

КОНУСЫ ОПТИЧЕСКИХ ОСЕЙ В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ СО СКАЛЯРНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

В. И. Альшиц, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 июня 2007 г.

Построена теория вырождения электромагнитных волн в гиротропных кристаллах вблизи их точек изотропии (по температуре или другим параметрам), где вследствие дисперсии диэлектрическая проницаемость ϵ становится скаляром, а оптическая анизотропия всецело обусловлена гиротропией. Показано, что в условиях изотропии ϵ возникают замкнутые линии пересечения полостей поверхности рефракции, отвечающие конусам и, в частности, плоскостям оптических осей. При переходе через такие линии поляризационные характеристики волновых полей претерпевают скачок. Дан анализ условий существования и геометрии рассматриваемых конусов вырождения для кристаллов всех классов симметрии, допускающих оптическую активность. Показано, что при малом отклонении от изотропии ϵ линии вырождения исчезают, а поляризационные аномалии остаются. На месте линий могут остаться изолированные точки вырождения (одна или две), когда оптические оси возмущенного кристалла с «выключенной» гиротропией принадлежат исходному конусу.

PACS: 33.55.+b

1. ВВЕДЕНИЕ

Естественная оптическая активность (гиротропия) кристаллов — это специфическое проявление дискретности их атомной структуры, выражающееся в пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости. В уравнении связи электрической индукции \mathbf{D} с электрическим полем \mathbf{E} появляется малая добавка, пропорциональная градиенту $\nabla \otimes \mathbf{E}$ и имеющая порядок $a/\lambda \ll 1$, где a — параметр решетки, а λ — длина волны (см. [1–6]). Тем не менее, проявления гиротропии отнюдь не сводятся к малым поправкам и оказываются весьма существенными. Так, при падении линейно поляризованного света на оптически активную кристаллическую пластину толщиной около 1 мм плоскость поляризации может поворачиваться на десятки и даже сотни градусов, см. [5].

В данной работе будет рассмотрено влияние гиротропии на вырождение изонормальных электромагнитных волн. Будут изучены топологические

особенности поверхностей показателей преломления (рефракции) кристаллов, возникающие исключительно благодаря гиротропии. Как будет показано, эти особенности тесно связаны с аномалиями поляризационных характеристик волновых электромагнитных полей.

Поверхность показателей преломления кристалла — это геометрическое место концов векторов рефракции $\mathbf{n} = n\mathbf{m}$, проведенных из общей точки, когда единичный вектор волновой нормали \mathbf{m} сканирует поверхность сферы единичного радиуса. Здесь $n = c/v$ — показатель преломления, v — фазовая скорость электромагнитной волны, c — скорость света в вакууме. Рассматриваемая поверхность двуполостная: каждому направлению \mathbf{m} отвечают два, вообще говоря, различных показателя преломления, соответствующие двум независимым изонормальным волнам с различными скоростями и поляризациями. Для некоторых особых направлений скорости изонормальных волн совпадают — возникает вырождение. Полости поверхности рефракции для этих направлений имеют общие точки. Соответствующие

*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

направления распространения называют оптически-ми осями. В обычных кристаллах могут существовать либо одна, либо две оптические оси. Все зависит от симметрии кристалла и определяемой ею формы тензора диэлектрической проницаемости ϵ . При этом любые изменения его компонент, оставляющие их вещественными, принципиально не могут ликвидировать контакт между полостями поверхности рефракции. Однако учет гиротропии превращает тензор ϵ в комплексный эрмитовый, что приводит к новым качествам, не имеющим места в обычных кристаллах. В частности, оптические оси как направления вырождения могут исчезнуть — контакт между двумя полостями поверхности показателей преломления пропадает, полости как бы расталкиваются. Вдоль направлений исчезнувших вырождений с различными скоростями распространяются две циркулярно поляризованные волны с противоположными направлениями вращения. Именно это в итоге обуславливает поворот вектора поляризации линейно поляризованных волн, проходящих через оптически активный кристалл.

Анизотропия оптических свойств известных прозрачных кристаллов, как правило, мала. В самом деле, различие в значениях показателей преломления электромагнитных волн, распространяющихся по разным направлениям в кристалле, — это обычно проценты, максимум, 10–20 %, см. [4–8]. Тензор ϵ , будучи зависимым от температуры, длины волны, давления, внешнего электрического поля и т. д., при некоторых значениях соответствующих физических параметров может оказаться кратным единичному тензору $\mathbf{I} = \{\delta_{ij}\}$, т. е. $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, становясь шаровым. В результате, основной характеристикой диэлектрических свойств кристалла оказывается скаляр ϵ . Обе полости поверхности рефракции при этом «схлопываются», превращаясь в сферу, так что любое направление \mathbf{m} отвечает вырождению. Оптические свойства кристалла при этом будут точно такими же, как у изотропных тел и кубических кристаллов.

