

# КАСКАДНОЕ РОЖДЕНИЕ ВСЕЛЕННЫХ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. Г. Рубин\*

Московский инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2007 г.

Рассмотрен механизм образования вселенных с существенно различающимися свойствами в рамках чистой гравитации в пространстве  $D > 4$  измерений. Обсуждается возникновение планковского масштаба и его связь с массой инфлатона.

PACS: 04.50.-h, 04.50.Cd, 04.50.Kd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика нашей Вселенной хорошо описывается современной теорией, содержащей 30–40 параметров. Число этих параметров, значения которых определяются экспериментально, слишком велико, чтобы считать теорию окончательной. Кроме того, известно, что для рождения и существования таких сложных структур, как наша Вселенная, область допустимых значений параметров должна быть крайне узкой (тонкая настройка параметров), что является трудно объяснимым фактом. Обсуждению данной проблемы посвящена обширная литература [1]. Один из путей решения основан на предположении о множественности вселенных с различными свойствами [2–4]. Богатые возможности для обоснования этого предположения содержатся в самой идее многомерности нашего пространства. Число дополнительных измерений давно является предметом дискуссий. Так, модель Калуцы–Клейна первоначально содержала одно дополнительное измерение. Сейчас уже обсуждаются, например, пространства бесконечной размерности [5] и даже пространства переменной размерности [6]. В настоящей статье понятие суперпространства расширяется до набора суперпространств с различным, не ограниченным сверху числом измерений. На основе введенного расширенного суперпространства предложены механизм образования вселенных с существенно различающимися свойствами и механизм появления план-

ковского масштаба. Обсуждается вероятность квантовых переходов, в результате которых образуются подпространства меньшей размерности.

Определим суперпространство  $\mathcal{M}_D = (M_D; g_{ij})$  как набор метрик  $g_{ij}$  в пространстве  $M_D$  с точностью до диффеоморфизмов. На пространственноподобном сечении  $\Sigma$  введем метрику  $h_{ij}$  (см. детали в книге [7] и в обзоре [8]) и определим пространство всех римановых  $(D - 1)$ -метрик:

$$\text{Riem}(\Sigma) = \{h_{ij}(x) | x \in \Sigma\}.$$

Амплитуда перехода от одного произвольно выбранного сечения  $\Sigma_{in}$  с соответствующей метрикой  $h_{in}$  к другому сечению  $\Sigma_f$  с метрикой  $h_f$  есть

$$A_{f,in} = \langle h_f, \Sigma_f | h_{in}, \Sigma_{in} \rangle = \int_{h_{in}}^{h_f} Dg \exp[iS(g)]. \quad (1)$$

Здесь и далее используются единицы  $\hbar = c = 1$ . Топологии сечений  $\Sigma_{in}$  и  $\Sigma_f$  могут быть различны. Нас будут интересовать квантовые переходы, при которых топология гиперповерхности  $\Sigma_f$  представляет собой прямое произведение подпространств  $M_{D-1-d} \otimes M_d$ . Пространство  $M_d$  предполагается компактным. Далее будет исследовано, какой класс геометрий на гиперповерхности  $\Sigma_f$  может инициировать классическую динамику.

Все рассмотрение проводится в рамках нелинейной гравитации в пространстве  $D > 4$  измерений без включения полей материи. Обсуждается возникновение планковского масштаба и его связь с массой

\*E-mail: sergeirubin@list.ru

инфлатона. Редукция в пространства меньшей размерности осуществляется в несколько этапов, образуя каскад. Различные каскады приводят к формированию четырехмерных пространств с различными эффективными теориями и различным числом дополнительных измерений.

Параметры низкоэнергетической теории оказываются зависящими от топологии дополнительных пространств и варьируются в широких пределах (см. также [9, 10]), несмотря на то, что параметры исходной теории фиксированы. Это касается и таких фундаментальных понятий, как, например, масса Планка и топология дополнительного пространства.

Отсутствие полей материи, постулируемое в статье изначально, является принципиальным моментом. Предполагается, что при низких энергиях компоненты метрического тензора дополнительного (супер)пространства будут интерпретироваться как поля материи в духе теорий типа теории Калуцы–Клейна.

**2. ОБРАЗОВАНИЕ  
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ  
СОВМЕСТНО С ПАРАМЕТРАМИ ТЕОРИИ**

Первоначально понятие суперпространства означало набор различных геометрий [11], затем в него был включен набор всевозможных топологий [7]. Сделаем следующий шаг и расширим суперпространство за счет добавления пространств различной размерности. Более точно, определим расширенное суперпространство  $E$  как прямое произведение суперпространств  $\mathcal{M}$  различных размерностей:

$$E = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_D \dots \quad (2)$$

Здесь  $\mathcal{M}_n$  — суперпространство размерности  $n = 1, 2, \dots$ , являющееся набором всевозможных геометрий (с точностью до диффеоморфизмов) и топологий.

Квантовые флуктуации порождают различные геометрии в каждом из суперпространств (пространственно-временная пена) [11, 7]. Вероятность квантового рождения «долгоживущих» 3-геометрий и условия, при которых это происходит, обсуждаются ниже в разд. 4. В данном разделе мы рассмотрим следствия гипотезы о существовании расширенного суперпространства.

