

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗВИТИЯ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ДВУХПОТОКОВОЙ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. С. Кингсеп, Ю. А. Фридман*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 апреля 2008 г.

Получено выражение для энергии волны плотности в многокомпонентной гравитирующей среде, аналогичное по форме соответствующему выражению в электродинамике сплошных сред. Продемонстрирована возможность «тройного рождения» волн с положительной и отрицательной энергией в неравновесной гравитирующей среде. Показано, что такое резонансное взаимодействие волн приводит к развитию взрывной неустойчивости. Методом, разработанным в физике плазмы, получено выражение для характерного времени развития неустойчивости в одномерной модели.

PACS: 95.30.Lz, 95.35.+d, 52.35.Mw

1. ВВЕДЕНИЕ

Естественным объектом для бесстолкновительной гидродинамики многокомпонентных гравитирующих систем, в которой движение частиц различных сред управляется общим гравитационным потенциалом, является темная материя. Ее частицы проявляют себя только в гравитационном взаимодействии, в связи с чем природа их еще не изучена (см., например, [1]); несмотря на известные успехи наблюдения позднейших лет (фотография столкновения двух кластеров, полученная с помощью телескопа Хаббл в 2004 г. и по мнению астрономов запечатлевшая кольцо темной материи), вопрос о самом существовании темной материи, поднятый Цвикки в 1937 г. (см. [2]), остается неразрешенным [3].

Развитие неустойчивостей в многокомпонентной системе определяется гидродинамическими (или кинетическими) параметрами составляющих ее сред. Следы структур или турбулентностей, обязанных своим происхождением той или иной неустойчивости, невозможно было бы наблюдать в темной материи, но они должны присутствовать, например, в газовом диске. Имея под рукой реестр неустойчивостей, способных развиваться в системе «газовый

диск – темная материя», можно делать заключения о гидродинамических (или кинетических) свойствах темной материи как среды.

Линейные гидродинамические пучково-джинсовские неустойчивости многокомпонентной гравитирующей среды описаны, например, в работах [4, 5]; если среды имеют значительную температуру, вместо гидродинамической может развиваться кинетическая пучково-джинсовская неустойчивость. Если система линейно устойчива (например, крупномасштабные неустойчивости стабилизированы вращением [6]), вступают в игру нелинейные сценарии развития неустойчивости.

Неоднократно отмечавшаяся различными авторами аналогия между дисперсионными законами в физике плазмы и в гравигидродинамике позволяет ожидать, что многие неустойчивости, изученные в физике плазмы, могут возникать и в многокомпонентной гравитирующей среде. Как будет показано в настоящей работе, это в полной мере относится к взрывной неустойчивости, связанной с возможностью распространения в неравновесной среде волн как положительной, так и отрицательной энергии¹⁾. Методы, разработанные в физике плазмы (см., на-

*E-mail: kingsep@dap.kiae.ru, kingsep@mail.ru

¹⁾ Другой механизм развития взрывной неустойчивости рассмотрен в статье [7].

пример, [8] или [9]), позволяют в некоторых случаях аналитически получить выражение для матричного элемента резонансного взаимодействия волн (т. е. оценить время развития неустойчивости) и для случая гравитирующих сред. В настоящей статье это выражение получено в рамках одномерной модели.

2. ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ В ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Получим выражение для энергии волны плотности в гравитирующей среде в форме, удобной для дальнейшего исследования.

В книге [10] при выводе выражения для энергии волны плотности для обычного газа полная энергия единицы объема однокомпонентной среды записывается как

$$E = \rho\epsilon + \frac{\rho v^2}{2},$$

где ρ — плотность среды, ϵ — массовая плотность внутренней энергии среды, v — ее полная скорость. С учетом гравитации к этому выражению следует добавить член, отвечающий потенциальной энергии $\rho\psi/2$, где ψ — гравитационный потенциал. В остальном повторяя стандартные выкладки [10], получим для волны в покоящейся среде:

$$E_{wave} = \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2 + \rho_0 \frac{\tilde{v}^2}{2} + \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{\psi}. \quad (1)$$

Здесь знаком «тильда» отмечены возмущенные величины, индексом «0» — равновесные, c_s — скорость звука в газе (рассматривается изотермический случай, так что $c_s^2 = p/\rho$, где p — давление газа). В системе отсчета, где среда имеет скорость v_0 , к выражению для плотности энергии волны, очевидно, добавится член $\tilde{\rho} v_0 \tilde{v}$.

В общем случае многокомпонентной гравитирующей среды с плоскопараллельным относительным движением составляющих ее компонентов энергия волны плотности на единицу объема среды будет иметь вид

$$E_{wave} = \sum_i \left(\frac{\rho_{0i} \tilde{v}_i^2}{2} + \tilde{\rho}_i \mathbf{v}_{0i} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i + \frac{c_{si}^2 \tilde{\rho}_i^2}{2\rho_{0i}} + \frac{1}{2} \tilde{\rho}_i \tilde{\psi}_i \right), \quad (2)$$

где индексом « i » обозначены параметры (равновесные и возмущенные) составляющей среды с номером i .

