

# СТОХАСТИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТ В СЛОЖНЫХ ГРЕБЕШКОВЫХ СТРУКТУРАХ

*В. Ю. Забурдаев<sup>b</sup>, П. В. Попов<sup>a</sup>, А. С. Романов<sup>a</sup>, К. В. Чужбар<sup>a\*</sup>*

<sup>a</sup>*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

<sup>b</sup>*Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin  
D-10623, Berlin, Germany*

Поступила в редакцию 6 ноября 2007 г.

С помощью единого строгого подхода выведены уравнения в дробных производных, описывающие субдиффузионный перенос в гребешковых структурах различной геометрической сложности. Обращается внимание на общую нетривиальность влияния вклада начального распределения частиц на всю последующую эволюцию. Приводятся решения этих уравнений для находящихся в контакте структур с сильно различающимися дробными показателями, имеющие качественные важные для практики особенности.

PACS: 05.40.Fb, 05.45.Df

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы пристальное внимание привлекает так называемый нестандартный стохастический перенос, описываемый уравнениями в дробных производных. Математическим и физическим аспектам этого явления посвящено множество обзорных (см., например, [1–5]) и оригинальных статей. Очень удобным и широко используемым «полигоном» для анализа особенностей и закономерностей дробного транспорта являются гребешковые структуры — вследствие простоты и наглядности причин, приводящих к отличиям от классической диффузии, а также удобству теоретического оперирования. Они были одними из первых физических объектов, для которых уравнения переноса были как раз строго выведены, а не постулированы из оценок скейлинга для среднего смещения  $\langle x^2 \rangle \propto t^\alpha$ ,  $\alpha \neq 1$ , см. пионерскую статью [6] (закон подобия  $\alpha = 1/2$  найден в работе [7]). Непреходящий интерес к ним (см., например, [8–10]) подогревается и тем значимым обстоятельством, что они представляются адекватной моделью в еще одной модной тематике — физике гетерогенных сред со сложными по геометрии включениями. Целями данной работы служат, во-первых, некоторое обобщение структуры гребешков, должен-

ствующее внести разнообразие в проявляемые ими свойства, и, во-вторых, изучение на их наглядной основе важных задач, связанных с взаимным влиянием сред с дробным и обычным диффузионным транспортом. Кроме того, дополнительно на новом объекте прослеживается пока, к сожалению, мало обсуждаемая качественная особенность языка дробных производных в физических приложениях, на которую было обращено внимание [11]. С нее мы и начнем.

## 2. ОБЫЧНАЯ ГРЕБЕШКОВАЯ СТРУКТУРА

Проведем строгий последовательный вывод эффективного уравнения переноса для объекта, изображенного на рис. 1. Стандартная гребешковая структура представляет собой бесконечный цилиндр площади  $S_1$ , расположенный вдоль оси  $x$  (хребет) вкупе с прикрепленными к нему на расстоянии  $l$  друг от друга бесконечными цилиндрами с сечением  $S_0$  (отростки). Во всей структуре имеет место диффузия частиц с коэффициентом  $D$  — причина нестандартности переноса здесь отнюдь не специфика блужданий микроскопических частиц, а чисто геометрические эффекты.

Пусть  $n_1(x, t)$  — концентрация частиц на хребте, а  $n_0(x, y, t)$  — в отростке, исходящем из точки  $x$ . Нас

\*E-mail: chukbar@dap.kiae.ru

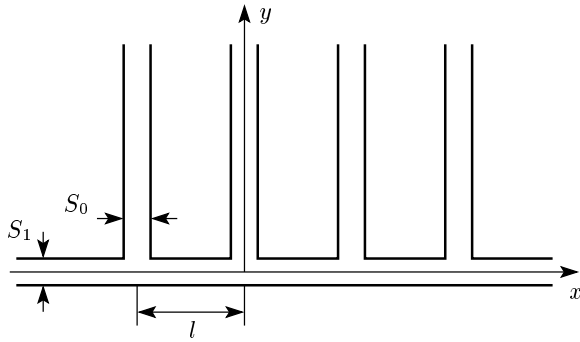


Рис. 1. Стандартная гребешковая структура

интересует макроскопическое поведение частиц, поэтому в дальнейшем под концентрацией будем понимать ее усредненное на масштабах, много больших  $l$ , значение по горизонтальной оси. Также предполагается, что профиль плотности частиц устанавливается достаточно гладким, чтобы можно было пренебречь изменением ее поперек цилиндров и вдоль одного элемента структуры, что заведомо имеет место при достаточно длительной эволюции в системе,  $Dt \gg S_1, S_0, l^2$ . Уравнения будем записывать для полной концентрации частиц на единицу длины хребта (или, иными словами, проекции полного числа частиц на ось  $x$ ):

$$N(x) = n_1(x) + \frac{1}{l} \frac{S_0}{S_1} \int_0^\infty n_0(x, y) dy. \quad (1)$$

Это не принципиально отличает вывод от проведенного в работе [6], где исследовалась эволюция концентрации  $n_1$ . Нам представляется более наглядной величина  $N$ , описывающая то, что остается после отрезания от структуры куска по  $x$ .

