

ЦИКЛОСТРОФИЧЕСКОЕ ПРИСПОСОБЛЕНИЕ В ЗАКРУЧЕННЫХ ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ И ВИХРЕВОЙ ЭФФЕКТ РАНКА

*М. В. Калашник**, *К. Н. Вишератин***

*Научно-производственное объединение «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия*

*Государственный технический университет атомной энергетики
249030, Обнинск, Калужская обл., Россия*

Поступила в редакцию 26 июня 2007 г.

Теоретически исследована задача о приспособлении осесимметричных движений идеального газа к состояниям циклострофического баланса, т. е. баланса между градиентом давления и центробежной силой. Решение задачи представлено в виде суммы стационарной (сбалансированной) и нестационарной (волновой) компонент. Показано, что в неограниченной области волновая компонента с течением времени затухает и в решении остается только сбалансированная часть. В ограниченной области сбалансированная часть существует на фоне незатухающих акустических колебаний. Установлено, что при числах Маха, близких к единице, в сбалансированном состоянии формируется температурная стратификация с резким уменьшением температуры газа в приосевой зоне (до $-50 \dots -100$ °C). Полученный результат, дополненный результатами специально проведенных экспериментов, прилагается к объяснению вихревого эффекта Ранка.

PACS: 47.32.-y, 47.32.Ef, 47.50.Ef

1. ВВЕДЕНИЕ

В начале 30-х годов прошлого века французским инженером Ж. Ранком был обнаружен необычный гидродинамический эффект, получивший название вихревого эффекта Ранка [1]. Он состоит в том, что в поступающем в трубу под высоким давлением закрученном газовом потоке происходит интенсивное охлаждение газа в приосевой зоне и нагрев периферийных слоев у стенки [1–3]. Техническая простота вихревого эффекта привела к созданию на его основе вихревых холодильных устройств — трубок Ранка [3–6]. Схема стандартной трубки Ранка показана на рис. 1. Воздух под давлением подается через тангенциальный ввод 4 в цилиндрическую трубу, или камеру энергетического разделения 1 и дополнительно закручивается завихрителем 5, имеющим форму улитки Архимеда. Холодный поток воз-

духа выходит наружу через аксиальную диафрагму 3, расположенную непосредственно рядом с завихрителем, а горячий воздух — через противоположный конец трубы, снабженной регулировочным краном 2. Сообщается, что в некоторых экспериментальных конструкциях температура на оси трубки может достигать -100 °C при исходной комнатной температуре [6, 7].

Хотя исследованию вихревого эффекта посвящено достаточно много теоретических и экспериментальных работ [1–23], до сих пор не найдено неоспоримого физического объяснения самого эффекта. Большинство предлагаемых объяснений основано на привлечении различных неочевидных гипотез о процессах турбулентной теплопередачи [3, 6–10]. Так, согласно распространенной теории «турбулентных миграций» [3], турбулентные элементы, адиабатически расширяясь и сжимаясь при перемещении, «совершают холодильные циклы, передавая тепло в периферийные слои, а источником механической

*E-mail: lingel@obninsk.com

**E-mail: kvisher@typhoon.obninsk.ru

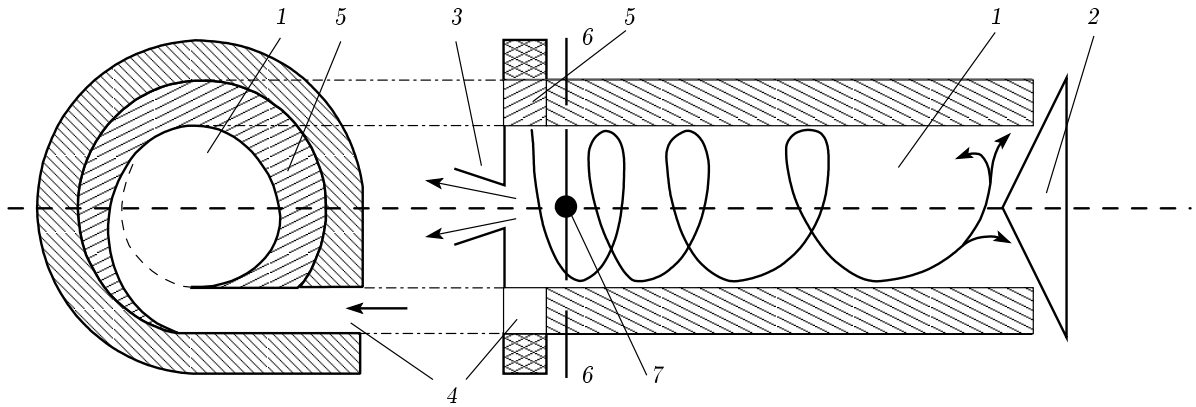


Рис. 1. Противоточная вихревая трубка Ранка: 1 — камера энергетического разделения (цилиндрическая трубка); 2 — конический дроссельный кран на горячем конце; 3 — диафрагма на холодном конце; 4 — тангенциальный ввод; 5 — завихритель (улитка Архимеда); 6 — выводы микродатчика температуры 7

энергии этих циклов является турбулентность». Качественная аргументация используется и в предложенной недавно теории «центробежной сепарации турбулентных элементов по величине тангенциальной скорости» [6]. Имеются попытки объяснения и на основе уравнений газовой динамики, однако они немногочисленны и носят характер отдельных вычислительных экспериментов [14, 15, 18, 21]. В известной монографии [24] вихревой эффект включен в список парадоксальных свойств течений вязкой жидкости.

В настоящей работе предлагается объяснение вихревого эффекта Ранка, основанное на ранее неизученном в газовой динамике механизме нелинейного циклострофического приспособления (adjustment). Для несжимаемой жидкости отдельные элементы этого механизма изучались ранее [25]. Суть механизма состоит в следующем. Хорошо известно, что стационарные вихревые движения газа (жидкости) находятся в состоянии циклострофического баланса, т. е. баланса между градиентом давления и центробежной силой. Предположим, что в некоторый начальный момент времени этот баланс нарушен, например, газ, находящийся при постоянных температуре и давлении, начинает мгновенно вращаться с заданной угловой скоростью. При этом в газе начнется нестационарный волновой процесс установления самосогласованного распределения полей давления и скорости, который приведет к некоторому конечному состоянию баланса. В работе показано, что установление сбалансированного состояния сопровождается уменьшением температуры на оси вихря, причем

количественный эффект оказывается очень сильным. Так, при начальной комнатной температуре и скорости вращения, близкой к скорости звука, температура на оси вихря может понижаться до $-50 \dots -100^\circ\text{C}$.

Теоретическое исследование предложенного механизма выполнено в упрощенной постановке, в рамках системы уравнений газовой динамики для идеального политропного газа. Для этой системы рассмотрена задача с несбалансированными начальными данными, решение которой представлено в виде суммы стационарной (сбалансированной) и нестационарной (волновой) компонент. Изучена структура сбалансированных состояний для различных типов начальных распределений тангенциальной скорости, сформулирован вариационный принцип минимума полной энергии для сбалансированных состояний. Теоретический анализ дополнен экспериментальными данными о радиальном распределении температуры в различных сечениях трубки Ранка. Показано, что максимальное уменьшение температуры наблюдается вблизи выхода закрученного потока из завихрителя, где и происходит процесс циклострофического приспособления.