Уравнения гравигидродинамики для многопоточковой гравитирующей среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= -\nabla \psi - \frac{\nabla p_i}{\rho_i}, \\ \Delta \psi &= 4\pi G \sum_i \rho_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где i пробегает все значения от 1 до n , n — число компонентов рассматриваемой среды.

Линеаризуя эти уравнения и раскладывая в ряд Фурье, получаем для плоской волны (Фурье-гармоники) возмущения пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$:

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\rho_{0i} k^2 \tilde{\psi}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})^2 - k^2 c_{si}^2}, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{k} \tilde{\psi} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})^2 - k^2 c_{si}^2}. \quad (5)$$

Подставляя это в выражение (2) для энергии волны плотности в многопоточковой среде, получаем

$$E_{wave} = k^2 \tilde{\psi}^2 \sum_i \frac{\rho_{0i} \omega (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})}{\left((\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})^2 - k^2 c_{si}^2 \right)^2}. \quad (6)$$

Это выражение для энергии имеет вид почти тот, который мы стремимся вывести.

Дисперсионное уравнение, получаемое из линеаризованных уравнений гравигидродинамики, записывается как

$$\epsilon_0 = 1 + \sum_i \frac{\omega_{ji}^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0i})^2 - k^2 c_{si}^2} = 0, \quad (7)$$

где ω_{ji} — джинсовская частота i -й компоненты среды, $\omega_{ji}^2 = 4\pi G \rho_{0i}$; о смысле величины ϵ_0 будет сказано ниже. Прямым вычислением легко убедиться в том, что для значений ω и \mathbf{k} , удовлетворяющих дисперсионному уравнению (7),

$$E_{wave} = \frac{\partial(\epsilon_0 \omega)}{\partial \omega} \left(-\frac{|\tilde{\mathbf{g}}|^2}{8\pi G} \right), \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{g}} = -\nabla \tilde{\psi}$ — возмущенная напряженность гравитационного поля (для плоской волны $\tilde{\mathbf{g}} = -ik\tilde{\psi}$).

Структура выражения (8) полностью повторяет общеизвестные результаты из классической электродинамики [11, 12] для энергии электромагнитной волны или волны зарядовой плотности в диэлектрической среде. Различие только в знаке (и в присутствии в знаменателе ньютоновской константы G), обусловленное различием кулоновского и ньютоновского взаимодействий.

Величина ε_0 , аналогичная диэлектрической проницаемости среды для волн зарядовой плотности²⁾, характеризует отклик распределения плотности различных компонент гравитирующей среды на возмущение гравитационного потенциала, как это видно, например, из выражения для возмущенной плотности (4).

Итак, знак энергии волны плотности в многокомпонентной гравитирующей среде определяется знаком $\partial\varepsilon_0/\partial\omega$.

3. О ВОЗМОЖНОСТИ ОДНОВРЕМЕННОГО СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛН С ЭНЕРГИЕЙ РАЗНОГО ЗНАКА В МНОГОПОТОКОВОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим простейший случай многокомпонентной системы — случай двухпотоковой гравитирующей среды. Пусть среды, ее составляющие, имеют одинаковые гидродинамические характеристики (скорость звука c_s и джинсовскую частоту $\omega_j^2 = 4\pi G\rho$), и движутся навстречу друг другу соответственно со скоростями v_0 и $-v_0$. Для одномерной ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_0$) волны³⁾ в такой среде уравнение (7) принимает вид

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_j^2}{(\omega - kv_0)^2 - k^2 c_s^2} + \frac{\omega_j^2}{(\omega + kv_0)^2 - k^2 c_s^2} = 0. \quad (9)$$

Примерный график левой части дисперсионного уравнения в зависимости от частоты ω при условии $kv_0 > kc_s$ изображен на рис. 1 (точнее, это график функции $y(\omega) = \varepsilon_0(\omega) - 1$).

В случае, если кривые в нижней полуплоскости пересекают прямую $y = -1$, отвечающую $\varepsilon_0 = 0$, дисперсионное уравнение имеет четыре вещественных корня (т. е. такая двухпотоковая система линейно устойчива), причем два из них соответствуют положительной энергии у волны и два — отрицательной.

Покажем, что существует диапазон параметров, в котором такая система линейно устойчива: в этом

²⁾ См., например, [13], где эта аналогия принимает самый наглядный смысл для частного случая вращающегося гравитирующего цилиндра.

³⁾ Случай $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}_0$, как легко видеть, дает обыкновенную джинсовскую неустойчивость. Но для больших длин волн ($k^2 c_s^2 < 2\omega_j^2$), на которых развивается джинсовская неустойчивость, наше плоское приближение (если говорить о реальных задачах астрофизики) неприменимо, а в реальной вращательной геометрии крупномасштабные неустойчивости подавляются, см., например, [6].

