

ДВИЖЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СОЛИТОНОВ В ЛАЗЕРЕ С ПЛАВНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

*Н. Н. Розанов**, *С. В. Федоров*** , *А. Н. Шацев****

*ФГУП «Научно-производственная корпорация «Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова»,
Институт лазерной физики
199034, Санкт-Петербург, Россия*

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 17 июля 2007 г.

Аналитически и численно изучено влияние градиента неоднородности на поперечное движение диссипативных солитонов и их комплексов в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением. Обнаружено, что солитон с ненулевым топологическим зарядом движется в установившемся режиме прямолинейно, но в направлении, отличающемся от направления градиента длины резонатора, что связано с нетривиальной внутренней структурой солитона. Установившееся движение комплексов солитонов может быть криволинейным, включающим поступательное и вращательное движение их центра.

PACS: 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

Диссипативные солитоны, т. е. волновые объекты, локализованные за счет баланса притока и оттока энергии и/или материи, возникают в большом числе нелинейных физических, химических и биологических систем [1] и представляют значительный интерес как примеры самоорганизации. В последнее время наиболее интенсивно исследуются оптические диссипативные солитоны [1, 2], что связано как с большей простотой и доступностью нелинейнооптических явлений, так и с высоким потенциалом их приложений к информационным технологиям.

Для экспериментов и приложений наиболее перспективны пространственные (поперечно двумерные) диссипативные солитоны в таких широкоапертурных схемах как нелинейный интерферометр, возбуждаемый внешним излучением [3, 4], и лазер с насыщающимся поглощением [5]. Ввиду трансляционной инвариантности системы в идеальных условиях одиночные солитоны обладают высокой (осевой) симметрией, неподвижны и могут быть локализованы

в любой точке апертуры. Их движение может быть вызвано поперечной неоднородностью параметров схемы, таких как длина резонатора (интерферометра), что отвечает непараллельности зеркал, потерь или усиления активной среды (в лазерных схемах) и неоднородности интенсивности и фазы внешнего сигнала (в нелинейных интерферометрах), см. [2, 6] и приведенную там литературу. Еще одной причиной поперечного движения, присутствующей даже в условиях поперечной однородности системы, служит асимметрия солитонной структуры, например, в асимметричных комплексах связанных диссипативных солитонов [7–9]. В общем случае эти два фактора действуют одновременно.

Важность влияния неоднородностей системы на поперечную локализацию и движение диссипативных локализованных структур вызвана следующими обстоятельствами, которые первоначально были изучены для случая нелинейных интерферометров [7, 10, 11]. Существенно, что неоднородность, как правило, меняет симметрию солитонной структуры и, тем самым, многие ее важные свойства. Так, ввиду произвольности расположения солитона на апертуре малейшие случайные неоднородности будут вызывать его движение, что может пре-

*E-mail: rosanov@NR3748.spb.edu

**E-mail: sfedorov2006@bk.ru

***E-mail: anshat@yahoo.com

пятствовать информационным приложениям при кодировке информации с помощью солитонов. Напротив, регулярные поперечные неоднородности могут, во-первых, приводить к локализации солитоноподобной структуры в выделенных положениях и, во-вторых, вызывать передвижение этих структур, необходимое для операций обработки информации [11, 12]. Отметим также, что уже слабая пространственная модуляция, например, параметров внешнего излучения в схеме нелинейного интерферометра может приводить к стабилизации солитоноподобных структур, даже если в отсутствие модуляции локализованные структуры неустойчивы [10].

В последующих работах [13, 14] на основе теории возмущений [15] и свойств так называемых «нейтральных мод» солитонов, существование которых связано с трансляционной инвариантностью невозмущенной задачи, было выполнено детальное полуаналитическое исследование влияния малых градиентов параметров нелинейных интерферометров на скорость движения одиночных солитонов. Направление поперечной скорости солитона совпадало с направлением градиента, так что задача фактически сводилась к вычислению коэффициента пропорциональности между модулем скорости и величиной градиента. Принципиально новым моментом для лазерных схем без внешнего сигнала является инвариантность к сдвигу фазы поля и соответствующее появление новых «нейтральных мод», а также существование гораздо более богатого набора различных типов солитонов, включая «вихревые» солитоны (с ненулевым топологическим зарядом). Влияние неоднородностей в этом случае изучено недостаточно; укажем здесь лишь рассмотрение на основе приближенного метода моментов [16].

Задача настоящей работы заключается в полуаналитическом и численном исследовании влияния слабых плавных неоднородностей на свойства и движение одиночных солитонов и их комплексов в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением. Для лазера здесь принимается простейшая модель, отвечающая приближению среднего поля (усреднение огибающей поля по продольной координате) и безынерционной нелинейности (лазер класса А, разд. 2). Плавность неоднородности позволяет свести задачу к анализу воздействия на солитон градиента неоднородности. Полуаналитический подход теории возмущений для одиночных солитонов с различными топологическими зарядами в пределе малых градиентов позволяет найти скорости установившегося движения солитонов; при этом, в отличие от рассматривавшихся ранее случаев, направле-

ние скорости солитона может не совпадать с направлением градиента неоднородности (разд. 3). Более полную информацию без ограничений на малость градиента неоднородности и симметрию солитонной структуры можно получить с помощью численного моделирования, выполненного в разд. 4 (для одиночных солитонов) и разд. 5 (для их комплексов). Обсуждение результатов и общие выводы содержатся в Заключение. Насколько нам известно, ранее влияние неоднородностей на движение диссипативных оптических солитонов с ненулевым топологическим зарядом и солитонных комплексов не рассматривалось, хотя, как показывают приведенные ниже результаты, нетривиальность внутренней структуры таких солитонов приводит к принципиальным изменениям их отклика уже на слабые неоднородности.

2. МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА

Рассматриваем широкоапертурный лазер класса А (времена релаксации среды много меньше времени установления поля в резонаторе) с фиксированной поляризацией в приближении среднего поля [17] (усреднение огибающей электрического поля E по продольному направлению, оправданное при относительно малых изменениях огибающей поля за один проход через резонатор). Управляющее уравнение имеет следующий безразмерный вид [2]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d_{\perp})\Delta_{\perp} E + f(|E|^2, p\mathbf{r}_{\perp}) E. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_{\perp} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ — двумерный вектор поперечных координат x и y , p — характерная величина градиента неоднородности, d_{\perp} — коэффициент эффективной диффузии ($0 < d_{\perp} \ll 1$), отражающий возрастание потерь в лазере при отклонении луча от осевого направления (квадратичных по малому углу отклонения). Вещественная в отсутствие неоднородностей и в пренебрежении частотными расстройками функция $f(I, 0)$ интенсивности излучения $I = |E|^2$ включает линейные (нерезонансные) потери, а также усиление и поглощение, характеризующиеся безынерционным насыщением:

$$f(|E|^2, 0) = -1 + \frac{g_0}{1 + |E|^2} - \frac{a_0}{1 + b|E|^2}. \quad (2)$$

В выражении (2) член « -1 » соответствует нормированным нерезонансным потерям, g_0 и a_0 — линейные

