

# О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКИХ ВЫСТУПОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*А. Б. Петрин*\*

*Институт теплофизики экстремальных состояний  
Объединенного института высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 декабря 2006 г.

Рассматривается характер электрического поля на конических выступах поверхностей проводящих жидкостей, которые возникают при определенных условиях при достижении полем некоторых критических значений. При превышении полем этих критических значений конические выступы, как правило, становятся неустойчивыми и из их вершин истекают очень тонкие струи. На вершине конического проводящего острия модуль электрического поля стремится к бесконечности, т. е. на вершине конуса проводящей жидкости электрическое поле имеет особенность. Несмотря на особенность поля, коническая поверхность проводящей жидкости теряет устойчивость, только если угол при вершине конуса становится достаточно малым, меньше некоторого значения (угла Тэйлора), одинакового для всех проводящих жидкостей. Показано, что если жидкость диэлектрическая и имеет достаточно большую диэлектрическую проницаемость, то конические выступы могут возникать. При этом величины углов при вершине равновесных конических выступов зависят от диэлектрической проницаемости жидкости. Если диэлектрическая проницаемость жидкости меньше примерно 17.60, то конические выступы и связанные с ними явления возникать не могут.

PACS: 68.03.Cd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При наличии внешнего электрического поля на проводящую или диэлектрическую жидкости действуют электрические силы. Эти силы позволяют влиять на процессы теплообмена в двухфазных системах [1, 2], с их помощью можно управлять каплями жидкостей в микроэлектронных устройствах [3–5]. Для интенсификации воздействия повышают величину электрического поля. Однако при увеличении электрического поля до некоторого уровня, возникают различного рода неустойчивости поверхности жидкости, которые необходимо учитывать. Поэтому исследование особенностей электрического поля, возникающих на поверхности жидкости в сильных электрических полях, является центральным в понимании указанных явлений.

Если поместить каплю проводящей или диэлектрической жидкости в электрическое поле, капля поляризуется и на ее поверхности появляются поля-

ризационные заряды, которые растягивают каплю. Когда поле не слишком сильное, капля становится удлиненной в направлении поля и после переходных процессов приобретает равновесную удлиненную форму. Было обнаружено, что когда электрическое поле достигает некоторого критического значения, форма проводящей капли становится неустойчивой, на вытянутом конце появляется конический выступ, из которого начинает истекать тонкая струйка жидкости [6, 7]. Было также показано [8], что коническая форма выступов на поверхности проводящей капли определяется балансом сил поверхностного натяжения и электрических поверхностных сил. Этот конус имеет угол при вершине строго равный  $98.6^\circ$  и известен как конус Тэйлора. Таким образом, под действием электрического поля формируется поверхностная сингулярность, из которой берет начало тонкая струя.

В данной работе сначала рассматриваются сингулярность электрического поля вблизи вершины конического выступа на поверхности проводящей жид-

\*E-mail: a\_petrin@mail.ru

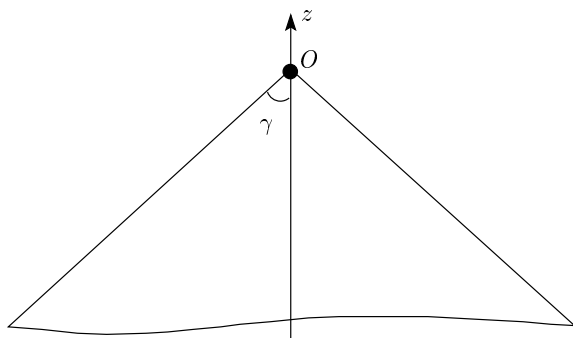


Рис. 1. Геометрия задачи

кости и условие его механической устойчивости. После этого изучается вопрос, при каких условиях возможна такая сингулярность и возможна ли устойчивость конического выступа, если жидкость диэлектрическая.