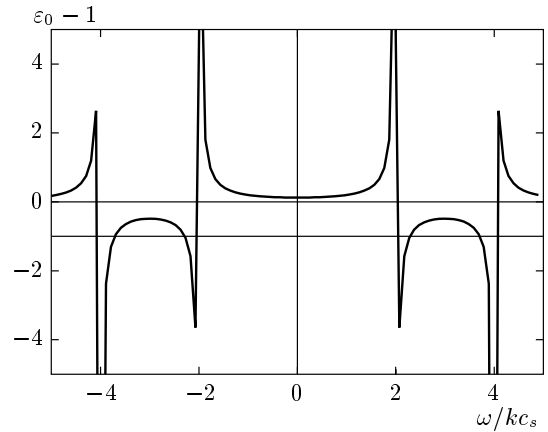


Рис. 1. Левая часть дисперсионного уравнения в зависимости от частоты

случае в системе заведомо способны распространяться волны с энергией обоих знаков. О принципиальной возможности распространения волны отрицательной энергии в неравновесной среде см., например, работу [14]. Дисперсионное уравнение (9) сводится к биквадратному; введем безразмерную константу η таким образом, что

$$v_0^2 = (1 + \eta)c_s^2.$$

Как показывают вычисления, решения ω^2 дисперсионного уравнения (9) вещественны при $\eta < 0$. Если же $\eta > 0$, то корни ω^2 вещественны при условиях

$$0 \leq k^2 c_s^2 \leq \frac{\omega_j^2 (\sqrt{\eta+1} - \sqrt{\eta})}{2\sqrt{\eta+1}},$$

$$k^2 c_s^2 \geq \frac{\omega_j^2 (\sqrt{\eta+1} + \sqrt{\eta})}{2\sqrt{\eta+1}}$$

и равны

$$(\omega^2)_{1,2} = k^2(2 + \eta)c_s^2 - \omega_j^2 \pm \{4(\eta + 1)k^4 c_s^4 - 4(\eta + 1)k^2 c_s^2 \omega_j^2 + \omega_j^4\}^{1/2}. \quad (10)$$

Заметим, что в частном случае $k^2 c_s^2 = \omega_j^2$ корни дисперсионного уравнения принимают вид

$$(\omega^2)_1 = (2 + \eta)\omega_j^2,$$

$$(\omega^2)_2 = \eta\omega_j^2.$$

Таким образом, в этом случае при $\eta > 0$ дисперсионное уравнение имеет четыре вещественных корня, причем двум из них отвечает положительное значение энергии волны и двум — отрицательное.

Найдем теперь все k , для которых ω^2 получается неотрицательным — линейно устойчивые решения,

отвечающие обычным (продольным) волнам, колебаниям плотности. Простые расчеты показывают, что при $\eta > 0$ для

$$k^2 c_s^2 \geq \omega_j^2 \frac{\sqrt{\eta+1} + \sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta+1}} \quad (11)$$

все четыре корня ω вещественны, причем два из них отвечают волнам положительной энергии и два — отрицательной.

Проверка при $\eta = 0$ (относительное движение потоков происходит с удвоенной скоростью звука) дает линейную устойчивость при $k^2 c_s^2 \geq \omega_j^2$. При $\eta < 0$ система оказывается линейно устойчивой при $k^2 c_s^2 \geq 2\omega_j/|\eta|$. (Следует помнить, что по определению при $\eta < 0$ выполняется неравенство $|\eta| \leq 1$.)

4. РЕЗОНАНСНЫЕ ТРОЙКИ, ИЛИ НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, ПРИВОДЯЩЕЕ К ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Предположим, что, изучая возможные возмущения нашей двухпотоковой среды, мы находимся в диапазоне параметров линейной устойчивости.

Будем рассматривать плоские волны плотности как квазичастицы. Все дальнейшие расчеты будут проводиться в приближении случайных фаз: волны, трактуемые как квазичастицы, считаем некогерентными. Значения, характеризующие вероятность столкновения, нам даст вторая поправка к уравнениям гравигидродинамики; дисперсионное уравнение, характеризующее зависимость частоты от волнового вектора, мы уже получили из первой поправки.

Столкновение квазичастиц происходит с сохранением энергии и импульса. Зададимся вопросом, нет ли в списке фейнмановских диаграмм рассматриваемого процесса «тройных вершин», как на схе-

ме, представленной на рис. 2. Законы сохранения требуют, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 0, \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Как будет ясно ниже, такие тройные вершины действительно есть; мы их найдем уже в одномерной ситуации. Обратимся снова к волнам с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_0$. Как видно из графика (рис. 1), отрицательной энергии при каждом k отвечает пара ω , меньшая по модулю. Обозначим через ω^+ решение дисперсионного уравнения, отвечающее положительной энергии волны, через ω^- — отрицательной. Будем искать резонансную тройку с одновременным рождением, например, одной «положительной» волны и двух «отрицательных». Тогда

$$\begin{aligned} (\omega_1^-)^2 &= k_1^2 c_s^2 (2 + \eta) - \omega_j^2 - \\ &- \{4(\eta + 1)k_1^4 c_s^4 - 4(\eta + 1)k_1^2 c_s^2 \omega_j^2 + \omega_j^4\}^{1/2}, \\ (\omega_2^-)^2 &= k_2^2 c_s^2 (2 + \eta) - \omega_j^2 - \\ &- \{4(\eta + 1)k_2^4 c_s^4 - 4(\eta + 1)k_2^2 c_s^2 \omega_j^2 + \omega_j^4\}^{1/2}, \\ (\omega_3^+)^2 &= (k_1 - k_2)^2 c_s^2 (2 + \eta) - \omega_j^2 + \\ &+ \{4(\eta + 1)(k_1 - k_2)^4 c_s^4 - \\ &- 4(\eta + 1)(k_1 - k_2)^2 c_s^2 \omega_j^2 + \omega_j^4\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Первой волне отрицательной энергии отвечает, например, $\omega_1^-, -k_1$, второй — ω_2^-, k_2 , а волне положительной энергии, которая составит с ними резонансную тройку, отвечает частота $\omega^+ = -\omega_1^- - \omega_2^-$ и волновое число $k_1 - k_2$. (Дисперсионный закон, с которым мы здесь имеем дело, является четной функцией как по ω при фиксированном k , так и по k при фиксированном ω .)