коэффициенты усиления и поглощения, b — отношение интенсивностей насыщения для усиления и поглощения. Соотношения с размерными величинами следующие [2, 8, 9]. Время измеряется в единицах времени жизни фотона в резонаторе

$$\tau_f = \frac{L}{c}(1 - R),$$

где L — длина резонатора, c — скорость света в линейной среде, R — коэффициент отражения зеркал; поперечные координаты измеряются в ширинах зоны Френеля. Необходимым условием устойчивости локализованных структур служит требование устойчивости безгенерационного режима

$$f(0, 0) < 0.$$

Неоднородности считаются плавными в масштабе ширины солитона, ввиду чего функция $f(|E|^2, p\mathbf{r}_\perp)$ может быть разложена в ряд Тейлора по \mathbf{r}_\perp с сохранением в разложении только членов, линейных по \mathbf{r}_\perp . Здесь мы будем рассматривать главным образом случай медленного поперечного изменения длины резонатора. Тогда можно считать

$$f(|E|^2, p\mathbf{r}_\perp) = f(|E|^2, 0) - ipx. \quad (3)$$

Отметим, что в таких условиях можно не накладывать каких-либо ограничений на величину изменений координаты x . Напротив, в случае поперечного изменения потерь

$$f(|E|^2, p\mathbf{r}_\perp) = f(|E|^2, 0) + \gamma x \quad (4)$$

изменения x заведомо должны быть невелики для сохранения условий существования солитона.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Подход основывается на теории возмущений для солитонов [15] и в значительной мере аналогичен применявшемуся для случая нелинейного интерферометра [13, 14]. Поэтому здесь мы ограничимся анализом только установившегося режима.

В низшем приближении неоднородность приводит к движению солитона в целом без изменения его формы. В системе координат $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{v}t$, $\tau = t$, движущейся вместе с солитоном с его скоростью \mathbf{v} , уравнение для стационарной солитонной структуры с произвольной симметрией имеет вид

$$ip\xi_x A - id_\perp \mathbf{v} \cdot \nabla_\xi A - d_\perp v^2 A/4 = (i + d_\perp) \nabla_\xi^2 A + i\alpha A + f(I, 0)A, \quad (5)$$

где

$$E(\mathbf{r}_\perp, t) = A(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}/2 - i\omega t - ipv_x t^2/2),$$

$$\alpha = \nu + v^2/4,$$

ν — частотный сдвиг солитона в отсутствие неоднородностей, а точка обозначает скалярное произведение в двумерном подпространстве $\boldsymbol{\xi}$.

Разложение теории возмущений по малому модулю скорости $|\mathbf{v}| = v \sim p \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\xi}) &= A_0(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\xi}) + O(v^2), \\ \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{e}_x A_x(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{e}_y A_y(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{e}_{x,y}$ — орты движущейся системы координат:

$$\boldsymbol{\xi} = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y.$$

Рассмотрим для примера движение солитона с топологическим зарядом $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В нулевом порядке (в отсутствие неоднородности) солитон обладает осесимметричным распределением интенсивности:

$$A_0(\mathbf{r}_\perp) = A_0(r) e^{im\varphi}.$$

Случай $m = 0$ соответствует фундаментальному солитону с регулярным профилем фазы. Вихревые солитоны ($m \neq 0$) обладают нулевой интенсивностью при $r = 0$ и приростом фазы $2\pi m$ при обходе этой точки по замкнутому контуру (винтовая дислокация волнового фронта). При этом амплитуда солитонов удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, где $f(I) = f(I, 0)$

$$\begin{aligned} (i + d_\perp) \nabla_m^2 A_0 + i\alpha A_0 + f(I_0)A_0 &= 0, \\ I_0 = |A_0|^2, \quad \nabla_m^2 = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - m^2 r^{-2}. \end{aligned} \quad (7)$$

На бесконечности

$$A_0(r)|_{r \rightarrow \infty} \sim K_m(\lambda_s r),$$

где K_m — функция Макдональда, так что амплитуда убывает с комплексным декрементом

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{if(0) - \alpha}{1 - id}}.$$

Можно переписать разложение (6) в векторном комплексном представлении:

$$V(\boldsymbol{\xi}) = V_0(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi}) + O(v^2),$$

где вектор-функция

$$V(\boldsymbol{\xi}) = (A(\boldsymbol{\xi}), A^*(\boldsymbol{\xi}))^{\text{Tr}},$$

так же, как и ее величина в нулевом приближении

$$V_0(\xi) = (A_0(\xi), A_0^*(\xi))^{\text{Tr}},$$

принадлежит функциональному пространству со скалярным произведением

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{2} \langle V^*, W \rangle,$$

где вещественная билинейная форма $\langle V, W \rangle$ выражается через интеграл

$$\langle V^*, W \rangle = 2 \int \text{Re} [V^*(\xi)W(\xi)] d\xi.$$

Переходя к первому порядку теории возмущений, введем компоненты двумерных векторов

$$\mathbf{V}_1(\xi) = \mathbf{e}_x V_x(\xi) + \mathbf{e}_y V_y(\xi)$$

в комплексном представлении

$$V_{x,y}(\xi) = (A_{x,y}(\xi), A_{x,y}^*(\xi))^{\text{Tr}}.$$

Получим

$$\mathbf{v} \cdot \hat{L} \mathbf{V}_1(\xi) + \mathbf{v} \cdot d_{\perp} \nabla_{\xi} \Phi(\xi) = p \xi_x \Phi(\xi), \quad (8)$$

$$\Phi(\xi) = (iA_0(\xi), -iA_0^*(\xi))^{\text{Tr}}.$$

Здесь $\Phi(\xi)$ — собственный вектор из корневого функционального подпространства дифференциального матричного оператора: $\hat{L}\Phi(\xi) = 0$, что следует из (7), и

