитуды накачки [10, 11],

$$k_p(\varphi + \theta_p) \sin \theta_p = k_s(\varphi + \theta_s) \sin \theta_s + k_i(\varphi + \theta_i) \sin \theta_i. \quad (21)$$

#### 3.1. Частотно-невырожденный коллинеарный режим с синхронизмом типа I

При синхронизме типа I сигнальный и холостой пучки поляризованы как обыкновенные волны; поэтому величины  $k_s, k_i$  не зависят от углов. В этом случае при малых углах рассеяния связь (21) приводит к соотношению

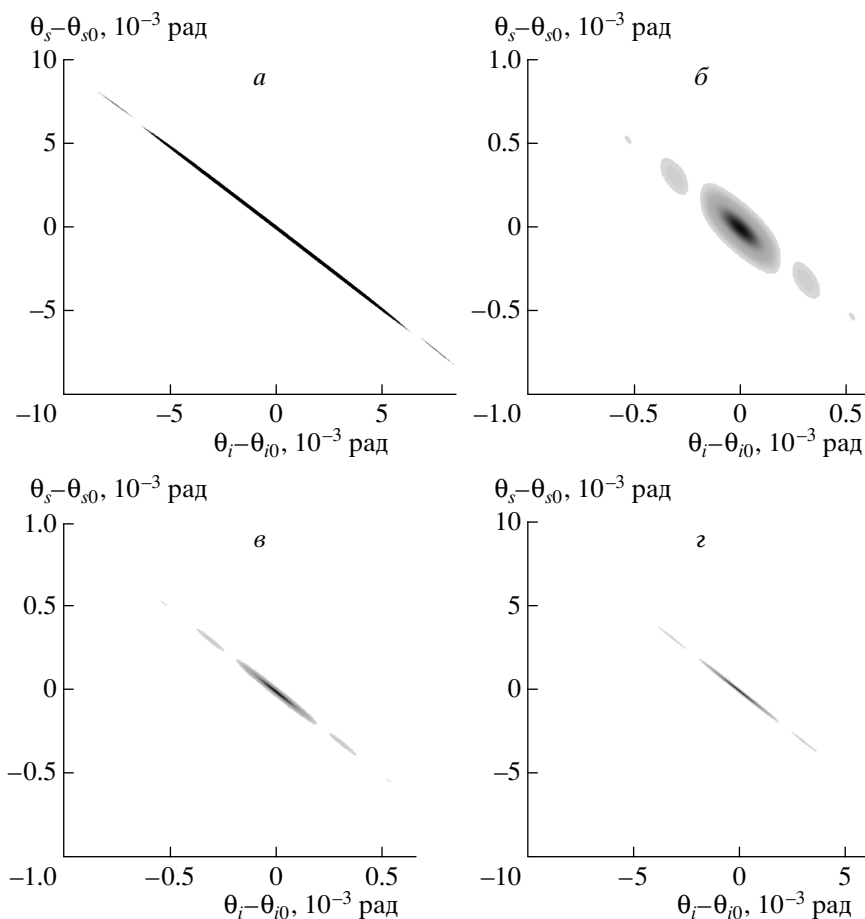
$$\theta_p = \frac{n_s \omega_s \theta_s + n_i \omega_i \theta_i}{n_p(\varphi) \omega_p}, \quad (22)$$

где  $n_s, n_i, n_p$  — показатели преломления сигнальной волны, холостой волны и волны накачки.

На рис. 3а представлено распределение квадрата модуля амплитуды бифотона  $|F(\theta_s, \theta_i)|^2$  при СПР в кристалле йодата лития  $\text{LiIO}_3$  длиной  $L = 10$  мм при накачке пучком диаметром  $a = 2$  мм в коллинеарном режиме, при длинах волн сигнального и холостого излучений соответственно 692 и 712 нм. Такой режим реализуется при ориентации волнового вектора накачки под углом  $\varphi = 51.74^\circ$ . Амплитуда бифотона рассчитывалась по формуле (20) с учетом соотношения (22). Эффект анизотропии накачки в сочетании с конечной шириной пучка приводит к тому, что амплитуда бифотона имеет высокую степень перепутывания по углу рассеяния  $R_{\theta}$ . В рассматриваемом случае  $R_{\theta} \sim 100$ ; эта величина становится еще больше при более жесткой фокусировке накачки [10]. Уменьшение длины кристалла также не приводит к значительному уменьшению степени перепутывания.