Чтобы убедиться в существовании таких резонансных троек, рассмотрим случай $k^2 c_s^2 \gg \omega_j^2$. Во втором приближении по ω_j/kc_s получаем

$$\begin{aligned} k_1 &= -\sqrt{\eta+1}k, \\ \omega_1 &= \sqrt{\eta+1} \left(\sqrt{\eta+1}-1 \right) kc_s - \frac{\omega_j^2}{2kc_s\sqrt{\eta+1}}, \\ k_2 &= k, \quad \omega_2 = \left(\sqrt{\eta+1}-1 \right) kc_s - \frac{\omega_j^2}{2kc_s\sqrt{\eta+1}}, \\ k_3 &= \left(\sqrt{\eta+1}-1 \right) k, \\ \omega_3 &= -\eta kc_s + \frac{\omega_j^2}{2kc_s} \frac{\sqrt{\eta+1}+1}{\eta\sqrt{\eta+1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнения $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ относительно η дает значение $\eta = 5/4$. Для коротких волн

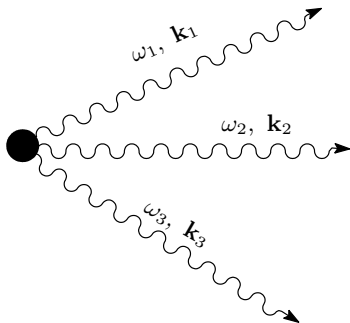


Рис. 2. Тройное рождение волн

во втором приближении по малому параметру мы явно записали резонансную тройку. При этом относительная скорость двух потоков рассматриваемой среды составляет $2v_0 = 3c_s$ (в этом легко убедиться, вспомнив, как вводилась величина η). Итак, процесс тройного рождения квазичастиц, возможный (как мы показали выше) в двухпотоковой самогравитирующей среде, описывается законами сохранения (12).

Обозначим через N_k число квазичастиц, несущих 4-импульс⁴⁾ k (отвечающих возмущениям с волновым вектором \mathbf{k} и частотой $\omega_{\mathbf{k}}$). Тогда, в предположении, что $N_k \gg 1$, можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{k_1}}{\partial t} &= \sum_{k_2} Q(k_1, k_2) [(N_{k_1} + 1)(N_{k_2} + 1) \times \\ &\times (N_{-k_1-k_2} + 1) - N_{k_1} N_{k_2} N_{-k_1-k_2}] \approx \\ &\approx \sum_{k_2} Q(k_1, k_2) [N_{k_1} N_{k_2} + N_{k_2} N_{-k_1-k_2} + \\ &+ N_{k_1} N_{-k_1-k_2}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $Q(k_1, k_2)$ — вероятность тройного рождения (или совместного исчезновения) квазичастиц с импульсами $(k_1, k_2, -k_1 - k_2)$. Как замечено в книге [9], после того, как акт тройного рождения повторится много раз, число квазичастиц всех трех сортов можно считать примерно одинаковым. Опуская индексы, запишем

$$\frac{dN}{dt} = wN^2,$$

откуда и следует формула взрывной неустойчивости:

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - N_0 w t}. \quad (16)$$

Здесь N — например, число квазичастиц в зависимости от времени, N_0 — исходное число квазичастиц. Коэффициент w интерпретируется как вероятность процесса — величина, обратно пропорциональная времени развития неустойчивости; в следующем разделе мы вычислим его для одномерного случая.)

5. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ РАЗВИТИЯ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ДВУХПОТОКОВОЙ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Время $t_0 = (N_0 w)^{-1}$ развития взрывной неустойчивости (16) обратно пропорционально величине

⁴⁾ Здесь мы положили $\hbar = 1$.

w — вероятности приводящего к ней резонансного процесса. (Разумеется, как видно из (16), w — это вероятность в пересчете на число квазичастиц, которое и само по себе есть размерная величина.)

Воспользуемся методом, разработанным рядом авторов для описания распадной неустойчивости в приближении случайных фаз в начале 1960-х гг. (см., например, [9]). Поскольку газовый галактический диск, частицы которого при вращении движутся сквозь гипотетическое гало из темной материи, находится в турбулентном состоянии, приближение случайных фаз представляется здесь адекватным.

Линейное дисперсионное уравнение мы получали в первом приближении по амплитуде; для описания слабонелинейного случая обратимся ко второму приближению.

