

# ДИНАМИЧЕСКАЯ СПИНОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ДЫРОЧНЫХ ВТСП В МОДЕЛИ СИНГЛЕТНО-КОРРЕЛИРОВАННОЙ ЗОНЫ ПРОВОДИМОСТИ

М. В. Еремин<sup>a,\*</sup>, А. А. Алеев<sup>a</sup>, И. М. Еремин<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Казанский государственный университет  
420008, Казань, Россия

<sup>b</sup> Max-Planck Institute für Physik komplexer Systems  
D-01187, Dresden, Germany

Поступила в редакцию 2 июля 2007 г.

Выведено выражение для динамической спиновой восприимчивости дырочных ВТСП с учетом сильной взаимосвязи намагниченностей локализованных и коллективизированных электронов. В качестве приложения рассчитано поведение мнимой части восприимчивости как функции частоты и волнового вектора. Результаты сравниваются с экспериментальными данными по неупругому рассеянию нейтронов в соединениях типа  $YBa_2Cu_3O_{6+y}$ . Пик в интенсивности рассеяния на энергиях порядка 40 мэВ в области волнового вектора  $Q = (\pi, \pi)$  и дугообразный рельеф интерпретируются как проявление коллективных спиновых колебаний системы, энергия которых находится внутри сверхпроводящей щели (спиновый экситон).  $U$ -образно расходящийся рельеф в интенсивности рассеяния нейтронов связывается с коллективными спиновыми колебаниями ближнего порядка (short range order).

PACS: 71.27.+a, 74.72.-h

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе магнитной восприимчивости ВТСП на современном этапе развития теории выделяются два подхода. Первый из них базируется на хорошо развитой теории металлов и учитывает сильные корреляции, свойственные ВТСП-соединениям, в рамках обычного приближения случайных фаз (RPA). Применительно к проблеме описания неупругого рассеяния нейтронов в рамках этого подхода удается объяснить происхождение резонансного пика, наблюдающегося в сверхпроводящей фазе в области волновых векторов  $Q = (\pi, \pi)$  при энергиях нейтронов порядка 40 мэВ [1]. Пик появляется в результате обращения в нуль действительной части знаменателя восприимчивости, когда корневые частоты попадают в область прозрачности из-за сверхпроводящей щели  $d$ -типа. В соединениях типа  $YBa_2Cu_3O_{6+y}$  на волновом векторе  $Q = (\pi, \pi)$  область прозрачности составляет порядка 60–70 мэВ [2]. Основной па-

раметр расчета в схеме RPA — параметр обменного взаимодействия носителей тока  $U$ , значение которого оказывается порядка 0.2–0.3 эВ [3, 4], однако происхождение такого значения  $U$  остается не ясным.

Другой популярной микроскопической моделью для описания электронного строения зоны проводимости является модель, в которой операторами рождения и уничтожения носителей тока являются композитные образования (операторы хаббардовского типа) [5, 6]. Большое достоинство ее в том, что она описывает переход диэлектрик–металл, имеющий место в этих соединениях. Исходя из данных фотоэмиссии и ЯМР, считается, что в дырочных ВТСП носители тока, главным образом, распределяются по позициям кислорода. При этом сильное обменное взаимодействие дырок на позициях кислорода с локализованными дырками на позициях меди расщепляет кислородную зону на две подзоны. Нижней оказывается подзона с ярко выраженными синглетными корреляциями дырок меди и кислорода (модель синглетно-коррелированной зоны [7–9]). В плане техники использования хаббардовских опера-

\*E-mail: Mikhail.Eremin@ksu.ru

торов данную зону можно считать аналогом верхней хаббардовской подзоны. Параметр обменного взаимодействия между спинами меди ожидается примерно таким же, как и для родительских непроводящих купратов, где он, согласно данным по рассеянию нейтронов, составляет величину порядка 0.13 эВ. Расчет спиновой восприимчивости с использованием композитных операторов достаточно сложен. В ряде работ (см., например, [10, 11]) считается, что наиболее подходящим способом расщепления уравнений движения является метод Цванцига–Мори. На основе этого подхода, в частности, утверждается, что пик в рассеянии нейтронов, главным образом, связан с колебаниями локализованных моментов, свойственными двумерной решетке спинов с короткодействующими антиферромагнитными корреляциями. Это качественно иной вывод по сравнению с RPA.

В данной работе, комбинируя методы расщепления уравнений в представлении проекционных операторов [12–14] и метод RPA, мы вывели качественно новое выражение для спиновой восприимчивости, учитывающее двойственный характер магнетизма в ВТСП. При равенстве нулю чисел заполнения полученное выражение для спиновой восприимчивости переходит в соответствующее выражение для восприимчивости двумерной системы локализованных спинов. При малых же значениях спиновых корреляторов формула соответствует стандартному приближению RPA. Применительно к задаче о рассеянии нейтронов в дырочных ВТСП наш результат соответствует выводу приближения RPA. Пик в рассеянии нейтронов при энергиях 40 мэВ — свидетельство существования новых коллективных спиновых колебаний в сверхпроводящем состоянии (спиновый экситон), при этом проблема интерпретации происхождения довольно большой величины параметра  $U$  в схеме RPA снимается.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ. ЭНЕРГИЯ КВАЗИЧАСТИЦ

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij} \psi_i^{pd,\sigma} \psi_j^{\sigma,pd} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[ \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \frac{n_i n_j}{4} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij} \delta_i \delta_j = H_t + H_J + H_G. \quad (2.1)$$

Здесь  $\psi_i^{pd,\sigma} (\psi_j^{\sigma,pd})$  — операторы рождения (уничтожения) композитных квазичастиц в зоне проводимости. Например, оператор  $\psi_i^{pd,\uparrow}$  приближенно записывается в виде

$$\psi_i^{pd,\uparrow} \approx \left[ X_i^{\uparrow,\downarrow} P_i^{\uparrow,0} - X_i^{\uparrow,\uparrow} P_i^{\downarrow,0} \right] / \sqrt{2},$$

где  $X_i^{p,q}$  и  $P_i^{p,q}$  — хаббардовские операторы, относящиеся соответственно к  $d$ -дыркам  $\text{Cu}^{2+}$  и  $p$ -дыркам  $\text{O}^{1-}$ . Подробные выражения для операторов  $\psi_i^{pd,\sigma}$  с учетом синглетного состояния  $\text{Cu}^{3+}$  и нейтрального состояния кислорода приведены в работе [8]. Выписывать их сейчас нет необходимости, так как в рамках однозонного приближения условия полноты и нормировки приводят к тому, что антикоммутаторные соотношения рассматриваемых операторов рождения и уничтожения записываются как для верхней хаббардовской зоны, т. е.

$$\{ \psi_i^{pd,\uparrow}, \psi_j^{\uparrow,pd} \} = \frac{1 + \delta_i}{2} + s_i^z,$$

где  $\delta_i = \psi_i^{pd,pd}$  — оператор числа допированных дырок в расчете на одну элементарную ячейку. Символ « $pd$ » соответствует синглетным образованиям из дырок меди и кислорода. Второе слагаемое в формуле (2.1) описывает суперобменное взаимодействие спинов, последнее слагаемое учитывает взаимодействие типа плотность–плотность.

Для нахождения закона дисперсии составляем и линеаризируем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k^{\uparrow,pd}}{\partial t} = \left[ \psi_k^{\uparrow,pd}, (H_t + H_J + H_G) \right]. \quad (2.2)$$

Линеаризация проводится путем проектирования. Произведения операторов, появляющиеся в результате вычисления коммутаторов в формуле (2.2), проектируются на подпространство операторов рождения и уничтожения.