Найдем, как меняется концентрация частиц в отрезках. В каждом из них справедливо классическое уравнение диффузии

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$n_0|_{t=0} = n_{00}(y), \quad n_0|_{y=0} = n_1(x, t),$$

где  $n_{00}(y)$  — начальная концентрация в отрезке (ее учет дает принципиальную модификацию формул из работы [6], как раз позволяя проследить упомянутую во Введении особенность). Важно, что роль граничного условия для транспорта в отрезке играет соответствующая концентрация на хребте. Решение удобно искать с помощью преобразования Лапласа по времени, переводящего уравнение (2) в

$$pn_{0p} = D \frac{d^2 n_{0p}}{dy^2} + n_{00}, \quad n_{0p}|_{y=0} = n_{1p}(x), \quad (3)$$

откуда

$$n_{0p}(y) = n_{1p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} y\right) + \int_0^\infty G(y, y') n_{00}(y') dy', \quad (4)$$

где функция Грина для уравнения (3) имеет вид

$$G(y, y') = \frac{1}{\sqrt{pD}} \times \begin{cases} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} y'\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{D}} y\right), & y < y', \\ \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D}} y\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{D}} y'\right), & y > y'. \end{cases}$$

Подставляя выражение (4) в (1), получим необходимое для дальнейшего выражение для полной концентрации

$$N_p = n_{1p} \left(1 + \frac{S_0}{S_1} \frac{1}{\sqrt{p\tau}}\right) + \frac{S_0}{S_1} \frac{1}{l} \times \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-\sqrt{p\tau} y/l)}{p} n_{00}(y) dy, \quad \tau = \frac{l^2}{D}. \quad (5)$$

Эволюция полной плотности частиц по  $x$  определяется диффузией только на хребте, поэтому для нее справедливо

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \rightarrow pN_p = D \frac{d^2 N_p}{dx^2} + N_0 \quad (6)$$

в обычном виде и после преобразования Лапласа. Нас интересует асимптотическое поведение концентрации на достаточно больших временах  $t \gg \tau S_1/S_0$ , когда всасывание частиц в отрезки сильно сказывается на их динамике, что в лаплас-представлении соответствует дуальному соотношению  $p\tau S_1/S_0 \ll 1$ . С учетом обращенной связи между  $N$  и  $n_1$  из соотношения (5) эволюция (6) в этом приближении переходит в

$$\sqrt{p\tau} N_p = l^2 \frac{S_1}{S_0} \frac{d^2 N_p}{dx^2} + N_0 \sqrt{\frac{\tau}{p}} - l \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-\sqrt{p\tau} y/l)}{p} \frac{d^2 n_{00}(x, y)}{dx^2} dy \quad (7)$$

или, при использовании стандартной интерпретации дробной степени параметра Лапласа,

$$\sqrt{\tau} \frac{\partial^{1/2} N}{\partial t^{1/2}} = l^2 \frac{S_1}{S_0} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} - l \int_0^\infty \left[ 1 - \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \right) \right] \frac{\partial^2 n_{00}(x, y)}{\partial x^2} dy \quad (8)$$

в обычном пространстве-времени ( $\operatorname{erfc} x = (2/\sqrt{\pi}) \times \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$ ). Это совпадает с ответом из работы [6] за исключением блока из начальных значений концентраций. Изменение в коэффициенте при  $N_0$  по сравнению с множителем при начальном условии  $n_{10}$  в случае вывода асимптотического эволюционного уравнения для  $n_1$  несущественно и связано просто со скейлингом  $N_p \propto n_{1p}/\sqrt{p}$  из (5). А вот сложно устроенный интегральный член с  $n_{00}$ , как правило не учитываемый ранее, как уже говорилось, принципиален.