Если же кристалл гиротропен, а его диэлектрическая проницаемость — скаляр, то анизотропия рассматриваемых свойств целиком определяется оптической активностью. Как правило, вновь появляются две полости поверхности показателей преломления, которые, как мы далее увидим, либо вообще не имеют точек контакта, либо пересекаются по целым замкнутым линиям: направления вырождения электромагнитных волн образуют конусы и, в частности, плоскости оптических осей. Условия существования этих поверхностей будут проанализированы

для кристаллов всех классов симметрии, допускающих естественную оптическую активность. Мы исследуем геометрию контакта полостей и увидим, что при переходе через линию вырождения поляризационные характеристики волнового поля претерпевают резкий скачок. Будет показана также топологическая неустойчивость линий вырождения по отношению к анизотропному возмущению тензора ϵ .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При учете пространственной дисперсии кристалла электрическая индукция \mathbf{D} в каждой его точке зависит не только от электрического поля \mathbf{E} в данной точке $\mathbf{r} = (x, y, z)$, но и от поля в окрестности, что учитывается введением в стандартное соотношение для индукции пространственной производной [1]:

$$D_i(\mathbf{r}) = \epsilon E_i(\mathbf{r}) + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \quad (1)$$

В нашем рассмотрении диэлектрическая проницаемость ϵ — скаляр, а введенный в формуле (1) тензор гиротропии γ_{ikl} полностью определяет оптическую анизотропию. Он, как известно, антисимметричен при перестановках его первых двух индексов: $\gamma_{ikl} = -\gamma_{kil}$ [1–5]. Данный тензор инвариантен относительно всех операций, составляющих класс симметрии кристалла, и строго равен нулю в кристаллах, имеющих центр инверсии, см. [7].

Волновое поле плоской электромагнитной волны как функция координаты \mathbf{r} и времени t задается соотношением

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(0)} \end{pmatrix} e^{i\delta}, \quad (2)$$

$$\delta \equiv \delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega}{c}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct).$$

Здесь \mathbf{H} — магнитное поле, $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$ — векторные амплитуды, δ — фаза, ω — частота. Вместо волнового вектора \mathbf{k} в формуле (2) введен вектор рефракции $\mathbf{n} = n\mathbf{m} = (c/\omega)\mathbf{k}$.

Для волны (2) второй член в формуле (1), описывающий влияние гиротропии, принимает вид

$$\gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = i \left(\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} n_l \right) E_k. \quad (3)$$

Стоящий здесь в скобках антисимметричный тензор второго ранга удобно представить, используя дуальный ему аксиальный вектор гирации $\epsilon\mathbf{g}$:

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} m_l = \varepsilon e_{ikn} g_n \equiv -\varepsilon (\mathbf{g}^\times)_{ik},$$

$$\mathbf{g} = \frac{\omega}{n_0 c} (\gamma_{231} m_1, \gamma_{312} m_1, \gamma_{121} m_1), \quad n_0 = \sqrt{\varepsilon}, \quad (4)$$

где e_{ikl} — единичный полностью антисимметричный тензор Леви–Чивита. Теперь формула (1) переписывается в следующем компактном виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon (\mathbf{E} - i[\mathbf{g} \times \mathbf{E}]). \quad (5)$$

Это соотношение можно записать в обычном для анизотропных сред виде: $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$, где

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon [\delta_{ij} - i(\mathbf{g}^\times)_{ij}]. \quad (6)$$

Здесь первое слагаемое $\varepsilon \mathbf{I} \equiv \varepsilon^0$ является шаровым тензором, а тензор $i\mathbf{g}^\times$ обуславливает анизотропию оптических свойств среды.

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , формирующие волновое поле (2), удовлетворяют уравнениям Максвелла для плоских волн [1]:

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (7)$$

из которых вытекает следующее соотношение для индукции [7]:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \varepsilon^{-1} \mathbf{D} = \frac{1}{n^2} \mathbf{D}. \quad (8)$$

Входящий сюда обратный тензор ε^{-1} в линейном порядке по гиротропии простым образом выражается с помощью равенства (6):

$$\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{I} + i\mathbf{g}^\times). \quad (9)$$

При нулевой гиротропии $\gamma = 0$, когда диэлектрическая проницаемость ε кристалла скалярна, показатель преломления $n_0 = \sqrt{\varepsilon}$ не зависит от направления распространения \mathbf{m} . Слабое возмущение $\gamma \neq 0$ изменяет показатель преломления на величину Δn ($n = n_0 + \Delta n$), обычно весьма чувствительную к направлению распространения в кристалле. С учетом конкретной формы (9) тензора ε^{-1} общее уравнение (8) сводится к виду

$$(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) [i\mathbf{g} \times \mathbf{D}] = -\frac{2\Delta n}{n_0} \mathbf{D}. \quad (10)$$

С помощью этого уравнения мы проанализируем, во-первых, зависимость Δn от направления распространения \mathbf{m} : именно такой анализ позволит выявить топологические особенности самопересечения поверхности рефракции, возникающего благодаря

оптической активности. Во-вторых, на основе уравнения (10) будут выявлены аномалии поляризационных характеристик волнового поля, также обусловленные гиротропией.