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} i\hat{L}_1, & A_0^2 f'_0 \\ A_0^{*2} f'^*_0, & -i\hat{L}_1^* \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} i\hat{L}_0 &= i\alpha + (i + d_{\perp}) \nabla_{\xi}^2 + f_0, & \hat{L}_0 A_0(\xi) &= 0, \\ i\hat{L}_1 &= i\hat{L}_0 + I_0 f'_0, & f_0 &= f(I_0), & f'_0 &= f'_0(I_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Вид корневого вектора $\Phi(\xi)$ связан с симметрией исходного уравнения (1) относительно сдвига фазы (нейтральная мода). Два других собственных вектора из корневого подпространства (также нейтральные моды)

$$\Psi_{x,y}(\xi) = (\psi_{x,y}(\xi), \psi_{x,y}^*(\xi))^{\text{Tr}}$$

отвечают симметрии уравнения относительно переноса в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \Psi_x(\xi) \mathbf{e}_x + \Psi_y(\xi) \mathbf{e}_y = \\ &= \nabla_{\xi} (A_0(\xi), A_0^*(\xi))^{\text{Tr}}, \quad \hat{L} \Psi_{x,y}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения скорости движения солитона в резонаторе с неоднородной длиной из выражения (8) требуется найти соответствующие векторы корневого подпространства сопряженного (относительно билинейной формы $\langle V, W \rangle$) оператора:

$$\begin{aligned} \hat{L}^{\dagger} &= \begin{pmatrix} i\hat{L}_1, & A_0^{*2} f'^*_0 \\ A_0^2 f'_0, & -i\hat{L}_1^* \end{pmatrix}, \quad \hat{L}^{\dagger} \Psi_{x,y}^{\dagger}(\xi) = 0, \\ \Psi_{x,y}^{\dagger}(\xi) &= (\psi_{x,y}^{\dagger}(\xi), \psi_{x,y}^{\dagger*}(\xi))^{\text{Tr}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для этого перейдем к полярным координатам в поперечном сечении. Разложим сопряженный вектор по ортам полярных координат $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\varphi}$, где $r = |\xi|$,

$$\mathbf{e}_x \psi_x^{\dagger}(\xi) + \mathbf{e}_y \psi_y^{\dagger}(\xi) = (\mathbf{e}_r \psi_r^{\dagger}(r) + \mathbf{e}_{\varphi} \psi_{\varphi}^{\dagger}(r)) e^{-im\varphi} \quad (12)$$

и выпишем уравнения для комбинаций его компонент

$$\psi_{\pm}^{\dagger}(r) = -\psi_r^{\dagger}(r) \pm i\psi_{\varphi}^{\dagger}(r).$$

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} (i + d_s) \nabla_{m\pm 1}^2 \psi_{\pm}^{\dagger}(r) + [i\alpha + f(I_0) + I_0 f'(I_0)] \times \\ \times \psi_{\pm}^{\dagger}(r) + A_0^{*2}(r) f'^*(I_0) \psi_{\mp}^{\dagger}(r) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

с простой асимптотикой на бесконечности

$$\psi_{\pm}^{\dagger}(r) \sim K_{m\pm 1}(\lambda_s r).$$

Решив эту краевую задачу для двух связанных уравнений, мы определим корневой вектор сопряженного оператора $\Psi_{x,y}^{\dagger}(\xi)$. Затем умножим скалярно выражение (8) на Ψ_i^{\dagger} , где $i = x, y$. Учитывая равенство

$$\langle \Psi_i^{\dagger}, \hat{L} V_k \rangle = \langle \hat{L}^{\dagger} \Psi_i^{\dagger}, V_k \rangle = 0,$$

в результате получим систему из двух неоднородных линейных уравнений для компонент скорости движения. Из ее решения получаем окончательные выражения для скоростей, пропорциональных заданному градиенту резонаторной расстройки:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{p}{d_{\perp}} \frac{a_r b_r + a_{\varphi} b_{\varphi}}{a_r^2 + a_{\varphi}^2}, \\ v_y &= \frac{p}{d_{\perp}} \frac{a_r b_{\varphi} - a_{\varphi} b_r}{a_r^2 + a_{\varphi}^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты $a_{r,\varphi}, b_{r,\varphi}$ выражаются только через радиальные интегралы:

$$\begin{aligned} b_{r,\varphi} &= \text{Im} \int \psi_{r,\varphi}^{\dagger}(r) A_0(r) r^2 dr, \\ a_{r,\varphi} &= \text{Im} \int \psi_{r,\varphi}^{\dagger}(r) A'_0(r) r dr \pm \\ &\pm m \text{Re} \int \psi_{r,\varphi}^{\dagger}(r) A_0(r) dr. \end{aligned} \quad (15)$$

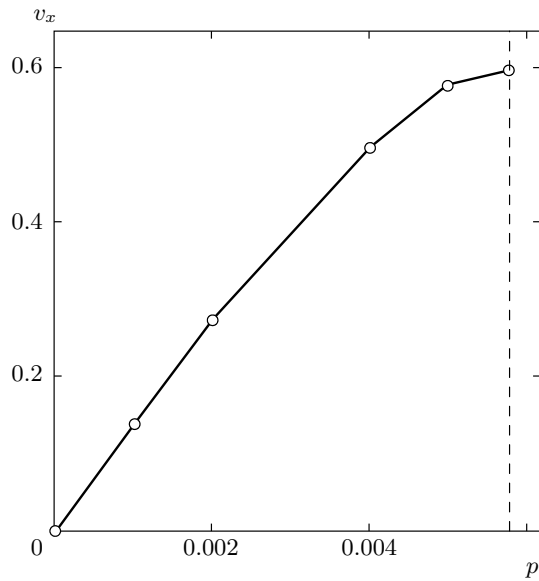


Рис. 1. Зависимость скорости движения фундаментального солитона от градиента фазы p . Вертикальная штриховая линия указывает границу, за которой солитон разрушается

Полученные соотношения свидетельствуют о прямолинейном установившемся движении солитона под действием малого градиента неоднородности со скоростью, модуль которой пропорционален этому градиенту. Нетрудно заметить, что изменению знака топологического заряда $m \rightarrow -m$ отвечают замены

$$c_r \rightarrow c_r, \quad c_\varphi \rightarrow -c_\varphi$$

и

$$v_x \rightarrow v_x, \quad v_y \rightarrow -v_y,$$

где

$$c_{r,\varphi} = a_\varphi, b_{r,\varphi}, \psi_{r,\varphi}^\dagger.$$

Отсюда, в частности, следует, что скорость фундаментального солитона ($m = 0$) направлена вдоль градиента расстройки: $v_y = 0$. В то же время направление скорости солитонов с ненулевым топологическим зарядом отличается от направления градиента неоднородности, причем угол отклонения не зависит ни от величины (малого) градиента p , ни от (также малого) коэффициента эффективной диффузии d_\perp . Отличие связано с тем, что для фундаментального солитона направление градиента (\mathbf{e}_x) служит осью симметрии поперечного распределения интенсивности и потока энергии (вектора Пойнтинга). А для солитона с ненулевым топологическим зарядом такая симметрия отсутствует.