#### 3.2. Частотно-вырожденный неколлинеарный режим с синхронизмом типа I

В неколлинеарном режиме ширина амплитуды бифотона в направлении  $\theta_s = -\theta_i$  оказывается намного меньше, а в направлении  $\theta_s = \theta_i$  намного больше, чем в коллинеарном режиме. Для сравнения на рис. 3б показана функция  $|F(\theta_s, \theta_i)|^2$  для СПР в том же кристалле и при тех же параметрах  $L, a$ , но в неколлинеарном частотно-вырожденном



**Рис. 3.** Квадрат амплитуды бифотона как функция угловых отстроек от точного синхронизма при ПР в кристалле  $\text{LiIO}_3$ . Длина волны излучения накачки 351 нм. *a* — коллинейрный частотно-невыврожденный режим; длины волн сигнального и холостого излучений 692 нм и 712 нм. *б, в, г* — неколлинейрный частотно-выврожденный режим. Длина кристалла  $L = 10$  (*a, б, в*), 1 (*г*) мм, диаметр пучка накачки  $a = 2$  (*a, б, г*), 10 (*в*) мм. Степень перепутывания по углу  $R_\theta \approx 100$  (*a*), 2 (*б*), 10 (*в*), 15 (*г*). Здесь и далее углы рассеяния берутся внутри кристалла

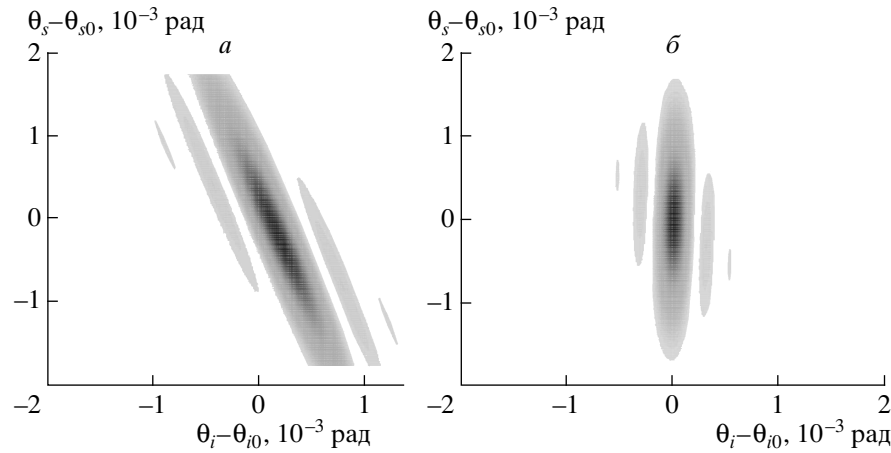
режиме, реализующемся при  $\varphi = 54.3^\circ$ . Углы рассеяния сигнального и холостого фотонов равны при этом  $\theta_s = \theta_i = 5^\circ$ . Степень перепутывания по угловым переменным в данном случае не превышает значения 2. Что касается анизотропии, то в неколлинейрном режиме СПР ее влияние при выбранных параметрах  $L$ ,  $a$  незаметно и она проявляется лишь при более жесткой фокусировке накачки.

Чтобы обеспечить высокую степень перепутывания в неколлинейрном режиме, можно увеличить диаметр пучка накачки (рис. 3в) или выбрать более короткий кристалл (рис. 3г). Так, при  $L = 10$  мм,  $a = 10$  мм (рис. 3в) степень перепутывания составляет величину порядка 10, а при  $L = 1$  мм,  $a = 2$  мм (рис. 3г) она равна приблизительно 15. Таким образом, для достижения высокой степени перепутывания при неколлинейрном синхронизме типа I шири-

на пучка накачки должна быть больше длины кристалла или сравнима с ней.