Так, произведение операторов  $(\psi_j^{pd,pd} + \psi_j^{\uparrow\uparrow}) \psi_s^{\uparrow,pd}$  записываем в виде разложения

$$t_{js} (\psi_j^{pd,pd} + \psi_j^{\uparrow\uparrow}) \psi_s^{\uparrow,pd} = \sum_n \varepsilon_{jsn}^t \psi_n^{\uparrow,pd} + \sum_n \Delta_{jsn}^t \psi_n^{pd,\downarrow}. \quad (2.3)$$

Коэффициенты  $\varepsilon_{jsn}^t$ ,  $\Delta_{jsn}^t$  находятся из условия равенства усредненных антикоммутаторов левой и правой частей (2.3) с операторами рождения или уничтожения. Такая линеаризация использовалась в ряде работ [9, 12, 13]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jns}^t &= \frac{t_{ls}}{P} \left[ P^2 + \langle S_s^z S_l^z \rangle \right] \delta_{ns}, \\ \Delta_{jns}^t &= \frac{t_{js}}{P} \langle \psi_j^{\downarrow,pd} \psi_s^{\uparrow,pd} \rangle \delta_{jn}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $P = (1 + \delta)/2$  — средние значения антикоммутатора операторов рождения и уничтожения композитных квазичастиц,  $\delta$  — среднее число носителей в расчете на одну элементарную ячейку. Появление спиновых корреляторов у интегралов перескока физически вполне понятно. При наличии антиферромагнитных корреляций в системе локализованных спинов интегралы перескока должны подавляться [9, 15].

Произведения операторов, содержащих спин или плотность заряда, проектируем частично. Так, для произведения операторов  $\psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, pd}$  запишем

$$t_{js} \psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, pd} = t_{js} \psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, pd} (1 - F_t) + t_{js} F_t \psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, pd} = t_{js} (1 - F_t) S_j^+ \psi_s^{\downarrow, pd} + [\varepsilon_{jsn}^{tr} \psi_n^{\uparrow, pd} + \Delta_{jsn}^{tr} \psi_n^{pd, \downarrow}]. \quad (2.5)$$

Параметр расщепления  $F_t$  вводится для сохранения членов, играющих важную роль в приближении случайных фаз. В схеме проектирования по [9, 11–13] этими членами пренебрегают. Ниже проектируется только часть оператора в (2.5), а именно произведение  $t_{js} F_t \psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, pd}$ , оставшаяся же часть будет учитываться как в приближении случайных фаз. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jsn}^{tr} &= t_{js} \frac{F_t}{P} \times \\ &\times [\langle \psi_j^{\uparrow, \downarrow} \psi_s^{\downarrow, \uparrow} \rangle \delta_{ns} + \langle \psi_j^{pd, \uparrow} \psi_s^{\downarrow, pd} \rangle \delta_{nj}], \quad (2.6) \\ \Delta_{jsn}^{tr} &= -t_{js} \frac{F_t}{P} \langle \psi_j^{\uparrow, pd} \psi_s^{\downarrow, pd} \rangle \delta_{nj}. \end{aligned}$$

Использованная схема — это фактически такая комбинация приближения случайных фаз и техники проектирования Цванцига–Мори [16, 17], при которой получаются результаты РРА в случае простых металлов. С физической точки зрения, параметр  $F_t$  предназначен для сохранения эффектов молекулярного поля со стороны спинов и допированных дырок. Более того, оказывается, что этот параметр очень важен и для обеспечения условия устойчивости. Не во всякой процедуре проектирования мнимые части зарядовой и спиновой восприимчивости являются положительными. Вообще, по-видимому, можно ввести три параметра: по кинетической энергии ( $F_t$ ), по обменному взаимодействию ( $F_J$ ) и по кулоновскому взаимодействию ( $F_G$ ).

В итоге такой процедуры линеаризации, собрав все члены вместе, получаем

$$\begin{aligned} &[\psi_k^{\uparrow, pd}, (H_t + H_J + H_G)] = \\ &= \varepsilon_k \psi_k^{\uparrow, pd} + \Delta_k \psi_{-k}^{pd, \downarrow} + \frac{1 - F_t}{N} \sum_{\mathbf{q}} t_{k-q} \psi_{k-q}^{\downarrow, pd} S_q^+ - \\ &- \frac{F_J}{N} \sum_{\mathbf{q}} J_q \psi_{k-q}^{\downarrow, pd} S_q^+ + \frac{F_G}{N} \sum_{\mathbf{q}} G_q \psi_{k-q}^{\uparrow, pd} \delta_q. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь

$$G_q = \sum_i G_{ij} e^{i\mathbf{q}R_{ij}}, \quad J_q = J_1 (\cos q_x a + \cos q_y a). \quad (2.8)$$

В изложенной схеме расщепления выражения для энергии квазичастиц и для параметра порядка перехода в сверхпроводящее состояние имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \sum_l t_{jl} \left[ \frac{1 + \delta}{2} + \frac{2}{1 + \delta} (1 + 2F_t) \langle S_j^z S_l^z \rangle \right] e^{i\mathbf{k}R_{jl}} - \\ &- \sum_l \left( \frac{2G_{jl}(1 - F_G)}{1 + \delta} \langle \psi_l^{pd, \uparrow} \psi_j^{\uparrow, pd} \rangle + \right. \\ &\left. + \frac{J_{jl}(1 - F_J)}{1 + \delta} \langle \psi_l^{pd, \downarrow} \psi_j^{\downarrow, pd} \rangle \right) e^{i\mathbf{k}R_{jl}}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{1}{PN} \sum_{\mathbf{k}'} [J(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\uparrow, pd} \psi_{-\mathbf{k}'}^{\downarrow, pd} \rangle - \\ &- J(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (1 - F_J) \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\downarrow, pd} \psi_{-\mathbf{k}'}^{\uparrow, pd} \rangle - \\ &- F_G G(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\uparrow, pd} \psi_{-\mathbf{k}'}^{\downarrow, pd} \rangle] + \frac{1}{PN} \times \\ &\times \sum_{\mathbf{k}'} t_{\mathbf{k}'} [\langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\downarrow, pd} \psi_{-\mathbf{k}'}^{\uparrow, pd} \rangle - F_t \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{\downarrow, pd} \psi_{-\mathbf{k}'}^{\uparrow, pd} \rangle]. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь  $t_k = \sum_j t_{ij} \exp(i\mathbf{k}R_{ij})$  — фурье-образы интегралов перескока. Выражение для закона дисперсии  $\varepsilon_k$  можно записать в виде, типичном для случая сильной связи:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= 2t_{eff}^{(1)} (\cos k_x a + \cos k_y a) + \\ &+ 4t_{eff}^{(2)} \cos k_x a \cos k_y a + \\ &+ 2t_{eff}^{(3)} (\cos 2k_x a + \cos 2k_y a) + \dots \quad (2.11) \end{aligned}$$

При этом эффективные параметры зоны определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 t_{eff}^{(1)} &= t_1 \left[ P + \frac{1/2 + F_t}{1 + \delta} K_1 \right] - \\
 &\quad - \frac{J_1(1 - F_J) + 2G_1(1 - F_G)}{2N} \times \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{k}'} f_{k'} \cos k'_x a, \\
 t_{eff}^{(2)} &= t_2 \left[ P + \frac{1/2 + F_t}{1 + \delta} K_2 \right] - \\
 &\quad - \frac{J_2(1 - F_J) + 2G_2(1 - F_G)}{2N} \times \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{k}'} f_{k'} \cos k'_x a \cos k'_y a, \\
 t_{eff}^{(3)} &= t_3 \left[ P + \frac{1/2 + F_t}{1 + \delta} K_3 \right] - \\
 &\quad - \frac{J_3(1 - F_J) + 2G_3(1 - F_G)}{2N} \times \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{k}'} f_{k'} \cos 2k'_x a.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Расчет спин-спиновых корреляционных функций  $K_n = 4\langle S_0^z S_n^z \rangle$  проводится самосогласованно через динамическую спиновую восприимчивость. В процессе расчета проверяется выполнение условия  $\langle S_i^+ S_i^- \rangle = (1 - \delta)/2$  (правило сумм). Для получения предварительных затравочных значений используются полуэмпирические соображения.