## 2. РАВНОВЕСИЕ КОНИЧЕСКОГО ОСТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим условие равновесия конической поверхности проводящей жидкости, возникшего под действием сильного электрического поля. Найдем сначала электрическое поле вблизи острия. В сферической системе координат с полярным углом  $\theta$ , началом в точке  $O$  и осью  $z$  (рис. 1) уравнение Лапласа для электрического потенциала  $\Psi$  для аксиально-симметричного случая можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Решение будем искать в виде  $\Psi = r^\alpha f(\theta)$ , где  $\alpha$  — константа. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = -\alpha(\alpha + 1) f \sin \theta.$$

Введем функцию  $g$  так, чтобы  $f(\theta) = g(\cos \theta)$ . Тогда

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dg}{d \cos \theta}.$$

Подставляя выражение для производной в предыдущее уравнение, получим уравнение Лежандра:

$$(1 - \cos^2 \theta) \frac{d^2 g}{d \cos^2 \theta} - 2 \cos \theta \frac{dg}{d \cos \theta} + \alpha(\alpha + 1)g = 0.$$

Решение этого уравнения — функция Лежандра  $P_\alpha(\cos \theta)$  порядка  $\alpha$ , которую удобно представить в виде

$$P_\alpha(\cos \theta) = F \left( -\alpha, \alpha + 1, 1, \frac{1 - \cos \theta}{2} \right),$$

где  $F$  — гипергеометрическая функция Гаусса. Такое представление верно для произвольного значения  $\alpha$ , не только целого. Тангенциальная и нормальная компоненты электрического поля имеют вид

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(\cos \theta),$$

$$E_n = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r^{\alpha-1} P'_\alpha(\cos \theta) \sin \theta.$$

Пусть половинный угол при вершине равен  $\gamma$  (см. рис. 1), тогда на поверхности проводящего конуса тангенциальное электрическое поле должно быть равно нулю, и поэтому получим

$$P_\alpha(\cos(\pi - \gamma)) = 0.$$

Сила, действующая со стороны электрического поля на проводящую поверхность, направлена по нормали от проводника и равна  $F_e = E_n^2/8\pi$  в расчете на единицу площади поверхности. В равновесии эта сила должна быть уравновешена силами поверхностного натяжения. Можно записать это условие в виде [9]

$$\frac{\sigma}{r \operatorname{tg} \gamma} = \frac{E_n^2}{8\pi}, \tag{1}$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Чтобы это уравнение удовлетворялось, необходимо, чтобы нормальная компонента поля зависела от радиуса как  $E_n \propto r^{-1/2}$ . Это значит, что  $\alpha = 1/2$ . Таким образом, равновесие возможно при угле конуса  $\gamma$ , являющемся корнем уравнения

$$P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) = 0. \tag{2}$$

Значение корня равно  $\gamma \approx 49.29^\circ$ , и значит, полный угол при вершине конуса равен  $2\gamma \approx 98.58^\circ$ . Этот угол и называется углом Тэйлора. Если  $\alpha < 1/2$ , то поверхностная плотность электрической силы растет к вершине конуса быстрее, чем давление сил поверхностного натяжения, и конус будет неустойчивым. Легко проверить, что при  $\alpha < 1/2$  корни уравнения  $P_\alpha(\cos(\pi - \gamma)) = 0$  меньше половины угла Тэйлора. Это значит, что конические выступы с углами при вершине меньшими угла Тэйлора неустойчивы.

### 3. РАВНОВЕСИЕ КОНИЧЕСКОГО ОСТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим теперь диэлектрический конус с проникаемостью  $\varepsilon_{in}$ , находящийся в непроводящей жидкой среде с диэлектрической проникаемостью  $\varepsilon_{ex}$ . Будем считать, что потенциалы электрического поля снаружи и внутри конуса имеют соответственно вид

$$\Psi_{ex} = Ar^\alpha P_\alpha(\cos \theta)$$

и

$$\Psi_{in} = Br^\alpha P_\alpha(-\cos \theta),$$

где  $A$  и  $B$  — константы. Здесь используется линейная независимость функций  $P_\alpha(\cos \theta)$  и  $P_\alpha(-\cos \theta)$  [10]. Тогда составляющие поля снаружи и внутри конуса имеют соответственно вид

$$E_{ex,\tau} = -\frac{\partial \Psi_{ex}}{\partial r} = -A\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(\cos \theta),$$

$$E_{ex,n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{ex}}{\partial \theta} = A r^{\alpha-1} P'_\alpha(\cos \theta) \sin \theta$$

и

$$E_{in,\tau} = -\frac{\partial \Psi_{in}}{\partial r} = -B\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(-\cos \theta),$$

$$E_{in,n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{in}}{\partial \theta} = -B r^{\alpha-1} P'_\alpha(-\cos \theta) \sin \theta.$$