Интересная особенность неколлинейрного режима СПР состоит в том, что в нем при некоторых значениях  $L$  и  $a$  распределение  $|F(\theta_s, \theta_i)|^2$  уже не является симметричным относительно замены  $\theta_s \rightarrow \theta_i$ , как на рис. 3. «Поворот» амплитуды бифотона появляется именно за счет анизотропии кристалла и только при жесткой фокусировке накачки. Так, на рис. 4 изображены распределения  $|F(\theta_s, \theta_i)|^2$  при  $L = 10$  мм,  $a = 0.2$  мм, вычисленные для двух различных ориентаций волнового вектора накачки. В первом случае углы рассеяния составляют около  $2.5^\circ$  и степень перепутывания приблизительно 3. Во втором случае углы рассеяния составляют около  $5^\circ$  и степень перепутывания около 1. Заметим, что в последнем случае состояние практически не перепу-





**Рис. 4.** Квадрат амплитуды бифотона как функция угловых отстроек от точного синхронизма при ПР в кристалле  $\text{LiIO}_3$  длиной  $L = 10$  мм с длиной волны накачки 351 нм и диаметром пучка  $a = 0.2$  мм. Угол между волновым вектором накачки и оптической осью кристалла равен  $52.4^\circ$  (а),  $54.4^\circ$  (б), при этом в точном синхронизме углы  $\theta_s, \theta_i \approx 2.5^\circ$  (а),  $5^\circ$  (б). Степень перепутывания  $R_\theta \approx 3$  (а), 1 (б)

тано по угловым переменным и близко к факторизованному состоянию. Получение таких состояний (как правило, по отношению к частоте) является целью некоторых экспериментов [20].

### 3.3. Частотно-вырожденный коллинеарный режим, синхронизм типа II

Двухмодовое сжатие часто получают при СПР в коллинеарном режиме с синхронизмом типа II, при котором сигнальный и холостой пучки ортогонально поляризованы. Такое излучение, в частности, проявляет поляризационное сжатие [21, 22]. Характерное распределение квадрата модуля амплитуды бифотона в этом случае показано на рис. 5. Расчет проводился для кристалла ВВО при той же длине волны накачки (в кристалле  $\text{LiIO}_3$  синхронизм второго типа не реализуется). Ориентация волнового вектора накачки, при которой реализуется коллинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа II, соответствует  $\varphi = 48.9^\circ$ . Соотношение (22) было преобразовано к виду

$$\theta_p = \frac{n_s(\varphi + \theta_s)\theta_s + n_i\theta_i}{2n_p(\varphi)}. \quad (23)$$

Здесь учтено, что сигнальная волна является необыкновенной, как и волна накачки, а также то, что частоты сигнальной и холостой волн совпадают. Видно, что, как и при неколлинеарном режиме с синхронизмом первого типа, достаточно высокая степень перепутывания реализуется только при диаметрах  $a$ , больших или порядка  $L$ ; так, при  $L = 2$  мм,  $a = 2$  мм степень перепутывания  $R_\theta \approx 40$  (рис. 5б).

На примере коллинеарного частотно-вырожденного СПР с синхронизмом типа II была рассчитана зависимость коэффициента подавления шума от ширины детектируемого углового спектра для двух различных величин степени перепутывания: высокой ( $R_\theta \sim 40$ , что реализуется при  $L = 2$  мм и  $a = 2$  мм) и низкой ( $R_\theta \sim 2$ , что реализуется при  $L = 2$  мм и  $a = 0.2$  мм). Расчет проводился численно, с использованием распределений амплитуды бифотона, аналогичных представленным на рис. 5. Для простоты считалось, что угловая апертура детектора ограничена лишь в одном направлении (в эксперименте это можно реализовать с помощью щелевой диафрагмы). Обе зависимости представлены на рис. 6. Видно, что в случае высокой степени перепутывания возможна фильтрация углового спектра, не приводящая к значительному уменьшению сжатия: коэффициент подавления шума быстро изменяется на участке  $0 < D_{\theta_s, \theta_i} < \delta\theta_{s,i}$ , а при дальнейшем увеличении  $D_{\theta_s, \theta_i}$  уменьшается медленно. Таким образом, для случая  $R_\theta \approx 40$  (сплошная кривая), выделяя примерно шестую часть углового спектра (0.001 рад), можно зарегистрировать двухмодовое сжатие на уровне 6 дБ. В то же время, для случая  $R_\theta \approx 2$  (пунктирная кривая) для получения сжатия на том же уровне нужно детектировать 2/3 углового спектра<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Аналогичные зависимости NRF от объема детектирования были получены в работе [13], при этом связь со степенью перепутывания не рассматривалась.