Следует отметить, что наличие операторов плотности и спина в правой части формулы (2.7), в общем случае, может изменить формулу для дисперсии квазичастиц и привести к псевдощелевым эффектам в плотности состояний на уровне Ферми. Сейчас в качестве первого приближения мы рассматриваем случай, когда эффекты молекулярного поля не существенны в дисперсии квазичастиц, но важны при рассмотрении восприимчивости. Согласно имеющимся экспериментальным данным о псевдощелевом состоянии в ВТСП, есть основания считать, что рассматриваемое нами приближение подходит для соединений с индексом допирования, близким к оптимальному.

В заключение этого раздела отметим интересную особенность в поведении площади занятых состояний в первой зоне Бриллюэна. Если предположить, что энергия квазичастичных возбуждений не зависит от числа дырок, то из уравнения для химического потенциала

$$\delta = \frac{1 + \delta}{2} \sum_k f(\varepsilon_k - \mu)$$

немедленно следует (аналог теоремы Латтинжера для простых металлов), что площадь, ограниченная контуром Ферми, нарастает с увеличением  $\delta$  как

$2\delta/(1 + \delta)$  и половинное заполнение зоны реализуется при  $\delta = 1/3$ . В нашем случае в формулы (2.12) входят спиновые корреляторы, абсолютные значения которых убывают по мере увеличения  $\delta$ . Это обстоятельство приводит к тому, что нарастание площади, ограниченной контуром Ферми, происходит быстрее, чем определяется отношением  $2\delta/(1 + \delta)$ .

### 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СПИНОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В НОРМАЛЬНОЙ ФАЗЕ

Общая формула для спиновой восприимчивости имеет вид

$$\chi_{total}^{+,-}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{F(\omega, \mathbf{q}) + L_q}{D(\omega, \mathbf{q}) + \Lambda_q^2 - \omega^2}. \tag{3.1}$$

Вывод ее вынесен в Приложение А. В формуле (3.1)

$$\begin{aligned}
 L_q &= -2J_1 K_1 (2 - c_q) - \\
 &\quad - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_k)(t_{k+q} - t_k), \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

где  $c_q = \cos q_x a + \cos q_y a$ ,  $n_k = \langle \psi_k^{pd,\sigma} \psi_k^{\sigma,pd} \rangle = P f_k$  — числа заполнения. Знаки первого и второго членов в (3.2) ожидаются разными (из физических соображений), так как перескоки электрона происходят с сохранением ориентации спина и, следовательно, способствуют ферромагнитным корреляциям локальных спинов.

Функция

$$\begin{aligned}
 \Lambda_q^2 &= \Omega_q^2 + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \\
 &\quad \times \{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k - \\
 &\quad - [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} \} \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

при использованных нами параметрах  $t$  и  $J$  всегда положительна и имеет смысл квадрата частоты локальных колебаний спинов. Как уже отмечалось в работах [18, 19], частота локальных колебаний изменяется при появлении носителей.

Выражение для частоты магнной моды в отсутствие носителей  $\Omega_q$  записываем в форме, предложенной в работе [11]:

$$\Omega_q^2 = 2J_1^2 \alpha |K_1| (2 - c_q) (\Delta_{sp} + 2 + c_q), \tag{3.4}$$

где  $\Delta_{sp}$  — безразмерный параметр спиновой щели [11], характеризующий, насколько близко частота затравочной магнной моды подходит к нулю при  $Q = (\pi, \pi)$ ,  $\alpha$  — безразмерный параметр расщепления в духе Кондо – Ямаджи [11, 14, 20, 21], определяемый из правила сумм  $\langle s_i^+ s_i^- \rangle = (1 - \delta)/2$ .

Функция

$$D(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\zeta_{t\varepsilon}}{\zeta(\omega, \mathbf{q})} \eta(\omega, \mathbf{q}) - n_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) \quad (3.5)$$

имеет размерность энергии, зависит от параметров зоны и обменного интеграла,

$$F(\omega, \mathbf{q}) = \chi(\omega, \mathbf{q}) \frac{\zeta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q})}{\zeta(\omega, \mathbf{q})} - \chi_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) \quad (3.6)$$

— перенормированная восприимчивость свободных квазичастиц (в энергетических единицах).

Вспомогательные функции, которые являются общими для формул (3.5) и (3.6), имеют вид

$$\chi(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \chi_{kq} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{k+q} - n_k}{\omega + \varepsilon_k - \varepsilon_{k+q}}, \quad (3.7)$$

$$\eta(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \eta_{kq} = J_q F_J \chi(\omega, \mathbf{q}) - \frac{1 - F_t}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{t_{k+q} n_{k+q} - n_k t_k}{\omega + \varepsilon_k - \varepsilon_{k+q}}, \quad (3.8)$$

$$\zeta(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{kq} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega + \varepsilon_k - \varepsilon_{k+q}}, \quad (3.9)$$

$$\chi_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \chi_{kq}, \quad (3.10)$$

$$\eta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \eta_{kq}, \quad (3.11)$$

$$\zeta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \zeta_{kq}. \quad (3.12)$$

О получении формулы (3.1), без вывода, предварительно сообщалось в работе [22]. Отметим, что

формуле (3.1) можно придать еще и другой вид. В самом деле, рассмотрим следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \chi_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \chi_{kq} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k - \omega) \chi_{kq} + \\ &\quad + \frac{\omega}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \chi_{kq} = \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (n_{k+q} - n_k) + \\ &\quad + \frac{\omega}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \chi_{kq}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первое слагаемое справа в формуле (3.13) совпадает с одним из слагаемых в формуле (3.2). При подстановке (3.13) в (3.1) эти два слагаемых взаимно сокращаются. Заметив, что

$$\begin{aligned} \eta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \eta_{kq} = \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \{ [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} - \\ &\quad - [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k \} + \\ &\quad + \frac{\omega}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \eta_{kq}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\zeta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) = \omega \zeta_t(\omega, \mathbf{q}), \quad (3.15)$$

обнаруживаем в (3.1) еще два сокращающихся члена.

Указанные соотношения позволяют записать спиновую восприимчивость в виде

$$\chi_{total}^{+,-}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\omega \chi(\omega, \mathbf{q}) \zeta_t(\omega, \mathbf{q}) - [\omega \chi_t(\omega, \mathbf{q}) + 2J_1 K_1 (2 - c_q)] \zeta(\omega, \mathbf{q})}{\omega \eta(\omega, \mathbf{q}) \zeta_t(\omega, \mathbf{q}) + [\Omega_q^2 - \omega^2 - \omega \eta_t(\omega, \mathbf{q})] \zeta(\omega, \mathbf{q})}, \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_t(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \zeta_{kq}, \\ \chi_t(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \chi_{kq}, \\ \eta_t(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \eta_{kq}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Выражение (3.16) выглядит сложнее по сравнению с (3.1), однако значительно упростилась входящие в него функции, поэтому численный рас-

чет по формуле (3.16) оказывается более эффективным. Интересно отметить, что в предположении  $\varepsilon_k = P_{eff} t_k$  (такое соотношение выполняется в приближении Хаббард I) наша формула по ее структуре может быть преобразована в выражение, полученное в работе [14] (при переопределении некоторых функций). В нашем случае соотношение  $\varepsilon_k = P_{eff} t_k$  не выполняется. Как видно из формул (2.12), оно оправдано лишь в пренебрежении спин-спиновыми и другими корреляционными функциями в законе дисперсии.