Отметим, что процесс циклострофического приспособления аналогичен так называемым процессам геострофического и гидростатического приспособлений. Эти процессы хорошо изучены в геофизической гидродинамике [26, 27], однако, судя по литературе, в задачах газовой динамики подобные процессы не рассматривались. В теоретической части работы используются подходы, аналогичные использованным в [26, 27].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Осесимметричные движения идеального политропного газа описываются системой уравнений [28]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{\Gamma^2}{r^3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, & \frac{d\Gamma}{dt} &= 0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru\rho) &= 0, & T &= \frac{P}{R\rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r$, u и v — соответственно радиальная и тангенциальная компоненты скорости, $\Gamma = rv$, P — давление, ρ — плотность, $\gamma = C_p/C_v$ — отношение теплоемкостей (для воздуха $\gamma = 7/5$), $R = C_p - C_v$ — удельная газовая постоянная. Уравнение состояния в системе (1) используется для нахождения температуры T . Скорость звука c в газе связана с температурой соотношением $c^2 = \gamma RT$. Из системы (1) следует уравнение баланса полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ru \left(\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) \right] = 0, \quad (2)$$

$\mathbf{u} = (u, v)$, а также лагранжев закон сохранения потенциальной завихренности

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{\rho} \right) = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r}, \quad (3)$$

где ξ — осевая компонента вихря. Уравнение (3) является следствием второго и четвертого уравнений в системе (1).

Система (1) имеет класс точных стационарных решений, описывающих состояния циклострофического баланса:

$$u = 0, \quad \frac{\Gamma^2}{r^3} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (4)$$

Рассмотрим вопрос об установлении состояний (4) в задаче с начальными условиями

$$t = 0: \quad P = P_0, \quad \rho = \rho_0, \quad u = 0, \quad v = Vv_0(r/L). \quad (5)$$

Эти условия отвечают ситуации, когда в газе, находящемся при постоянных температуре, давлении P_0 , плотности ρ_0 , мгновенно создан вихрь с тангенциальной скоростью $Vv_0(r/L)$, где V и L — заданные амплитуда и масштаб вихря, $v_0(r/L)$ — безразмерная функция, задающая начальное распределение скорости вихря. Для начальных условий (5) движение газа изэнтропическое: $P/\rho^\gamma = \text{const}$, т.е. $P = k\rho^\gamma$, $T = (k/R)\rho^{\gamma-1}$, где $k = P_0/\rho_0^\gamma$. Уравнение

циклострофического баланса для изэнтропических движений можно записать в виде

$$\frac{\Gamma^2}{r^3} = C_p \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (6)$$

Из этого уравнения сразу следует, что температура газа на оси ниже, чем на периферии ($\partial T/\partial r > 0$). Эффект охлаждения газа в приосевой зоне, таким образом, можно объяснить, исследуя процесс установления состояний баланса (6).

Далее будем рассматривать две постановки задачи Коши (1), (5) — в неограниченной области $0 < r < \infty$ с естественными краевыми условиями на оси, а также $u, v \rightarrow 0$, $P \rightarrow P_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$ при $r \rightarrow \infty$ и в ограниченной области $0 < r < L$ с условием непротекания $u = 0$ при $r = L$ (задача в трубе радиуса L). Для решения задачи удобно перейти к безразмерным переменным, принимая в качестве масштабов r, t, P, ρ, T, u, v соответственно $L, L/c, P_0, \rho_0, T_0 = P_0/R\rho_0, c, V$, где $c = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ — скорость звука в начальном невозмущенном состоянии. С учетом изэнтропичности движений в безразмерных переменных получим систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{\Gamma^2}{r^3} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma-1}) &= 0, & \frac{d\Gamma}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru\rho) &= 0, & T &= \rho^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (7)$$

с начальными условиями

$$t = 0: \quad \rho = 1, \quad u = 0, \quad \Gamma = \Gamma_0(r) \equiv rv_0(r). \quad (8)$$

Система (7) содержит единственный безразмерный параметр $\varepsilon = M^2 = (V/c)^2$, равный квадрату числа Маха в начальный момент времени. Отметим, что в случае неограниченной области $0 < r < \infty$ из системы (7) следует интегральный закон сохранения полной (безразмерной) энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad E = \int_0^\infty \left[\rho \frac{u^2 + \varepsilon v^2}{2} + \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma(\gamma-1)} \right] r dr. \quad (9)$$

Здесь учтено, что $P = \rho^\gamma$, и в подынтегральное выражение добавлено постоянное слагаемое для обеспечения сходимости интеграла.

3. ПРИСПОСОБЛЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАХА

Наиболее просто процесс циклострофического приспособления исследуется в случае $\varepsilon \ll 1$. Реше-

ние задачи (7), (8) ищем в виде разложения по малому параметру:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0(r) + \varepsilon \Gamma^{(1)}(r, t) + \dots, \\ \rho &= 1 + \varepsilon \rho^{(1)}(r, t) + \dots, \\ T &= 1 + \varepsilon T^{(1)}(r, t) + \dots, \\ u &= \varepsilon u^{(1)}(r, t) + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

После подстановки соотношений (10) в (7) с учетом $\rho^{\gamma-1} = 1 + \varepsilon(\gamma - 1)\rho^{(1)} + \dots$ для функций первого приближения получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\Gamma_0^2(r)}{r^3} + \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial t} + u^{(1)} \frac{d\Gamma_0}{dr} &= 0, \\ \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u^{(1)})}{\partial r} &= 0, \\ T^{(1)} &= (\gamma - 1)\rho^{(1)} \end{aligned} \tag{11}$$

с начальными условиями

$$t = 0 : \quad \rho^{(1)} = \Gamma^{(1)} = u^{(1)} = 0 \tag{12}$$

и условиями затухания возмущений при $r \rightarrow \infty$. В ограниченной области $0 < r < 1$ ставится условие непротекания $u^{(1)} = 0$ при $r = 1$.

Первое и третье уравнения в системе (11) сводятся к неоднородному волновому уравнению для плотности:

$$\frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma_0^2}{r^2} \right). \tag{13}$$

Общее решение уравнения (13) представляется в виде суммы стационарной (сбалансированной) и нестационарной (волновой) компонент:

$$\rho^{(1)} = \rho_f^{(1)}(r) + \rho_w^{(1)}(r, t), \tag{14}$$

где стационарная часть удовлетворяет уравнению циклостробического баланса

$$\frac{\partial \rho_f^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Gamma_0^2(r)}{r^3}, \tag{15}$$

из которого в области $0 < r < \infty$ следует

$$\rho_f^{(1)}(r) = - \int_r^\infty \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr'. \tag{16}$$

Для нахождения $\rho_f^{(1)}$ в ограниченной области $0 < r < 1$ используем дополнительно условие $\int_0^1 \rho^{(1)} r dr = 0$, которое вытекает из интегрального

закона сохранения полной массы $\int_0^1 \rho r dr = \text{const}$. Отсюда

$$\rho_f^{(1)}(r) = \int_0^1 \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'} dr' - \int_r^1 \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr'. \tag{17}$$

Нестационарная часть $\rho_w^{(1)}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (13) с начальными условиями $\rho_w^{(1)} = -\rho_f^{(1)}$, $\partial \rho_w^{(1)} / \partial t = 0$ при $t = 0$. В неограниченной области решение представляется интегралом Пуассона, в области $0 < r < 1$ — рядом по функциям Бесселя. Эта часть решения описывает акустические колебания, возбуждаемые в процессе приспособления. Легко проверить, что радиальная скорость $u^{(1)}$ также является решением однородного уравнения (13) с условиями $u^{(1)} = 0$, $\partial u^{(1)} / \partial t = \Gamma_0^2(r) / r^3$ при $t = 0$. Распределение $u^{(1)}$ не содержит стационарной компоненты.