Он определяет возможность крайне долгого влияния исходно загнанных в отростки частиц на эволюцию системы. Будучи расположенными достаточно далеко от хребта, они могут включиться в активный перенос со сколь угодно большой задержкой и на сколь угодно больших временах модифицировать динамику величины  $N$  при должном подборе  $n_{00}(y)$  практически в любом направлении. Настоящий дробный перенос в гребешковой структуре со скейлингом с  $\alpha = 1/2$  (см. ниже) возникает только в пренебрежении влиянием начального заполнения отростков. В противном случае не существует никакого макроскопического уравнения переноса в терминах только  $N$ . Учтенное влияние начального распределения частиц по структуре снимает и крайне неприятный для физики эффект нарушения «преемственности эволюции» в уравнениях с дробными временными производными — в них нельзя уже проэволюционировавший профиль  $N(x)$  взять за новое начальное условие в рамках стандартно приводимого в цитируемых обзорах и работах уравнения (7) с  $n_{00} = 0$ , ибо все пойдет не так, как должно. Проведенный последовательный вывод делает причину банальной — эволюция успела заполнить первоначально пустые участки гребешковой структуры, и учет этого обстоятельства обязателен. Все сказанное было разобрано на другой физической модели дробного по времени транспорта [11], в которой его появление связано с особенностями микроскопического движения частиц. Новое рассмотрение подчеркивает универсальность причины (отсутствие на самом деле макроскопического уравнения) и сопутствующ-

щих обстоятельств (возможность произвольной модификации макроскопической эволюции).

Подчеркнув этот важный для физики переноса в геометрически сложных структурах факт, далее не будем на нем останавливаться, а сосредоточимся на обычном дробном описании стохастического переноса, т. е. всюду ниже  $n_{00} \equiv 0$ . В таком варианте уравнения (7), (8) представляют собой стандартное уравнение стохастического субдиффузионного переноса с дробной временной производной порядка  $1/2$  и, соответственно этому, скейлингом с  $\alpha = 1/2$ .

### 3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ГРЕБЕШКОВАЯ СТРУКТУРА

Перейдем к возможным обобщениям геометрии гребешков. Прежде всего можно сконструировать «иерархичную» гребешковую структуру, у которой отростки также являются разветвленными. Заменим каждый отросток на исходную, только что разобранную, структуру и повторим эту операцию для вновь получившихся отростков  $k$  раз (рис. 2). Назовем такую структуру разветвленной порядка  $k$  (простая гребешковая структура имеет порядок  $k = 1$ ) — роль ее отростков играют структуры  $k - 1$ . Для снижения громоздкости выкладок в данном разделе полагается, что площади сечения всех линейных хребтов и отростков одинаковы ( $S_0 = S_1$  в формулах предыдущего раздела).

В структуре с произвольным номером  $0 < i < k$  полная концентрация частиц определяется суммой концентраций на ее хребте и отростках в виде (ср. с выражением (1))

$$N_i = n_i + \frac{1}{l} \int_0^\infty N_{i-1}(x_{i-1}) dx_{i-1},$$

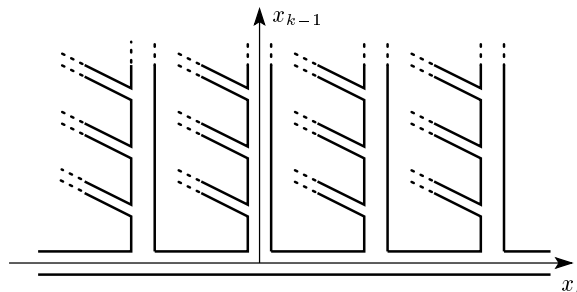


Рис. 2. Разветвленная гребешковая структура

где  $x_i$  — координата вдоль соответствующего хребта, и эволюционирует согласно (ср. с (6))

$$p\tau N_{ip} = l^2 \frac{d^2 n_{ip}}{dx_i^2}, \quad n_{ip}|_{x_i=0} = n_{i+1,p}$$

(при  $t = 0$  частицы присутствуют лишь на хребте самой старшей  $k$ -й структуры). Если посчитать, что  $N_{ip} = f_i(p\tau)n_{ip}$ , то из выписанных формул следует простое рекуррентное соотношение

$$f_i = 1 + \sqrt{\frac{f_{i-1}}{p\tau}}.$$

Учитывая тот очевидный факт, что  $f_0 = 1$  (от последних отростков ничего не ответвляется) в асимптотическом пределе  $p\tau \rightarrow 0$  (реально требуется, чтобы частицы успели проникнуть как раз до последних отростков включительно, наплавив всю структуру) получаем соотношение  $f_k = (p\tau)^{\alpha_k - 1}$  с  $\alpha_k = 1/2^k$ , откуда следует искомое уравнение для переноса частиц в разветвленной структуре (индекс « $k$ » у  $N$  опускаем, «0» оставляем за начальным условием):

$$(p\tau)^{\alpha_k} N_p = l^2 \frac{d^2 N_p}{dx^2} + \frac{N_0}{p} (p\tau)^{\alpha_k} \rightarrow \rightarrow \tau^{\alpha_k} \frac{\partial^{\alpha_k} N}{\partial t^{\alpha_k}} = l^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{N_0}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha_k}. \quad (9)$$