**4. ФОРМУЛА ДЛЯ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПРИ  $T < T_c$**

Общая структура формул (3.1) и (3.16) сохраняет свой вид при  $T < T_c$ . Детали вывода вынесены в Приложение В. В формуле (3.16) меняется лишь вид вспомогательных функций. Вместо функций (3.7), (3.8) и (3.9) имеем их обобщение на случай  $T < T_c$ :

$$\begin{aligned} \chi(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \chi_{kq} = \\ &= \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} S_{xx} \frac{f_{k+q} - f_k}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \\ &+ \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} S_{yy} \frac{f_k - f_{k+q}}{\omega + i\Gamma - E_k + E_{k+q}} + \\ &+ \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} S_{yx}^{(-)} \frac{f_k + f_{k+q} - 1}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} + \\ &+ \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} S_{xy}^{(+)} \frac{1 - f_k - f_{k+q}}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \eta(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \eta_{kq} = J_q F_j \chi(\omega, \mathbf{q}) - \frac{P(1 - F_t)}{N} \times \\ &\times \left\{ \sum_{\mathbf{k}} S_{xx} \frac{t_{k+q} f_{k+q} - t_k f_k}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \right. \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} S_{yy} \frac{t_{k+q}(1 - f_{k+q}) - t_k(1 - f_k)}{\omega + i\Gamma - E_k + E_{k+q}} + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} S_{yx}^{(-)} \frac{t_{k+q} f_{k+q} - t_k(1 - f_k)}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} + \\ &\left. + \sum_{\mathbf{k}} S_{xy}^{(+)} \frac{t_{k+q}(1 - f_{k+q}) - t_k f_k}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{kq} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{xx}}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{yy}}{\omega + i\Gamma - E_k + E_{k+q}} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{yx}^{(-)}}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{xy}^{(+)}}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для сокращения записи факторов когерентности используются обозначения

$$\begin{aligned} S_{xx} &= x_k x_{k+q} + z_k z_{k+q}, \\ S_{yy} &= y_k y_{k+q} + z_k z_{k+q}, \\ S_{xy}^{(+)} &= x_k y_{k+q} - z_k z_{k+q}, \\ S_{yx}^{(-)} &= y_k x_{k+q} - z_k z_{k+q}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= u_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k} \right], \\ y_k &= v_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k} \right], \\ z_k &= u_k v_k = \frac{\Delta_k}{2E_k}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При этом соотношения (3.17) сохраняются.

**5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ**

В качестве примера мы рассчитывали мнимую часть восприимчивости как функцию частоты и волнового вектора для сверхпроводников типа  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+y}$ . Фермиконтур таких соединений известен по данным фотоэмиссионных спектров (подробный обзор приведен в работе [2]). В элементарной ячейке имеются два слоя  $\text{CuO}_2$ . Из-за туннелирования носителей между слоями зона проводимости расщепляется на связывающую и антисвязывающую. Это расщепление достаточно велико, поэтому можем ограничиться однозонным приближением. Закон дисперсии связывающей зоны в пренебрежении эффектами псевдощели приблизительно описывается набором эффективных параметров  $t_{eff}^{(1)} = 250$  мэВ,  $t_{eff}^{(2)} = -50$  мэВ,  $t_{eff}^{(3)} = 0$ , соответствующих экспериментально наблюдаемой поверхности Ферми. Параметр  $P$  был принят равным 0.67. Кулоновское взаимодействие в уравнении (2.12) оценивалось по формуле

$$G(R) = \frac{e^2}{R} \exp(-\sigma_0 R),$$

где  $\sigma_0 \approx 10^{10} \text{ м}^{-1}$  — параметр экранирования. При этом оказалось, что роль кулоновских поправок относительно мала, поэтому возможные уточнения вида кулоновского псевдопотенциала в данной работе обсуждаться не будут. Главный эффект перенормировки интегралов перескока связан с фактором  $P$  и со спиновыми корреляторами  $K_n$ , значение которых ( $K_1 \approx -0.17$ ,  $K_2 \approx 0.04$ ) оценивалось самосогласованно с учетом правила сумм. В итоге самосогласования параметры гамильтониана оказались равными  $t_1 = 415$  мэВ,  $t_2 = -72$  мэВ,  $t_3 = 0$ ,  $\mu = 160$  мэВ. Решение интегрального уравнения (2.10) так же, как и ранее [23–25] (когда параметр  $F_t$  был равен 1), при  $J_1 > G_1$  и любых значениях  $F_t$  дает

$$\Delta_k = \frac{\Delta_0}{2} (\cos k_a a - \cos k_y a). \quad (5.1)$$

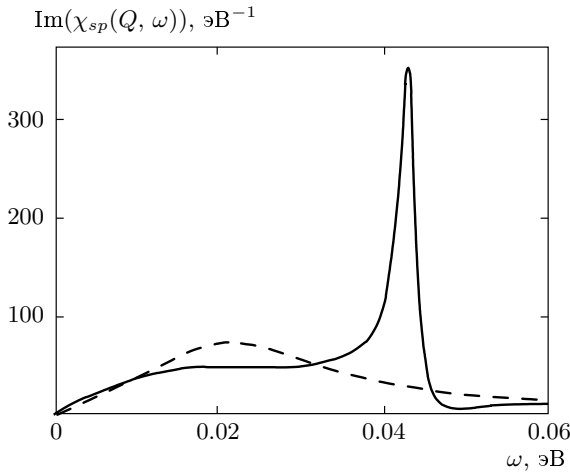


Рис. 1. Мнимая часть спиновой восприимчивости при  $T = 10$  К (сплошная линия — сверхпроводящая фаза) и  $T = 100$  К (штриховая — нормальная фаза) на волновом векторе  $Q = (\pi, \pi)$

Поскольку вид псевдопотенциала кулоновского взаимодействия пока не известен, ниже, при расчетах восприимчивости, параметр сверхпроводящей щели берем в соответствии с экспериментальными данными [2]:  $\Delta_0 = 30$  мэВ. Область возможных изменений параметра расщепления  $F_t$  выбиралась в соответствии с условием устойчивости вещества, т. е. таким образом, чтобы мнимые части зарядовой (формула для нее при выбранном методе проектирования будет приведена в отдельной работе) и спиновой восприимчивостей были положительными при любых частотах и волновых векторах.

На рис. 1 представлен результат численного расчета мнимой части спиновой восприимчивости по формуле (3.16) с использованием следующих значений параметров:  $J_1 = 115$  мэВ,  $F_t = 0.3$ ,  $F_J = 0.7$  и  $\alpha = 1$ . Штриховая линия рассчитана при  $T = 100$  К. Это соответствует нормальной фазе. Сплошная линия рассчитана при  $T = 10$  К, что соответствует  $T < T_c$ . Видно, что в сверхпроводящей фазе имеется резкий пик. Оба графика в основных особенностях соответствуют имеющимся экспериментальным данным для  $YBa_2Cu_3O_{6+y}$  с  $0.7 < y < 1$ . Подробный обзор их приведен в работе [1].

На рис. 2а,б представлены двумерные графики мнимой части спиновой восприимчивости при тех же значениях параметров соответственно в нормальной и сверхпроводящей фазах. Видно, что в высокочастотной области имеется  $U$ -образный рельеф. Он выражен более четко, нежели в приближении RPA, и связан с наличием члена  $\Omega_q^2$  в зна-

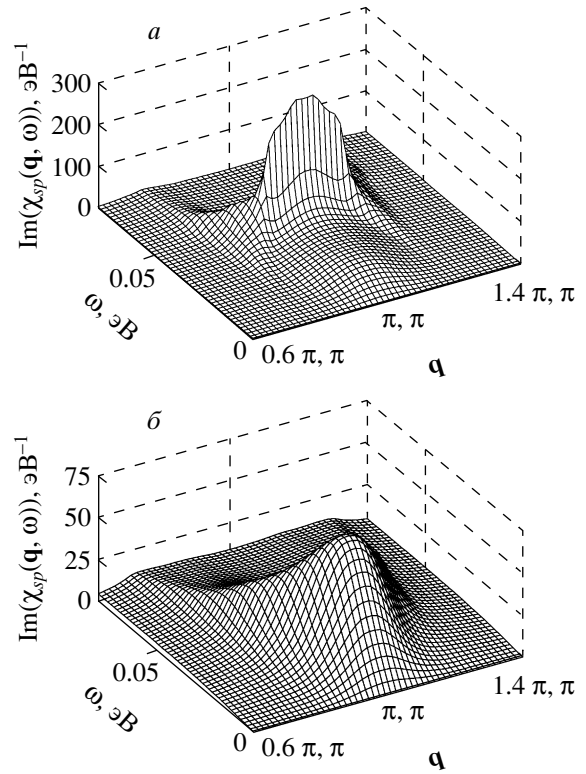


Рис. 2. Двумерные графики мнимой части восприимчивости: а — в сверхпроводящей фазе (отн. ед.,  $T = 10$  К) как функции частоты (в эВ) и волнового вектора  $q_x/a$  (в ед.  $\pi$ ) при  $q_y/a = \pi$ , б — в нормальной фазе при  $T = 100$  К