Для нахождения распределения $\Gamma^{(1)}$ используем простой локальный закон сохранения, получающийся исключением $u^{(1)}$ из второго и третьего уравнений системы (11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho^{(1)} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma^{(1)}}{\xi_0(r)} \right) \right] = 0, \tag{18}$$

где $\xi_0(r) = r^{-1} d\Gamma_0 / dr$. Этот закон отражает сохранение потенциальной завихренности для возмущений. С учетом начальных условий (12) из уравнения (18) следует

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma^{(1)}}{\xi_0(r)} \right) = \rho^{(1)}, \tag{19}$$

откуда после интегрирования с условием $\Gamma^{(1)}(0, t) = 0$ получаем

$$\Gamma^{(1)}(r, t) = \xi_0(r) \int_0^r r' \rho^{(1)}(r', t) dr'. \tag{20}$$

Распределение $\Gamma^{(1)}$, таким образом, выражается через поле плотности и, следовательно, также представляется в виде суммы стационарной и нестационарной компонент: $\Gamma^{(1)} = \Gamma_f^{(1)} + \Gamma_w^{(1)}$. Подставляя выражения (16), (17) в (20), можно выразить $\Gamma_f^{(1)}$ непосредственно через начальное распределение $\Gamma_0(r)$. Так, в неограниченной области имеем

$$\Gamma_f^{(1)}(r) = - \frac{\xi_0(r)}{2} \int_0^\infty G(r, r') \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr', \tag{21}$$

где

$$G(r, r') = \begin{cases} r'^2, & r' < r \\ r^2, & r' > r \end{cases}.$$

Основное различие задач для ограниченной и неограниченной областей заключается в поведении волновой компоненты. В неограниченной области $0 < r < \infty$ волновая компонента с течением времени затухает, что связано с рассеянием акустических волн в пространстве. В решении, таким образом, остается лишь конечная сбалансированная часть. С учетом выражений (16), (21) распределения температуры T_f и скорости $v_f = \Gamma/r$ в конечном состоянии описываются выражениями

$$T_f(r) = 1 - \varepsilon(\gamma - 1) \int_r^\infty \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr' + \dots, \quad (22)$$

$$v_f(r) = v_0(r) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\xi_0(r)}{r} \int_0^\infty G(r, r') \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr' + \dots$$

Согласно (22), установление состояния баланса сопровождается формированием пространственно-неоднородного распределения температуры (формированием температурной стратификации). Конечная температура всегда меньше начальной. Максимальное уменьшение температуры имеет место на оси вихря:

$$\Delta T = T_f(0) - 1 = -\varepsilon(\gamma - 1) \int_0^\infty \frac{\Gamma_0^2(r')}{r'^3} dr'. \quad (23)$$

В отличие от температуры, конечная скорость v_f может быть как больше, так и меньше начальной: $v_f < v_0$ в области $\xi_0(r) > 0$ и $v_f > v_0$ в области $\xi_0(r) < 0$.

В качестве конкретного примера рассмотрим однопараметрическое семейство начальных распределений скорости

$$v_0(r) = r/(1 + r^2)^\lambda,$$

где параметр $\lambda > 0.5$. При $\lambda = 1$ (модифицированный вихрь Рэнкина, рис. 2) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ распределения температуры и скорости в конечном состоянии имеют вид

$$T_f(r) = 1 - \frac{\varepsilon(\gamma - 1)}{2(1 + r^2)}, \quad v_f(r) = \frac{r}{1 + r^2} - \varepsilon \frac{\ln \sqrt{1 + r^2}}{r(1 + r^2)^2}.$$

При $\lambda = 3/4$ (вихрь убывает на бесконечности как $1/\sqrt{r}$) имеем

$$T_f(r) = 1 - \varepsilon(\gamma - 1)/\sqrt{1 + r^2},$$

$$v_f(r) = \frac{r}{(1 + r^2)^{3/4}} + \frac{\varepsilon(4 + r^2) [\ln(r + \sqrt{r^2 + 1}) - r\sqrt{r^2 + 1}]}{4r(1 + r^2)^{7/4}}.$$

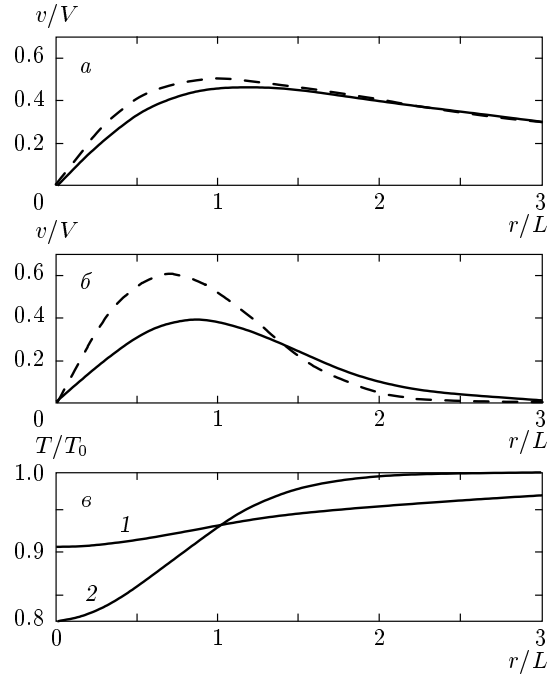


Рис. 2. Начальное (штриховые кривые) и конечное (сплошные) распределения тангенциальной скорости для вихря Рэнкина (а) и сконцентрированного вихря (б), а также распределения конечной температуры (в) для вихря Рэнкина (1) и сконцентрированного вихря (2). Для наглядности рисунка выбрано значение $\varepsilon = 0.5$

Для $\lambda = 3/4$ легко построить также нестационарную часть решения, используя преобразование Фурье–Бесселя. Так, волновая компонента $\rho_w^{(1)}$ записывается в виде

$$\rho_w^{(1)}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{D^2 + 4t^2} + D}{D^2 + 4t^2} \right]^{1/2},$$

где $D = 1 + r^2 - t^2$. На больших временах величина $\rho_w^{(1)}$ затухает как t^{-2} .

Еще одним интересным примером является сконцентрированный (гауссовский) вихрь со знакопеременной завихренностью $\xi_0(r)$:

$$v_0(r) = \sqrt{2} r \exp(-r^2/2).$$

Для этого вихря (см. рис. 2)

$$T_f(r) = 1 - \varepsilon(\gamma - 1) \exp(-r^2),$$

$$v_f(r) = \sqrt{2} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} r} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) (2 - r^2) [\exp(-r^2) - 1].$$

В конечном состоянии $v_f > v_0$ при $r > \sqrt{2}$ и $v_f < v_0$ при $0 < r < \sqrt{2}$.