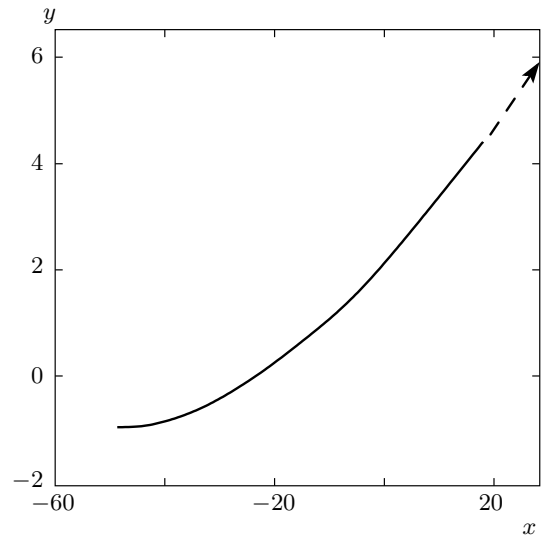


Рис. 2. Установление прямолинейного движения солитона с топологическим зарядом $m = 1$; $p = 0.0005$

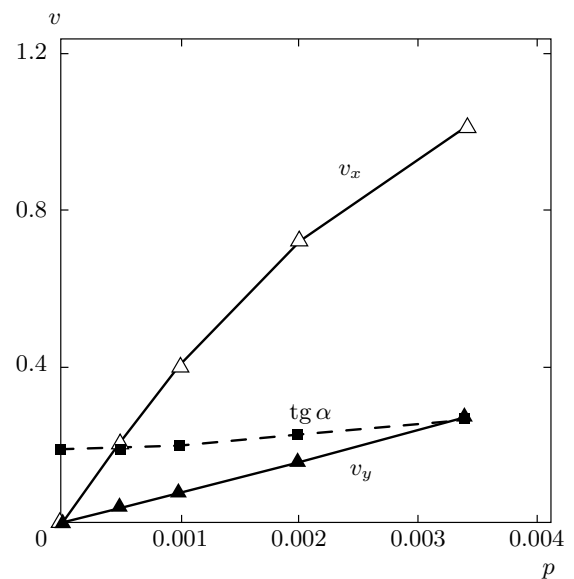


Рис. 3. Зависимости компонент скорости солитона v_x, v_y и тангенса угла наклона траектории α (штриховая линия) от величины градиента длины резонатора p

Этот результат можно также интерпретировать «механически» следующим образом. На солитон как частицу действуют три «силы». Первая пропорциональна градиенту неоднородности и направлена вдоль \mathbf{e}_x . Вторая — «сила» вязкого трения — направлена противоположно скорости движения соли-

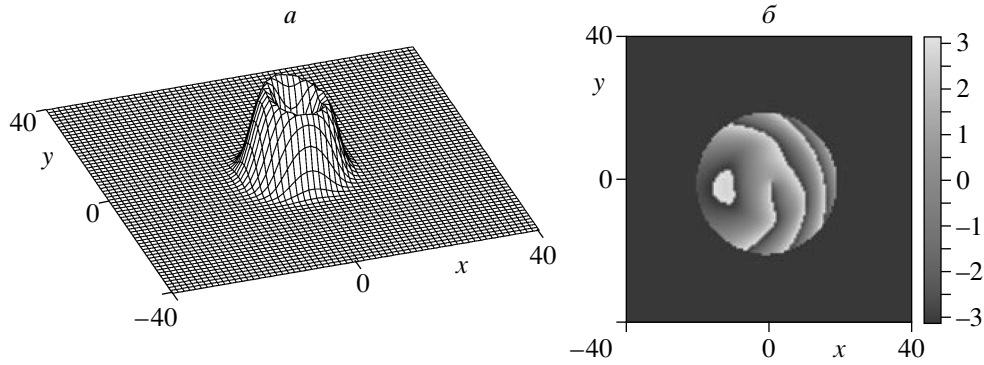


Рис. 4. Поперечные распределения интенсивности (а) и фазы (б) солитона в поле градиента длины резонатора; $p = 0.0034$. Справа — шкала для фазы

тона \mathbf{v} и пропорциональна по величине ее модулю v , а коэффициент пропорциональности в свою очередь пропорционален коэффициенту эффективной диффузии d_{\perp} . Третья «сила» возникает из-за распределенности и вращения солитона, т. е. из-за его внутренней структуры. Так, в точках на одном и том же диаметре по разные стороны от центра солитона локальная суммарная (поступательная + вращательная) скорость различна. Поэтому в этих точках различается и «локальное вязкое трение» (большее в точке с большей суммарной скоростью). Проинтегрированный по всему солитону градиент «вязкого трения», который и ставится в соответствие «третьей силе», оказывается направленным ортогонально скорости движения солитона \mathbf{v} (направление меняется на противоположное при изменении знака топологического заряда m). Равновесие этих трех сил приводит к равномерному движению солитона под углом к градиенту неоднородности, причем этот угол также оказывается не зависящим от коэффициента эффективной диффузии d_{\perp} .

В случае градиента потерь достаточно заменить в приведенных выше соотношениях ip на γ , тогда вместо выражений (14) получим

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\gamma}{d_{\perp}} \frac{a_r b'_r + a_{\varphi} b'_{\varphi}}{a_r^2 + a_{\varphi}^2}, \\ v_y &= -\frac{\gamma}{d_{\perp}} \frac{a_r b'_{\varphi} - a_{\varphi} b'_r}{a_r^2 + a_{\varphi}^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$b'_{r,\varphi} = \text{Re} \int \psi^{\dagger}_{r,\varphi}(r) A_0(r) r^2 dr.$$

Нетрудно обобщить этот результат на случай различия направлений изменения длины резонатора и потерь или усиления.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ СОЛИТОНОВ

Аналитическое рассмотрение ограничивается случаем весьма малых градиентов неоднородности, а также практически вариантом симметричной в отсутствие неоднородности солитонной структуры. В его рамках нельзя описать сценарии с несохранением числа солитонов, а также некоторые другие нетривиальные режимы. Наконец, нелегко выяснить границы применимости обычно используемых низших приближений теории возмущений. От всех этих ограничений свободен подход численного моделирования, результаты которого излагаются в этом разделе. Расчеты основывались на решении уравнений (1)–(3) (неоднородность длины резонатора, градиент фазового набега вдоль оси x) при следующих значениях параметров: $a_0 = 2$, $g_0 = 2.11$, $b = 10$, $d_{\perp} = 0.06$. Мгновенные координаты центра солитонной структуры и его скорость определялись соотношениями

$$\mathbf{R}_c(t) = (X(t), Y(t)) = \frac{\int \mathbf{r}_{\perp} |E|^2 d\mathbf{r}_{\perp}}{\int |E|^2 d\mathbf{r}_{\perp}}, \quad (17)$$

$$\mathbf{v}_c(t) = (v_x(t), v_y(t)) = \frac{d}{dt} \mathbf{R}_c. \quad (18)$$

4.1. Фундаментальный солитон ($m = 0$)