Рассмотрим фурье-компоненту уравнения Пуассона, отвечающую импульсу \mathbf{k} и частоте ω . Для удобства обозначений введем четырехмерный волновой вектор $k = (\omega, \mathbf{k})$. В тех случаях, когда не оговорено обратное, речь идет о решениях дисперсионного уравнения, т.е. о тех волнах, которые могут распространяться в данной среде. Подразумевается, что волновой вектор k принадлежит четырехмерному многообразию $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, где $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$ — решение линейного дисперсионного уравнения $\varepsilon_0(\omega, \mathbf{k}) = 0$, и интегрирование ведется по этому многообразию. Ниже в индексах фурье-гармоник будет встречаться как четырехмерный, так и трехмерный векторы. Имеем

$$-\mathbf{k}^2 \varepsilon_0(\omega, \mathbf{k}) \tilde{\psi}_k = 4\pi G \left(\rho_{1k}^{(2)} + \rho_{2k}^{(2)} \right). \quad (17)$$

Здесь ε_0 , как и в предыдущих разделах, — гравитационный аналог диэлектрической проницаемости. Индекс «(2)» над символом плотности ρ обозначает поправку второго приближения. В линейном случае $\varepsilon_0(\omega, \mathbf{k}) = 0$; если представить малую нелинейную добавку к частоте как $\delta\omega_N + i\gamma_N$, то, как легко видеть, для нашего приближения

$$\varepsilon_0(\omega, \mathbf{k}) \approx \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} (\delta\omega_N + i\gamma_N).$$

Умножим обе части равенства на некую \mathbf{k}' -компоненту возмущенного гравитационного потенциала $\psi_{\mathbf{k}'}$ и затем усредним по фазам:

$$\begin{aligned} -(\delta\omega_N + i\gamma_N) \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{k}^2 I_k \delta(k + k') &= \\ &= 4\pi G \left\langle \left(\rho_{1k}^{(2)} + \rho_{2k}^{(2)} \right) \psi_{\mathbf{k}'} \right\rangle. \end{aligned}$$

Здесь I_k — спектральная интенсивность ($\langle \psi_k \psi_{k'} \rangle = I_k \delta(k + k')$ в приближении случайных фаз).

Энергия плоской волны плотности равна

$$W_k = - \frac{1}{8\pi G} \left. \frac{\partial(\varepsilon_0 \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k} |g_k|^2.$$

Поскольку

$$g_k = -(\nabla \psi)_k = -i\mathbf{k}\psi_k$$

и $\varepsilon_0(\omega_{\mathbf{k}}) = 0$, для числа квазичастиц с 4-импульсом k можно записать

$$N_k = \frac{W_k}{\omega_{\mathbf{k}}} = - \frac{1}{8\pi G} \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{k}^2 I_k.$$

В выражении для нелинейного частотного сдвига $\delta\omega_N + i\gamma_N$ вещественной частью можно пренебречь по сравнению с $\omega_{\mathbf{k}}$ — она отвечает перенормировке линейного дисперсионного закона. Мнимая часть $i\gamma_N$ отвечает нелинейной эволюции спектра. Заметим, что для $\psi \sim e^{-i(\omega+i\gamma_N)t}$ величина $N_k \sim e^{2\gamma_N t}$, так что умножение на γ_N для функции $N_k(t)$ эквивалентно оператору дифференцирования по времени: $\gamma_N \sim (1/2)\partial/\partial t$. Принимая все это во внимание, замечаем, что равенство (17) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} \delta(k + k') = -i \left\langle \left(\rho_{1k}^{(2)} + \rho_{2k}^{(2)} \right) \psi_{k'} \right\rangle. \quad (18)$$

С другой стороны, структура эволюции числа квазичастиц во времени дается равенством (15) и в интегральной форме имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \times \\ \times (N_{\mathbf{q}} N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}} N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}) dq. \quad (19)$$

Для сокращения объема вычислений будем следить, например, только за первым слагаемым в подынтегральных скобках, $N_{\mathbf{q}} N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}$. Вычленив его из второй поправки к плотности, легко напишем аналогичные выражения для двух оставшихся слагаемых, коэффициент же (собственно вероятность) при них один и тот же. Итак, возьмем вторую поправку к плотности в следующей форме:

$$\rho_{\alpha k} = \int \nu_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\alpha} (\psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle) dq. \quad (20)$$

Здесь $\alpha = 1, 2$ — номер соответствующей составляющей среды, $\nu_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\alpha}$ — коэффициент, который мы вычислим позже из уравнений Эйлера. У коэффициента ν

стоят трехмерные индексы \mathbf{k}, \mathbf{q} вместо четырехмерных, потому что три компоненты волнового вектора вполне определяют этот коэффициент. Среднее значение $\langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle$ отвечает за эволюцию фона, его нужно вычистить.