На границе (при  $\theta = \pi - \gamma$ ) должны удовлетворяться следующие условия для тангенциальных и нормальных составляющих электрических полей:

$$E_{ex,\tau} = E_{in,\tau}, \quad \varepsilon_{ex} E_{ex,n} = \varepsilon_{in} E_{in,n}.$$

Из граничных условий получим систему уравнений

$$A\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(\cos \theta) - B\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(-\cos \theta)|_{\theta=\pi-\gamma} = 0,$$

$$\varepsilon_{ex} A r^{\alpha-1} P'_\alpha(\cos \theta) \sin \theta + \varepsilon_{in} B r^{\alpha-1} P'_\alpha(-\cos \theta) \sin \theta|_{\theta=\pi-\gamma} = 0$$

или

$$\begin{aligned} & A\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(\cos(\pi - \gamma)) - \\ & - B\alpha r^{\alpha-1} P_\alpha(-\cos(\pi - \gamma)) = 0, \\ & \varepsilon_{ex} A r^{\alpha-1} P'_\alpha(\cos(\pi - \gamma)) \sin(\pi - \gamma) + \\ & + \varepsilon_{in} B r^{\alpha-1} P'_\alpha(-\cos(\pi - \gamma)) \sin(\pi - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие механического равновесия на границе диэлектрической жидкости, аналогичное уравнению (1), получается из равенства нормальных сил давления на границу (см. [11, стр. 94]) и может быть записано с учетом сил поверхностного натяжения следующим образом:

$$\frac{\sigma}{r \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} (E_{ex,n}^2 - E_{ex,\tau}^2) - \frac{\varepsilon_{in}}{8\pi} (E_{in,n}^2 - E_{in,\tau}^2). \quad (4)$$

Различие с уравнением (1) только в выражении для силы со стороны электрического поля (в правой части уравнения), действующей на единицу площади границы.

Если снаружи находится воздух с диэлектрической проникаемостью практически равной единице, то уравнение (4) может быть переписано с учетом граничных условий для электрического поля в виде

$$\frac{\sigma}{r \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\varepsilon_{in} - 1}{8\pi} (\varepsilon_{in} E_{in,n}^2 + E_{in,\tau}^2). \quad (5)$$

Правые части уравнений (4) и (5) зависят от радиуса как  $r^{2(\alpha-1)}$ , а левые части — как  $r^{-1}$ . Уравнения (4) и (5) могут удовлетворяться, только когда  $\alpha = 1/2$ . Следовательно, равновесие возможно только при таких углах  $\gamma$ , которые являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) & -P_{1/2}(-\cos(\pi - \gamma)) \\ \varepsilon_{ex} P'_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) \sin(\pi - \gamma) & \varepsilon_{in} P'_{1/2}(-\cos(\pi - \gamma)) \sin(\pi - \gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель и проведя простейшие преобразования, получаем

$$\begin{aligned} & P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) P'_{1/2}(\cos \gamma) \sin \gamma + \\ & + \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} P_{1/2}(\cos \gamma) P'_{1/2}(-\cos \gamma) \sin \gamma = 0, \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу функции, или

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}}\right)^{-1} P_{1/2}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{1/2}(-\cos \gamma) - \\ & - P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) \frac{d}{d\gamma} P_{1/2}(\cos \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что уравнение (6) было получено в работе [12].

Мы видим, что угол, при котором возможно равновесие, зависит только от отношения диэлектрических проникаемостей  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$ .

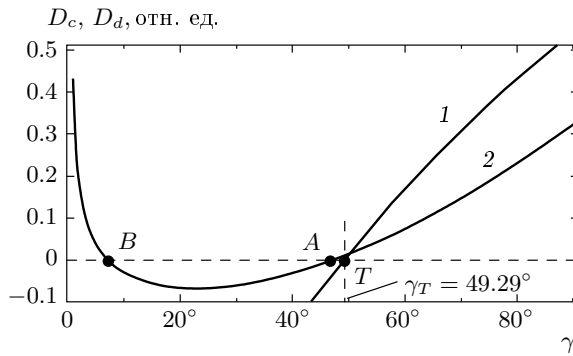


Рис. 2. Дисперсионные функции  $D_c(\gamma)$  — кривая 1 и  $D_d(\gamma)$  — кривая 2. Два нуля кривой 2 (точки A и B) находятся левее нуля кривой 1 (точка T)