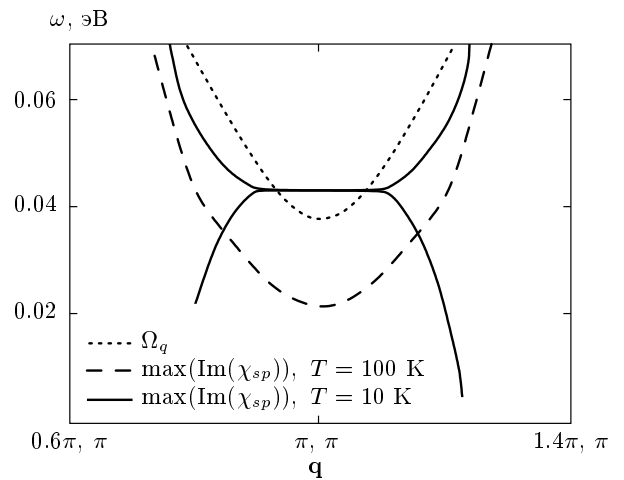


Рис. 3. Контур максимальных значений мнимой части восприимчивости  $\chi_{total}^{+,-}(\omega, \mathbf{q})$ ; сплошная линия — сверхпроводящая фаза, штриховая — при  $T > T_c$ , пунктирная соответствует  $\Omega_q$

менателе (3.16), т. е. это проявление коррелированных колебаний локализованных спинов (short range order). В сверхпроводящей и в нормальной фазах  $U$ -образные рельефы разные. Это объясняется изменением функции  $\zeta(\omega, \mathbf{q})$ , которая содержит характеристики носителей тока и, в частности, сверхпроводящую щель. Интересно отметить, что изменения в графике мнимой части при  $T < T_c$  имеют место и на масштабах энергий, больших энергетической щели. Это связано с изменением знаменателя функции (3.16), который является общим как для локализованной, так и для коллективизированной (itinerant) компонент. Пик в мнимой части восприимчивости при  $T < T_c$  объясняет происхождение резонансного рассеяния нейтронов [1]. Он появляется из-за обращения в нуль действительной части знаменателя и, следовательно, интерпретируется аналогично тому, как это делается в схеме RPA. В терминах работы [3] это спиновый экситон, так как энергия коллективных колебаний находится внутри сверхпроводящей щели  $2\Delta_0 \approx 60$  мэВ. Вместе с тем следует подчеркнуть, что наша картина мнимой части восприимчивости богаче схемы RPA. Во-первых, лучше воспроизводится так называемая X-shape (огibaющая максимальных значений восприимчивости, см. рис. 3), наблюдаемая в рассеянии нейтронов [26–28]. Рассчитанная нами огibaющая максимальных значений восприимчивости приведена на рис. 3 и вполне «укладывается» на экспериментальный контур, полученный для  $YBa_2Cu_3O_{6.75}$  [26]. Во-вторых (и это может оказаться особенно важным для микроскопической теории спаривания через коллективные возбуждения), в отличие от схемы RPA, согласно нашим расчетам, уже в нормальной фазе имеются коллективные колебания, характерные для низкоразмерных спиновых систем (см. расходящийся  $U$ -образный рельеф на высоких частотах на рис. 2б). С физической точки зрения, он может быть интерпретирован как проявление антиферромагнитных корреляций ближнего порядка. Такой порядок отсутствует в схеме RPA. В ней усиление мнимой части восприимчивости на низких частотах принято связывать с колебаниями парамагнетного типа [29]. В нашем случае, мы имеем нечто среднее между парамагнетонами и корреляциями ближнего порядка. В отличие от случая корреляций ближнего порядка действительная часть знаменателя функции (3.16) не обращается в нуль, а лишь имеет минимум, как в случае парамагнетонов. Интерпретация в пользу корреляций ближнего порядка основана на сходстве в поведении графиков огibaющей максимумов восприимчивости в нормальной фазе и  $\Omega_q$  (см.

рис. 3). Значение энергии (частоты), соответствующей максимуму восприимчивости в нормальной фазе, по-видимому, может быть названо параметром спиновой (или «парамагнетной») щели.

Подводя итог проведенному рассмотрению, можно заключить, что предложенное выражение для динамической спиновой восприимчивости описывает дуальный характер магнетизма в дырочных ВТСП. С одной стороны, это магнетизм коллективизированных дырок, могущих перейти в сверхпроводящее состояние, а с другой — имеются характерные черты магнетизма систем, состоящих из локализованных моментов с короткодействующими антиферромагнитными корреляциями. У функции восприимчивости общий знаменатель и, следовательно, мода коллективных спиновых колебаний общая. Спиновые подсистемы (local and itinerant) настолько сильно переплетены между собой, что говорить о каждой из них порознь не имеет смысла. Выведенная нами формула дает качественно новое представление о магнетизме в дырочных ВТСП.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-17197-а) и при частичной поддержке Swiss National Science Foundation (грант № IB7420-110784). Авторы благодарны А. А. Андрееву за проверку вывода формулы (3.1) и полезные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Вывод формулы для спиновой восприимчивости в нормальной фазе

Оператор фурье-компоненты спина имеет вид

$$S_q^+ = \sum_i \psi_i^{\uparrow, \downarrow} e^{-i\mathbf{q}R_i}. \quad (A.1)$$

Вычисляем коммутатор

$$[S_q^+, H_t] = \sum_{\mathbf{k}} (t_{\mathbf{k}} - t_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) \psi_{\mathbf{k}}^{pd, \downarrow} \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\uparrow, pd}. \quad (A.2)$$

Для функции Грина получаем уравнение

$$\omega \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = - \sum_{\mathbf{k}'} (t_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - t_{\mathbf{k}'}) \langle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^{pd, \downarrow} \psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle + \sum_{i,l} J_{il} e^{-i\mathbf{q}R_i} \langle \langle S_i^+ S_i^z - S_i^z S_i^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (A.3)$$

Считаем, что дальнего магнетного порядка нет, т. е.

$$\left\langle \sum_i S_i^z \right\rangle = 0. \quad (A.4)$$



Сосредоточим вначале внимание на функции Грина

$$G_{it}(\omega, t) = - \sum_{\mathbf{k}'} (t_{k'+q} - t_{k'}) \langle \langle \psi_{k'}^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Она относится к коллективизированным электронам (itinerant).