Таким образом, транспорт частиц в иерархически разветвленной гребешковой структуре также подчиняется субдиффузионному уравнению в дробных производных с показателем  $\alpha = 1/2^k$ , монотонно уменьшающимся по мере роста степени ветвления. Формально устремив ее к бесконечности, получим отсутствие переноса вдоль хребта  $x$  и слабую перестройку начального профиля (за время, потребное для реализации режима). При этом выражение (9) переходит в

$$N_p - \frac{N_0}{p} = l^2 \frac{d^2 N_p}{dx^2} \rightarrow N(x, t) - N_0(x) = = l^2 \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2}, \quad (10)$$

где правая часть в рамках сделанных предположений мала. Очевидно, дело в том, что все частицы уходят в отростки и концентрация их в «активном» состоянии — на хребте — стремится к нулю. Мы встретимся далее с похожей ситуацией при других обобщениях структуры, поэтому отметим, что полученный результат соответствует наличию всасывания частиц с концентрацией  $n$  в отростки с конеч-

ной скоростью. Действительно, если в рамках рис. 1 вместо уравнения (2) имеет место

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + v \frac{\partial n_0}{\partial y} = 0, \quad n_0(t)|_{y=0} = n_1(t),$$

а вдоль хребта по-прежнему происходит диффузия, то соотношение (8) трансформируется в

$$\left(p + \frac{v}{l}\right) N_p = D \frac{d^2 N_p}{dx^2} + N_0 \left(1 + \frac{v}{lp}\right),$$

при  $p \rightarrow 0$  переходящее в (10) с заменой  $D/v \rightarrow l$ .

#### 4. «ГИРЛЯНДЫ»

Возможен также вариант, в котором к хребту будут пристыкованы не линейные отростки, а объекты большей размерности — диски либо шары, образующие подобие елочных гирлянд. Ответвления такого рода могут вбирать в себя частицы значительно более эффективно, поэтому естественно ожидать, что эволюция концентрации  $N$  вдоль оси в них будет осуществляться медленнее, чем в случае конечной иерархичности. Эти отростки нестандартной формы могут являться моделями реальных структур (например, фрактальных), которые обладают соответствующей емкостью и способны также хорошо впитывать в себя частицы, о чем говорит, в частности, разобранный в конце предыдущего раздела предельный случай.

Начнем со структуры, у которой на хребет радиуса  $r_0$  насажены диски (рис. 3) толщины  $d$ , имеющие бесконечный радиус. Как и в классическом случае предполагается, что в них, так же как на хребте, имеет место диффузия с коэффициентом  $D$ . Тогда все, в общем, сводится к технически несложным модификациям формул для обычной гребешковой структуры: уравнение (1) трансформируется в

$$N = n_1 + \frac{2d}{lr_0^2} \int_{r_0}^{\infty} n_0(r)r dr, \quad (11)$$

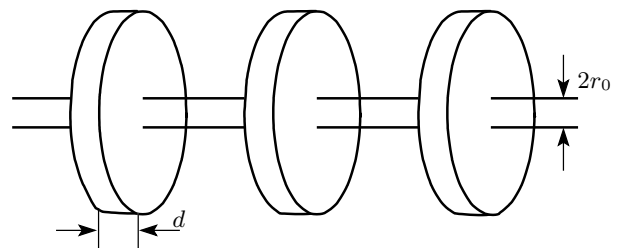


Рис. 3. Гирлянда дисков

а (3) — в

$$pn_{0p} = D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dn_{0p}}{dr} \right), \quad n_{0p}|_{r=r_0} = n_{1p} \quad (12)$$

с решением (ср. с выражением (4))

$$n_{0p}(r) = n_{1p} \frac{K_0(\sqrt{p/D} r)}{K_0(\sqrt{p/D} r_0)}, \quad (13)$$

где  $K_0$  — функция Макдональда, в то время как соотношение (6) остается неизменным. В результате связь (5) превращается в

$$N_p = n_{1p} \left[ 1 + \frac{2d}{r_0} \frac{1}{\sqrt{p\tau}} \frac{K_1(\sqrt{p\tau} r_0/l)}{K_0(\sqrt{p\tau} r_0/l)} \right], \quad (14)$$

что асимптотически при  $p\tau \ln(p\tau) \ll dl/r_0^2$  порождает эволюционное уравнение

$$-\frac{N_p}{\ln p} = \frac{r_0^2 l}{2d} \frac{d^2 N_p}{dx^2} - \frac{N_0}{p \ln p}. \quad (15)$$

Любопытно, что из него полностью исчез коэффициент диффузии.