Назовем дисперсионными функциями для равновесного проводящего конуса и равновесного диэлектрического конуса соответственно функции

$$D_c(\gamma) = P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma))$$

и

$$D_d(\gamma) = \left(\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}}\right)^{-1} P_{1/2}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{1/2}(-\cos \gamma) - P_{1/2}(\cos(\pi - \gamma)) \frac{d}{d\gamma} P_{1/2}(\cos \gamma).$$

На рис. 2 показаны зависимости этих функций от угла  $\gamma$ . Ноль функции  $D_c(\gamma)$  (точка T) соответствует половинному углу Тэйлора. График функции  $D_d(\gamma)$  построен при  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex} = 81$ . Нули этой функции (точки A и B) определяют два равновесных конуса с половинными углами  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$ .

Точка A соответствует неустойчивому конусу, а точка B — устойчивому. Для доказательства заметим, что при значениях  $\alpha < 0.5$ , как и в случае проводящей жидкости, поверхностная плотность электрической силы растет к вершине конуса быстрее давления сил поверхностного натяжения, при этом конус будет неустойчивым по отношению к возмущениям, уменьшающим угол при вершине конуса. Возмущения, не меняющие угол при вершине конуса, могут приводить к неустойчивости Тонкса–Френкеля, однако из-за конечности поля вне сингулярности времена нарастания таких неустойчивостей должны быть намного больше времен нарастания неустойчивостей, затрагивающих сингулярность.

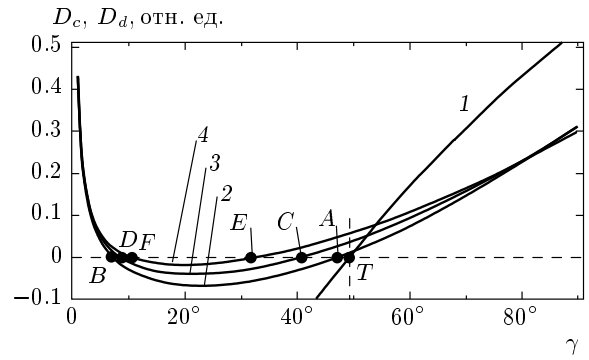


Рис. 3. Дисперсионные функции  $D_c(\gamma)$  — кривая 1,  $D_d(\alpha, \gamma) = D_d(0.5, \gamma)$  — кривая 2,  $D_d(0.45, \gamma)$  — кривая 3 и  $D_d(0.4, \gamma)$  — кривая 4. Нули кривых 3 и 4 находятся между нулями кривой 2 (между точками A и B)

Введем функцию

$$D_d(\alpha, \gamma) = \left(\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}}\right)^{-1} P_\alpha(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_\alpha(-\cos \gamma) - P_\alpha(\cos(\pi - \gamma)) \frac{d}{d\gamma} P_\alpha(\cos \gamma).$$

Решая численно уравнение  $D_d(\alpha, \gamma) = 0$ , можно показать, что при  $\alpha < 1/2$  корни уравнения находятся между равновесными углами  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$ . Для иллюстрации этого были построены графики функции  $D_d(\alpha, \gamma)$  при  $\alpha = 0.5, 0.45, 0.4$ . Нули функций  $D_d(0.45, \gamma)$  (точки C и D) и  $D_d(0.4, \gamma)$  (точки E и F) лежат между точками A и B. Это значит, что при возмущениях, уменьшающих угол при вершине конуса (т. е. при обострении конуса), соответствующего точке A, равновесие нарушится, угол при вершине конуса будет уменьшаться, пока он не станет равным углу при вершине конуса, соответствующего точке B. Точка B будет отвечать устойчивому равновесию, вокруг которого возможны колебания, которые со временем затухнут из-за диссипативных процессов. Эти рассуждения доказывают, что точка A соответствует неустойчивому конусу, а точка B — устойчивому.

Подчеркнем еще раз важный результат: на границе диэлектрических жидкостей в электрическом поле возможно существование устойчивой геометрической сингулярности — конического выступа.