В ограниченной области $0 < r < 1$ волновая часть решения не затухает, что связано с отражением акустических волн от твердой границы $r = 1$ (стенок трубы). Сбалансированное стационарное состояние при этом существует на фоне незатухающих акустических колебаний.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай начального твердотельного вращения газа со скоростью $v_0(r) = r$, $0 < r < 1$. В сбалансированном состоянии

$$T_f(r) = 1 + \frac{\varepsilon}{4}(\gamma - 1)(2r^2 - 1), \quad v_f(r) = r + \frac{\varepsilon}{4}r(r^2 - 1).$$

Легко также записать решение для волновой компоненты (в виде ряда). Обратим внимание на то, что в присоединенной зоне конечная температура понижена (по сравнению с начальной), $T_f(0) = 1 - \varepsilon(\gamma - 1)/4$, а вблизи стенки произошел нагрев, $T_f(1) = 1 + \varepsilon(\gamma - 1)/4$. Нагревание у стенки, очевидно, связано с условием сохранения полной массы. Конечная скорость $v_f < v_0$.

Резюмируем результаты анализа. При малых числах Маха решение задачи с несбалансированными начальными данными для системы (7) представляется суммой стационарной (сбалансированной) и нестационарной (волновой) компонент. В неограниченной области волновая компонента с течением времени затухает и в решении остается только сбалансированная часть. В ограниченной области (трубе) сбалансированная часть существует на фоне незатухающих акустических колебаний. Установление сбалансированного состояния сопровождается уменьшением температуры в присоединенной зоне, которое, однако, при малых числах Маха достаточно мало. Так, например, в случае сконцентрированного вихря для уменьшения температуры в центре, выраженного в размерных единицах, имеем $\Delta T = -\varepsilon(\gamma - 1)T_0$, где T_0 — начальная температура. Возьмем $T_0 = 300$ К, $\gamma = 7/5$. Тогда $\Delta T = 1.2$ К при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\Delta T = 12$ К при $\varepsilon = 10^{-1}$. Ниже будет показано, что при начальных скоростях, близких к скорости звука, уменьшение температуры может достигать значительных величин.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ЦИКЛОСТРОФИЧЕСКОГО БАЛАНСА И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим вопрос об определении конечных состояний баланса без использования допущения о ма-

лости параметра ε . В системе (7) эти состояния описываются одним уравнением,

$$\varepsilon \frac{\Gamma^2}{r^3} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma - 1}), \quad (24)$$

содержащим две неизвестные функции, Γ и ρ . Какое именно состояние баланса может установиться в задаче с начальными условиями (8)? Для ответа на этот вопрос используем предложенный для задач геофизической гидродинамики подход, основанный на рассмотрении лагранжевых законов сохранения [25]. Прежде всего заметим, что уравнение баланса массы в системе (7) можно записать в форме лагранжева закона сохранения для функции $I(r, t)$, пропорциональной массе жидкости в круге радиуса r :

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + u \frac{\partial I}{\partial r} = 0, \quad I = \int_0^r \rho r \, dr. \quad (25)$$

Исключая из уравнений $d\Gamma/dt = 0$, $dI/dt = 0$ радиальную скорость u , получим $\partial(\Gamma, I)/\partial(r, t) = 0$. Из равенства нулю якобиана следует, что между лагранжевыми инвариантами Γ , I существует функциональная связь $\Gamma = F(I)$, сохраняющаяся в процессе эволюции. Конкретный вид этой связи получается исключением координаты r из начальных условий $I = r^2/2$ ($\rho = 1$), $\Gamma = \Gamma_0(r)$ при $t = 0$. Отсюда

$$F(I) = \Gamma_0(\sqrt{2I}) \equiv \sqrt{2I} v_0(\sqrt{2I}).$$

С учетом данной связи и соотношения $\rho = r^{-1} \partial I / \partial r$ система (7) сводится к системе из двух уравнений

$$\frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{F^2(I)}{r^3} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right)^{\gamma - 1} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Стационарное решение этой системы (циклострофический баланс) находится из уравнения

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dI}{dr} \right)^{\gamma - 1} = \varepsilon \frac{F^2(I)}{r^3}, \quad (27)$$

в соответствии с заданными начальными условиями (зависимость $F(I)$). К уравнению (27) в случае неограниченной области $0 < r < \infty$ присоединяются краевые условия

$$I(0) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{dI}{dr}(\infty) = 1. \quad (28)$$

В ограниченной области $0 < r < 1$ краевые условия имеют вид $I(0) = 0$, $I(1) = 0.5$, где второе условие вытекает из интегрального закона сохранения

полной массы. Используя $s = r^2/2$ в качестве новой независимой переменной, краевую задачу (27), (28) можно записать в виде

$$s^2 \left(\frac{dI}{ds} \right)^{\gamma-2} \frac{d^2I}{ds^2} = \frac{\varepsilon}{4} F^2(I), \quad (29)$$

$$I(0) = 0, \quad \frac{dI}{ds}(\infty) = 1,$$

более удобном для анализа. Если решение задачи (29) известно, то распределения температуры и скорости в сбалансированном состоянии имеют вид

$$v_f(s) = \sqrt{\frac{2s}{\varepsilon} \left(\frac{dI}{ds} \right)^{\gamma-2} \frac{d^2I}{ds^2}}, \quad (30)$$

$$T_f(s) = \left(\frac{dI}{ds} \right)^{\gamma-1}.$$

Отметим, что если начальное распределение скорости представлено как функция s ($v_0 = v_0(s)$), то $F(I) = \sqrt{2I} v_0(I)$.

В случае $\varepsilon \ll 1$ решение задачи (29) можно искать в форме разложения $I = s + \varepsilon I^{(1)}(s) + \varepsilon^2 I^{(2)}(s) + \dots$. Функции $I^{(k)}(s)$ при этом удовлетворяют цепочке линейных задач. Можно показать, что в первом приближении для распределений температуры и скорости получаются выражения (22).

Достаточно глубокий смысл уравнения (29) обнаруживается при рассмотрении выражения для полной энергии (9). С учетом соотношений $\Gamma = rv = F(I)$, $\rho = dI/ds$, $s = r^2/2$ это выражение можно записать в виде

$$E = E(u, I) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{F^2(I)}{4s} \right) \frac{\partial I}{\partial s} + \frac{(\partial I / \partial s)^\gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right] ds. \quad (31)$$

Нетрудно проверить, что вариационные уравнения Эйлера [29] для функционала $E = E(u, I)$ дают $u = 0$ и уравнение (29). Таким образом, среди всех состояний с заданным распределением углового момента по массе, $\Gamma = F(I)$, состояниям циклострофического баланса отвечает экстремум функционала полной энергии (31). Более сложно показать, что этот экстремум является минимумом. Для доказательства обозначим решение задачи (29) через $I_f(s)$ и рассмотрим разность $\Delta E = E(u, I) - E(0, I_f)$. Переходя в выражении для ΔE к интегрированию по переменной I (массовой координате) и опуская заведомо неотрицательное слагаемое с u^2 , получим

$$\Delta E = \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon F^2(I)}{4} \left(\frac{1}{s(I)} - \frac{1}{s_f(I)} \right) + \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{ds}{dI} \right)^{1-\gamma} - \left(\frac{ds_f}{dI} \right)^{1-\gamma} \right] \right\} dI, \quad (32)$$

где $s(I)$, $s_f(I)$ — функции, обратные к $I(s)$, $I_f(s)$. Заметим далее, что $s_f(I)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dI} \left(\frac{ds}{dI} \right)^{-\gamma} = \varepsilon \frac{F^2(I)}{4s^2}, \quad (33)$$