Выберем пространство  $M_D$  некоторой размерности. Его топологическая структура может меняться под влиянием квантовых флуктуаций [7, 12]. В част-

ности, возможны топологии, допускающие расслоения пространства пространственноподобными поверхностями  $\Sigma$ , что подразумевается в выражении для амплитуды перехода (1). В дальнейшем рассматриваются пространства, допускающие разбиение вида

$$M_D = \mathbb{R} \otimes M_{D-1}^{(space)}, \quad (3)$$

где  $\mathbb{R}$  — времениподобное направление.

Конкретизируем топологию и метрику на пространственноподобном сечении  $\Sigma_f$  амплитуды (1), подчинив их следующим условиям:

а) топология сечения  $\Sigma_f$  имеет вид прямого произведения

$$\Sigma_f = M_{D-1}^{(space)} = M_{D_1} \otimes M_{d_1}, \quad (4)$$

где  $D_1$  и  $d_1$  — размерности соответствующих подпространств (здесь и далее компактное подпространство обозначается как  $M_{d_n}, n = 1, 2, \dots$ );

б) выполняется условие для кривизны подпространств  $M_{D_1}$  и  $M_{d_1}$ :

$$R_{D_1}(g_{ab}) \ll R_{d_1}(\gamma_{ij}); \quad (5)$$

в) в наборе подпространств  $M_{d_1}$  выберем максимально симметричные пространства с постоянной кривизной  $R_{d_1}$ , которая связана с параметром кривизны  $k$  обычным образом:

$$R_{d_1}(\gamma_{ij}) = kd_1(d_1 - 1). \quad (6)$$

В остальном топология и геометрия подпространства  $M_{D_1}$  произвольны.

Выберем динамические переменные и форму лагранжиана. Метрику пространства  $M_D$  запишем в виде [13]

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{AB}dX^A dX^B = \\ &= g_{ac}(x)dx^a dx^c - b^2(x)\gamma_{ij}(y)dy^i dy^j = \\ &= dt^2 - h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta - b^2(x)\gamma_{ij}(y)dy^i dy^j. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $g_{ac}$  — метрика подпространства  $\mathbb{R} \otimes M_{D_1}$  с сигнатурой  $(+ - - - \dots -)$ ,  $b(x)$  — радиус кривизны компактного подпространства  $M_{d_1}$ , а  $\gamma_{ij}(y)$  — его положительно определенная метрика. Для заданного расслоения пространства пространственноподобными поверхностями всегда можно выбрать нормальные гауссовы координаты, что и использовано в последнем равенстве (7).

Действие Эйнштейна–Гильберта для гравитационного поля, линейное по кривизне  $R$ , полностью

описывает физические явления при низких энергиях, когда важна гравитация. Однако очевидно, что квантовые эффекты неизбежно приводят к нелинейным поправкам в выражении для действия [14]. При этом действие содержит слагаемые с высшими производными в виде полиномов различных степеней по скаляру Риччи и другим инвариантам. Таким образом, какое бы гравитационное действие мы ни приняли за основу, после учета квантовых поправок оно приобретает вид

$$S = \int d^N x (R + \varepsilon_1 R^2 + \varepsilon_2 R^3 + \varepsilon_3 R^4 + \dots + \alpha_1 R_{AB} R^{AB} + \dots)$$

с набором неизвестных коэффициентов, зависящих от топологии пространства [15–17]. Однако проблема не так остра, поскольку нелинейные по скаляру Риччи теории могут быть сведены конформным преобразованием к линейной теории [18]. Более того, в статьях [19] предлагается более общий способ приведения произвольных лагранжианов к стандартному виду Эйнштейна–Гильберта в пределе низких энергий. При этом оказывается, что проблема стабилизации размеров дополнительных измерений [13] становится вполне решаемой.

Таким образом, при учете квантовых явлений неизбежно использование теорий с высшими производными. При низких энергиях такие теории способны давать те же предсказания, что и общая теория относительности, и при этом обладают более богатыми возможностями. Для простоты ограничимся действием, квадратичным по скаляру Риччи:

$$S_D = \frac{1}{2} \int d^D X \sqrt{-G} [R_D(G_{AB}) + CR_D(G_{AB})^2 - 2\Lambda] + \int_{\partial M_D} K d^{D-1} \Sigma. \quad (8)$$

Вклад от границы  $\partial M_D$  представляет собой слагаемое, введенное Хокингом и Гиббонсом ( $K$  — след второй фундаментальной формы границы [20]). В дальнейшем анализе параметры  $C$  и  $\Lambda$  полагаются фиксированными, а все многообразие низкоэнергетических теорий, порождаемых действием (8), возникает благодаря различным способам редукции к пространствам меньшей размерности.

Поскольку рассуждения проводятся в рамках чисто геометрического подхода, в теории (8) масштаб изначально не фиксирован, а параметры  $C$  и  $\Lambda$  безразмерны. В следующем разделе обсуждается возникновение планковского масштаба при низких энергиях.

Как было показано в работах [19, 21], теория (8) позволяет получить компактное стабильное пространство дополнительных измерений с ненулевой плотностью энергии вакуума. Наблюдаемое малое значение энергии вакуума требует чрезвычайно тонкой подгонки параметров  $C$  и  $\Lambda$ . Ниже предлагается механизм, позволяющий естественным образом варьировать параметры эффективной теории в широких пределах. При этом в каждой вселенной, образующейся в результате квантовой флуктуации, значения параметров уникальны. Это означает, что существует доля вселенных с требуемыми значениями параметров и, следовательно, энергии вакуума. Таким образом, малость плотности темной энергии в нашей Вселенной означает малость доли вселенных, похожих на нашу.