При $p > 0$ солитон движется в положительном направлении оси x со скоростью $\mathbf{v}_c = (v_x, 0)$ (рис. 1), причем

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial p} \right|_{p=0} \approx 141$$

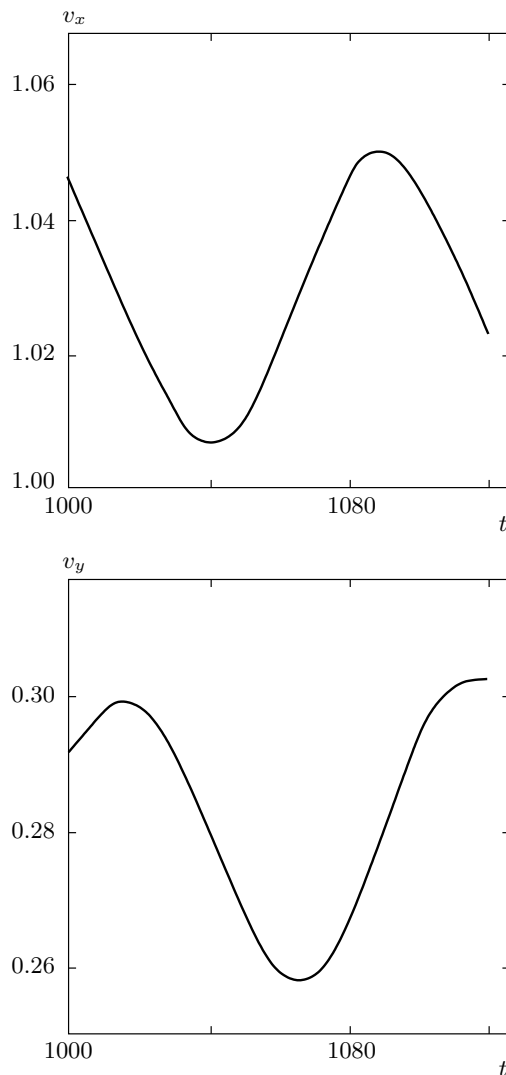


Рис. 5. Осцилляции скорости вращающегося заряженного солитона; $p = 0.0035$

и вблизи рабочей точки

$$\frac{\partial v_x}{\partial g_0} \approx 11, \quad \frac{\partial v_x}{\partial d_{\perp}} \approx 3.3.$$

С ростом p происходит некоторое искажение формы солитона, а при значениях $p \approx 0.006$ и выше солитон исчезает.

4.2. Солитон с ненулевым топологическим зарядом

Ввиду симметрии достаточно рассмотреть солитон с положительным топологическим зарядом. Расчеты выполнены для заряда $m = 1$. В зависимости

от величины градиента p имеется несколько сценариев. При малых градиентах ($p < 0.0035$), в соответствии с приведенным выше аналитическим рассмотрением, исходно неподвижный солитон начинает двигаться в положительном направлении оси x , затем появляется y -компонента скорости $v_y > 0$ и траектория приближается к прямой линии, направленной под углом α к оси x (рис. 2). Зависимости компонент скорости и тангенса угла наклона от величины градиента приведены на рис. 3.

С увеличением градиента форма солитона и структура потоков энергии [8] значительно искажаются. В распределении интенсивности возникает четкий максимум, ориентация которого относительно дислокации в установившемся режиме фиксирована (рис. 4). При уменьшении коэффициента эффективной диффузии d_{\perp} в два раза компонента скорости v_x увеличивается в два раза, а v_y — примерно в 1.8 раза, так что следующая из аналитического рассмотрения пропорциональность скорости коэффициенту диффузии выполняется удовлетворительно.

При дальнейшем возрастании градиента возникают квазипериодические режимы криволинейного движения солитона. Так, в диапазоне $0.00334 \leq p \leq 0.0039$ существует режим с периодическими колебаниями скорости (рис. 5) и соответствующие искажения центра тяжести солитона, а указанный выше максимум интенсивности вращается против часовой стрелки (рис. 6). Наконец, при больших значениях градиента $p > 0.0039$ форма солитона существенно искажается, он теряет топологический заряд и разрушается. Между различными режимами имеются гистерезисные переходы (перекрывание областей существования режимов). Так, например, при $p = 0.00336$ существует как режим с вращением максимумов, так и режим без вращения.

5. КОМПЛЕКСЫ СОЛИТОНОВ

В соответствии с [8, 9] мы будем различать комплексы солитонов со слабой и сильной связью. По сравнению с рассмотренным выше случаем одиночных солитонов здесь уже в отсутствие неоднородности структура асимметрична и может двигаться прямолинейно или криволинейно, а также вращаться [9, 18]. Эти обстоятельства приводят к большому разнообразию сценариев. Мы начнем рассмотрение со случая комплексов со слабой связью солитонов.

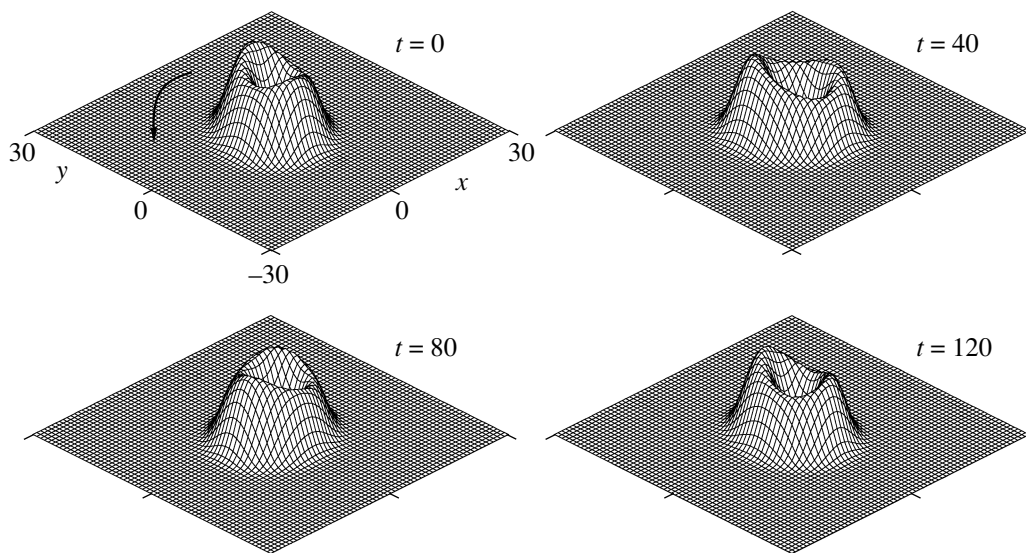


Рис. 6. «Вращающийся» профиль интенсивности солитона при $p = 0.0035$

5.1. Пара слабозаимодействующих синфазных незаряженных солитонов

При горизонтальной (вдоль градиента) ориентации пары слабосвязанных фундаментальных солитонов при очень малых градиентах ($p < 10^{-4}$) эта пара сохраняется как метастабильная и движется со скоростью, заметно большей, чем скорость одиночных солитонов. Так, при $p = 4 \cdot 10^{-5}$ для пары $v_x = 0.0154$, тогда как скорость одиночного солитона $v_x = 0.0056$. В этой области зависимость v_x от p с высокой степенью точности линейна. При малых отклонениях от горизонтальности и очень больших временах распространения ($\sim 10^5 - 10^6$) эта конфигурация разворачивается и превращается в вертикальную.