которое представляет другую запись первого уравнения в (29), полученную путем перехода к обратной функции. Из (33) следует равенство нулю интеграла

$$\int_0^\infty \left[\frac{\varepsilon F^2(I)}{4s_f^2} (s - s_f) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{ds_f}{dI} \right)^{-\gamma} \frac{d}{dI} (s - s_f) \right] dI = 0,$$

что устанавливается интегрированием по частям. Прибавляя этот интеграл к ΔE , после алгебраических преобразований получаем

$$\Delta E = \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon F^2(I)}{4s} \left(\frac{s - s_f}{s_f} \right)^2 + \left[\frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \left(\frac{ds}{dI} \right)^{1-\gamma} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{ds_f}{dI} \right)^{1-\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{ds_f}{dI} \right)^{-\gamma} \left(\frac{ds}{dI} - \frac{ds_f}{dI} \right) \right] \right\} dI. \quad (34)$$

Покажем, что в (34) слагаемое в квадратных скобках неотрицательно, откуда и будет следовать $\Delta E \geq 0$. Действительно, это слагаемое можно представить в виде

$$\frac{1}{\gamma} [\psi(a) - \psi(b)],$$

где

$$\psi(a) = \frac{a^{1-\gamma}}{\gamma - 1} + \frac{a}{b^\gamma}, \quad a = \frac{ds}{dI}, \quad b = \frac{ds_f}{dI}.$$

Легко проверить, что при $a > 0$ функция $\psi(a)$ неотрицательна и имеет единственную точку минимума при $a = b$. Таким образом $\psi(a) - \psi(b) \geq 0$, т. е. $\Delta E \geq 0$. Доказательство для ограниченной области аналогично.

Сформулированный вариационный принцип позволяет дать физическую интерпретацию процесса циклострофического приспособления как процесса достижения состояния с минимумом полной энергии. Отметим, что для состояний геострофического и циклострофического балансов в несжимаемой жидкости аналогичный вариационный принцип сформулирован в работе [25].

5. СТРУКТУРА СБАЛАНСИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ЧИСЛАХ МАХА, БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

Исследуем структуру состояний баланса в случае $\varepsilon = 1$, когда начальные скорости близки к скорости звука. Решение краевой задачи (29) в этом случае можно построить численно. Вместе с тем можно указать также класс точных аналитических решений, учитывая произвол в выборе зависимости $F(I)$ — начального распределения скорости.

Алгоритм построения решений выглядит следующим образом. Зафиксируем некоторую зависимость $I = I(s)$, удовлетворяющую краевым условиям (29), а также условиям $dI/ds > 0, d^2I/ds^2 > 0$. Обозначим далее через $s(I)$ зависимость, обратную к $I(s)$, и определим

$$\Phi(s) = 2s \sqrt{\left(\frac{dI}{ds}\right)^{\gamma-2} \frac{d^2I}{ds^2}}. \quad (35)$$

Очевидно, что заданная зависимость $I(s)$ является решением краевой задачи (29) с функцией $F(I) = \hat{O}(s(I))$. Эту функцию можно записать в параметрическом виде $F = \Phi(\alpha), I = I(\alpha)$, где далее α — параметр. С учетом выражений (30), для данной зависимости $I(s)$ распределения температуры и скорости в конечном состоянии имеют вид

$$v_f(s) = \frac{\Phi(s)}{\sqrt{2s}}, \quad T_f(s) = \left(\frac{dI}{ds}\right)^{\gamma-1}. \quad (36)$$

Зная функцию $F(I)$, легко найти также отвечающее (36) начальное распределение скорости $v_0(s)$. Поскольку $F(I) = \sqrt{2I} v_0(I)$, имеем $v_0(I) = F(I)/\sqrt{2I}$ или $v_0(s) = F(s)/\sqrt{2s}$. Используя параметрическое представление функции $F(I)$, распределение $v_0(s)$ также можно записать в параметрическом виде,

$$v_0 = \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{2I(\alpha)}}, \quad s = I(\alpha), \quad (37)$$

удобном для численных расчетов. Отметим, что задавая зависимость $I(s)$, мы фактически задаем конечное состояние, по которому, с использованием уравнения (29), восстанавливаем начальное распределение скорости. Аналогичным образом строится решение в ограниченной области $0 < s < 0.5$, с той разницей, что выбирается зависимость $I(s)$, удовлетворяющая условиям $I(0) = 0, I(0.5) = 0.5$.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 1. В качестве первого примера зависимости $I(s)$, удовлетворяющей перечисленным выше

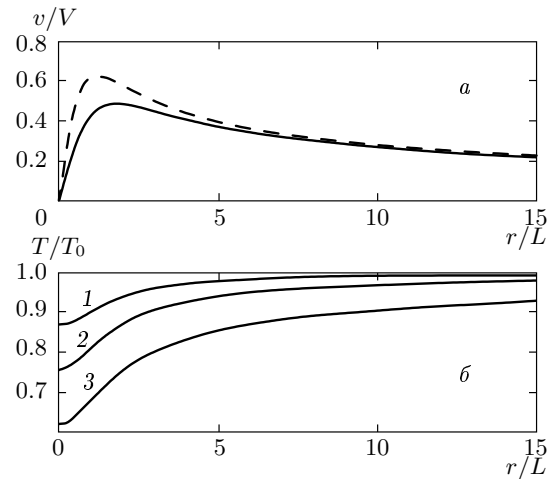


Рис. 3. Начальное (штриховая кривая) и конечное (сплошная) распределения тангенциальной скорости при $\lambda = 0.5$ (а) и распределения конечной температуры (б) при $\lambda = 0.3$ (1), 0.5 (2), 0.7 (3). Случай зависимости (38) для $I(s), \gamma = 7/5$

условиям, рассмотрим однопараметрическое семейство

$$I(s) = (1 + s) - (1 + s)^\lambda, \quad (38)$$

где параметр $\lambda \in (0, 1)$. Для данной зависимости найдем (рис. 3)

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= 2s \times \\ &\times \sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+s)^{\lambda-2} \left[1 - \frac{\lambda}{(1+s)^{1-\lambda}}\right]^{\gamma-2}}, \quad (39) \\ T_f(s) &= \left[1 - \frac{\lambda}{(1+s)^{1-\lambda}}\right]^{\gamma-1}, \quad v_f(s) = \frac{\Phi(s)}{\sqrt{2s}}. \end{aligned}$$

Начальное распределение скорости записывается в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(1+\alpha) - (1-\alpha)^\lambda}}, \quad (40) \\ s &= (1+\alpha) - (1-\alpha)^\lambda. \end{aligned}$$

Используя выражение для v_f из (39), легко показать, что $v_f \propto r^{\lambda-1}$ при $r \rightarrow \infty$, т.е. параметр λ характеризует закон убывания тангенциальной скорости по радиусу. От этого параметра зависит также радиальное распределение T_f . Для размерной температуры на оси вихря (обозначаем ее звездочкой сверху) из (39) получим

$$T_f^*(0) = (1-\lambda)^{\gamma-1} T_0. \quad (41)$$

Сделаем численную оценку для $T_0 = 300$ К (27°C), $\gamma = 7/5, \lambda = 0.5$. При этом $T_f^*(0) = 228$ К