Вернемся к вопросу о механизме варьирования параметров. Благодаря специальному виду выбранной метрики (7) (см. [13]) имеют место следующие соотношения:

$$\sqrt{-G} = b^{d_1} \sqrt{-g} \sqrt{\gamma}, \quad (9)$$

$$R_D(G_{AB}) = R_{D_1}(g_{ac}) + b^{-2} R_{d_1}(\gamma_{ij}) + K_b, \quad (10)$$

$$K_b \equiv -2d_1 b^{-1} g^{ac} \nabla_a \nabla_c b - d_1(d_1 - 1) b^{-2} g^{ac} (\nabla_a b)(\nabla_c b). \quad (11)$$

Ковариантная производная  $\nabla$  действует в пространстве  $M_{D_1}$ . Объем  $V_{d_1}$  дополнительного пространства  $M_{d_1}$  зависит от его топологии, поскольку выражается через внутреннюю метрику:

$$V_{d_1} = \int d^{d_1} y \sqrt{\gamma}. \quad (12)$$

Для удобства введем скалярное поле

$$\phi(x) = b(x)^{-2} R_{d_1}(\gamma_{ij}), \quad (13)$$

в терминах которого действие принимает вид

$$S_D = \frac{V_{d_1}}{2} \int d^{D_1} x \sqrt{-g} \left( \frac{R_{d_1}}{\phi(x)} \right)^{d_1/2} \{ R_{D_1}(g_{ab}) + 2C\phi(x)R_{D_1}(g_{ab}) + CR_{D_1}(g_{ab})^2 - 2\Lambda + \phi(x) + C\phi(x)^2 + 2CK_b [R_{D_1}(g_{ab}) + \phi(x)] + K_b + CK_b^2 \}. \quad (14)$$

Поскольку поле  $\phi$  однозначно связано с радиусом кривизны  $b(x)$  компактного пространства  $M_{d_1}$ , наличие стационарных решений  $\phi(x) = \phi_m$ , минимизирующих действие, означало бы стабильность размеров этого пространства.

В рамках подхода Йордана, согласно (14), имеем

$$S_D = \frac{1}{2} \int d^{D_1} x \sqrt{-g} [f(\phi) R_{D_1}(g_{ab}) + C_J(\phi) R_{D_1}(g_{ab})^2 - 2U_J(\phi) + K_J(\phi)], \quad (15)$$

$$f(\phi) = \mathcal{V}_{d_1} \phi(x)^{-d_1/2} [1 + 2C\phi(x)], \quad (16)$$

$$U_J(\phi) = \mathcal{V}_{d_1} \phi(x)^{-d_1/2} \left[ \Lambda - \frac{1}{2} (\phi(x) + C\phi(x)^2) \right], \quad (17)$$

$$C_J(\phi) = \mathcal{V}_{d_1} \phi(x)^{-d_1/2} C, \quad (18)$$

$$K_J(\phi) = \mathcal{V}_{d_1} \phi(x)^{-d_1/2} \times [K_b + 2CK_b(R_{D_1} + \phi(x)) + CK_b^2], \quad (19)$$

$$\mathcal{V}_{d_1} = V_{d_1} R_{d_1}^{d_1/2}. \quad (20)$$

Отметим явную зависимость параметров полученной эффективной теории от топологии дополнительного пространства.

Масса  $m_\phi$  кванта скалярного поля  $\phi(x)$  пропорциональна второй производной потенциала в минимуме (в рамках подхода Эйнштейна) и может варьироваться в широких пределах. Отметим, что определенная таким образом масса является безразмерной величиной. Наиболее интересны три ситуации.

1) Минимум потенциала отсутствует, что означает нестационарность размера дополнительного пространства.

2) Минимум потенциала существует и выполняется условие

$$m_\phi^2 \leq R_{D_1}(g_{ab}), \quad (21)$$

при котором скалярное поле эволюционирует вместе с метрикой «основного» подпространства  $M_{D_1}$ . Именно такая ситуация реализуется в инфляционных моделях и обсуждается в следующем разделе.

3) Минимум потенциала существует и выполняется условие

$$m_\phi^2 \gg R_{D_1}(g_{ab}). \quad (22)$$

В этом случае скалярное поле  $\phi(x)$  быстро релаксирует к минимуму потенциала,

$$\phi(x) = \phi_m = \text{const}, \quad (23)$$

и не меняется со временем при низкоэнергетических процессах.

Третий случай является наиболее естественным, поскольку время релаксации пропорционально масштабу дополнительного пространства  $M_{d_1}$ , малому по сравнению с масштабом пространства  $M_{D_1}$ . Обсудим подробнее эту ситуацию. Полагая выполненным условие (23), проведем конформное преобразование вида (см., например, [22])

$$\begin{aligned} g_{ab} &= |f(\phi_m)|^{-\frac{2}{D_1-2}} \tilde{g}_{ab}, \\ R_{D_1} &= |f(\phi_m)|^{\frac{2}{D_1-2}} \tilde{R}_{D_1}, \\ \sqrt{-g} &= |f(\phi_m)|^{-\frac{D_1}{D_1-2}} \sqrt{-\tilde{g}}, \end{aligned} \quad (24)$$