В диапазоне $p = 0.0001 - 0.0002$ пара с горизонтальной ориентацией очень медленно превращается в противофазную и движется со скоростью $v_x \approx 0.067$ для $p = 0.0002$ (при этом скорость одиночных солитонов $v_x \approx 0.028$). Соответственно меняется и расстояние между солитонами (с 18.3 до 13.3). При малых отклонениях от горизонтальности ориентация пары тоже сменяется на вертикальную.

При вертикальной ориентации скорость v_x примерно такая же, как для одиночных солитонов. При наклонной исходной ориентации синфазной пары она разворачивается и со временем становится вертикальной (рис. 7).

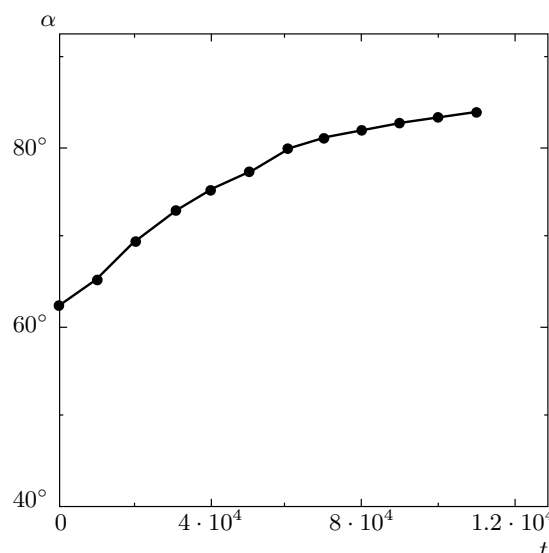


Рис. 7. Зависимость угла α ориентации синфазной пары от времени; $p = 0.00007$

5.2. Пара противофазных незаряженных солитонов

В отсутствие неоднородностей такая пара ввиду симметрии неподвижна и произвольно ориентирована. При небольших градиентах неоднородности пара сохраняется, но возникают ее развороты и прямолинейное движение. Горизонтальная ориентация такой пары также является метастабильной. Зависимость

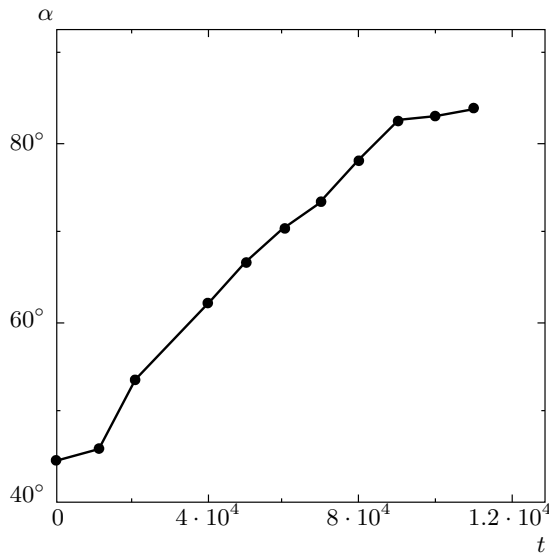


Рис. 8. Зависимость угла α ориентации противофазной пары от времени; $p = 0.0002$

угла ориентации от времени приведена на рис. 8. При вертикальном расположении эта пара движется со скоростью приблизительно на 10% большей, чем у одиночных незаряженных солитонов.

5.3. Правильный треугольник синфазных незаряженных солитонов

В отсутствие неоднородностей такой комплекс неподвижен ввиду наличия осей симметрии. При малых градиентах неоднородности ($p < 8 \cdot 10^{-5}$) сохраняется только одна ось симметрии и треугольник ориентируется так, что ось симметрии становится параллельной градиенту неоднородности. При этом наблюдается прямолинейное движение вдоль оси x со скоростью v_x , почти линейно зависящей от p и, что важно отметить, значительно большей, чем у одиночных незаряженных солитонов. Так, при $p = 2 \cdot 10^{-5}$ скорость $v_x \approx 0.0092$, т. е. $\partial v_x / \partial p \approx 460$, а при $p = 7.5 \cdot 10^{-5}$ скорость $v_x \approx 0.0282$.

Градиенты неоднородности $p > 8 \cdot 10^{-5}$ разрушают слабосвязанный правильный синфазный треугольник, он разваливается с разными сценариями в зависимости от p . Типичный сценарий приведен на рис. 9. Здесь правый солитон отделяется от пары, двигаясь вдоль оси x с большей скоростью.

5.4. Равнобедренный треугольник незаряженных солитонов

Без неоднородностей такой равнобедренный треугольник, где солитон при вершине сдвинут на π относительно двух других солитонов с совпадающей фазой, движется вдоль оси симметрии со скоростью $v_t \approx 0.07$. При включении градиента длины резонатора треугольник разворачивается. Скорость его движения направлена по оси вдоль x . Из рис. 10 видно, что скорость этого треугольника зависит от величины градиента p гораздо сильнее, чем для одиночных солитонов (прямая v_x имеет больший наклон, чем прямая v_{sum} , которая представляет собой сумму скорости одиночного солитона v_0 и скорости треугольника в отсутствие градиента фазы). Это связано, как и в случае, рассмотренном в п. 5.1, с искажением формы как самих солитонов, так и связей между ними. При $p = 0.002$ треугольник разваливается. При отрицательных p его ориентация вдоль оси x метастабильна. Сначала скорость треугольника устанавливается так, как показано на рис. 10, однако затем он медленно разворачивается на 180° и ориентируется вдоль градиента фазы.

5.5. Пара одинаково заряженных слабосвязанных солитонов

Такая пара при нулевом градиенте имеет (неподвижный) центр симметрии и вращается с периодом $T \approx 2270$ [9], а при градиенте $p = 0.0007$ траектория принимает вид синусоиды, что отвечает комбинации прямолинейного и вращательного движений (рис. 11). Средний наклон оси $\text{tg } \alpha$ несколько больше, чем для одиночных заряженных солитонов (0.27 вместо 0.20). А уже при $p = 0.001$ этот комплекс разрушается.