Если  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex} \rightarrow \infty$ , то точка A на рис. 2 стремится к точке T, соответствующей проводящему конусу, а точка B будет перемещаться влево так, что угол  $\gamma_B \rightarrow 0$ . Так и должно быть, так как пре-

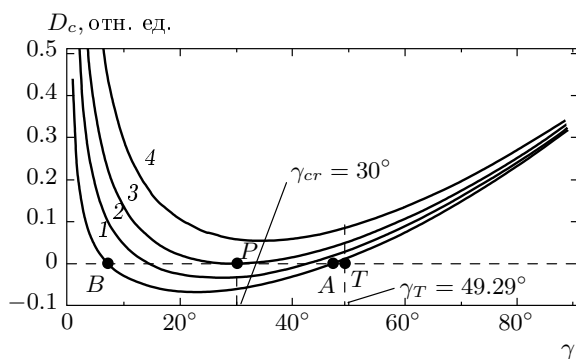


Рис. 4. Дисперсионные кривые  $D_c(\gamma)$  при  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex} = 81$  (1), 30 (2), 17.60 (3), 10 (4)

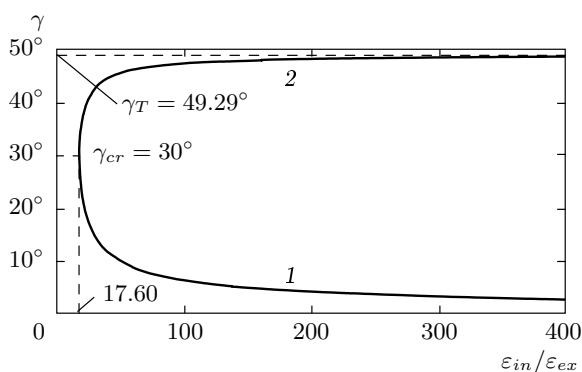


Рис. 5. Зависимость половинного угла равновесного конуса от  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$ . Показаны устойчивая (1) и неустойчивая (2) ветви

дел  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex} \rightarrow \infty$  соответствует переходу диэлектрик–проводник.

Если уменьшать отношение  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$  от больших значений, то точки A и B начнут сближаться и сольются в одну точку P, для которой половинный угол конуса равен  $\gamma_{cr} \approx 30.0^\circ$  (возможно, существует строгое доказательство, что этот угол точно равен тридцати градусам) и  $(\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex})_{cr} \approx 17.60$ . При меньших значениях  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$  у дисперсионной функции  $D_d = D_d(\gamma)$  нет нулей. Это означает, что при таких значениях  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$  равновесных конических выступов на поверхности диэлектрической жидкости не будет. Это иллюстрирует рис. 4, на котором показаны дисперсионные кривые для различных значений  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$ .

На рис. 5 приведена зависимость половинного угла равновесного конуса от  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex}$ . Ниже критической точки находится устойчивая ветвь, выше — неустойчивая. При  $\varepsilon_{in}/\varepsilon_{ex} \rightarrow \infty$  неустойчивая ветвь

стремится к половинному углу Тэйлора.

Сделаем несколько замечаний по сути полученных результатов. Сначала рассмотрим в однородном внешнем электрическом поле каплю проводящей жидкости. Пусть поле сильное и включается так быстро, что капля не успевает за время нарастания поля изменить форму. Тогда на поверхности капли возникнут индуцированные поверхностные заряды, и на них начнут действовать электрические силы, растягивающие каплю в направлении поля. Эти силы определяются внешним полем и полями индуцированных зарядов, т. е. глобальным распределением зарядов по поверхности капли и вне ее из-за дальнедействующего характера электрических сил. По мере того как капля будет вытягиваться вдоль направления внешнего электрического поля, на полюсах капли будут увеличиваться электрическое поле и поверхностная плотность электрических сил. Кроме того, будет расти кривизна, увеличивающая давление поверхностного натяжения. Характер вытягивания капли будет зависеть от динамики капли, которая определяется вязкостью капли, ее плотностью и коэффициентом поверхностного натяжения. Опыт показывает [13], что если внешнее поле достаточно сильное, то на полюсах капли появляются конические выступы, которые порождают микроструи из вершин конусов (в несильных полях капля может просто принять вытянутую форму или распаться на две или более капли). Оценить из изложенной выше теории критическую величину внешнего поля, при которой начинается конусообразование, не представляется возможным, так как это поле определяется всей динамикой капли (конусообразование есть функция процесса, а не одного внешнего параметра). Численное моделирование динамики образования конусов Тэйлора из неровности на плоской поверхности проводящей жидкости проводилось в работе [14], однако принципиальные недостатки модели не позволили исследовать образование струи из вершины. Отметим, что при образовании конического выступа на поверхности проводящей жидкости возникает сингулярность электрического поля и задача нахождения электрического поля и динамики жидкости в окрестности сингулярности становится локальной и в этом смысле может рассматриваться независимо от динамики капли в целом. Эта задача образования струи из конического выступа до сих пор не решена и является предметом интенсивных исследований [13].