которое, будучи примененным к выражению (15), возвращает нас к начальному виду действия (в выражениях (25) тильды для краткости опущены):

$$\begin{aligned} S_{D_1} &= \frac{1}{2} \int d^{D_1} x \sqrt{-g} \times \\ &\times [R_{D_1}(g_{ab}) + C_{D_1} R_{D_1}(g_{ab})^2 - 2\Lambda_{D_1}], \\ C_{D_1} &= |f(\phi_m)|^{(4-D_1)/(D_1-2)} C_J(\phi_m) = \\ &= \text{sign}(f) \mathcal{V}_{d_1} |f(\phi_m)|^{(4-D_1)/(D_1-2)} \phi_m^{-d_1/2} C, \\ \Lambda_{D_1} &= |f(\phi_m)|^{-D_1/(D_1-2)} U_J(\phi) = \\ &= \text{sign}(f) \mathcal{V}_{d_1} |f(\phi_m)|^{-D_1/(D_1-2)} \phi_m^{-d_1/2} \times \\ &\times \left[ \Lambda - \frac{1}{2} (\phi_m + C\phi_m^2) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Напомним, что мы рассматриваем случай, когда выполнено условие (23), т. е. когда поле  $\phi$  уже находится в минимуме,  $\phi = \phi_m$ , а кинетическим слагаемым можно пренебречь.

Вид действия (25) совпадает с исходным (8), но уже в подпространстве  $M_{D_1}$  и с перенормированными параметрами  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$ , зависящими от объема  $V_{d_1}$  и кривизны  $R_{d_1}$  дополнительного пространства  $M_{d_1}$ . В табл. 1 и 2 приведены результаты численных расчетов. Однако предварительно необходимо сделать замечание. Обычное предположение  $V_d \sim L^d$  (где  $L$  — характерный размер пространства) справедливо для «простых» пространств с положительной кривизной (типа  $d$ -мерных сфер). Для компактных гиперболических пространств ситуация является более интересной. Связь объема и характерного размера определяется асимптотическим соотношением [23, 24]

$$V_{d_1} \approx \exp[(d_1 - 1)L/b_m], \quad L \gg b_m, \quad (26)$$

где  $b_m$  — радиус кривизны компактного пространства, соответствующий значению поля  $\phi_m$ , при котором потенциал принимает минимальное значение.

**Таблица 1.** Зависимость параметров  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$  от геометрии дополнительного пространства (фактор  $\mathcal{V}_{d_1}$ ).  
Значения фиксированных параметров:  $D = D_1 + d_1 = 11$ ,  $D_1 = 4$ ,  $\Lambda = -0.6$ ,  $C = -1.9$

$\mathcal{V}_{d_1}$	$10^3$	$10^2$	10	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
$C_{D_1}$	$\sim 0$	$\sim 0$	$\sim 0$	$-4 \cdot 10^{-13}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	-40	$-4 \cdot 10^8$
$\Lambda_{D_1}$	$-2 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	-0.016	-0.16	-1.6

**Таблица 2.** Зависимость параметров  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$  от размерности подпространств  $M_{D_1}$  и  $M_{d_1}$ . В последней строке приведен радиус кривизны  $b_m$  дополнительного пространства  $M_{d_1}$ . Значения фиксированных параметров:  
 $D = D_1 + d_1 = 40$ ,  $\mathcal{V}_{d_1} = 100$ ,  $\Lambda = -0.6$ ,  $C = -1.9$

$D_1$	4	10	20	30	38
$C_{D_1}$	$\sim 0$	$\sim 0$	$\sim 0$	$\sim 0$	$-3.5 \cdot 10^{-13}$
$\Lambda_{D_1}$	$-8.7 \cdot 10^{-10}$	$-8.4 \cdot 10^{-4}$	-0.025	-0.122	-0.343
$b_m$	50.2	44.5	39.2	32.8	13.0

Очевидно, что при достаточно большой размерности дополнительного пространства  $d_1$  его объем может быть большим, а характерный размер пространства — малым. Таким образом, мы можем в широких пределах варьировать параметр  $\mathcal{V}_{d_1}$ , а вместе с ним и параметры  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$ , не вступая в противоречие с экспериментальными ограничениями на размер дополнительного пространства. В качестве иллюстрации в табл. 1 и 2 представлены зависимости новых параметров  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$  от топологии компактного дополнительного пространства  $M_{d_1}$ .

Таким образом, для подпространства  $M_{D_1}$  имеет место теория, аналогичная исходной, действующей в пространстве  $M_D$ , но с другими значениями параметров. Важно то, что хотя исходные параметры  $C$  и  $\Lambda$  фиксированы, эффективные «вторичные» параметры  $C_{eff} = C_{D_1}$  и  $\Lambda_{eff} = \Lambda_{D_1}$  редуцированной теории меняются в широком диапазоне. Конкретные значения эффективных параметров зависят от случайной геометрии и топологии подпространств  $M_{d_1}$  и  $M_{D_1}$ , сформировавшихся благодаря квантовым флуктуациям. Число различных топологий пространства данной размерности по крайней мере счетно. Следовательно, исходная теория с произвольными, но фиксированными параметрами (в данном случае  $C = -1.9$ ,  $\Lambda = -0.6$ ) порождает счетное множество редуцированных теорий в пространствах  $M_{D_1}$  меньшей размерности, различающихся значениями параметров. Интервал параметров  $C_{eff}$  и  $\Lambda_{eff}$  может быть еще более расширен, если принять во внимание последующую редукцию подпространства  $M_{D_1}$

в еще меньшее подпространство  $M_{D_2} \in M_{D_1}$ . Это сделано в следующем разделе.