Умножая уравнение (10) скалярно на \mathbf{D} с учетом ортогональности $\mathbf{D} \perp \mathbf{m}$ (7), нетрудно убедиться, что слева получается тождественный нуль, так что в результате имеем

$$\mathbf{D}^2 = 0. \quad (11)$$

Это значит, что структура комплексного вектора $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + i\mathbf{D}_2$ такова, что

$$|\mathbf{D}_1| = |\mathbf{D}_2|, \quad \mathbf{D}_1 \perp \mathbf{D}_2. \quad (12)$$

Таким образом, векторы \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 образуют с волновой нормалью \mathbf{m} тройку взаимно ортогональных векторов. Имея это в виду, из формулы (10) нетрудно найти

$$\Delta n_{\pm} = \pm \frac{n_0}{2} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{m}). \quad (13)$$

В соответствии с (4) вектор \mathbf{g} удобно представить в виде [1]

$$g_i = G_{ij} m_j. \quad (14)$$

Входящий сюда псевдотензор второго ранга $\mathbf{G} = \{G_{ij}\}$, называемый тензором гирации, связан с компонентами тензора гиротропии γ_{ikl} (1) выражением

$$G_{ij} = \frac{\omega}{n_0 c} \begin{pmatrix} \gamma_{231} & \gamma_{232} & \gamma_{233} \\ \gamma_{311} & \gamma_{312} & \gamma_{313} \\ \gamma_{121} & \gamma_{122} & \gamma_{123} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Таким образом, удобное для анализа решение для Δn принимает форму

$$\Delta n_{\pm} = \pm \frac{n_0}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{G} \mathbf{m}. \quad (16)$$

Отсюда видно, что учет влияния гиротропии на показатели преломления кристалла в рассматриваемом случае сводится к анализу свертки $m_i G_{ij} m_j$. Этот скаляр задает указательную поверхность тензора гирации \mathbf{G} . Вид этого тензора и его указательные поверхности хорошо известны для кристаллов различных классов симметрии [1–7].

Отметим, что на величину скаляра (16) не влияет антисимметричная часть тензора \mathbf{G} . Поэтому в кристаллах классов симметрии $3m$, $4mm$, $6mm$ и текстурах ∞m , где тензор \mathbf{G} антисимметричен, поверхность рефракции должна быть нечувствительна к параметрам гиротропии: $\Delta n \equiv 0$. С другой стороны, в гиротропных классах 23 , 432 и $\infty \infty$ в силу симметрии диэлектрическая проницаемость всегда

скалярна. При этом величина $\Delta n_{\pm} = \pm n_0 G_{11}/2$ одинакова для всех направлений распространения, т. е. исходная сферическая поверхность показателей преломления под влиянием гиротропии расщепляется на две концентрические сферы и вырождение отсутствует.

3. КОНУСЫ ОПТИЧЕСКИХ ОСЕЙ В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

3.1. Эллиптические и круговые конусы оптических осей

Такие конусы возникают в кристаллах и текстурах, классы симметрии которых образованы простыми поворотными осями и не содержат других операций симметрии. Рассмотрение удобно начать с анализа ромбических кристаллов группы 222.

3.1.1. Класс симметрии 222

В этом классе симметрии оси кристаллофизической системы координат направлены вдоль осей симметрии второго порядка. В этой системе

$$\Delta n_{\pm} = \pm \frac{n_0}{2} (G_{11} m_1^2 + G_{22} m_2^2 + G_{33} m_3^2). \quad (17)$$

Условие вырождения $\Delta n = 0$ может быть удовлетворено, только если знаки всех трех тензорных компонент G_{ij} в формуле (17) не являются одинаковыми. Пусть, например, знак компоненты G_{33} противоположен знаку компонент G_{11} и G_{22} . В этом случае удобно выразить вектор волновой нормали $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\theta, \varphi)$ в сферических координатах, отсчитывая полярный угол θ от оси z . В результате условие вырождения сводится к уравнению

$$(G_{11} \cos^2 \varphi + G_{22} \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + G_{33} \cos^2 \theta = 0, \quad (18)$$

которое определяет двуполостный эллиптический конус оптических осей, центральной осью которого является направление z (рис. 1). Угол раствора конуса $2\theta_0$ зависит от угла φ и определяется соотношением

$$\text{tg}^2 \theta_0 = \frac{-G_{33}}{G_{11} \cos^2 \varphi + G_{22} \sin^2 \varphi}. \quad (19)$$

Интересно отметить, что, несмотря на малость компонент G_{ij} , угол раствора конуса $2\theta_0(\varphi)$, вообще говоря, не мал: и в числителе, и в знаменателе дроби (19) стоят малые величины, отношение которых может принимать любые значения.