Рассмотрим теперь две капли разных диэлектрических жидкостей в однородном внешнем электрическом поле, расположенных так далеко друг от дру-

га, что взаимодействием между индуцированными на них внешним полем зарядами можно пренебречь. Пусть для первой капли  $\varepsilon_1 < 17.60\varepsilon_m$ , для второй  $\varepsilon_2 > 17.60\varepsilon_m$ , где  $\varepsilon_m$  — диэлектрическая проницаемость среды. Тогда, изложенные выше результаты анализа устойчивости конической поверхности позволяют сделать вывод, что на поверхности первой капли могут появляться лишь гладкие выступы и в сильном поле она примет гладкую вытянутую форму или распадется на меньшие капли. На поверхности второй капли возможно появление устойчивых конических выступов с полным углом при вершине менее примерно  $60^\circ$  (точное значение зависит от соотношения между диэлектрическими проницаемостями капли и внешней среды: чем больше диэлектрическая проницаемость капли, тем меньше угол устойчивого конуса). Наконец отметим, что попытки моделирования образования конических выступов на поверхности диэлектрической жидкости при помощи автомодельного решения [15] не дают ответа на вопрос о возможном образовании микроструй из конической вершины или о переходе от неустойчивого конуса к устойчивому.

Таким образом, полученные результаты об условии неустойчивого равновесия конического выступа являются необходимыми, но не достаточными условиями образования микроструй из вершин конусов. Сложная динамика жидкости в электрическом поле при нелокальном электрическом взаимодействии определяет достаточные условия.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача устойчивости конического выступа на поверхности диэлектрических жидкостей, обусловленных особенностью электрического поля. Показано, что если жидкость имеет достаточно большую диэлектрическую проницаемость, то могут возникать конические выступы. При этом в общем случае существуют два равновесных угла при вершине конуса: больший, соответствующий неустойчивой конической поверхности, и меньший, соответствующий устойчивой поверхности. Величины этих углов зависят от диэлектрической проницаемости жидкости, причем их значения сближаются при понижении диэлектрической проницаемости жидкости и становятся

равными углу примерно  $60^\circ$  (полный угол раствора конуса) при значении диэлектрической проницаемости, равной примерно 17.60. Показано также, что если диэлектрическая проницаемость жидкости меньше этой величины, то конические выступы и связанные с ними явления возникнуть не могут.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-08-33713-а).

Автор благодарит В. С. Воробьева и С. П. Малышенко за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T. B. Jones, *Adv. Heat Transfer* **14**, 107 (1978).
2. P. H. G. Allen and T. G. Karayiannis, *Heat Recovery Systems & CHP* **15**, 389 (1995).
3. K. Hoshino, S. Tritayaprasert, K. Matsumoto, and I. Shimoyama, *Sensors Actuators A* **114**, 473 (2004).
4. P. Belaubre, M. Guirardel, V. Leberre et al., *Sensors Actuators A* **110**, 130 (2004).
5. D. Huh, A. H. Tkaczyk, J. H. Bahng et al. *J. Amer. Chem. Soc.* **125**, 14678 (2003).
6. J. Zeleny, *Phys. Rev.* **3**, 69 (1914).
7. J. Zeleny, *Phys. Rev.* **10**, 1 (1917).
8. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London A* **280**, 383 (1964).
9. М. Д. Габович, *УФН* **140**, 137 (1983).
10. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров*, Наука, Москва (1967).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
12. A. Ramos and A. Castellanos, *Phys. Lett. A* **184**, 268 (1994).
13. J. Eggers, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 865 (1997).
14. V. G. Suvorov and E. A. Litvinov, *J. Phys. D* **33**, 1245 (2000).
15. N. Zubarev, *Phys. Rev. E* **65**, 055301(R) (2002).