### 3. КАСКАДНАЯ РЕДУКЦИЯ

Как было показано в предыдущем разделе, редукция исходной теории на пространство меньшей размерности генерирует широкий спектр вторичных теорий, различающихся значениями параметров  $C_{D_1}$  и  $\Lambda_{D_1}$ , которые зависят от топологии пространства, возникающего в результате квантовых флуктуаций. Подпространство  $M_{D_1}$ , на котором строится эффективная теория (25), как и пространство  $M_D$ , подвержено квантовым флуктуациям, которые также приводят к его разбиениям вида

$$M_{D_1} = M_{D_2} \otimes M_{d_2}. \tag{27}$$

Последующие шаги образуют каскад:

$$M_{D_1} \rightarrow M_{D_2} \otimes M_{d_2}, \tag{28}$$

$$M_{D_2} \rightarrow M_{D_3} \otimes M_{d_3} \rightarrow \dots \rightarrow M_3 \otimes M_{d_{final}}.$$

При этом параметры лагранжиана на промежуточных этапах зависят от предыдущих этапов каскада. Поскольку число топологий на каждом этапе по крайней мере счетно, цепочка (28) быстро разветвляется, образуя в конечном итоге бесконечный набор эффективных теорий, различающихся величиной параметров. Имеется бесконечное число путей «спуска» от начального пространства  $M_D$  к конечному. Интересующие нас каскады заканчиваются образованием четырехмерных пространств  $\mathbb{R} \otimes M_3$  и

дополнительных компактных пространств с некоторым числом измерений, равным  $d_{final}$ . Очевидно, что только малая часть образующихся таким образом вселенных похожа на нашу Вселенную.

Обсудим появление в данном подходе планковского масштаба. Поскольку до сих пор мы имели дело с чисто геометрическими свойствами пространств, введение любого масштаба представлялось искусственным. На последнем же этапе каскада (28) возникает наше четырехмерное пространство, а компоненты метрического тензора дополнительного пространства  $M_{d_{final}}$  воспринимаются будущими наблюдателями как скалярные и векторные поля. Следовательно, в отличие от предыдущего рассмотрения, кинетическим слагаемым  $K_J$  в действии (15) пренебрегать нельзя. Используя низкоэнергетический предел (5), пренебрежем высшими степенями скалярной кривизны  $R_4$ , а в разложении по степеням производных

$$K_J = K(\phi)\partial_\mu\phi\partial\phi^\mu + \dots$$

оставим только первые члены. Очевидно, что в этом случае наиболее общий вид действия в рамках подхода Эйнштейна таков (см., например, [25]):

$$S \approx \frac{V_{d_1}}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R_4 + K(\phi)(\partial\phi)^2 - 2W(\phi)]. \quad (29)$$

Заметим, что объем дополнительного пространства  $V_{d_1}$  входит в это выражение явно. Вид функций  $K(\phi)$  и  $W(\phi)$  зависит от топологии и геометрии дополнительного пространства [19]. Мы же продолжим анализ в общем виде.

Осцилляции поля  $\phi$  вокруг положения равновесия  $\phi = \phi_m$  воспринимаются наблюдателем как кванты скалярного поля. Вблизи минимума потенциала  $\min W(\phi) = W(\phi_m) = W_m$  действие (29) имеет вид

$$S \approx \frac{V_{d_1}}{2} \int d^4x \left[ R_4 - K(\phi_m)(\partial\phi)^2 - 2W(\phi_m) - W''(\phi_m)(\phi - \phi_m)^2 \right].$$

Масса  $m_\phi$  кванта скалярного поля, ответственного за инфляционный период (инфлатона), измеряется наблюдателем в размерных единицах. В то же время она непосредственно связана с видом эффективного потенциала в эйнштейновском подходе и при стандартном виде кинетического члена. Если кинетический член  $K(\phi) > 0$  в области минимума потенциала  $W(\phi)$ , то замена переменных вида

$$x_{phys} = x \frac{\sqrt{W''(\phi_m)}}{m_\phi \sqrt{K(\phi_m)}}, \quad (30)$$

$$\phi_{phys} = (\phi - \phi_m) m_\phi \sqrt{V_{d_1}} \frac{K(\phi_m)}{\sqrt{W''(\phi_m)}}$$

приводит к теории с обычным кинетическим членом:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x_{phys} \left[ V_{d_1} m_\phi^2 \frac{K(\phi_m)}{W''(\phi_m)} R_4 - (\partial\phi_{phys})^2 - m_\phi^2 \phi_{phys}^2 - 2\Lambda \right], \quad (31)$$

$$\Lambda \equiv W(\phi_m) V_{d_1} m_\phi^4 \frac{K^2(\phi_m)}{W''(\phi_m)^2}. \quad (32)$$

Если ввести обозначение

$$M_{Pl}^2 = V_{d_1} m_\phi^2 \frac{K(\phi_m)}{W''(\phi_m)}, \quad (33)$$

то мы получим стандартный вид действия для некоторого скалярного поля  $\chi$  в размерных единицах:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} R_4 + \frac{1}{2} (\partial\chi)^2 - U(\chi) \right], \quad (34)$$

$$U(\chi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \chi^2 + \Lambda.$$

При этом наблюдаемая масса Планка связана с параметрами теории посредством формулы (33).

Таким образом, на последнем этапе каскада появляются сразу три масштаба: радиус кривизны дополнительного пространства  $b_m$ , масса Планка  $M_{Pl}$  (см. (33)) и энергия вакуума  $\Lambda$  (см. (32)), зависящие от массы кванта скалярного поля  $m_\phi$ . Как видно, в предложенном подходе масса Планка не является фундаментальной постоянной и зависит от конечной конфигурации каскада.