Входящий в уравнение (15) оператор  $1/\ln p$  может быть назван логарифмом временной производной. Непосредственное его использование опасно, поскольку в отличие от  $p^\alpha$  при  $p = 1$  у него происходит перемена знака, в результате чего в (15) возникает нефизическая высокочастотная неустойчивость. Тривиальная регуляризация  $-\ln p \rightarrow \ln(1 + 1/p)$  [12] (напомним, что нас интересует плавная эволюция на больших временах), несомненно, снимает проблему, но не наглядна ввиду отсутствия аналитического выражения для обратного преобразования Лапласа этой функции. Разбираемый случай хорош еще и тем, что в нем существует более тонкая процедура использования асимптотики лишь для  $K_1(\xi) \approx 1/\xi$  при  $\xi \ll 1$  и сохранения порождающей  $\ln \xi$  функции  $K_0(\xi)$  в чистом виде (она имеет правильный знак на всей полуоси  $(0, \infty)$ ), что в обычном пространстве-времени дает

$$N(x, t) = N_0(x) + \frac{r_0^2 l}{4d} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \int_0^t \frac{N(x, t-t')}{t'} \exp\left(-\frac{r_0^2}{4Dt'}\right) dt'. \quad (16)$$

Формально уравнение (16) соответствует нулевому показателю при дробной производной, но своим отличием от выражения (10) демонстрирует нетривиальность предела  $\alpha \rightarrow 0$ . Этот случай является промежуточным в том смысле, что эволюция концентрации не прекращается (как в случае шаров, см.

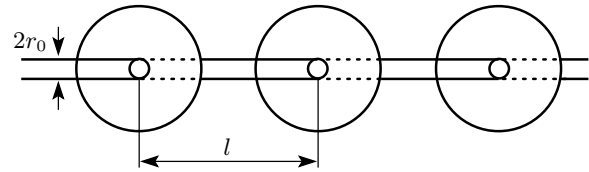


Рис. 4. Гирлянда шаров

ниже), но происходит (бесконечно) медленнее, чем по любому степенному закону.

Транспорт частиц с концентрацией  $N$  в гирлянде с нанизанными на хребет шарами (рис. 4) описывается уравнениями

$$N = n_1 + \frac{4}{lr_0^2} \int_{r_0}^{\infty} n_0(r) r^2 dr, \quad (17)$$

$$pn_{0p} = D \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dn_{0p}}{dr} \right), \quad n_{0p}|_{r=r_0} = n_{1p} \quad (18)$$

и, конечно, опять соотношением (6). Интегрирование (18) дает

$$n_{0p}(r) = n_{1p} \frac{r_0}{r} \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{D}}(r - r_0)\right], \quad (19)$$

поэтому уравнение (17) можно записать в виде

$$N_p = n_{1p} \left[ 1 + 4 \left( \frac{l}{r_0} \frac{1}{p\tau} + \frac{1}{\sqrt{p\tau}} \right) \right], \quad (20)$$

что, будучи в пределе  $p \rightarrow 0$  подставленным в (6), порождает стационарное (т. е. вырожденное) эволюционное уравнение

$$N_p - \frac{N_0}{p} = \frac{r_0 l}{4} \frac{d^2 N_p}{dx^2} \rightarrow N(x, t) - N_0(x) = \frac{r_0 l}{4} \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2}, \quad (21)$$

как и (15), потерявшее  $D$  и полностью эквивалентное (10). Этот результат, имеющий место при  $t \gg \tau$ , очевидно связан со спецификой трехмерной диффузии — в отличие от ситуаций с меньшей размерностью, при ней формируется профиль концентрации, обеспечивающий конечный (при конечном граничном значении), а не монотонно убывающий всасываемый поток, что в данном варианте вызывает экспоненциальное убывание концентрации частиц на хребте. Наличие таких хороших «насосов» приводит к заметным различиям в величине  $n_1$  на входе в шары и между ними (диффузия по хребту успевает

поставлять частицы в такие отростки только при наличии заметных градиентов на масштабе  $l$ ), что нарушает исходное предположение о плавности  $n_1(x)$ : на самом деле, граничным условием для диффузии в шар служит не  $\langle n_1 \rangle$ , а пропорциональная ей меньшая величина. Конечно же, этот эффект существует и в случаях, рассмотренных в конце предыдущего раздела. Решение модельной диффузионной задачи о пристыкованном к отростку  $l$  шару показывает, что в данном варианте поправочный коэффициент равен  $r_0/2l$  (при  $r_0 \ll l$ ).