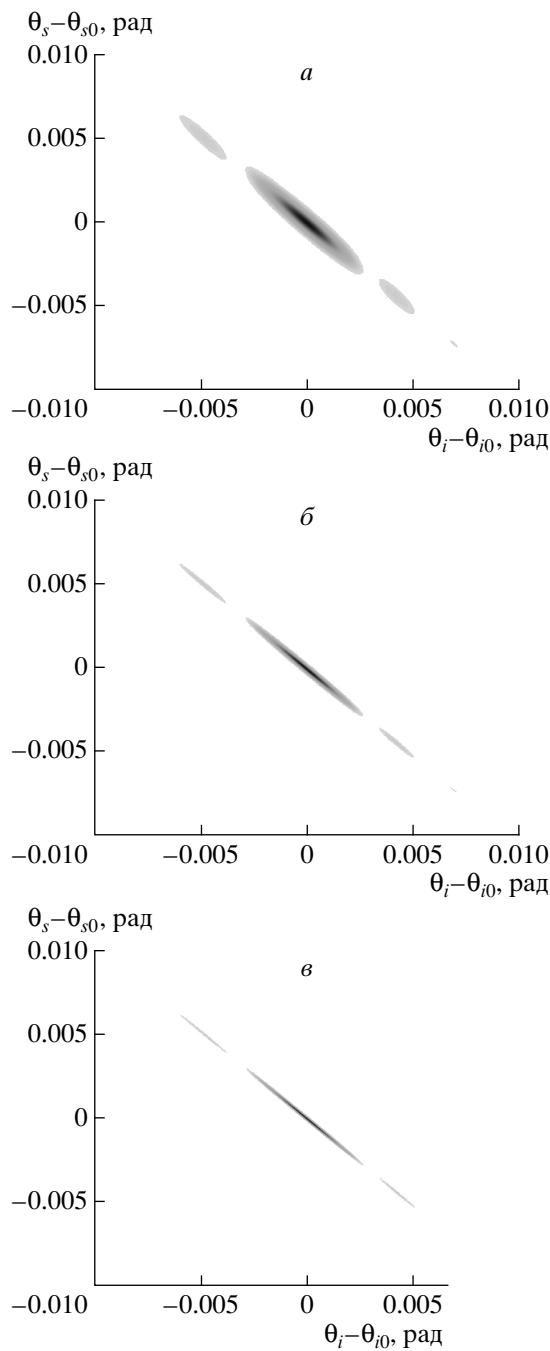


Рис. 5. Квадрат амплитуды бифотона как функция угловых отстроек от точного синхронизма типа II при ПР в коллинеарном частотно-вырожденном режиме в кристалле ВВО длиной  $L = 2$  мм с длиной волны накачки 351 нм и диаметром пучка  $a = 0.4$  (а), 1 (б), 2 (в) мм. Степень перепутывания  $R_\theta \approx 4$  (а), 10 (б), 40 (в)

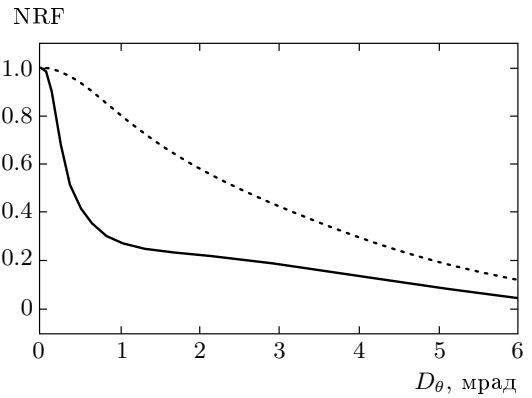


Рис. 6. Коэффициент подавления шума в зависимости от ширины угловой апертуры детектора при параметрическом рассеянии типа II для случая высокой степени перепутывания ( $R_\theta \approx 40$ , что реализуется при  $L = 2$  мм,  $a = 2$  мм; сплошная кривая), и низкой степени перепутывания ( $R_\theta \approx 2$ , что реализуется при  $L = 2$  мм,  $a = 0.2$  мм; пунктирная кривая). Угловая апертура считалась ограниченной только в одном направлении

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрены способы оптимального детектирования двухмодового сжатия, возникающего при параметрическом рассеянии света в пространственно ограниченном образце. При этом из-за конечной степени перепутывания по углу рассеяния на измеряемую величину — дисперсию разностного числа детектируемых фотонов в пучках-близнецах — существенно влияет объем детектирования. Показано, что для обращения дисперсии разностного фототока в нуль необходимо либо избирательно детектировать моды Шмидта (что технически сложно), либо собирать весь угловой спектр рассеяния. Значительного подавления шума разностного числа фотонов можно также добиться при условии, что детектируемый диапазон углов в каждом канале (связанный с объемом детектирования) значительно превышает угловую ширину корреляции бифотонного поля (связанную с объемом когерентности). Это условие оказывается противоположным тому, которое накладывает при измерении корреляционных функций Глаубера, когда объем детектирования должен быть близок к объему когерентности.