Космологическая постоянная  $\Lambda \propto W(\phi_m)$  зависит от эффективных параметров. Последние могут меняться в широких пределах, как это следует из предыдущего обсуждения (см. табл. 1 и 2). Значит и величина космологической постоянной в пространстве  $M_4$  варьируется в широких пределах в зависимости от свойств каскада (28), в результате которого образовалось это пространство. Некоторые каскады могут, по-видимому, приводить к пространствам  $M_4$  с наблюдаемым значением  $\Lambda$ -члена. Чрезвычайная малость последнего означает, что только лишь малая доля каскадов приводит к желаемому результату. «Тонкая настройка» параметров Вселенной происходит при выборе соответствующего каскада.

Вычислим отношение массы Планка к массе инфлатона

$$\frac{M_{Pl}}{m_\phi} = \sqrt{V_{d_1} \frac{K(\phi_m)}{W''(\phi_m)}}. \quad (35)$$

Выбирая подпространство  $M_{10}$  из набора (2) и задавая параметры  $C = -1.9$  и  $\Lambda = -0.6$  (см. табл. 1 и 2), для размерности дополнительного пространства  $d_1 = 6$  получим

$$M_{Pl}/m_\phi \approx 2 \cdot 10^6.$$

Полученное численное значение хорошо согласуется с тем, которое обычно используется в инфляционных моделях.

#### 4. ВЕРОЯТНОСТЬ РОЖДЕНИЯ ВСЕЛЕННЫХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КОМПАКТНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

До сих пор мы предполагали, что на структуру пространства наложены свойства (3)–(6). В данном разделе обсуждается возможность появления подобных топологий в результате квантовых флуктуаций. Проблеме квантового рождения Вселенной посвящено множество работ. В данном случае ситуация осложняется тем, что рассматривается нелинейный вариант гравитации и, кроме того, имеются дополнительные измерения, стабильность которых должна учитываться особо. Рождение  $n$ -мерного пространства с дополнительными измерениями в рамках стандартной гравитации рассматривалось в работах [26, 27], где изучались также и области стабильности компактного подпространства. В работах [21, 26] изучалась возможность инфляции при наличии дополнительных измерений. Квадратичная по скаляру Риччи гравитация исследовалась в этом аспекте в работе [28].

Вероятности рождения Вселенной, получаемые в разных подходах, кардинально отличаются друг от друга [29], что может указывать как на несовершенство современных теорий, так и на сложность предмета. Конечной целью подобных вычислений является определение вероятности появления вселенной нашего типа. Вряд ли стоит ожидать, что эта вероятность высока, учитывая факт тонкой настройки параметров Вселенной. В таком случае вычисление вероятности представляет чисто академический интерес ввиду отсутствия причинных связей между вселенными. По-видимому, на современном этапе для обоснования перспективности исследования необхо-

димо и достаточно доказать, что доля вселенных нашего типа не равна нулю в рамках конкретного подхода. В нашем случае это означает, что вероятность каждого перехода (4) в каскаде отлична от нуля.

Основной вклад в амплитуду перехода (1) дают классические траектории, на которых действие стационарно. Их форма зависит от граничных условий и, в частности, от свойств многообразия  $\Sigma_f$ . В нашем случае метрика на гиперповерхности  $\Sigma_f$  определяется условиями (4)–(6). Поэтому будем искать классические траектории, подчиняющиеся тем же условиям на любом сечении  $\Sigma$  между сечениями  $\Sigma_{in}$  и  $\Sigma_f$ . Начальная гиперповерхность  $\Sigma_{in}$  может либо вовсе отсутствовать (подход Хартля–Хокинга), либо иметь «нулевую геометрию» (интервал между двумя любыми точками этой гиперповерхности равен нулю — подход Виленкина). Ниже показано, что в этих случаях вероятность перехода слабо зависит от свойств гиперповерхности  $\Sigma_{in}$ .

В качестве примера рассмотрим вероятность формирования структуры

$$\Sigma_f = \Sigma_{final} = M_3 \otimes M_{d_{final}}, \quad (36)$$

возникающей на последнем этапе каскада. Основной вклад в амплитуду перехода вносят классические траектории. Смена топологии при классическом движении маловероятна. Поэтому для нас будут важны классические траектории, состоящие из гиперповерхностей, также удовлетворяющих условию (36). Тогда топология  $D$ -мерного риманова пространства между сечениями  $\Sigma_{in}$  и  $\Sigma_f$  есть

$$\mathbb{R} \otimes M_3 \otimes M_{d_{final}}. \quad (37)$$

Как и ранее (см. (5)), предполагается выполненным неравенство  $R_3 \ll R_{d_{final}}$ , которое позволяет воспользоваться результатами предыдущего раздела. Действительно, в использованном приближении действие (8) трансформируется в теорию вида (29), а затем в привычное действие Эйнштейна–Гильберта (34).

Действие (34) неоднократно использовалось для изучения проблемы квантового рождения Вселенной, см., например, [29–34]. Однако в работах, посвященных квантовому рождению Вселенной, наличие скалярного поля обычно постулируется, в то время как в нашем подходе это поле является компонентами метрического тензора дополнительного пространства. Поэтому можно воспользоваться результатами многочисленных исследований, кратко воспроизводя их основные результаты.