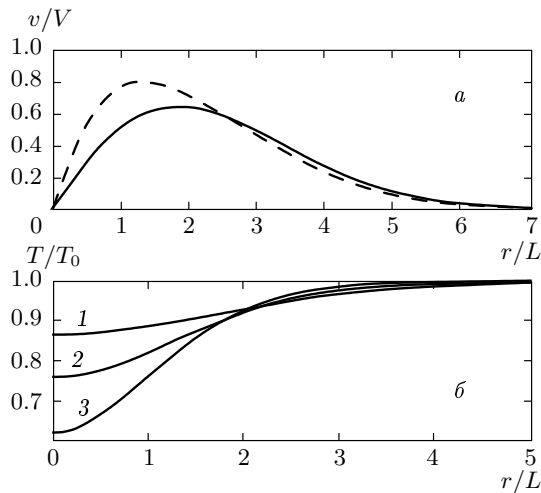


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но в случае зависимости (42) для $I(s)$

(-45°C), т.е. температура на оси вихря уменьшится на 72 К. Таким образом, количественный эффект оказывается значительным. Как видно из рис. 3, для достижения такого уменьшения температуры нужна начальная скорость 0.63с, т.е. немного превышающая половину скорости звука c . Близкие по величине тангенциальные скорости создаются при прокачке сжатого воздуха через завихритель в трубке Ранка и вихревых камерах [3]. Обратим внимание на то, что $T_f^*(0) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 1$. Достижение абсолютного нуля температуры даже при быстрых вращениях, естественно, невозможно из-за присутствия диссипативных факторов. Отметим также, что при $\lambda = 1 - (0.5)^{5/2} \approx 0.82$ температура уменьшается в два раза.

Пример 2. Рассмотрим теперь зависимость $I(s)$, характерную для сконцентрированных вихрей,

$$I(s) = s + e^{-\lambda s} - 1, \tag{42}$$

где $\lambda \in (0, 1)$. Для этой зависимости (рис. 4)

$$\Phi(s) = 2\lambda s e^{-\lambda s/2} \sqrt{(1 - \lambda e^{-\lambda s})^{\gamma-2}},$$

$$T_f(s) = (1 - \lambda e^{-\lambda s})^{\gamma-1}, \quad v_f(s) = \frac{\Phi(s)}{\sqrt{2s}}.$$

Начальная скорость задается параметрически:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{\alpha + e^{-\lambda\alpha} - 1}}, \quad s = \alpha + e^{-\lambda\alpha} - 1.$$

Легко показать, что $v_f \sim \lambda r \exp(-\lambda r^2/4)$ при $r \rightarrow \infty$. Температура на оси вихря определяется выражением (41) и зависит от λ . Как и в предыдущем примере, интенсивное охлаждение наблюдается для λ ,

близких к единице; при $\lambda = 0.5$ и $\gamma = 7/5$ температура понижается на 72 К. Такое уменьшение отвечает максимуму начальной скорости $v_0 = 0.8c$ (рис. 4).

Пример 3. Рассмотрим теперь задачу в ограниченной области $0 < s < 0.5$ ($0 < r < 1$) с зависимостью

$$I(s) = (1 - \lambda)s + 2\lambda s^2, \tag{43}$$

где $\lambda \in (0, 1)$. Зависимость $I(s)$ удовлетворяет условиям $I(0) = 0$, $I(0.5) = 0.5$ и $dI/ds > 0$, $d^2I/ds^2 > 0$. Для этой зависимости

$$\Phi(s) = \frac{4\sqrt{\lambda} s}{\sqrt{[(1 - \lambda) + 4\lambda s]^2 - \gamma}}, \tag{44}$$

$$T_f(s) = [(1 - \lambda) + 4\lambda s]^{\gamma-1}, \quad v_f(s) = \frac{\Phi(s)}{\sqrt{2s}}.$$

Начальная скорость определяется параметрически:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(1 - \lambda)\alpha + 2\lambda\alpha^2}}, \tag{45}$$

$$s = (1 - \lambda)\alpha + 2\lambda\alpha^2.$$

Выражения (44), (45) упрощаются для газа с $\gamma = 2$. Зависимость $v_0(s)$ при этом можно записать в явном виде, выразив в (45) параметр α через s . Возвращаясь к переменной $r = \sqrt{2s}$, получим

$$v_f(r) = 2r\sqrt{\lambda}, \quad T_f(r) = (1 - \lambda) + 2\lambda r^2,$$

$$v_0(r) = \frac{\sqrt{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda r^2} - (1 - \lambda)}{r\sqrt{\lambda}}. \tag{46}$$

При $\gamma = 2$ устанавливается сбалансированное состояние с твердотельным вращением и квадратичным (параболическим) изменением температуры (рис. 5). В центральной части начального вихря температура понизилась, $T_f^*(0) = (1 - \lambda)T_0$, в то время как на периферии у стенки произошел нагрев, $T_f^*(1) = (1 + \lambda)T_0$. Температурные эффекты весьма ощутимы: при $\lambda = 0.25$ и $T_0 = 300$ К имеем

$$T_f^*(0) = 0.75T_0 = 225 \text{ К } (-48^\circ\text{C}),$$

$$T_f^*(1) = 1.25T_0 = 375 \text{ К } (102^\circ\text{C}).$$

Для воздуха с $\gamma = 7/5$ при $\lambda = 0.5$ и $T_0 = 300$ К соответственно имеем

$$T_f^*(0) = 227.4 \text{ К } (-45.6^\circ\text{C}),$$

$$T_f^*(1) = 352.8 \text{ К } (79.8^\circ\text{C}).$$

Для достижения таких температур нужны начальные скорости порядка скорости звука.

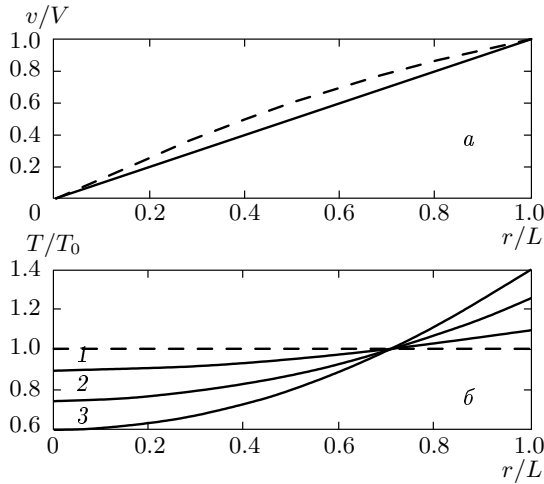


Рис. 5. То же, что и на рис. 3, но в случае зависимости (43) для $I(s)$ при $\gamma = 2$: а — $\lambda = 0.25$; б — $\lambda = 0.1$ (1), 0.25 (2), 0.4 (3)

Подчеркнем, что в рамках данного механизма нагревание периферийных слоев связано исключительно с условием сохранения полной массы, а не с эффектом трения о стенки, как это обычно предполагается. Видимо по этой причине, тщательная шлифовка поверхности завихрителя и стенок вихревых трубок не приводит к исключению нежелательного нагревания [3].

Из рассмотренных примеров следует, что циклострофическое приспособление при числах Маха $M \sim 1$ может приводить к существенному понижению температуры в приосевой зоне газового потока.