5.6. Пара противоположно заряженных слабосвязанных солитонов

Такая пара при нулевом градиенте обладает осью симметрии и движется вдоль нее прямолинейно [9] со скоростью $v \approx 0.025$. При включении «замедляющего» градиента неоднородности ось симметрии ориентируется вдоль оси градиента x , средняя скорость v_x уменьшается до нуля (при $p = -0.0000565$) и затем осциллирует, а средняя скорость v_y осциллирует около отрицательного значения. Так, при $p = -0.0000565$, $v_x \approx 0.0026 \sin(2\pi t/233)$, $v_y \approx -0.0054 - 0.00032 \sin(2\pi t/233)$. При меньших

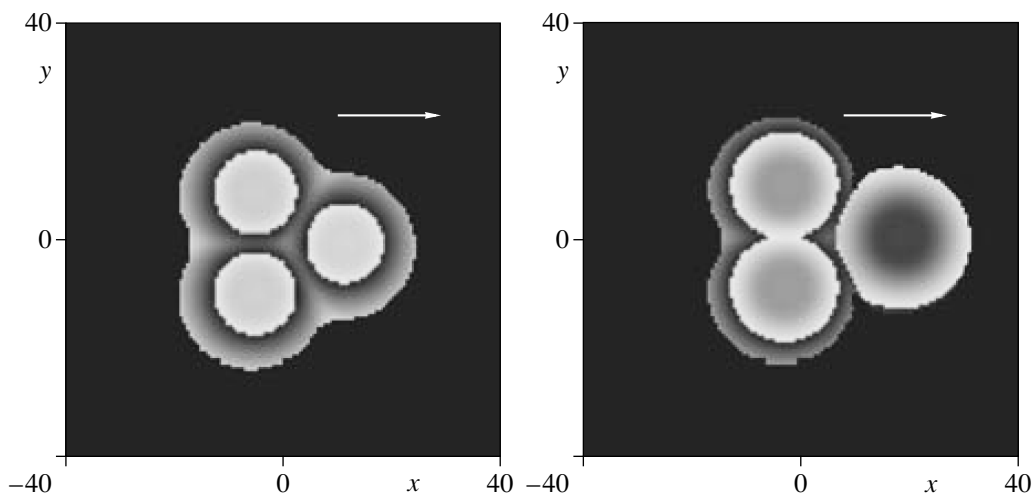


Рис. 9. Развал слабосвязанного синфазного треугольника в процессе движения при градиенте $p = 0.0001$, $t = 2000$

значениях p скорость v_x становится отрицательной ($v_x \approx -0.0188$ при $p = -0.0001$).

При включении «ускоряющего» градиента фазы (при $p = 0.0001$) скорость этой пары сначала увеличивается и устанавливается, но эта ситуация оказывается метастабильной (как в случае, рассмотренном в п. 5.4, но при другом знаке градиента). При достаточно долгой эволюции пара разворачивается по часовой стрелке на 180° и движется так, как описано выше при «замедляющем» градиенте, но в другую сторону.

5.7. Пара одинаково заряженных сильносвязанных солитонов

В отсутствие неоднородности (при $p = 0$) такая пара имеет центральную симметрию без осей зеркальной симметрии. Поэтому центр инерции пары неподвижен, а сама она вращается с постоянной угловой скоростью [8]. При введении неоднородности вместо вращения наблюдаются осцилляции компонент скорости v_x и v_y (рис. 12) и траектория типа синусоиды.

5.8. Пара противоположно заряженных сильносвязанных солитонов

В поперечно однородной системе для сильносвязанной пары вихревых солитонов с противоположными по знаку топологическими зарядами («диполь») отсутствуют не только оси зеркальной симметрии, но и центральная симметрия. Поэтому центр инерции этой пары движется по круговой

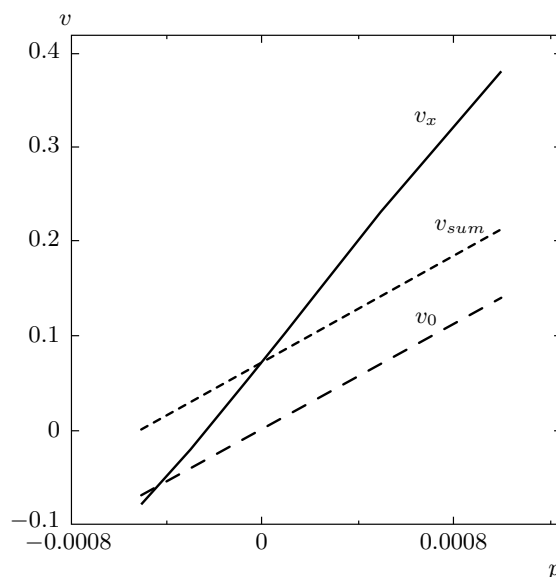


Рис. 10. Скорость солитонного треугольника, движущегося в поле градиента (прямая v_x), зависит от p гораздо сильнее, чем если бы солитоны были независимы; v_0 — скорость одиночных солитонов, v_{sum} — сумма скоростей одиночного солитона v_0 и скорости треугольника в отсутствие градиента фазы $v_t = 0.07$

траектории, а сама пара вращается, причем периоды этих двух движений совпадают [18]. При наличии градиента неоднородности вновь наблюдается комбинированное вращательно-поступательное движение солитонного комплекса с осцилляциями обеих компонент скорости, но теперь осцилляции суще-

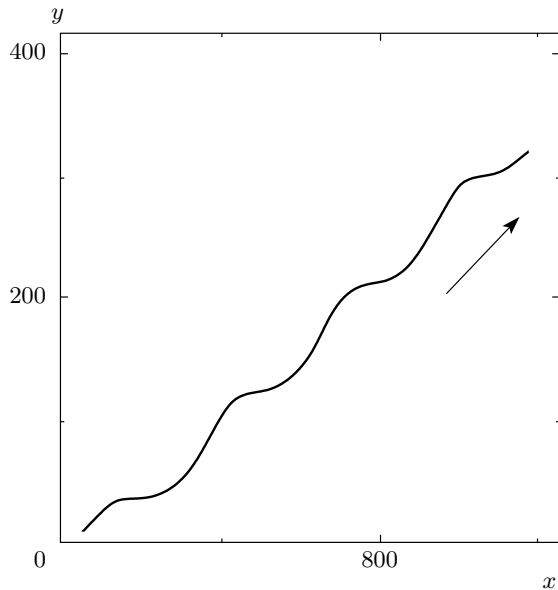


Рис. 11. Траектория центра пары одинаково заряженных солитонов; $p = 0.0007$

ственно больше, что приводит к траектории центра инерции комплекса типа циклоиды (рис. 13).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе впервые изучено поведение диссипативных оптических (лазерных) солитонов с ненулевым топологическим зарядом и солитонных комплексов в присутствии плавной неоднородности системы. Проведенное выше рассмотрение показало, что наличие внутренней структуры и нарушение неоднородностью симметрии солитонов приводит к существенным последствиям, включая движение топологических солитонов в направлении, отличающемся от направления градиента неоднородности, и возникновение криволинейного движения солитонных структур. Этот эффект можно интерпретировать с помощью понятия локального вязкого трения, определяемого векторной суммой поступательной и вращательной скоростей и потому различающегося для различных точек диссипативного солитона.