Квантовое рождение Вселенной изучается обычно в рамках минисуперпространства, в котором интервал записывается как [29]

$$ds^2 = \sigma^2 [N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 d\Omega_3^2],$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12\pi^2 M_{Pl}^2} \quad (38)$$

(здесь  $N(t)$  — функция хода,  $a(t)$  — масштабный фактор). Волновая функция  $\psi(a)$  удовлетворяет уравнению Уилера–ДеВитта

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial a^2} - W(a) \right] \psi(a) = 0, \quad (39)$$

где потенциал

$$W(a) = a^2(1 - H^2 a^2), \quad a > 0, \quad H = \frac{\sqrt{U(\chi)}}{6\pi M_{Pl}^2}.$$

Рождение Вселенной описывается подбарьерным переходом с запрещенной областью

$$0 < a < H^{-1}. \quad (40)$$

Волновая функция в этой области имеет вид [26]

$$\psi(a) \approx \exp \left[ \int_a^{H^{-1}} \sqrt{-2W(a')} da' \right]. \quad (41)$$

Интеграл, входящий в это выражение, плохо определен на нижнем пределе, где  $a \rightarrow 0$ . В этой области не работает приближение  $R_3 \ll R_{d_{final}}$ , поскольку  $R_3 = k/a^2 \rightarrow \infty$ , и явное выражение для потенциала не определено. Эта же проблема имеет место и в других моделях квантового рождения Вселенной [35]. Тем не менее, вычисленный таким образом интеграл имеет смысл в пределе

$$H \ll M_{Pl}, \quad (42)$$

когда область  $a \sim 0$  мала по сравнению со всей областью интегрирования. Наша Вселенная образовывалась при  $H \sim 10^{-6} M_{Pl}$ , так что неравенство (42) выполняется уже на инфляционной стадии. Вывод о слабой зависимости результата от поведения функции вблизи сингулярности подтверждается и в работах других авторов. Так, в работе [28] предлагалась начальная волновая функция вида  $\delta(a - a_{in})$ , а в работах [33, 34] изучался распад метастабильного вакуума из состояния с фиксированной энергией. В обоих случаях было показано, что начальные условия слабо влияют на вероятность перехода. Подробное обсуждение квантового рождения вселенных в многомерной гравитации содержится в работах [26, 36].

В подходе Виленкина вероятность рождения Вселенной есть

$$dP \propto \exp \left[ \frac{+2}{3U(\chi)} \right],$$

в то время как приближение Хартля–Хокинга дает

$$dP \propto \exp \left[ \frac{-2}{3U(\chi)} \right].$$

Величина скалярного поля  $\chi$  однозначно связана с размером дополнительного пространства, поэтому вероятность рождения дополнительных измерений зависит от их характерного размера. При всех различиях главным в обоих подходах является то, что вероятность события отлична от нуля и, следовательно, доля вселенных с заданными свойствами, образующихся в результате каскада редукций, отлична от нуля.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Существует несколько проблем, решение каждой из которых представляет собой серьезную задачу.

1) Проблемы, связанные с дополнительными измерениями — их число, механизм компактификации, возможность экспериментальной проверки их существования.

2) Проблема нелинейности гравитационного действия, неизбежно возникающей в результате квантовых эффектов.

3) Проблема, связанная с тем, что лишь при некоторых численных значениях параметров теории происходит образование Вселенной со сложной структурой. Вообще говоря, формулировка будущей теории, претендующей на роль «окончательной», не должна содержать конкретных численных значений. В противном случае потребуется еще более общая теория, объясняющая их происхождение.

В настоящей работе показана взаимосвязь этих проблем. При этом оказывается, что совместное их рассмотрение не усложняет, а облегчает понимание путей их решения. Процесс каскадной редукции (28) позволяет получить по крайней мере счетное множество вселенных с различными свойствами. На конечном этапе каскада образуется Вселенная, которая описывается эффективной низкоэнергетической теорией с параметрами, значения которых определяются конкретным каскадом. Значения параметров варьируются в широких пределах, что указывает на возможность решения проблемы тонкой настройки.

Идея каскадной редукции, разработанная в статье, в низкоэнергетическом пределе приводит к тем



же результатам, что и теория струн, в рамках которой введено понятие «ландшафта», см., например, [2, 4]. «Ландшафтом» обозначается сложная форма потенциала с множеством минимумов, в которых существуют вселенные различных типов. В отличие от теории (супер)струн, механизм каскадной редукции основан лишь на предположении о многомерности пространства и нелинейности действия.

Масса Планка, размер дополнительных измерений и космологическая постоянная оказываются зависящими от конкретного каскада и способа определения масс частиц наблюдателем.

Необходимой составной частью каскадной редукции является возможность квантового рождения вселенных с компактными дополнительными измерениями. В статье обсуждается способ вычисления вероятности такого процесса в рамках гравитационного действия с высшими производными.

Выбор подходящего каскада, образовавшего нашу Вселенную, в настоящей работе не обсуждается. Остается нерешенной также проблема выбора начального лагранжиана. В качестве примера рассмотрен простейший нелинейный по кривизне лагранжиан. Используя подход, предложенный в работе [19], нетрудно обобщить рассмотрение на более сложные формы исходного лагранжиана.