Завершая раздел, стоит обсудить еще один вопрос. Если рассматривать структуру шаров, нанизанных вплотную друг другу, то она, казалось бы, эквивалентна полному отсутствию структуры — частицы могут двигаться куда угодно, в любом направлении. Но в таком случае как бы погруженного в сплошную бесструктурную среду хребта эволюция по оси  $x$  есть (см., например, работу [13]), и она является обычной, диффузионной. Парадокс разрешается, если вспомнить, что в рассматриваемой гирлянде хребет находится в контакте со средой лишь на далеко разнесенных небольших участках и прямой обмен частицами между шарами невозможен, поэтому попавшей в один из таких отростков частице для перехода в соседний шар (перемещения вдоль оси  $x$ ) необходимо вернуться в точку крепления к хребту данного шара.

## 5. ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ

На практике достаточно часто приходится иметь дело с ситуациями, когда различающиеся по транспортным свойствам среды (участки среды) находятся в прямом контакте (например, диффузия частиц или тепла через гетерогенную среду проходит через участки с разными  $D$ ). По этой причине теоретический вопрос о влиянии на общий перенос отдельных включений очень важен и актуален. При классической диффузии простые модели разобраны очень давно и входят в учебники по математической физике, исследованию подвергаются сложные композитные задачи [13]. Однако в нестандартном дробном транспорте, несмотря на его популярность, ситуация совершенно другая. Анализ простейших граничных задач здесь далеко не завершен. Как нам представляется, гребешковые структуры благодаря своей физической наглядности могут играть роль своеобразного полигона и для таких исследований.

В данной статье мы рассматриваем несколько задач этого типа, аналогичных совершенно стан-

дартным диффузионным. Различия в транспортных свойствах в них находятся не на уровне коэффициентов при второй производной по  $x$ , а на более серьезном (и отсутствующем для чистой диффузии) уровне разных скейлингов — степеней дробной временной производной. Разобранные нами обобщения лишь уменьшают возможные степени по сравнению с исходной  $1/2$ , но хорошо известно [8], что конструкции с отростками различной, но в среднем бесконечной длины позволяют иметь дело и с большими  $\alpha$  (зависящими от степени расходимости этого среднего). Аналогичные действия со сложными структурами и гирляндами будут приводить к тому же результату. Итак, будем считать, что две гребешковых структуры с разными  $\alpha$  и  $\beta$  состыкованы своими хребтами (можно сказать, что на одном хребте «растут» разные отростки). Каково их взаимное влияние? Для простоты будем использовать уравнения переноса в безразмерном виде.

### 5.1. Взаимодействие двух конечных структур

Представим себе, что имеющие одинаковую длину  $L$  и граничащие в точке  $x = 0$  структуры  $\alpha$  и  $\beta$  исходно имеют на своем общем хребте постоянную плотность частиц. Уравнения ее эволюции есть

$$\begin{aligned} p^\alpha N_p &= \frac{d^2 N_p}{dx^2} + N_0 p^{\alpha-1}, & x \in [-L, 0), \\ p^\beta N_p &= \frac{d^2 N_p}{dx^2} + N_0 p^{\beta-1}, & x \in (0, L]. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничные условия для них очень просто по физике дела записываются в терминах уже концентрации  $n_1$  на хребте: в точке стыковки должны быть равными и эти концентрации, и связанные с ними чисто «хребтовые» потоки, а на концах гетерогенной структуры имеет место непротекание (ср. с обычной диффузией):

$$\begin{aligned} n_1|_{x=-0} &= n_1|_{x=+0}, & \frac{\partial n_1}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial n_1}{\partial x} \Big|_{x=+0}, \\ \frac{\partial n_1}{\partial x} \Big|_{x=-L} &= \frac{\partial n_1}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Связь между  $N$  и  $n_1$ , как следует из предыдущего, нелокальна по времени и различна в областях  $x < 0$  и  $x > 0$ : соответственно  $N_p = p^{\alpha-1} n_{1p}$  и  $N_p = p^{\beta-1} n_{1p}$ . Решение задачи (22), (23) даже в та-

кой безразмерной постановке весьма громоздко и имеет вид

$$N_p(x) = \frac{N_0}{p} \begin{cases} \{1 + A \operatorname{ch}[p^{\alpha/2}(x + L)]\}, & x \in [-L, 0), \\ \{1 + B \operatorname{ch}[p^{\beta/2}(x - L)]\}, & x \in (0, L], \end{cases}$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  равны

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = \frac{b^2 - a^2}{(a + b) \operatorname{sh}(a + b) - (b - a) \operatorname{sh}(b - a)} \begin{cases} -\frac{\operatorname{sh} b}{b} \\ \frac{\operatorname{sh} a}{a} \end{cases}$$