Перейдя к представлению операторов на узлах решетки, получаем

$$\psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} = \frac{1}{N} \sum_{ij} \psi_j^{pd, \downarrow} \psi_i^{\uparrow, pd} \times \exp [i\mathbf{k}R_j - i(\mathbf{k} + \mathbf{q})R_i]. \quad (\text{A.6})$$

Видно, что эти операторы удовлетворяют следующему тождеству:

$$\sum_{\mathbf{k}} \psi_{k+q}^{pd, \downarrow} \psi_k^{\uparrow, pd} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Ниже это тождество будет использоваться в виде

$$\sum_{\mathbf{k}} \langle \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle = 0. \quad (\text{A.8})$$

Для  $T > T_c$ , используя уравнение (2.7), получаем

$$\begin{aligned} \omega \langle \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( \langle \psi_{k+q}^{pd, \uparrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} \rangle - \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_k^{\downarrow, pd} \rangle \right) \times \\ &\quad \times (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} - \\ &- \frac{1}{N} \left\{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_k^{\downarrow, pd} \rangle - \right. \\ &- [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] \langle \psi_{k+q}^{pd, \uparrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd} \rangle \left. \right\} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle - \\ &- \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} (\varepsilon_{k'+q} - \varepsilon_{k'}) \langle \langle \psi_{k'}^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в формуле (A.9) появилось в качестве компенсации произведения операторов с  $i = j$ . Такие произведения в (A.6) равны нулю и это обстоятельство учтено при дифференцировании произведения операторов  $\psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k+q}^{\uparrow, pd}$  по правилам разд. 2. Уравнения (A.9) приближенные, но мы подчиним их точному тождеству (A.8). Отсюда получаем уравнение

$$0 = \frac{iN}{2\pi} \chi(\omega, \mathbf{q}) + \frac{1}{N} \eta(\omega, \mathbf{q}) \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle + \zeta(\omega, \mathbf{q}) D_{it}(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{A.10})$$

Здесь появилась вспомогательная функция Грина

$$D_{it}(\omega, \mathbf{q}) = - \sum_{\mathbf{k}'} (\varepsilon_{k'+q} - \varepsilon_{k'}) \langle \langle \psi_{k'}^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle,$$

которая, как будет видно ниже, войдет еще в одно уравнение. Из формулы (A.10) мы запишем

$$D_{it}(\omega, t) = - \frac{1}{\zeta(\omega, \mathbf{q})} \times \left\{ \frac{iN}{2\pi} \chi(\omega, \mathbf{q}) + \frac{1}{N} \eta(\omega, \mathbf{q}) \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Для сокращения записи (A.10) и (A.11) мы вводим функции  $\chi(\omega, \mathbf{q})$ ,  $\eta(\omega, \mathbf{q})$  и  $\zeta(\omega, \mathbf{q})$  (3.7)–(3.9).

Для установления новых соотношений запишем вторую производную по времени:

$$- \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_q^+ = \omega^2 S_q^+ = [[S_q^+, H], H]. \quad (\text{A.12})$$

Соответствующее уравнение для функции Грина имеет вид

$$\begin{aligned} \omega \left\langle \left\langle i \frac{\partial}{\partial t} S_q^+ | S_{-q}^- \right\rangle \right\rangle &= \omega^2 \langle \langle S_{-q}^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = \\ &= \omega \langle \langle [S_q^+, H] | S_{-q}^- \rangle \rangle = \frac{i}{2\pi} \langle \langle [S_q^+, H], S_{-q}^- \rangle \rangle - \\ &- \sum_{\mathbf{k}'} (t_{k'+q} - t_{k'}) \langle \langle \psi_{k'}^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle + \\ &+ \sum_{i,l} J_{il} e^{-i\mathbf{q}R_i} \langle \langle [(S_l^+ S_i^z - S_l^z S_i^+), H] | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Подсчитываем коммутатор:

$$\begin{aligned} \langle \langle [S_q^+, H], S_{-q}^- \rangle \rangle &= -2N J_1 K_1 (2 - c_q) + \\ &+ 2N \sum_l t_{0l} n_{0l} (e^{iqR_{0l}} - 1) = \\ &= -2N J_1 K_1 (2 - c_q) - \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_{\mathbf{k}}) (t_{k+q} - t_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

где  $n_{0l} = \langle \psi_0^{pd, \uparrow} \psi_l^{\uparrow, pd} \rangle$  имеет смысл амплитуды вероятности перескока композитной дырки с узла на узел,  $c_q = \cos q_x a + \cos q_y a$ , а  $n_{\mathbf{k}}$  — числа заполнения. Такое слагаемое есть в работе [18], однако вторая строка равенства (A.14) удобнее для расчета, так как по первой строке надо как-то обрывать число соседей. Расчет функции Грина

$$\begin{aligned} \sum_{i,l} J_{il} e^{-i\mathbf{q}R_i} \langle \langle [(S_l^+ S_i^z - S_l^z S_i^+), H] | S_{-q}^- \rangle \rangle &= \\ &= \Omega_q^2 \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

проводился рядом авторов [11, 14, 18–21]. Здесь мы будем использовать форму записи (3.4), предложенную в работе [11].

Второй член справа в (А.13) рассчитываем, как и в (А.9):

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \langle \langle [\psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd}, H] | S_{-q}^- \rangle \rangle = \\ & = - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \langle \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k - \\ & - [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} \} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (\text{А.16}) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\sum_{\mathbf{k}} t_k = 0$ , так как начало отсчета энергии совмещено с центром зоны.

После подстановки (3.4), (А.16) в уравнение (А.13) оно приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 - \Omega_q^2 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \right. \\ & \quad \times \{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k - \\ & \quad \left. - [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} \} \right\} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = -\frac{i}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ 2N J_1 K_1 (2 - c_q) + \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_k) (t_{k+q} - t_k) \right\} - \\ & - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \times \\ & \quad \times \langle \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle. \quad (\text{А.17}) \end{aligned}$$

Перепишем (А.9) в более компактном виде

$$\begin{aligned} \langle \langle \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_{k'+q}^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle & = \frac{iN}{2\pi} \chi_{kq} + \\ & + \frac{1}{N} \eta_{kq} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle + \frac{\zeta_{kq}}{N} D_{it}(\omega, t) \quad (\text{А.18}) \end{aligned}$$

и подставим в (А.17):

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 - \Omega_q^2 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \right. \\ & \times \{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k - [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} \} + \\ & \left. + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \eta_{kq} \right\} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = \\ & = -\frac{i}{2\pi} \left\{ 2N J_1 K_1 (2 - c_q) + \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_k) (t_{k+q} - t_k) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \chi_{kq} \right\} - \\ & - \frac{D_{it}(\omega, \mathbf{q})}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \zeta_{kq}. \quad (\text{А.19}) \end{aligned}$$

Теперь, имея уравнения (А.19) и (А.11), мы можем исключить вспомогательную функцию  $D_{it}(\omega, \mathbf{q})$  и получить уравнение для полной функции  $\langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle$ . Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 - \Omega_q^2 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \right. \\ & \times \{ [F_J J_q - t_k (1 - F_t)] n_k - [F_J J_q - t_{k+q} (1 - F_t)] n_{k+q} \} + \\ & \left. + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \eta_{kq} - \frac{\zeta_{t\varepsilon}(\omega, q)}{\zeta(\omega, q)} \eta(\omega, \mathbf{q}) \right\} \times \\ & \quad \times \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = -\frac{i}{2\pi} \times \\ & \quad \times \left\{ -N \frac{\chi(\omega, q)}{\zeta(\omega, q)} \zeta_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) + 2N J_1 K_1 (2 - c_q) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_k) (t_{k+q} - t_k) + N \chi_{t\varepsilon}(\omega, \mathbf{q}) \right\}. \quad (\text{А.20}) \end{aligned}$$

И наконец, используя известное соотношение между функцией Грина  $\langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle$  и поперечной спиновой восприимчивостью, получаем формулу (3.1).

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Вывод формулы для спиновой восприимчивости при $T < T_c$

При рассмотрении сверхпроводящей фазы удобно сразу ввести операторы боголюбовских квазичастиц. Выразим через них произведение

$$\begin{aligned} \psi_k^{pd, \downarrow} \psi_p^{\uparrow, pd} & = u_k u_p \alpha_k^{pd, \downarrow} \alpha_p^{\uparrow, pd} - u_k v_p \alpha_k^{pd, \downarrow} \alpha_{-p}^{pd, \downarrow} + \\ & + v_k u_p \alpha_{-k}^{\uparrow, pd} \alpha_p^{\uparrow, pd} - v_k v_p \alpha_{-k}^{\uparrow, pd} \alpha_{-p}^{pd, \downarrow} \quad (\text{В.1}) \end{aligned}$$

и затем сконструируем уравнения для функций Грина

$$\langle \langle \alpha_k^{pd, \downarrow} \alpha_p^{\uparrow, pd} | S_{-q}^- \rangle \rangle, \quad \langle \langle \alpha_k^{pd, \downarrow} \alpha_{-p}^{pd, \downarrow} | S_{-q}^- \rangle \rangle,$$

$$\langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle, \quad \langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_{-p}^{pd,\downarrow}|S_{-q}^-\rangle\rangle.$$

При этом следует помнить, что случай равных индексов ( $i = j$ ) в (А.6) соответствует нулевому вкладу и должен быть исключен при взятии производных.