Автор благодарен К. А. Бронникову, В. Д. Ивашуку, М. И. Калинину и В. Н. Мельникову за интерес к работе и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Barrow and F. J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Clarendon Press, Oxford (1986); M. J. Rees, *Our Cosmic Habitat*, Princeton Univ. Press, Princeton (2002); N. Bostrom, *Anthropic Bias: Observation Selection Effects in Science and Philosophy*, Routledge, New York (2002); M. Tegmark, E-print archives astro-ph/0302131; A. Aguirre and M. Tegmark, E-print archives hep-th/0409072; G. L. Kane, M. J. Perry, and A. N. Zytlow, *New Astron.* **7**, 45 (2002); P. Davies, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 727 (2004); C. J. Hogan, in *Universe or Multiverse?*, ed. by B. J. Carr, Cambridge University Press (2005); E-print archives astro-ph/0407086; W. R. Stoeger, G. F. R. Ellis, and U. Kirchner, E-print archives, astro-ph/0407329; A. Aguirre, in *Universe or Multiverse?*, ed. by B. Carr, Cambridge University Press (2005); E-print archives astro-ph/0506519; M. Livio and M. J. Rees, *Science* **309**, 1022 (2005); S. Weinstein, *Class. Quant. Grav.* **23**, 4231 (2006); E-print archives hep-th/0508006; M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D* **73**, 023505 (2006).
2. W. Lerche, D. Lust, and A. N. Schellekens, *Nucl. Phys. B* **287**, 477 (1987).
3. S. G. Rubin, in *Chaos Solitons Fractals* Vol. 14, p. 891 (2002); E-print archives astro-ph/0207013; S. G. Rubin, *Grav and Cosmol.* **9**, 243 (2003); E-print archives hep-ph/0309184.
4. S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. P. Trivedi, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003); E-print archives hep-th/0301240.
5. C. Castro, A. Granik, and M. S. El Naschie, E-print archives hep-th/0004152.
6. U. Bleyer, M. Mohazzab, and M. Rainer, E-print archives gr-qc/9508035.
7. Ch. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
8. D. L. Wiltshire, in *Cosmology: the Physics of the Universe*, ed. by B. Robson, N. Visvanathan, and W. S. Woolcock, World Scientific, Singapore (1996), p. 473; E-print archives gr-qc/0101003.
9. S. Coleman, *Nucl. Phys. B* **307**, 867 (1988).
10. H. Firouzjahi, S. Sarangi, and S.-H. Henry Tye, E-print archives hep-th/0406107.
11. J. A. Wheeler in *Groups and Topology*, ed. by B. S and C. M. DeWitt, Gordon and Breach, New York (1963).
12. M. Yu. Konstantinov, *Int. J. Mod. Phys. D* **7**, 1 (1998); E-print archives gr-qc/9508050.
13. S. M. Carroll et al., E-print archives hep-th/0110149.
14. J. F. Donoghue, *Phys. Rev. D* **50**, 3874 (1994).
15. A. Strominger, *Phys. Rev. D* **24**, 3082 (1981).
16. T. G. Rizzo, E-print archives hep-ph/0503163.
17. Rong-Gen Cai, Nobuyoshi Ohta, E-print archives hep-th/0604088.
18. R. Kerner, *Gen. Rel. and Grav.* **14**, 453 (1982); J. D. Barrow and A. C. Ottewill, *J. Phys. A* **10**, 2757 (1983); J. P. Duruisseau and R. Kerner, *Gen. Rel. and Grav.* **15**, 797 (1983); B. Whitt, *Phys. Lett. B* **145**, 176 (1984); J. D. Barrow and S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* **214**, 515 (1988); K. Maeda, J. A. Stein-Schabes, and T. Futamase, *Phys. Rev. D* **39**, 2848 (1989); G. Magnano and L. M. Sokolowski, *Phys. Rev. D* **50**, 5039 (1994), E-print archives gr-qc/9312008; J. Ellis, N. Kaloper, K. A. Olive, and J. Yokoyama, *Phys. Rev. D* **59**, 103503 (1999); E-print archives hep-ph/9807482.

19. K. A. Bronnikov and S. G. Rubin, *Phys. Rev. D* **73**, 124019 (2006); E-print archives gr-qc/0510107; K. A. Bronnikov, R. V. Konoplich, and S. G. Rubin, *Class. Quant. Grav.* **24**, 1261 (2007); E-print archives gr-qc/0610003.
20. G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
21. U. Günther, P. Moniz, and A. Zhuk, *Astrophys. Space Sci.* **283**, 679 (2003); E-print archives gr-qc/0209045.
22. K. A. Bronnikov and V. N. Melnikov, E-print archives gr-qc/0310112.
23. S. Nasri, P. J. Silva, G. D. Starkman, and M. Trodden, *Phys. Rev. D* **66**, 045029 (2002); E-print archives hep-th/0201063.
24. N. Kaloper et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 928 (2000).
25. J. Morris, E-print archives gr-qc/0106022.
26. E. Carugno et al., *Phys. Rev. D* **53**, 6863 (1996); E-print archives gr-qc/9510066.
27. H. Ochiai and K. Sato, E-print archives gr-qc/0007059; X. M. Hu and Z. C. Wu, *Phys. Lett. B* **149**, 87 (1984).
28. W.-M. Suen and K. Young, *Phys. Rev. D* **39**, 2201 (1989).
29. A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **37**, 888 (1988).
30. J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).
31. A. D. Linde, *Lett. Nuovo Cimento* **39**, 401 (1984).
32. A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* **117**, 25 (1982).
33. U. Weiss and W. Haefner, *Phys. Rev. D* **27**, 2916 (1983).
34. I. Dymnikova and M. Fil'chenkov, E-print archives gr-qc/0209065.
35. M. B. Mijić, M. S. Morris, and W. M. Suen, *Phys. Rev. D* **39**, 1496 (1989).
36. H. van Elst, J. E. Lidsey, and R. Tavakol, *Class. Quant. Grav.* **11**, 2483 (1994), E-print archives gr-qc/9404044.