(здесь введены обозначения  $a = p^{\alpha/2}L$ ,  $b = p^{\beta/2}L$ ). Оно позволяет, например, рассчитать важный эффект асимптотического всасывания всех частиц более разветвленной структурой (скажем,  $\beta$ , если  $\beta < \alpha$ ), являющейся лучшей «губкой»: при  $t \rightarrow \infty$  обратное преобразование Лапласа для области  $x < 0$  дает

$$\frac{N}{N_0} \propto \frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)}, \quad \gamma = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (24)$$

### 5.2. Влияние конечной «вставки»

Если мы хотим «напитать» исходно пустую систему частицами (или, например, теплом), подавая на ее хребет поток  $q$ , то очень важно, насколько возможные включения более разветвленных структур способны «заэкранировать» внутренние области среды. Пусть структура  $\beta$ , расположенная при  $x > L$ , отделена от подводимого к  $x = 0$  потока конечным участком структуры  $\alpha$ . Тогда эволюция в системе в более удобных для данного случая терминах  $n_1$  описывается уравнениями

$$p^\alpha n_{1p} = \frac{d^2 n_{1p}}{dx^2}, \quad x \in [0, L), \quad (25)$$

$$p^\beta n_{1p} = \frac{d^2 n_{1p}}{dx^2}, \quad x \in (L, \infty)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial n_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -q \left( \left. \frac{dn_{1p}}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{q}{p} \right),$$

$$n_{1p}|_{x=L-0} = n_{1p}|_{x=L+0}, \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial n_1}{\partial x} \right|_{x=L-0} = \left. \frac{\partial n_1}{\partial x} \right|_{x=L+0}.$$

Их решение можно записать в виде

$$n_{1p}(x) = \frac{q}{p} \frac{1}{p^{\alpha/2}} \times \begin{cases} A \exp a \operatorname{ch}(p^{\alpha/2}x) + \exp(-p^{\alpha/2}x), & x \in [0, L), \\ B \exp(b - a) \exp(-p^{\beta/2}x), & x \in (L, \infty) \end{cases} \quad (27)$$

(параметры  $a$  и  $b$  идентичны введенным ранее) с коэффициентами

$$A = \frac{p^{\alpha/2} - p^{\beta/2}}{p^{\alpha/2} \operatorname{sh} a + p^{\beta/2} \operatorname{ch} a}, \quad B = \frac{p^{\alpha/2} \operatorname{ch} a - p^{\beta/2} \operatorname{sh} a}{p^{\alpha/2} \operatorname{sh} a + p^{\beta/2} \operatorname{ch} a}.$$

Из него следует, что попадающий в структуру  $\beta$  поток асимптотически ведет себя как

$$Q_p = -\left. \frac{dn_{1p}}{dx} \right|_{x=L} \sim \frac{q}{p} \frac{p^{\beta/2}}{p^{\beta/2} + p^\alpha L},$$

что при обратном преобразовании Лапласа превращается при  $t \rightarrow \infty$  в

$$Q(t) \sim q \begin{cases} 1 - \frac{t^{-\gamma} L}{\Gamma(1 - \gamma)}, & \gamma = \alpha - \frac{\beta}{2} > 0, \\ \frac{t^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma)L}, & \gamma < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Таким образом, поток  $Q$ , проходящий через не слишком разветвленную структуру с  $\alpha > \beta/2$  со временем становится равным входящему потоку  $q$ . Однако если имеет место обратная ситуация, то частицы застревают в слишком хорошей губке  $\alpha$  и поток не передается дальше:  $Q \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Этот результат можно интерпретировать следующим образом: если каждый отросток структуры с показателем  $\alpha$  является более разветвленным, чем присоединенная к хребту структура с показателем  $\beta$ , то все частицы попадают именно в такие отростки.

Переходный случай  $\alpha = \beta/2$  соответствует ситуации, когда присоединенная справа структура является всего-навсего еще одним дополнительным отростком левой структуры. Естественно, в таком варианте в асимптотике поток  $q$  равномерно делится между всеми эквивалентными отростками и

$$Q(t) \sim \frac{q}{L + 1} (1 - \operatorname{const} \cdot t^{-\alpha})$$

(в безразмерных переменных длина вдоль хребта измеряется в единицах  $l$ ). В принципе, использованные приближения требуют выполнения условия  $L \gg 1$ , но и для  $L \sim 1$  ответ выглядит весьма разумно.