6. ОБОБЩЕНИЯ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Выше рассматривались движения с постоянной начальной энтропией $\eta = \ln \Theta = \text{const}$, $\Theta = P/\rho^\gamma$. Задача о циклострофическом приспособлении допускает простое обобщение на случай неоднородной начальной энтропии. В безразмерной форме систему уравнений (1) для неизэнтропических движений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{\Gamma^2}{r^3} + \frac{1}{\gamma \rho} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, & \frac{d\Gamma}{dt} &= 0, \\ \frac{d\Theta}{dt} = 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) &= 0, & (47) \\ P = \Theta \rho^\gamma, & T = \Theta \rho^{\gamma-1}. & & \end{aligned}$$

Здесь использованы прежние масштабы для переменных (см. разд. 2), однако теперь P_0 и ρ_0 — неко-

торые характерные значения давления и плотности в начальный момент времени.

Перепишем в (47) уравнение непрерывности в форме лагранжева закона сохранения (25). При этом уже три переменные в системе (47) являются лагранжевыми инвариантами:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0, \quad \frac{dI}{dt} = 0.$$

Как и в разд. 4, можно показать, что в процессе эволюции инварианты Γ и Θ являются однозначными функциями I :

$$\Gamma = F(I), \quad \Theta = \varphi(I),$$

где конкретный вид входящих зависимостей определяется из начальных данных. С учетом этого факта и соотношений

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r}, \quad P = \Theta \rho^\gamma = \varphi(I) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right)^\gamma$$

система (47) сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{F^2(I)}{r^3} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\varphi(I) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right)^\gamma \right] &= 0, \\ \frac{dI}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Стационарное решение этой системы (циклострофический баланс) находится из замкнутого уравнения

$$\left(\frac{1}{r} \frac{dI}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left[\varphi(I) \left(\frac{1}{r} \frac{dI}{dr} \right)^\gamma \right] = \varepsilon \gamma \frac{F^2(I)}{r^3} \quad (48)$$

в соответствии с начальными условиями. Уравнение (48) является обобщением (27) на случай неизэнтропических движений. При $M \ll 1$ для таких движений можно построить асимптотическую теорию приспособления, аналогичную рассмотренной в разд. 3. Основное качественное различие состоит в появлении дисперсии акустических волн. Для неизэнтропических движений также можно показать справедливость вариационного принципа минимума полной энергии.

Весьма важным является также исследование процесса циклострофического приспособления для осесимметричных движений, зависящих от координаты z вдоль оси вихря. Помимо состояний циклострофического баланса соответствующая система уравнений имеет также множество других стационарных решений с отличными от нуля радиальной и вертикальной компонентами скорости (винтовых течений). Появление движений в плоскости r, z

приводит к перераспределению температуры, однако, поскольку скорости этих движений обычно существенно меньше тангенциальной скорости, основной вклад в формирование радиального градиента температуры вносит центробежная сила.

7. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВИХРЕВОГО ЭФФЕКТА РАНКА

Рассмотренный механизм циклострофического приспособления может служить одним из объяснений вихревого эффекта Ранка.

Несбалансированное вихревое возмущение, формирующееся в трубке Ранка на выходе из завихрителя, видимо, очень быстро эволюционирует к сбалансированному состоянию с резко выраженной радиальной температурной стратификацией. В пользу этого механизма говорят следующие экспериментальные факты:

1) отрицательные температуры воздуха на холодном конце трубки Ранка наблюдаются лишь при скоростях вращения порядка половины скорости звука и более;

2) в приосевой зоне трубки Ранка наблюдается охлаждение газа, вблизи стенок — нагрев;

3) работа вихревых трубок сопровождается интенсивным акустическим шумом (волновая часть решения);

4) эффективное охлаждение газа наблюдается уже непосредственно вблизи выхода закрученного потока из завихрителя.

Первые три факта наблюдались практически во всех экспериментальных исследованиях. Что касается последнего факта, данные о радиальном распределении температуры в различных сечениях трубки Ранка приведены, например, в [9, 10, 13]. Из этих данных следует, что наиболее низкие температуры на оси трубки Ранка действительно наблюдаются непосредственно вблизи выхода газового потока из завихрителя (см. рис. 1); с увеличением расстояния от завихрителя радиальный градиент температуры заметно убывает. Однако значительные габариты использованных в этих работах датчиков температуры и их выводов, приводили к возмущению параметров закрученного потока внутри трубки и, соответственно, к искажению поля температуры. Например, ввод в трубку Ранка датчика температуры приводил к уменьшению температуры на выходе из трубки примерно на 4°C [13, рис. 5.46].

С целью получения более точных данных о радиальном распределении температуры в трубке Ранка, мы провели специальные эксперименты [23]. Ка-

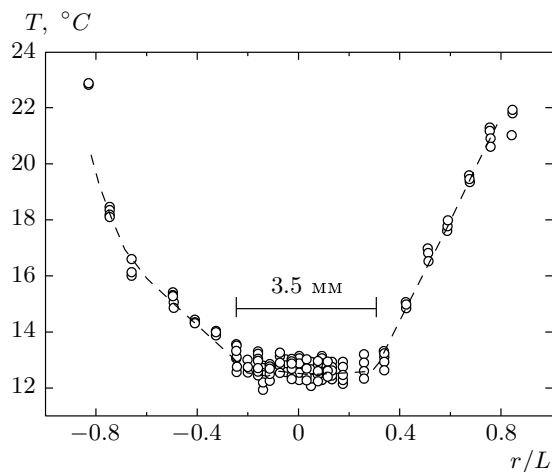


Рис. 6. Распределение температуры в одном сечении трубки Ранка по данным эксперимента

ра энергетического разделения (длина 125 мм, внутренний диаметр трубки 12 мм) была изготовлена из прозрачного материала (оргстекла). Для измерения температуры внутри камеры были подобраны миниатюрные бескорпусные терморезисторы (микродатчики). Примерное положение микродатчика (диаметр датчика 0.28 мм, диаметры выводов 0.03 мм) показано выше на рис. 1. Микродатчик вводился внутрь камеры энергетического разделения через отверстия диаметром 0.5 мм, а концы выводов крепились на неподвижном каркасе. Трубка Ранка помещалась на подвижную платформу и с помощью микрометрического винта передвигалась относительно неподвижного каркаса (и микродатчиков) с шагом 0.25 мм. Температура на холодном и горячем концах трубки, а также температура подаваемого сжатого воздуха контролировались с помощью обычных термодатчиков диаметром 2–3 мм. Никаких мер по теплоизоляции трубки не принималось. Данные всех датчиков вводились в ЭВМ с частотой дискретизации около 300 Гц и в дальнейшем усреднялись. Погрешность единичного измерения температуры составляла 0.4°C . Температура окружающего воздуха была $24.5\text{--}25.5^\circ\text{C}$, температура подаваемого в трубку воздуха $24.0\text{--}24.5^\circ\text{C}$. Как показали измерения, предпринятые меры позволили избежать влияния датчиков температуры на параметры потока (показания датчиков на холодном и горячем концах трубки Ранка в пределах погрешности измерений не зависели от присутствия микродатчика и его положения внутри трубки).