Так, уравнение для функции  $\langle\langle\alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle$  принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega + E_k - E_p)\langle\langle\alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle = \\ = \frac{i}{2\pi}(u_k u_p + v_k v_p)(n_p - n_k) + \frac{1}{N}(u_k u_p + v_k v_p) \times \\ \times \{[F_J J_q - t_p(1 - F_t)]n_p - [F_J J_q - t_k(1 - F_t)]n_k\} \times \\ \times \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + (u_k u_p + v_k v_p) \frac{1}{N} D_{it}(\omega, \mathbf{q}), \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

где  $n_k = \langle\langle\alpha_k^{pd,\sigma}\alpha_k^{\sigma,pd}\rangle\rangle = P f_k$  — числа заполнения в сверхпроводящем состоянии,  $E_k = \sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + |\Delta_k|^2}$ ,

$$f_k = [1 + \exp E_k/k_B T]^{-1} \quad (\text{B.3})$$

— функция Ферми.

Следующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega + E_k + E_{-p})\langle\langle\alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_{-p}^{pd,\downarrow}|S_{-q}^-\rangle\rangle = \\ = \frac{i}{2\pi}(u_k v_p - v_k u_p)(n_{-p} + n_k - P) + \frac{1}{N}(u_k v_p - v_k u_p) \times \\ \times \{[F_J J_q - t_k(1 - F_t)]n_k - \\ - [F_J J_q - t_p(1 - F_t)](P - n_{-p})\} \times \\ \times \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + (u_k v_p - v_k u_p) \frac{1}{N} D_{it}(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Уравнения для третьей и четвертой функций выписываются аналогично:

$$\begin{aligned} (\omega - E_{-k} - E_p)\langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle = \\ = \frac{i}{2\pi}(u_k v_p - v_k u_p)(P - n_{-p} - n_k) + \\ + \frac{1}{N}(u_k v_p - v_k u_p) \{[F_J J_q - t_k(1 - F_t)] \times \\ \times (P - n_{-k}) - [F_J J_q - t_p(1 - F_t)]n_p\} \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + \\ + (u_k v_p - v_k u_p) \frac{1}{N} D_{it}(\omega, \mathbf{q}), \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\omega + E_{-k} - E_{-p})\langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_{-p}^{pd,\downarrow}|S_{-q}^-\rangle\rangle = \\ = \frac{i}{2\pi}(u_k u_p + v_k v_p)(n_p - n_k) + \frac{1}{N}(u_k u_p + v_k v_p) \times \\ \times \{[F_J J_q - t_k(1 - F_t)](P - n_k) - \\ - [F_J J_q - t_p(1 - F_t)](P - n_p)\} \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + \\ + (u_k u_p + v_k v_p) \frac{1}{N} D_{it}(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Умножая уравнения (B.2), (B.4), (B.5) и (B.6) соответственно на  $u_k u_p/(\omega + E_k - E_p)$ ,  $-u_k v_p/(\omega + E_k + E_p)$ ,  $v_k u_p/(\omega - E_k - E_p)$  и  $-v_k v_p/(\omega + E_k - E_p)$ , после суммирования получаем обобщение (A.9) на случай сверхпроводящего состояния:

$$\begin{aligned} \langle\langle\psi_k^{pd,\downarrow}\psi_{k+q}^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\chi_{kq} + \\ + \frac{1}{N}\eta_{kq}(\omega, q)\langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + \\ + \frac{\zeta_{kq}(\omega, q)}{N} G_{it}(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Отметим, что структуры формул (A.18) и (B.7) совпадают. При этом получаются функции (4.1), (4.2) и (4.3).

Вместо выражения (A.16) при  $T < T_c$  получаем

$$\begin{aligned} - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \langle\langle [\psi_{k'}^{pd,\downarrow}\psi_{k'+q}^{\uparrow,pd}, H] | S_{-q}^- \rangle\rangle = \\ = - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \left\{ (E_{k+q} - E_k) u_k u_{k+q} \times \right. \\ \times \langle\langle \alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_{k+q}^{\uparrow,pd} | S_{-q}^- \rangle\rangle + (E_{k+q} + E_k) u_k v_{k+q} \times \\ \times \langle\langle \alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_{-k-q}^{pd,\downarrow} | S_{-q}^- \rangle\rangle \left. \right\} - \\ - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \left\{ (E_{k+q} + E_k) v_k u_{k+q} \times \right. \\ \times \langle\langle \alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_{k+q}^{\uparrow,pd} | S_{-q}^- \rangle\rangle + (E_{k+q} - E_k) v_k v_{k+q} \times \\ \times \langle\langle \alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_{-k-q}^{pd,\downarrow} | S_{-q}^- \rangle\rangle \left. \right\} + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \\ \times \{[F_J J_q - t_k(1 - F_t)] [f_k(x_k - y_k) + y_k] - \\ - [F_J J_q - t_{k+q}(1 - F_t)] [f_{k+q}(x_{k+q} - y_{k+q}) + y_{k+q}] \} \times \\ \times \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle. \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Фигурирующие в правой части функции Грина  $\langle\langle\alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle$ ,  $\langle\langle\alpha_k^{pd,\downarrow}\alpha_{-p}^{pd,\downarrow}|S_{-q}^-\rangle\rangle$ ,  $\langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_p^{\uparrow,pd}|S_{-q}^-\rangle\rangle$  и  $\langle\langle\alpha_{-k}^{\uparrow,pd}\alpha_{-p}^{pd,\downarrow}|S_{-q}^-\rangle\rangle$  находим из уравнений (B.2), (B.4)–(B.6). Тогда формула (B.8) приобретает вид

$$\begin{aligned} - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \langle\langle [\psi_{k'}^{pd,\downarrow}\psi_{k'+q}^{\uparrow,pd}, H] | S_{-q}^- \rangle\rangle = \\ = - \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \left\{ \frac{i}{2\pi}\chi_{Ekq} + \frac{1}{N}\eta_{Ekq}\langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle + \right. \\ \left. + \zeta_{Ekq} \frac{1}{N} D_{it}(\omega, q) \right\} + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \times \\ \times \left[ (J_q - t_k) f_k \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k} - (J_q - t_{k+q}) f_{k+q} \frac{\varepsilon_{k+q} - \mu}{E_{k+q}} - \right. \\ \left. - t_k y_k + t_{k+q} y_{k+q} \right] \langle\langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle\rangle, \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \chi_{Ekq} = & PS_{xx}(E_{k+q} - E_k) \frac{f_{k+q} - f_k}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \\ & + PS_{yy}(E_k - E_{k+q}) \frac{f_k - f_{k+q}}{\omega + i\Gamma - E_k + E_{k+q}} + \\ & + PS_{yx}^{(-)}(E_{k+q} + E_k) \frac{f_k + f_{k+q} - 1}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} - \\ & - PS_{xy}^{(+)}(E_{k+q} + E_k) \frac{1 - f_k - f_{k+q}}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}}, \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{Ekq} = & PS_{xx}(E_{k+q} - E_k) \frac{t_{k+q}f_{k+q} - t_k f_k}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \\ & + PS_{yy}(E_k - E_{k+q}) \frac{t_{k+q}(1 - f_{k+q}) - t_k(1 - f_k)}{\omega + i\Gamma - E_k + E_{k+q}} + \\ & + PS_{yx}^{(-)}(E_{k+q} + E_k) \frac{f_{k+q}f_{k+q} - t_k(1 - f_k)}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} - \\ & - PS_{xy}^{(+)}(E_{k+q} + E_k) \frac{t_{k+q}(1 - f_{k+q}) - t_k f_k}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}}, \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{Ekq} = & (E_{k+q} - E_k) \frac{S_{xx}}{\omega + i\Gamma + E_k - E_{k+q}} + \\ & + (E_k - E_{k+q}) \frac{S_{yy}}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} + \\ & + (E_k + E_{k+q}) \frac{S_{yx}^{(-)}}{\omega + i\Gamma - E_k - E_{k+q}} + \\ & + (-E_k - E_{k+q}) \frac{S_{xy}^{(+)}}{\omega + i\Gamma + E_k + E_{k+q}}. \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Далее, уравнение, аналогичное (A.20), приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 - \Lambda_q^2 + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \eta_{Ekq} \right\} \langle \langle S_q^+ | S_{-q}^- \rangle \rangle = \\ & = -\frac{i}{2\pi} \left\{ 2N J_1 K_1 (2 - c_q) + \sum_{\mathbf{k}} (n_{k+q} - n_k) (t_{k+q} - t_k) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \chi_{Ekq} \right\} - \\ & \quad - \frac{D_{it}(\omega, \mathbf{q})}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \zeta_{Ekq}, \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