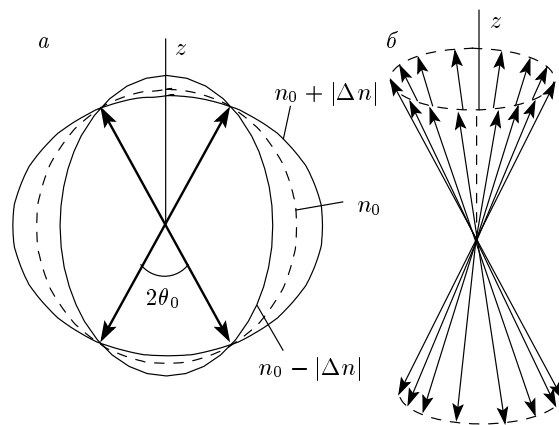


Рис. 1. Конусы оптических осей: сечение поверхности рефракции (а) и пространственная конфигурация конуса (б)

Очевидно, что при других соотношениях знаков компонент G_{ij} аналогичные конусы могут возникнуть вокруг осей x и y . При этом конусы возникают только вокруг какой-то одной оси, либо не появляются вообще (если знаки компонент G_{ij} в формуле (17) одинаковы).

В рассматриваемом случае полости поверхности рефракции пересекаются по замкнутым линиям. Вблизи линии вырождения поверхность рефракции описывается выражением

$$\Delta n_{\pm} \approx \pm (\Delta\theta) n_0 \sqrt{-G_{33} (G_{11} \cos^2 \varphi + G_{22} \sin^2 \varphi)}. \quad (20)$$

Это выражение показывает, что контакт между полостями носит клинообразный характер (рис. 1а, 2а).

Описываемое вырождение является топологически неустойчивым. Как будет показано ниже, при возмущении — небольшом отклонении тензора диэлектрической проницаемости от сферичности — контакт между полостями, как правило, разрывается и вырождение исчезает (рис. 2б). Однако в отдельных специальных случаях вместо линии могут остаться одна или две изолированные точки (см. разд. 5).

3.1.2. Классы симметрии 3, 32, 4, 422, 6, 622, ∞ , $\infty 2$

Соотношения (17)–(20) описывают также гиротропные среды следующих «незеркальных» классов: 3, 32, 4, 422, 6, 622, ∞ , $\infty 2$. В этих классах ось z стандартной кристаллофизической системы координат

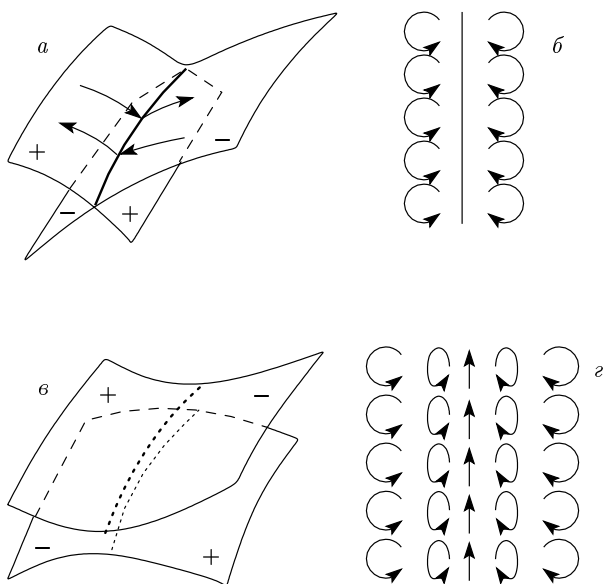


Рис. 2. Топологические особенности оптических параметров вблизи пересечения полостей поверхности рефракции: фрагмент линии оптических осей (а) и скачкообразная смена знака циркулярной поляризации (+ ↔ -) при переходе через линию вырождения по путям, показанным стрелками (б). Трансформация картины при возмущении сферичности тензора ϵ^0 : расщепление полостей поверхности рефракции (в) и переход циркулярной поляризации одного знака к другому через линейную (г)

направлена вдоль главной оси симметрии, при этом во всех соотношениях следует положить $G_{11} = G_{22}$. В данном случае, если знаки компонент G_{11} и G_{33} различные, соотношения (19), (20) описывают круговое пересечение полостей и его окрестность:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta_0 &= -G_{33}/G_{11}, \\ \Delta n_{\pm} &\approx \pm n_0 \Delta \theta \sqrt{-G_{11}G_{33}}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.1.3. Моноклинные кристаллы класса 2

Рассмотрим теперь менее симметричные моноклинные кристаллы класса 2. Если ось z направлена вдоль оси симметрии 2, а координатные оси x и y произвольно ориентированы в плоскости, ортогональной z , то можно использовать квадратичную форму (17), дополнив ее «перекрестным» членом $(G_{12} + G_{21})m_1m_2$. Если же при этом выбрать новую систему координат, отличающуюся от исходной поворотом осей \tilde{x} и \tilde{y} на угол φ_0 вокруг оси z , то данный член исчезает, когда угол φ_0 удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{G_{12} + G_{21}}{G_{11} - G_{22}}. \quad (22)$$

При этом очевидно, что рассмотрение в системе координат \tilde{x}, \tilde{y}, z совпадает с тем, которое мы провели выше для класса 222. В то же время, следует отметить, что в классе 222 ориентация всех осей координат, вокруг которых возникают конусы оптических осей, определяется симметрией и не меняется при изменении компонент G_{ij} . Однако в классе 2 направления осей \tilde{x} и \tilde{y} отслеживают изменения компонент G_{ij} в кристаллофизической системе координат, см. (22).