Подставив (20) в (18), получим

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} \delta(k + k') = -i \int \left(\sum_{\alpha=1,2} \nu_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^{\alpha} \right) \times \\ \times \langle \psi_{k'} (\psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle) \rangle dq. \quad (21)$$

Теперь заменим здесь фурье-компоненту $\psi_{k'}$ ее нелинейным разложением (через плотность из формулы (17)):

$$\psi_{k'}^{(2)} = - \frac{4\pi G}{k'^2 \varepsilon_0(\omega', \mathbf{k}')} \int \left(\sum_{\alpha} \nu_{\mathbf{k}', \mathbf{q}'}^{\alpha} \right) \times \\ \times (\psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} - \langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \rangle) dq',$$

в ходе этой замены мы должны совершить процедуру усреднения. Случайность фаз влечет за собой расщепление всех корреляций на двойные, причем

$$\langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle = \langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{\mathbf{q}} \rangle \langle \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle + \\ + \langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \rangle \langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle + \\ + \langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle \langle \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \psi_{\mathbf{q}} \rangle.$$

Здесь средний член исчезает из-за разности в скобках в правой части (21), а два оставшихся слагаемых симметричны относительно замены $q' \rightarrow -k' - q'$, так что одно из них можно удвоить, а другое отбросить. В итоге получаем

$$\langle \psi_{\mathbf{q}'} \psi_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \psi_{\mathbf{q}} \psi_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rangle = 2I_{\mathbf{q}} I_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \delta(q+q') \delta(k+k') = \\ = 2(8\pi G)^2 N_{\mathbf{q}} N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \times \\ \times \left[(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{q}^2 \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{q}}} \right]^{-1} \times \\ \times \delta(q + q') \delta(k + k').$$

Используем приближенное равенство в терминах обобщенных функций:

$$\varepsilon_0^{-1}(\omega'_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}') \approx \left[(\omega' - \omega'_{\mathbf{k}'}) \left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega'_{\mathbf{k}'}} \right]^{-1} \approx \\ \approx \left(\left. \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega'_{\mathbf{k}'}} \right)^{-1} i\pi \delta(\omega' - \omega'_{\mathbf{k}'}).$$

Подставив его в (21), проведя интегрирование по dq' и по dk' , для эволюции числа квазичастиц по следам первого из трех слагаемых (19) — $N_{\mathbf{q}}N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ — приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} = & i\tau \int dq (8\pi G)^3 \left(\sum \nu_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\alpha \right)^2 \times \\ & \times \left[\mathbf{k}^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{q}^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{q}}} \right]^{-1} N_{\mathbf{q}}N_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь τ — размерный множитель, по порядку величины равный L/v_0 ,

$$\tau = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}) d\mathbf{k}',$$

а L — характерный масштаб задачи, линейный размер системы в направлении, параллельном скорости двух потоков. Таким образом, мы видим, что выражение для искомой вероятности имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} w = & -(8\pi G)^3 \pi \tau \left(\sum_{\alpha} \nu_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\alpha \right)^2 \times \\ & \times \left[\mathbf{k}^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} (-\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{q}^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{q}}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь осталось определить коэффициент $\nu_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\alpha$, заданный соотношением (20). Запишем вторую поправку по амплитуде к уравнению непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\alpha}^{(2)}}{\partial t} + \rho_{\alpha}^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\alpha}^{(1)} + (\mathbf{v}_{\alpha}^{(1)} \nabla) \rho_{\alpha}^{(1)} + \\ + \rho_{0\alpha} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\alpha}^{(2)} + (\mathbf{v}_{0\alpha} \nabla) \rho_{\alpha}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Вторая поправка к уравнению Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\alpha}^{(2)}}{\partial t} = -(\mathbf{v}_{\alpha}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}_{\alpha}^{(1)} - (\mathbf{v}_{\alpha}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}_{\alpha}^{(2)}. \quad (25)$$

Фурье-представление для (ω, \mathbf{k}) -компоненты уравнения непрерывности дает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \omega \rho_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)} = & \int d\mathbf{q} \rho_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} (\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} + \\ + & \int d\mathbf{q} \rho_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} + \rho_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)} + \rho_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0\alpha}. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем то же выражение в более симметричной форме:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0\alpha}) = & \frac{1}{2} \times \\ & \times \int d\mathbf{q} \left[\rho_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} + \rho_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} \right] + \\ & + \rho_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

При этом величины линейного приближения связаны соотношением

$$\rho_{\alpha,\mathbf{k}}^{(1)} = \rho_{\alpha 0} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}}^{(1)}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0\alpha}}.$$

Фурье-представление уравнения Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0\alpha}) \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}}^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{q} \left[\mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} \left(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} \right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(1)} \left((\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_{\alpha,\mathbf{q}}^{(1)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Имея целью получить ответ в конечном аналитическом виде, перейдем к рассмотрению одномерного случая. Пусть снова, как в предыдущих разделах, $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$, $v_{01} = -v_{02} = v_0$. Ниже индекс « k », нумерующий фурье-компоненту, будет уже означать не четырехмерный волновой вектор, а одномерный («волновое число»). Строго говоря, у фурье-компоненты должно быть два индекса ω, k , но в нашем случае $\omega = \omega(k)$ однозначно задается дисперсионным уравнением, поэтому первый индекс мы опускаем.