где для величины  $\Lambda_q^2$  вместо формулы (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_q^2 = & \Omega_q^2 + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_p - t_k) \left\{ (x_k x_p + z_k z_p) \times \right. \\ & \times \left[ (J_q - t_k) \left( f_k - \frac{1}{2} \right) - (J_q - t_p) \left( f_p - \frac{1}{2} \right) \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_p - t_k) \left\{ (x_k y_p - z_k z_p) \left[ (J_q - t_k) \left( f_k - \frac{1}{2} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (J_q - t_p) \left( \frac{1}{2} - f_p \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_p - t_k) \left\{ (y_k x_p - z_k z_p) \left[ (J_q - t_k) \left( \frac{1}{2} - f_k \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (J_q - t_p) \left( f_p - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{P}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_p - t_k) \left\{ (y_k y_p + z_k z_p) \left[ (J_q - t_k) \left( \frac{1}{2} - f_k \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (J_q - t_p) \left( \frac{1}{2} - f_p \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Вид формулы (3.2) не меняется:

$$\begin{aligned} L_q = & -2J_1 K_1 (2 - c_q) - \\ & - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) [n_{k+q} - n_k], \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

однако числа заполнения в (B.15) при  $T < T_c$  вычисляются по правилу

$$\begin{aligned} n_k = & \langle \psi_k^{pd, \uparrow} \psi_k^{\uparrow, pd} \rangle = \\ & = P \langle (u_k \alpha_k^{pd, \uparrow} - v_k \alpha_{-k}^{\downarrow, pd}) (u_k \alpha_k^{\uparrow, pd} - v_k \alpha_{-k}^{pd, \downarrow}) \rangle = \\ & = u_k^2 \frac{P}{1 + \exp(E_k/k_B T)} + \\ & \quad + v_k^2 \frac{P}{1 + \exp(-E_k/k_B T)}. \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Общий вид формул (3.5) и (3.6) сохраняется, но вспомогательные функции меняют вид:

$$\chi_{tE}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \chi_{Ekq}, \quad (\text{B.17})$$

$$\eta_{tE}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \eta_{Ekq}, \quad (\text{B.18})$$

$$\zeta_{tE}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} (t_{k+q} - t_k) \zeta_{Ekq}. \quad (\text{B.19})$$

Вместо функций  $\chi_{tE}(\omega, \mathbf{q})$ ,  $\eta_{tE}(\omega, \mathbf{q})$  и  $\zeta_{tE}(\omega, \mathbf{q})$  имеем соответственно  $\chi_{tE}(\omega, \mathbf{q})$ ,  $\eta_{tE}(\omega, \mathbf{q})$  и  $\zeta_{tE}(\omega, \mathbf{q})$ . Таким образом, формулы для восприимчивости обеих фаз похожи, а функции  $D(\omega, \mathbf{q})$  и  $F(\omega, \mathbf{q})$  выглядят так:

$$D(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\zeta_{tE}(\omega, \mathbf{q})}{\zeta(\omega, \mathbf{q})} \eta(\omega, \mathbf{q}) - \eta_{tE}(\omega, \mathbf{q}), \quad (\text{B.20})$$

$$F(\omega, \mathbf{q}) = \chi(\omega, \mathbf{q}) \frac{\zeta_{tE}(\omega, \mathbf{q})}{\zeta(\omega, \mathbf{q})} - \chi_{tE}(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{B.21})$$

После упрощений функциональный вид окончательной формулы принимает тот же вид, что и в нормальной фазе (см. (3.16)).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Bourges, in *The Gap Symmetry and Fluctuations in High Temperature Superconductors*, ed. by J. Bok, G. Deutscher, D. Pavuna, and S. A. Wolf, Plenum, New York (1998).
2. A. Damascelli, Z. Hussin, and Z.-X. Shen, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 473 (2003).
3. I. Eremin, D. K. Morr, A. V. Chubukov et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 147001 (2005).
4. P. Schnyder, A. Bill, C. Mudry et al., *Phys. Rev. B* **70**, 214511 (2004).
5. P. W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987).
6. Ю. А. Изюмов, *УФН* **167**, 465 (1997); **169**, 225 (1999).
7. F. C. Zhang and T. M. Rice, *Phys. Rev. B* **37**, R3759 (1988).
8. М. В. Еремин, С. Г. Соловьянов, С. В. Варламов и др., *Письма в ЖЭТФ* **60**, 118 (1994); *J. Phys. Chem. Sol.* **56**, 1713 (1995); *ЖЭТФ* **112**, 1763 (1997).
9. N. M. Plakida, R. Haun, and J.-L. Richard, *Phys. Rev. B* **51**, 16599 (1995).
10. I. Sega, P. Prelovsek, and J. Bonca, *Phys. Rev. B* **68**, 054524 (2003).
11. A. Sherman and M. Schreiber, *Phys. Rev. B* **68**, 094519 (2003).
12. L. M. Roth, *Phys. Rev.* **184**, 451 (1969).
13. J. Beenen and D. M. Edwards, *Phys. Rev. B* **52**, 13636 (1995).
14. A. Yu. Zavidonov and D. Brinkmann, *Phys. Rev. B* **58**, 12486 (1998).
15. Д. И. Хомский, *ФММ* **29**, 31 (1970).
16. H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965).
17. R. Zwanzig, *Phys. Rev.* **124**, 983 (1961).
18. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 989 (1992).
19. S. Winterfeld and D. Ihle, *Phys. Rev.* **58**, 9402 (1998).
20. J. Kondo and K. Yamaji, *Prog. Theor. Phys.* **47**, 807 (1972).
21. Г. Джакели, Н. М. Плакида, *ТМФ* **114**, 426 (1998).
22. М. В. Еремин, А. А. Алеев, И. М. Еремин, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 197 (2006).
23. Е. И. Шнейдер, С. Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **128**, 974 (2005).
24. Н. М. Плакида, *Высокотемпературные сверхпроводники*, Международная программа образования, Москва (1996), с. 237.
25. М. В. Еремин, И. А. Ларионов, *Письма в ЖЭТФ* **62**, 192 (1995).
26. M. Arai, T. Nishijima, and Y. Endoh, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 608 (1999).
27. S. Pailhes, Y. Sidis, P. Bourges et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 167001 (2004).
28. D. Reznik, P. Bourges, and L. Pintschovius, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 207003 (2004).
29. R. White, *Quantum Theory of Magnetism*, Springer-Verlag (1983) [пер.: Р. Уайт, *Квантовая теория магнетизма*, Мир, Москва (1985)].