3.1.4. Триклинные кристаллы

Этот класс не содержит никаких операций симметрии. В произвольно ориентированной декартовой системе координат квадратичная форма (17) должна быть дополнена тремя «перекрестными» членами:

$$\begin{aligned} (G_{12} + G_{21})m_1m_2 + (G_{23} + G_{32})m_2m_3 + \\ + (G_{31} + G_{13})m_3m_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Эти члены исчезают в новой системе координат, в которой тензор G_{ij} диагонален. Таким образом, все опять сводится к ситуации, характерной для класса 222, хотя теперь направления осей $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ отслеживают изменения компонент G_{ij} в кристаллофизической системе координат.

3.2. Плоскости оптических осей

3.2.1. Кристаллы классов симметрии $mm2, \bar{4}2m, \bar{4}$

Анализ удобно начать с ромбических кристаллов класса $mm2$, поскольку результаты после ряда уточнений оказываются применимыми также к кристаллам классов $\bar{4}2m$ и $\bar{4}$. В стандартной кристаллофизической системе координат для класса $mm2$ ось z направлена вдоль оси симметрии 2, а оси x и y — вдоль плоскостей симметрии m . В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta n_{\pm} &= \pm \frac{n_0}{2} (G_{12} + G_{21})m_1m_2 = \\ &= \pm \frac{n_0}{2} (G_{12} + G_{21}) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

В кристаллах класса $\bar{4}2m$ ось z направлена вдоль зеркально-поворотной оси $\bar{4}$. Если же при этом оси x и y направить вдоль плоскостей симметрии m (как в предыдущем случае), то в соотношении (24) следует лишь провести замену: $G_{12} + G_{21} \rightarrow 2G_{12}$. Эта

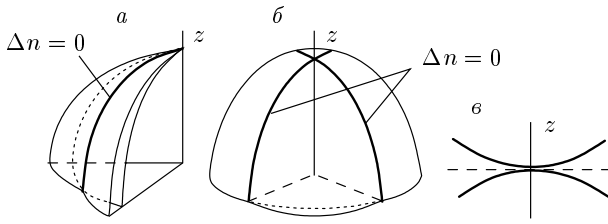


Рис. 3. Топология поверхности рефракции при взаимно ортогональных плоскостях оптических осей: вблизи одной из линий вырождения (а), при пересечении линий вырождения (б), фрагмент сечения поверхности рефракции плоскостью, проходящей через ось z — при касательно-клиновом вырождении (в)

замена сохраняется и для класса $\bar{4}$ ($z \parallel \bar{4}$), причем в формуле (24) возникает дополнительное слагаемое $G_{11}(m_{11}^2 - m_{22}^2)$. Однако оно ликвидируется, если использовать новую систему координат, повернутую вокруг оси z на угол φ_0 , удовлетворяющий соотношению

$$\text{tg } 2\varphi_0 = -G_{11}/G_{12}. \quad (25)$$

Такое упрощение связано с тем обстоятельством, что в кристаллах класса $\bar{4}$ тензор G_{ij} инвариантен относительно преобразований группы, $\bar{4}2m$, см. [7]. Другими словами, фактически по своим гиротропным свойствам кристаллы класса $\bar{4}$ ведут себя так же, как кристаллы класса $\bar{4}2m$. При этом соотношение (25) определяет ориентации меридиональных плоскостей класса симметрии $\bar{4}2m$. Однако ориентация этих плоскостей (угол φ_0) зависит от конкретных значений компонент G_{11} и G_{12} и отслеживает изменения данных компонент под влиянием внешних воздействий (температуры, давления, частоты и т. д.). Экспериментальные данные по гиротропным кристаллам классов $\bar{4}2m$ и $\bar{4}$ [9, 10] будут обсуждаться в заключительной части.

Как следует из равенства (24), обе плоскости симметрии $m_1 = 0$ и $m_2 = 0$ отвечают вырождению $\Delta n = 0$, причем контакт между полостями поверхности рефракции на этих двух меридиональных плоскостях ($\varphi = 0, \pi; 0 \leq \theta < \pi$) и ($\varphi = \pm\pi/2; 0 \leq \theta < \pi$) носит клиновой характер, рис. 3а,б. В то же время, геометрия контакта между полостями в окрестности оси z , где линии вырождения пересекаются, описывается соотношением

$$\Delta n_{\pm} \approx \pm\theta^2 \sin 2\varphi, \quad \theta \rightarrow 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (26)$$

которое указывает на касание полостей в этой точке (рис. 3в). Поэтому данную топологическую осо-

бенность можно классифицировать как касательно-клиновую.