Таким образом, если не рассматривать трудно-реализуемый случай селекции мод Шмидта, то для оптимальной регистрации двухмодового сжатия детектирование должно быть существенно широкополосным (по углу). Это возможно в том случае, ко-

гда состояние на выходе нелинейного кристалла имеет высокую степень перепутывания по угловым переменным. В работе рассмотрены различные режимы ПР, при которых достигается двухмодовое сжатие. Показано, что лишь при коллинеарном режиме с синхронизмом типа I степень сжатия велика (составляет несколько десятков) практически при любых диаметрах пучка накачки и длинах кристалла. В неколлинеарном режиме, а также в коллинеарном режиме с синхронизмом второго типа II степень сжатия по углу в общем случае невелика. Однако можно достичь величин  $R_\theta$  порядка нескольких десятков единиц при использовании пучков накачки, сравнимых по ширине с длиной кристалла или превышающих ее.

Аналогичное рассмотрение можно провести для частотных переменных: частотной ширины функции корреляции, ширины частотного спектра и частотной полосы при детектировании. Основной вывод при этом будет аналогичным: для эффективного подавления дисперсии разностного числа фотонов при регистрации пучков-близнецов необходимо, чтобы частотные полосы детекторов в оптическом диапазоне были существенно шире, чем частотная корреляционная функция. Частотное распределение для амплитуды бифотона при различных типах синхронизма рассматривалось в литературе достаточно широко и поэтому здесь не обсуждается.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-02-16393а, 08-02-00741а, 07-02-91581АСПа, 08-02-00555а) и программы поддержки научных школ НШ-796.2008.2. Авторы признательны В. П. Карасеву, А. Н. Пенину и М. В. Федорову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. O. Jedrkiewicz, Y.-K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. A. Lugiato, and P. Di Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243601 (2004).
2. M. Bondani, A. Allevi, G. Zambra, M. G. A. Paris, and A. Andreoni, *Phys. Rev. A* **76**, 013833 (2007).
3. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, A. E. Kazakov, K. W. Chan, C. K. Law, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **69**, 052117 (2004).
4. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, A. E. Kazakov, K. W. Chan, C. K. Law, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **72**, 032110 (2005).
5. C. K. Law, I. A. Walmsley, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5304 (2000).
6. R. S. Bennink and R. W. Boyd, *Phys. Rev. A* **66**, 053815-1 (2002).
7. W. Wasilewski, A. I. Lvovsky, K. Banaszek, and C. Radzewicz, *Phys. Rev. A* **73**, 063819-1 (2006).
8. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko, S. P. Kulik, A. N. Penin, Y. H. Shih, and D. V. Strekalov, *Phys. Rev. A* **56**, 3214 (1997).
9. C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Parda, *Phys. Rev. A* **57**, 3123 (1998).
10. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 063901 (2007).
11. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. A* **77**, 032336 (2008).
12. M. Kolobov, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1539 (1999).
13. E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **69**, 023802 (2004).
14. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, *Laser Phys.* **4**, 663 (1994).
15. T. E. Keller and M. H. Rubin, *Phys. Rev. A* **56**, 1534 (1997).
16. W. P. Grice and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **56**, 1627 (1997).
17. Yu. M. Mikhailova, P. A. Volkov, and M. V. Fedorov, arXiv:0801.0689v1.
18. D. Strekalov, A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, and L. Maleki, *Phys. Rev. A* **71**, 041803(R) (2005).
19. C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 243601 (2004).
20. О. А. Иванова, Т. Ш. Исхаков, А. Н. Пенин, М. В. Чехова, *КЭ* **36**, 951 (2006).
21. W. P. Grice, A. B. U'Ren, and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **64**, 063815 (2001).
22. В. П. Карасев, А. В. Масалов, *Опт. и спектр.* **74**, 928 (1993).