Из фурье-разложения линейного приближения легко получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{1,k}^{(1)} = & \frac{k(\omega_k - kv_0)}{(\omega_k - kv_0)^2 - k^2 c_s^2} \psi_k, \\ \rho_{1,k}^{(1)} = & \frac{k^2 \rho_0}{(\omega_k - kv_0)^2 - k^2 c_s^2} \psi_k. \end{aligned}$$

Для второго компонента соответствующие выражения записываются аналогично, с заменой $v_0 \rightarrow -v_0$.

Подставляя (28) в (27) и учитывая приведенные выше выражения для фурье-компонент скорости и плотности линейного приближения через соответствующую фурье-компоненту амплитуды гравитационного потенциала, а также имея в виду, что $\nu_{-k,q}^1 = \nu_{k,q}^2$ ввиду симметрии задачи, получаем искомый коэффициент:

$$\nu_{k,q}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{kq(k+q)}{A_q^- A_{-k-q}^- (\Omega_{-k}^-)^2} T_1^{2,3}(-). \quad (29)$$

Здесь для всех $\chi = k, q, -k - q$ введены обозначения

$$\Omega_{\chi}^{\pm} = \omega_{\chi} \pm \chi v_0,$$

$$A_{\chi}^{\pm} = (\Omega_{\chi}^{\pm})^2 - \chi^2 c_s^2,$$

$$T_1^{2,3}(\pm) = q\Omega_{-k-q}^{\pm}\Omega_{-k}^{\pm} + (-k - q)\Omega_q^{\pm}\Omega_{-k}^{\pm} + (-k)\Omega_q^{\pm}\Omega_{-k-q}^{\pm}.$$

Для первого компонента среды соответствующий коэффициент $\nu_{k,q}^1$ получается из $\nu_{k,q}^2$ заменой $v_0 \rightarrow -v_0$. Выписывая преобразование Фурье для уравнений непрерывности и Эйлера, мы опускали перед интегралом размерный множитель; легко проверить, что он будет существен только в вычислении коэффициента τ , в одномерном случае равно

$$\tau = \frac{L}{2\pi} \int \delta(\omega' - \omega_{k'}) dk' = \frac{L}{2\pi} \frac{dk'}{d\omega'} \Big|_{\omega'=\omega_k}.$$

Вычисляя это выражение при $k' = k$, $\omega_{k'} = \omega_k$, получаем

$$\tau = \frac{L}{2\pi} \frac{(A_k^+)^2 \Omega_- + (A_k^-)^2 \Omega_+}{(-\omega v_0 + k\eta c_s^2)(A_k^+)^2 + (\omega v_0 + k\eta c_s^2)(A_k^-)^2}.$$

Вероятность, таким образом, найдена. Явное выражение для вероятности уже в одномерном случае получается громоздким:

$$w = \frac{\pi\tau}{4\rho_0} \left(T_1^{2,3}(-) A_q^+ A_{-k-q}^+ (\Omega_{-k}^+)^2 + T_1^{2,3}(+) A_q^- A_{-k-q}^- (\Omega_{-k}^-)^2 \right) \times \frac{(A_k^-)^2 (A_k^+)^2}{(\Omega_k^+)^4 (\Omega_k^-)^4 D_k D_q D_{-k-q}}. \quad (30)$$

Здесь для всех $\chi = k, q, -k - q$ введено обозначение

$$D_{\chi} = \Omega_{\chi}^- (A_{\chi}^+)^2 + \Omega_{\chi}^+ (A_{\chi}^-)^2.$$

Выражение, полученное выше, в принципе дает возможность оценить время развития неустойчивости, если известны гидродинамические параметры потоков (плотность, скорость звука) и получены резонансные тройки. Точнее, поскольку мы рассматривали два встречных и с гидродинамической точки зрения идентичных потока и резонансные тройки в них уже получили, для оценки времени развития взрывной неустойчивости в таких потоках нам достаточно знать значения плотности и скорости звука.

Для найденной выше резонансной тройки, если характерным размером L считать джинсовский размер каждой из компонент, величина w , рассчитанная по формуле (30), оказывается равной по порядку величины

$$w = \frac{4\pi\omega_j^2}{\rho_0 c_s^2 \beta}.$$

Это выражение зависит только от одной гидродинамической характеристики среды — скорости c_s ; здесь β — отношение джинсовской длины к длине волны рассматриваемого возмущения. Считая, что степень турбулентности, т. е. число квазичастиц данного сорта здесь, как и в физике плазмы, можно оценивать по величине отношения $W/nT \ll 1$, где W — плотность шумовой энергии, получим оценку для времени развития неустойчивости:

$$t_{ins} \approx \alpha(k) \frac{\rho_0 c_s^2}{n_0 T \omega_j}.$$

Здесь $\alpha(k)$ — безразмерный коэффициент, который тем меньше, чем выше степень турбулентности среды W/nT , и зависящий от особенностей шумового спектра. Если спектр $W(k)$ имеет острый максимум, то для значений k , отвечающих пику, $\alpha(k) \ll 1$. Очевидно, что второй сомножитель в выражении для t_{ins} имеет порядок обратной джинсовской частоты (скажем, 10^{15} – 10^{16} с для межзвездного газа). Это значит, что для таких k на характерных временах системы взрывная неустойчивость успевает развиваться. Здесь необходимо подчеркнуть, что мы имеем дело с нелинейным процессом⁵). Сравняя две экспоненциальные неустойчивости с инкрементами γ_1 и γ_2 , мы говорим, что первая заведомо успеет развиваться на фоне второй, если $\gamma_1 \gg \gamma_2$. Но если γ_1 — характерное обратное время развития взрывной неустойчивости, то для того чтобы она успела развиваться на фоне линейного процесса, достаточно простого неравенства⁶).