3.2.2. Моноклинные кристаллы класса m

Последним представителем рассматриваемой категории является моноклинный класс m , содержащий единственную плоскость симметрии. Если ось z выбрана перпендикулярной данной плоскости, то при этом будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta n_{\pm} &= \pm \frac{n_0}{2} m_3 [(G_{13} + G_{31})m_1 + (G_{23} + G_{32})m_2] = \\ &= \pm \frac{n_0}{2} \sin \theta \cos \theta [(G_{13} + G_{31}) \cos \varphi + \\ &\quad + (G_{23} + G_{32}) \sin \varphi]. \quad (27) \end{aligned}$$

Из формулы (27) следует, что условие вырождения $\Delta n = 0$ выполнено, во-первых, на экваториальной плоскости — плоскости симметрии кристалла $m_3 = 0: \theta = \pi/2, 0 \leq \varphi < 2\pi$, и во-вторых, на меридиональной плоскости параллельной оси z , ориентация которой задается углом φ_0 ,

$$\text{tg } \varphi_0 = -\frac{G_{13} + G_{31}}{G_{23} + G_{32}}, \quad 0 \leq \theta < \pi. \quad (28)$$

Этот угол чувствителен к изменениям компонент G_{ij} . Таким образом, условия вырождения для кристаллов класса m выполнены на двух взаимно ортогональных плоскостях, как и в кристаллах класса $mm2$. Обе плоскости порождают на поверхности показатели преломления линии клинового контакта полостей.

Направление $\varphi = \varphi_0, \theta = \pi/2$ лежит в плоскости экватора на пересечении рассматриваемых линий вырождения. Вблизи этого направления

$$\Delta n_{\pm} \approx \pm(\Delta\varphi)(\Delta\theta), \quad (29)$$

т. е. в отличие от рассматривавшегося выше случая пересечения линий на полюсе (26) касания нет, и контакт полостей рефракции в этом направлении можно назвать конически-клиновым.

Таким образом, в п. 3.2 мы встретились с тремя типами плоскостей вырождения: первый из них совпадает с плоскостями симметрии кристалла, задающими координатные плоскости кристаллофизической системы, второй — с плоскостями симметрии, не связанными с кристаллофизической системой, и третий не связан с плоскостями симметрии вообще. Соответственно, первый тип плоских конусов оптических осей жестко привязан к кристаллофизической системе координат и его ориентация не зависит

от компонент тензора гирации. Ориентация (меридиональных) плоскостей вырождения двух других типов — азимут φ_0 (25), (28) в классах $\bar{4}$ и m , напротив, прямо определяется компонентами G_{ij} . Поэтому изменению данных параметров будут отвечать повороты соответствующих плоскостей вырождения.

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ АНОМАЛИИ ВБЛИЗИ ЛИНИЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Если ось z декартовой системы координат направить вдоль вектора \mathbf{m} , то в этой специальной системе общее уравнение (10) принимает форму

$$\begin{pmatrix} \Delta n & -\frac{i}{2}n_0G_{33} \\ \frac{i}{2}n_0G_{33} & \Delta n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = 0. \quad (30)$$

Данное уравнение имеет два независимых решения для изонормальных волн:

$$\begin{aligned} \Delta n_{\pm} &= \pm \frac{1}{2}n_0G_{33}, \quad \mathbf{D}_{\pm}^{(0)} = (1, \pm i, 0), \\ \mathbf{E}_{\pm}^{(0)} &= \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}_{\pm}^{(0)}, \quad \mathbf{H}_{\pm}^{(0)} = \frac{\mp i}{n_0}\mathbf{D}_{\pm}^{(0)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Вещественные векторы $\text{Re}(\mathbf{D}_{\pm}^{(0)}e^{i\delta})$ при изменении фазы $\delta(\mathbf{r}, t)$ в формуле (2) описывают окружности. Точно так же ведут себя векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} . При этом направления вращения в изонормальных волнах противоположны. Направление вращения устанавливается с помощью инвариантного критерия [3, 8, 11], определяясь знаком вещественного скаляра:

$$I = i\mathbf{m} \cdot [\mathbf{D} \times \mathbf{D}^*]. \quad (32)$$

Направление вращения образует с вектором \mathbf{m} правый винт, если $I < 0$, и левый винт, если $I > 0$. Для рассматриваемых изонормальных волн данный критерий дает соотношение

$$I_{\pm} = i\mathbf{m} \cdot [\mathbf{D}_{\pm} \times \mathbf{D}_{\pm}^*] = \pm 2. \quad (33)$$

Несложно проследить за сменой знаков вращения в изонормальных волнах при переходе через линию вырождения, см. рис. 2б. На самой линии вырождения имеем суперпозицию изонормальных волн, циркулярно поляризованных, с противоположными направлениями вращения. Эти волны могут формировать общее волновое поле с разными «весами», т. е. могут быть взяты с разными амплитудами. В результате, поляризация суммарного поля может быть

любой — варьироваться от произвольной эллиптической до линейной произвольного направления (в плоскости, перпендикулярной \mathbf{m}).