Оказывается, что уже слабая ($|p| \ll 1$) неоднородность существенно перестраивает структуру солитонов и их связей. В результате увеличение скорости солитонных комплексов при наличии градиента неоднородности значительно больше, чем для несвязанных солитонов.

Оценки для микрорезонатора с короткой базой

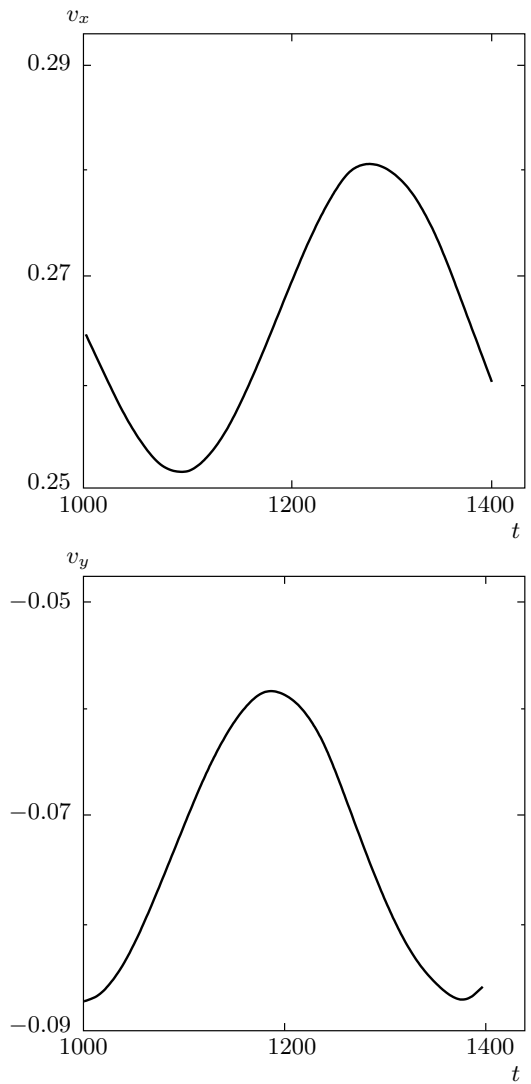


Рис. 12. Осцилляции скорости пары сильносвязанных одинаково заряженных солитонов; $p = 0.0005$

$L = 4\lambda \approx 4$ мкм и коэффициентом отражения зеркал $R = 0.999$ дают время жизни фотона в резонаторе $\tau_f \approx 10$ пс, ширину зоны Френеля (масштаб поперечных координат) $L_F \approx 10\lambda \approx 10$ мкм и соотношение между размерной v_{dim} и безразмерной v скоростями вида

$$v_{dim} = \frac{vL_F}{\tau_f} \approx 0.00446cv.$$

Для вихревого солитона (п. 4.2) при $p = 0.0034$, что отвечает малому локальному наклону зеркала $\theta \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$, получаем сравнительно большую скорость $v_{dim} \approx 10^8$ см/с. Таким образом, поперечное движение солитона весьма чувствительно

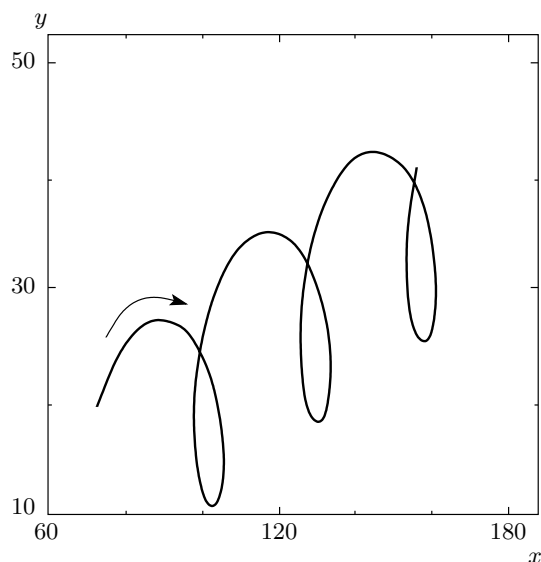


Рис. 13. Траектория центра пары противоположно заряженных сильносвязанных солитонов; $p = 0.0001$

к степени параллельности зеркал резонатора. Чувствительность несколько ослабевает в случае сред с инерционным откликом [2]. Локализация диссипативного солитона возможна при замене линейного изменения параметров схемы на периодическое, когда экстремумы неоднородности служат аттракторами и выделяют установившееся расположение локализованных структур [2, 10–12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (грант № РНП.2.1.1.1189) и РФФИ (грант № 07-02-00294-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dissipative Solitons* (Lecture Notes Phys. Vol. 661) ed. by N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2005).
2. N. N. Rosanov, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
3. Н. Н. Розанов, Г. В. Ходова, *Опт. и спектр.* **65**, 1375 (1988).
4. N. N. Rosanov, A. V. Fedorov, and G. V. Khodova, *Phys. Stat. Sol. b* **150**, 545 (1988).
5. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, *Опт. и спектр.* **72**, 447 (1992).
6. T. Ackemann and W. J. Firth, in Ref. [1], p. 55.
7. Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **65**, 1375 (1992).
8. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, *ЖЭТФ* **125**, 486 (2004).
9. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, *ЖЭТФ* **129**, 625 (2006).
10. Н. Н. Розанов, В. Е. Семенов, Г. В. Ходова, *КЭ* **10**, 2355 (1983).
11. Н. Н. Розанов, А. В. Федоров, *Опт. и спектр.* **68**, 969 (1990).
12. Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **73**, 324 (1992).
13. T. Maggipinto, M. Brambilla, G. K. Harkness, and W. J. Firth, *Phys. Rev. E* **62**, 8726 (2000).
14. S. Fedorov, D. Michaelis, U. Peschel, C. Etrich, D. Skryabin, N. Rosanov, and F. Lederer, *Phys. Rev. E* **64**, 036610 (2001).
15. K. A. Gorshkov and L. A. Ostrovsky, *Physica D* **3**, 428 (1981).
16. Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **82**, 433 (1997).
17. А. Ф. Сучков, *ЖЭТФ* **49**, 1495 (1965).
18. N. N. Rosanov, S. V. Fedorov, and A. N. Shatsev, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 053903 (2005).