### 5.3. Пропускные возможности структур

Зададимся напоследок вопросом о влиянии конечных «вставок» на поток в случае его идеального «усвоения» на правой границе, т. е. пристыковки структуры к очень хорошо впитывающей среде. В принципе, такой вариант задачи соответствует предыдущей при  $\beta \rightarrow 0$ , но мы рассмотрим его отдельно для лишнего подтверждения удобства оперирования с гребешковыми структурами в тестовых задачах. Эволюционное уравнение в области  $[0, L]$  имеет вид (25) с одним параметром  $0 < \alpha < 1$ , а условия (26) трансформируются в

$$\left. \frac{\partial n_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -q \left( \left. \frac{dn_{1p}}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{q}{p} \right), \quad (29)$$

$$n_1|_{x=L} = 0.$$

Концентрация на хребте структуры нарастает по закону

$$n_{1p} = \frac{q}{p} \frac{1}{p^{\alpha/2}} \frac{\text{sh}[p^{\alpha/2}(L-x)]}{\text{ch}(p^{\alpha/2}x)},$$

что в пределе  $t \rightarrow \infty$  соответствует стационарному распределению

$$n_1 = q(L-x),$$

совершенно аналогичному профилю, устанавливаемому в обычной диффузионной задаче. Различие заключается в том, что выход на стационарное распределение при  $\alpha \neq 1$  происходит не по экспоненциальному, а по степенному закону и пропускаемый структурой поток  $-\partial n_1/\partial x|_{x=L}$  ведет себя как

$$Q_p \sim \frac{q}{p} \frac{1}{1 + p^\alpha L^2/2} \rightarrow Q(t) \sim q \left( 1 - \frac{t^{-\alpha} L^2}{2\Gamma(1-\alpha)} \right),$$

причем его приближение к  $q$  происходит весьма медленно ( $\int Q dt$  расходится): дефицит связан с непрекращающейся пропиткой структуры в целом, полная концентрация в ней растет как

$$N = q(L-x) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (30)$$

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, с помощью последовательного использования языка дробных производных для описания стохастического транспорта вдоль гребешковых структур с отростками различного типа получены следующие результаты.

1. Выведены эволюционные уравнения, строго учитывающие наличие начальных данных. Для простейшей структуры выписано выражение, в обязательном порядке зависящее от микроскопических особенностей исходного распределения полной концентрации в отростках — оно приводит к нестандартной зависимости правой части макроскопического уравнения от времени, что еще раз доказывает необходимость его учета при решении субдиффузионных уравнений любого вида.

2. Показано, что транспорт в разветвленных гребешковых структурах также имеет субдиффузионный характер и происходит медленнее, чем в обычных гребешковых структурах, причем порядок дробной производной в описывающем его уравнении стремится к нулю как  $\alpha = 1/2^k$  по мере увеличения степени разветвленности. Предел бесконечной разветвленности эквивалентен уходу частиц с хребта с постоянной скоростью, приводящему к полному прекращению переноса вдоль структуры.

3. Предложены структуры-гирлянды, проявляющие более медленную эволюцию, для которых формально  $\alpha = 0$ . Случай, когда на хребет насажены диски является переходным — распространение частиц по оси не прекращается, но происходит медленнее, чем по степенному закону. В гирлянде шаров транспорт вдоль структуры сходит на нет за характерные времена диффузии частиц между ее элементами, поскольку шары впитывают в себя частицы с постоянной скоростью.

4. Поставлены и решены некоторые общие задачи для субдиффузионных уравнений в дробных производных, для которых граничные условия приобретают нелокальный по времени вид. При контакте двух структур с различными дробными показателями более разветвленная впитывает в себя почти все частицы из менее разветвленной. Участок структуры, обладающий более разветвленными отростками, чем ее основная часть в целом, становится эффективным барьером на пути частиц, не пропуская через себя входящий поток.

Работа выполнена при поддержке госконтракта Роснауки 02.513.11.3287, а также системы инициативных проектов РНЦ «Курчатовский институт».

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Montroll and M. F. Schlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, Vol. 2, ed. by J. Leibowitz and



1. E. W. Montroll, North-Holland, Amsterdam (1984), p. 1.
2. J.-P. Bouchand and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
3. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
4. J. Klafter and R. Metzler, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
5. В. В. Учайкин, УФН **173**, 847 (2003).
6. В. Е. Архинчеев, Э. М. Баскин, ЖЭТФ **100**, 292 (1991).
7. G. Weiss and G. Havlin, Physica A **174**, 471 (1986).
8. И. А. Лубашевский, А. А. Землянов, ЖЭТФ **114**, 1284 (1998).
9. E. Baskin and A. Iomin, Phys. Rev. Lett. **93**, 120603 (2004).
10. E. Baskin and A. Iomin, Phys. Rev. E **71**, 061101 (2005).
11. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, Письма в ЖЭТФ **77**, 654 (2003).
12. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
13. П. С. Кондратенко, А. В. Матвеев, ЖЭТФ **131**, 494 (2007).