Казалось бы, обсуждаемый скачок знака вращения поляризации при переходе через линию вырождения является тривиальным следствием нашего выбора нумерации полостей рефракции по принципу внешняя — внутренняя (\pm), а не по непрерывности. Но такой выбор не является случайным, поскольку при возмущении сферичности тензора ε линии вырождения обычно исчезают и полости поверхности показателей преломления оказываются разделенными щелью. А такое возмущение на практике всегда существует, ибо изотропия ε существует лишь в меру точности эксперимента. При этом на каждой полости сохраняются линии смены знака вращения, рис. 2б. Этим линиям отвечает линейная поляризация. При переходе через такую линию эллиптическая поляризация одного знака переходит в эллиптическую поляризацию другого знака, рис. 2г.

5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНИЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Рассмотрим подробнее, что произойдет с описанными конусами и плоскостями вырождения при отклонении вещественной части тензора диэлектрической проницаемости от сферичности. В общем случае, вместо формулы (6) теперь надо писать [3, 8, 11]

$$\varepsilon = \varepsilon^0 - i\varepsilon \mathbf{g}^{\times}, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon [\mathbf{I} - \kappa(\mathbf{c}' \otimes \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \otimes \mathbf{c}')] , \quad (34)$$

где параметр κ характеризует диэлектрическую анизотропию и считается малым, как и величина \mathbf{g} , а единичные векторы \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' задаются направлениями оптических осей при отсутствии гиротропии. В соответствии с равенствами (34) в выражение для ε^{-1} (9) также надо добавить новые слагаемые. В том же линейном порядке по κ и \mathbf{g}^{\times} имеем

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} [\mathbf{I} + \kappa(\mathbf{c}' \otimes \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \otimes \mathbf{c}') + i\mathbf{g}^{\times}]. \quad (35)$$

Опуская выкладки, приведем результат решения общего уравнения (8) с тензором ε^{-1} (35):

$$\begin{aligned} \Delta n_{\pm} &= \frac{n_0}{2} \left[-\kappa(\mathbf{m} \times \mathbf{c}') \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{c}'') \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\kappa^2(\mathbf{m} \times \mathbf{c}')^2(\mathbf{m} \times \mathbf{c}'')^2 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{G}\mathbf{m})^2} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Данное выражение обобщает формулу (16).

Как видно из равенства (36), диэлектрическая анизотропия не оказывает влияния на величину Δn

лишь в двух особых случаях — когда $\mathbf{m} \parallel \mathbf{c}'$ или $\mathbf{m} \parallel \mathbf{c}''$, т.е. когда распространение происходит вдоль любой из исходных оптических осей. Иными словами, возмущение изотропии тензора ϵ может сохранить вырождение только вдоль \mathbf{c}' и/или \mathbf{c}'' и только тогда, когда эти направления (одно или оба) принадлежат невозмущенному конусу (или плоскости) оптических осей, где $\mathbf{m} \cdot \mathbf{Gm} = 0$. Таким образом, для возмущения общего вида контакт между полостями разрывается полностью. И лишь при специальном выборе возмущений (т.е. направлений \mathbf{c}' и/или \mathbf{c}'') вырождение может сохраниться вдоль одного или двух направлений.

В приведенном рассуждении мы никак не привязывали симметрию возмущения диэлектрической проницаемости к симметрии кристалла. В условиях эксперимента при малых отклонениях (по температуре или длине волны) от изотропной точки, отвечающей шаровому тензору ϵ^0 , исследуемый кристалл, однако, не меняет своей симметрии. Поэтому естественно рассмотреть также последствия возмущений изотропии ϵ^0 , не нарушающих исходную симметрию гиротропного кристалла.

В самом общем случае триклинного кристалла тензор ϵ^0 (34) инвариантен относительно группы симметрии mmm , см. [7]. Оптические оси \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' могут лежать лишь в любой из трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии группы mmm . В какой именно плоскости лежат векторы \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' , зависит от соотношения собственных значений тензора ϵ^0 (34). Перпендикуляры к трем плоскостям симметрии группы mmm совпадают с собственными векторами тензора ϵ^0 . Оказывается, что оптические оси \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' лежат в той из плоскостей m , которая проходит через собственные векторы, отвечающие наибольшему и наименьшему собственным значениям ϵ^0 [3, 8, 11].

Согласно принципу Неймана [7], кристалл с тензором ϵ^0 должен принадлежать классу симметрии, являющемуся подгруппой класса mmm либо совпадающему с этим классом. В нашем случае гиротропных кристаллов этому условию удовлетворяют пять классов: $mm2$, m , 222 , 2 и 1 . В гиротропных кристаллах классов $mm2$ и m при отсутствии диэлектрической анизотропии, как мы видели, плоскости симметрии оказываются плоскостями вырождения. В этом случае ясно, что «включение» диэлектрической анизотропии ликвидирует все линии вырождения, оставляя лишь те точки, которые лежат в направлениях векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' , когда последние попадают в одну из плоскостей симметрии кристалла. При других ориентациях векторов \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' в кристал-

лах перечисленных пяти классов диэлектрическая анизотропия полностью ликвидирует вырождения. Возможны лишь случайные вырождения, когда векторы \mathbf{c}' и/или \mathbf{c}'' попадут на конус оптических осей.