Возвращаясь к реальной астрономической ситуации, следует отметить, что вещество газового диска и темной материи во всяком случае не представляют собой идентичных потоков. Их плотности и скорости звука в них заведомо различны (в той мере, в какой можно говорить о скорости звука в темной материи). Учет этого различия не приведет к слишком сильным изменениям в выражении для вероятности — разве что в каждом из коэффициентов $\nu_{k,q}^{\alpha}$ при $\alpha = 1, 2$ появится в виде сомножителя своя равновесная плотность, а во вспомогательных конструкциях типа D_{χ}^{\pm} появятся индексы, так что

$$A_{\chi}^+ = (\omega_{\chi} + \chi v_0)^2 - k^2 c_{s1}^2,$$

⁵) О корректном сравнении характерных времен для подобных нелинейных процессов см. работу [15].

⁶) В рассматриваемом случае такие ограничения, как джинсовская частота и джинсовский размер, следует понимать условно — как масштабы, ограничивающие применимость плоского приближения. В реальной геометрии длинноволновые неустойчивости стабилизируются вращением.

$$A_{\chi}^{-} = (\omega_{\chi} - \chi v_0)^2 - k^2 c_s^2.$$

Но дисперсионное уравнение уже нельзя будет решить аналитически, а потребуются численное моделирование.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы получили выражение для энергии волны плотности в гравитирующей среде по аналогии с физикой плазмы, которое, как нам известно, до сих пор не выписано явно. Важную роль в нем играет физическая величина, описывающая отклик распределения плотности гравитирующей среды на изменение напряженности гравитационного поля. В электростатике и электродинамике аналогичная величина есть диэлектрическая проницаемость среды.

Рассмотрев таким образом многие и ранее замечавшиеся аналогии между физикой гравитирующих сред и физикой плазмы, мы остановились на разработке одной из них, связанной с возможностью развития взрывной неустойчивости в двухпотоковой гравитирующей среде⁷⁾.

Мы показали, что, как и в двухпотоковой плазме, в двухпотоковой гравитирующей среде возможно одновременное распространение волн отрицательной и положительной энергии. На примере двух потоков с одинаковыми гидродинамическими характеристиками, движущихся навстречу друг другу, было продемонстрировано, что многокомпонентная гравитирующая среда может создавать фон для развития взрывной неустойчивости.

Взрывная неустойчивость развивается быстрее линейной, экспоненциальной, неустойчивости — амплитуда возмущения достигает бесконечного значения за конечное время. Воспользовавшись методом, разработанным в физике плазмы, мы показали, как вычислить это время для одномерной задачи.

Стабилизация взрывной неустойчивости происходит за счет перестройки дисперсионного уравнения. Зависимость частоты от волнового вектора, из которой мы исходили, была получена из линейного приближения. Для больших амплитуд эта зависимость меняет свой вид, «резонансные тройки» перестают быть резонансными, так что тройное рождение этих квазичастиц становится невозможным.

Классификация нелинейных сценариев, составление библиотечного списка всех возможных

неустойчивостей давно осознается как важная задача в физике плазмы. Неустойчивости физики гравитирующих систем, ответственные за большую часть наблюдаемых явлений и структур в космосе, вероятно, заслуживают не менее внимательного отношения со стороны физиков и астрономов.

Авторы благодарят А. Л. Барабанова, А. М. Фридмана и К. В. Чукбара за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, 723 (1995).
2. F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
3. F. I. Copperstock and S. Tieu, *lanl.arXiv.org, Astrophys.* (2005).
4. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, ЖЭТФ **81**, 13 (1981).
5. А. М. Фридман, Ю. А. Фридман, *Письма в Астрон. ж.* **17**, 170 (1991).
6. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
7. А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман, *Письма в ЖЭТФ* **26**, 341 (1977).
8. В. М. Дикасов, Л. И. Рудаков, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ **48**, 913 (1965).
9. А. С. Кингсеп, *Введение в нелинейную физику плазмы*, МЗ-Пресс, Москва (2004).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Гидродинамика*, т. IV, Наука, Москва (1986).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
12. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, т. 1, Атомиздат, Москва (1975).
13. А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, ЖЭТФ **61**, 457 (1971).
14. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ **47**, 2266 (1964).
15. А. С. Кингсеп, ЖЭТФ **63**, 498 (1972).
16. Л. Е. Аранчук, Ю. Г. Калинин, А. С. Кингсеп, В. А. Скорюпин, В. В. Яньков, ЖЭТФ **71**, 1849 (1976).
17. А. С. Кингсеп, Ю. В. Мохов, К. В. Чукбар, *Физика плазмы* **11**, 802 (1985).

⁷⁾ Эффекты, связанные с развитием аналогичной взрывной неустойчивости в плазме, удалось наблюдать экспериментально, см. работы [16, 17].