На рис. 6 для примера приведено радиальное распределение температуры на расстоянии 30 мм от за-

вихрителя. Поток воздуха (100 л/мин) и избыточное давление (1 атм) на входе в трубку Ранка и поток воздуха через холодный конец трубки (10–12 л/мин) поддерживались постоянными. Это соответствовало тангенциальной скорости в завихрителе примерно 100–120 м/с. Из рис. 6 видно, что даже при таких небольших давлениях вблизи завихрителя происходит эффективное охлаждение приосевого потока воздуха, хотя при этом на холодном конце трубки понижение температуры составляло только 1 °С, а на горячем конце температура повысилась на 1–2 °С. Перепад температуры вблизи оси трубки составил около 10–12 °С, что согласуется с качественной оценкой, полученной в разд. 2 для сконцентрированного вихря.

Отметим, что экспериментальная зависимость несколько асимметрична относительно оси трубки, что, возможно, указывает на наличие неоднородностей воздушного потока внутри трубки (жгутов или трубок тока) [30]. Из рис. 6 видно также, что вблизи оси трубки имеется «плато» с примерно постоянной температурой. Размер плато немного меньше диаметра диафрагмы на холодном конце трубки (5 мм). Погрешность измерений температуры в этой области, как правило, была существенной, что указывает, возможно, на нестационарную пространственную структуру центрального потока.

Разумеется, не все наблюдаемые особенности вихревого эффекта Ранка можно объяснить в рамках рассмотренной простой одномерной модели. Одна из таких особенностей состоит в формировании приосевых возвратных течений, для описания которых нужна пространственная модель. Скорости возвратных течений, однако, существенно меньше тангенциальной скорости (на два–три порядка [3, 13]), так что радиальный градиент давления (пропорциональный градиенту температуры для изэнтропических движений) должен уравниваться центробежной силой. Основное назначение вторичных возвратных течений, на наш взгляд, состоит в транспортировке холодного воздуха через соответствующую диафрагму трубки Ранка. В эффективном использовании этих течений, возможно, и заключается смысл инженерных решений [31, 32], повысивших холодопроизводительность трубки Ранка за счет возмущения структуры воздушных потоков с помощью самосогласующихся или спиралевидных элементов.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено рациональное объяснение вихревого эффекта Ранка — формирования аномально низ-

ких (отрицательных) температур на оси быстровращающегося газового потока в вихревой трубке. Показано, что подобные температуры устанавливаются в процессе приспособления осесимметричных движений идеального газа к состояниям циклострофического баланса (баланса между градиентом давления и центробежной силой). Теоретическое исследование процесса приспособления выполнено в рамках системы уравнений газовой динамики, для которой рассмотрена задача с несбалансированными начальными данными. Решение задачи представлено в виде суммы стационарной (сбалансированной) и нестационарной (волновой) компоненты. Сформулирована нелинейная краевая задача для нахождения сбалансированной компоненты по начальным данным, изучена структура сбалансированных состояний для различных типов начальных распределений тангенциальной скорости. Теоретически анализ дополнен экспериментальными данными о радиальном распределении температуры в различных сечениях трубки Ранка. Показано, что максимальное падение температуры наблюдается вблизи выхода закрученного потока из завихрителя, где и происходит процесс циклострофического приспособления.

Подчеркнем, что процесс приспособления изучен в рамках достаточно простой осесимметричной модели, не учитывающей трение и специфику геометрии конкретных вихревых труб. Эта модель, однако, описывает основную особенность вихревого эффекта Ранка — интенсивное охлаждение газа при быстрых вращениях. Для описания других особенностей, связанных с конструкцией завихрителей, трением, формированием приосевых возвратных течений, необходима разработка более сложных пространственных моделей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-08-96434) и Международного научно-технического центра (проект G-1217). Авторы благодарны А. А. Заренкову за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. J. Ranque, *J. de Phys. et le Radium Series* **4**, 1125 (1933).
2. R. Hilsch, *Rev. Sci. Instrum.* **18**, 108 (1947).
3. А. П. Меркулов, *Вихревой эффект и его применение в технике*, Машиностроение, Москва (1969).
4. А. И. Азаров, *Хим. нефт. машин.* **7**, 24 (2004).

5. I. L. Khodorkov, N. V. Poshernev, and M. A. Zhidkov, *Chem. Petrol. Eng.* **39**, 409 (2003).
6. А. Ф. Гуцол, *УФН* **167**, 665 (1997).
7. М. А. Гольдштик, *Вихревые потоки*, Наука, Новосибирск (1981).
8. A. J. Reynolds, *Z. Angew. Math. Phys.* **12**, 343 (1961).
9. А. И. Гуляев, *ИФЖ* **10**, 3, 326 (1966).
10. А. В. Мартынов, В. М. Бродянский, *ИФЖ* **12**, 644 (1967).
11. В. Е. Финько, *ЖТФ* **53**, 1770 (1983).
12. M. Kurosaka, *J. Fluid Mech.* **124**, 139 (1982).
13. Ф. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред, *Закрученные потоки*, Мир, Москва (1987).
14. Ш. А. Пиралишвили, В. М. Поляев, М. Н. Сергеев, *Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения*, Энергомаш, Москва (2000).
15. E. L. Tagunin and O. N. Alikina, in *Proc. Int. Conf. "Recent Development in Appl. Math. and Mech."*, Novosibirsk, June 2001, Vol. 6 (2001), p. 363.
16. J. Mischner and V. I. Bespalov, *Forschung im Ingenieurwesen* **67**, DOI 10.107/s10010-002-0070-7 (2002).
17. А. И. Леонтьев, *Изв. РАН, сер. МЖГ* вып. 2, 6 (2002).
18. M. Perez-Saborid, M. A. Herrada, A. Gomez-Barea, and A. Barrero, *J. Fluid Mech.* **471**, 51 (2002).
19. K. N. Visheratin, V. I. Vasiljev, S. M. Kolomiets, and A. A. Zarenkov, in *Proc. 3rd Int. Heat Powered Cycles Conf.*, Cyprus, October 2004, ISBN 01874418353, CD-ROM, 1203.pdf (2004).
20. B. A. Shannak, *Heat Mass Transf.* **40**, 779 (2004).
21. О. В. Казанцева, Ш. А. Пиралишвили, А. А. Фузеева, *ТВТ* **43**, 606 (2005).
22. K. Dincer, S. Baskaya, and B. Z. Uysal, *Heat Mass Transf.*, DOI 10.1007/s00231-007-0241-z (2007).
23. K. N. Visheratin and M. V. Kalashnik, *Int. J. Low Carb. Techn.* **2/1**, 10 (2007).
24. М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский, *Вязкие течения с парадоксальными свойствами*, Наука, Новосибирск (1989).
25. М. В. Калашник, П. Н. Свиркунов, *ДАН* **344**, 233 (1995).
26. А. М. Обухов, *Изв. АН СССР, сер. Геофиз. и географ.* **13**, 281 (1949).
27. А. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, т. 1, Мир, Москва (1986).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
29. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, *Вариационное исчисление*, Физматгиз, Москва (1961).
30. В. А. Арбузов, Ю. Н. Дубнищев, А. В. Лебедев и др., *Письма в ЖТФ* **23**, 84 (1997).
31. В. И. Васильев, К. Н. Вишератин, А. А. Заренков, С. М. Коломиец, Патент РФ № 2205335 от 08.11.2001, Бюлл. изобрет. № 15 (2003).
32. В. И. Васильев, К. Н. Вишератин, А. А. Заренков, С. М. Коломиец, Патент РФ № 2211414 от 25.01.2002, Бюлл. изобрет. № 24 (2003).