Минимально возможное повышение симметрии тензора ϵ^0 отвечает случаю $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'' = \mathbf{c}$, реализующемуся в оптически одноосных кристаллах (при отсутствии в них гиротропии). В таких кристаллах тензор ϵ^0 инвариантен относительно группы ∞/m [7]. Подгруппами этого класса симметрии, в частности, являются гиротропные кристаллы классов $\bar{4}2m$ и $\bar{4}$, в которых плоскостями вырождения, как мы видели, являются плоскости симметрии. В направлении оси $\bar{4}$ вырождение сохраняется. Во всех остальных оптически одноосных (при $\gamma = 0$) кристаллах, рассматривавшихся в п. 3.1.2, оптическая ось никак не может совпасть с образующей конуса — вырождения полностью ликвидируются.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В обычном гиротропном кристалле при распространении волны в произвольном направлении оптическая активность приводит в основном лишь к замене строго линейной поляризации на эллиптическую с малым (первого порядка малости) отношением осей. Исключение составляют те направления, которые без учета гиротропии отвечают оптическим осям: если гиротропия ликвидирует вырождение, то в данном направлении возникает двулучепреломление первого порядка малости и циркулярная поляризация изонормальных волн. При изменении направления \mathbf{m} эти явления быстро исчезают.

В рассматриваемом нами случае, когда диэлектрическая проницаемость — скаляр, ситуация фактически противоположная — в произвольном направлении изонормальные волны циркулярно поляризованы, а на линиях вырождения поляризация произвольная эллиптическая (или линейная).

Экспериментальные данные хорошо коррелируют с приведенными результатами. Так, согласно работе [9], в оптически одноосных кристаллах тиогаллата серебра AgGaS_2 (класс $\bar{4}2m$) изотропная точка реализуется при длине волны $\lambda = 4974 \text{ \AA}$, когда исчезает обычное двулучепреломление, обусловленное тензорным характером диэлектрической проницаемости, и гиротропия проявляет себя в «чистом» виде. При этом установлено, что вращение плоскости поляризации света при распространении вдоль соседних осей симметрии второго порядка имеет противоположные знаки. Тогда при распространении по

биссектрисе угла между этими направлениями вращения не должно быть — оно меняет знак. Такое направление как раз лежит в плоскости симметрии, которая в соответствии с нашей теорией должна быть плоскостью вырождения, т. е. все направления пространства в ней отвечают оптическим осям.

Наши результаты подтверждаются и экспериментальными данными [10] по кристаллам тиогаллата кадмия CdGa_2S_4 , имеющего симметрию $\bar{4}$. Мы отмечали выше, что по своим гиротропным свойствам кристаллы этого класса характеризуются симметрией $\bar{4}2m$. Изотропная точка проявления гиротропии в «чистом» виде исследована в работе [10] как функция не только длины волны, но и температуры. Изучено смещение этой точки от значения $\lambda = 4825 \text{ \AA}$ при $T = 0^\circ\text{C}$ до значения $\lambda = 5780 \text{ \AA}$ при $T = 400^\circ\text{C}$. В работе [10] четко зафиксировано отсутствие вращения плоскости поляризации прошедшего через пластину света при распространении вдоль плоскости симметрии.

Для сопоставления отметим, что клиновой контакт между полостями показателей преломления возникает также в кристаллах за счет поглощения. Соответствующие конусы нулевого двулучепреломления описаны в работах [12–14]. Впрочем, эти конусы не соответствуют оптическим осям: на них изонормальные волны имеют одинаковые скорости, но разные коэффициенты поглощения, так что вырождение не имеет места.

Авторы признательны А. Ф. Константиновой, стимулировавшей постановку данного исследования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, польского фонда MNiSW, а также в рамках договора о сотрудничестве между Институтом кристаллографии РАН и Технологическим университетом в г. Кельцы (Kielce). Один из авторов (В. И. А.) также благодарен Польско-японскому институту информационных технологий (Варшава) за финансовую поддержку (грант № PJ/МКТ/02/2007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
2. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).
3. Ф. И. Федоров, *Теория гиротропии*, Наука и техника, Минск (1976).
4. К. А. Калдыбаев, А. Ф. Константинова, З. Б. Перекалина, *Гиротропия одноосных поглощающих кристаллов*, ИСПИН, Москва (2000).
5. А. Ф. Константинова, Б. Н. Гречушников, Б. В. Бокуть, Е. Г. Валяшко, *Оптические свойства кристаллов*, Наука і техника, Минск (1995).
6. А. В. Шубников, *Основы оптической кристаллографии*, АН СССР, Москва (1958).
7. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1979).
8. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов, *Отражение и преломление света прозрачными кристаллами*, Наука и техника, Минск (1976).
9. M. S. Hobden, *Acta Cryst.* **A24**, 678 (1968).
10. M. S. Hobden, *Acta Cryst.* **A25**, 633 (1969).
11. Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред*, Едиториал УРСС, Москва (2004).
12. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, *ЖЭТФ* **125**, 999 (2004).
13. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Л. А. Шувалов, *Кристаллография* **46**, 742 (2001).
14. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, В. Герульски, А. Радович, *Кристаллография* **45**, 1068 (2000).