

К ТЕОРИИ ТОРМОЖЕНИЯ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ВЫСОКОЗАРЯДНЫХ СТРУКТУРНЫХ ИОНОВ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ СО СЛОЖНЫМИ АТОМАМИ

В. И. Матвеев, Д. Б. Сидоров*

*Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова
163002, Архангельск, Россия*

Поступила в редакцию 6 марта 2007 г.

Развита непertурбативная теория потерь энергии быстрыми тяжелыми структурными ионами при столкновениях с нейтральными сложными атомами с учетом всевозможных, в том числе многократных, возбуждений и ионизации как снаряда, так и мишени. Существенного упрощения задачи удалось достигнуть путем рассмотрения многоэлектронных мишеней и ограничением рассмотрения высокозарядными структурными ионами, заряд которых много больше единицы, когда характерный размер электронной шубы иона-снаряда много меньше характерного размера нейтрального атома-мишени. Приведены оценки погрешностей используемых приближений и вычислений неупругих сечений. Результатом работы являются формулы для эффективного торможения, аналогичные известным формулам Бете–Блоха. Для иллюстрации вклада многоэлектронных возбуждений шубы иона в эффективное торможение проведено сравнение с результатами расчетов по теории возмущений. Рассчитаны потери энергии ионов урана U^{q+} ($10 \leq q \leq 70$) при столкновениях с атомами аргона и потери энергии ионов Pb и Bi на нескольких мишенях. Проведено сравнение с экспериментом.

PACS: 34.50.Bw

1. ВВЕДЕНИЕ

Ионы высоких зарядов и энергий используются во многих экспериментах, проводимых на ускорителях тяжелых ионов. Известно, что неупругие процессы, сопровождающие столкновения релятивистских ионов достаточно больших зарядов с атомами не могут быть описаны [1, 2] в рамках теории возмущений даже при сколь угодно больших энергиях столкновения. Последовательная непertурбативная теория потерь энергии релятивистских тяжелых ионов на свободных электронах развита в работе [3]. Однако часто в экспериментах используются частично ободранные ионы — структурные ионы высоких зарядов, состоящие из ядра и некоторого количества связанных электронов, кроме того при движении быстрого иона в среде в результате процессов перезарядки и потерь электронов устанавливается некоторый равновесный заряд иона, меньший заряда голого иона. Строго говоря,

столкновения таких ионов с атомами следует рассматривать как столкновение двух сложных систем, при котором происходит одновременное возбуждение электронных оболочек обеих сталкивающихся систем. Везде ниже мы будем называть структурный ион снарядом, а атом — мишенью. В настоящее время активизировался интерес к процессам многократных возбуждений электронных оболочек снаряда при столкновениях тяжелых ионов с нейтральными атомами. Например, в работах [4, 5] проведены измерения сечений многократной ионизации (потеря до 15 электронов) быстрых ионов урана при столкновениях с многоэлектронными нейтральными атомами. Измерения показали, что при увеличении степени ионизации на единицу соответствующее сечение убывает менее, чем в два раза, и была отмечена необходимость рассчитывать подобные процессы непertурбативными (не предполагающими малости возмущения) методами. Аналогичный вывод справедлив и для процессов ионизационных потерь энергии. Действительно, эффективное торможение рав-

*E-mail: matveev.victor@pomorsu.ru

но энергии ионизации, умноженной на сечение ионизации. На двукратную ионизацию приходится примерно в два раза большая энергия, чем на однократную, и если сечение двукратной ионизации в два раза меньше, чем сечение однократной ионизации, то произведение энергии на соответствующее сечение не меняется, аналогично и для ионизации более высокой кратности. Другими словами, вклад многоэлектронных переходов в эффективное торможение следует ожидать сравнимым по порядку величины с вкладом одноэлектронных возбуждений и ионизации. Ясно, что подобные процессы не описываются в рамках первого борновского приближения, используемого в известных расчетах [6–9] по теории возмущений потерь энергии при столкновениях быстрых структурных ионов с атомами, соответствующее непертурбативное рассмотрение потерь энергии проведено недавно в кратком сообщении [10].

В настоящей работе развита непертурбативная теория потерь энергии быстрыми тяжелыми структурными ионами при столкновениях с нейтральными сложными атомами с учетом всевозможных, в том числе многократных возбуждений и ионизации как снаряда, так и мишени. Существенного упрощения задачи удалось достигнуть путем рассмотрения многоэлектронных мишеней и ограничением рассмотрения высокозарядными структурными ионами, видимый заряд Z_P которых много больше единицы (например, ион урана U^{28+}), когда характерный размер электронной шубы иона-снаряда много меньше характерного размера нейтрального атома-мишени. Приведены оценки погрешностей используемых приближений и вычислений неупругих сечений. Результатом работы являются формулы для эффективного торможения, аналогичные известным формулам Бете–Блоха. Для иллюстрации вклада многоэлектронных возбуждений шубы иона в эффективное торможение проведено сравнение с результатами расчетов по теории возмущений. Проведены расчеты потерь энергии ионов урана U^{q+} ($10 \leq q \leq 70$) при столкновениях с атомами аргона (именно такие партнеры по столкновениям использовались в экспериментах [4, 5] по многократной обдирке снарядов) и потерь энергии ионов Pb и Bi на нескольких мишенях. Проведено сравнение с экспериментом.

2. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Пусть в результате столкновения снаряда и мишени электроны атома-мишени переходят из состоя-

ния φ_0 с энергией ν_0 в состояние φ_n с энергией ν_n и электроны снаряда из состояния ψ_0 с энергией ε_0 в состояние ψ_k с энергией ε_k . Соответствующее сечение обозначим $\sigma_{0 \rightarrow n}^{0 \rightarrow k}$. Эффективное торможение согласно [11] равно

$$\kappa = \sum_{n,k} (\nu_n + \varepsilon_k - \nu_0 - \varepsilon_0) \sigma_{0 \rightarrow n}^{0 \rightarrow k}. \quad (1)$$

Будем считать, что снаряд и мишень движутся по траекториям с относительным параметром удара \mathbf{b} , тогда

$$\sigma_{0 \rightarrow n}^{0 \rightarrow k} = \int d^2b w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n},$$

где вероятность $w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n}$ перехода $0 \rightarrow n$ электронов мишени и перехода $0 \rightarrow k$ электронов снаряда есть функция от параметра удара \mathbf{b} . Поэтому

$$\begin{aligned} \kappa &= \int d^2b \left(\sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_0) \sum_n w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_n (\nu_n - \nu_0) \sum_k w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n} \right) = \\ &= \int d^2b \left(\sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_0) W_{0 \rightarrow k}^{(p)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_n (\nu_n - \nu_0) W_{0 \rightarrow n}^{(t)} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где величина

$$W_{0 \rightarrow n}^{(t)} = \sum_k w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n} \quad (3)$$

получена путем суммирования $w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n}$ по всем (полный набор) конечным состояниям электронов снаряда и, очевидно, имеет смысл вероятности перехода $0 \rightarrow n$ электронов мишени в зависимости от прицельного параметра \mathbf{b} при произвольной судьбе электронов снаряда. Аналогично

$$W_{0 \rightarrow k}^{(p)} = \sum_n w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n} \quad (4)$$

есть вероятность перехода $0 \rightarrow k$ электронов снаряда в зависимости от прицельного параметра \mathbf{b} при произвольной судьбе электронов мишени.

Далее нам необходимо найти вероятности $W_{0 \rightarrow k}^{(p)}$ и $W_{0 \rightarrow n}^{(t)}$. Общей основой [12, 13] для рассмотрения вероятностей неупругих процессов при столкновениях быстрых тяжелых ионов высоких зарядов с атомами является использование применимого при $Z/v \leq 1$ (Z — заряд иона, v — скорость столкновения, здесь и везде ниже используются атомные

единицы) приближения внезапных возмущений [14], тесно связанного [12, 13, 15] с приближением эйконала. Для столкновений же ультрарелятивистских ионов с атомами теория внезапных возмущений принимает форму точного решения уравнения Дирака в ультрарелятивистском случае [16, 17]. Приближение внезапных возмущений является основой расчетных методик, когда возмущение не является достаточно малым для применения теории возмущений, однако время действия возмущения значительно меньше характерных периодов времени невозмущенной системы, что позволяет решать задачу, не ограничивая величину возмущения. Применение же теории возмущений для описания столкновений многозарядных ионов с атомами, когда $Z/v \sim 1$, приводит, строго говоря, к нарушению области применимости борновского приближения и, вследствие его неунитарности, к значениям вероятности, большим единицы [1, 2]. Будем считать относительную скорость столкновения v большой и поэтому возмущение (взаимодействие снаряда и мишени) — действующим внезапно. Приведем соответствующие условия: время столкновения снаряда и мишени $\tau_c \sim a/v$, где $a \sim 1$ — характерный размер сталкивающихся систем, характерное время обращения электронов на орбите τ_s следует считать порядка 1 как для электронов снаряда, так и мишени, поскольку цель нашего рассмотрения — столкновения многоэлектронных систем, у которых подавляющее число электронов находится на верхних оболочках с большими квантовыми числами. Таким образом, для применимости представлений о внезапности возмущения, $\tau_c \ll \tau_s$, в интересующем нас случае достаточно выполнения неравенства $v \gg 1$.

Введем обозначения: N_A — полное число электронов в атоме (мишень), Z_A — заряд ядра атома, N_P — полное число электронов в ионе (снаряд), Z_0 — заряд ядра иона (тогда, видимый заряд структурного иона-снаряда $Z_P = Z_0 - N_P$); обозначим как \mathbf{r}_p ($p = 1, 2, \dots, N_P$) координаты электронов структурного иона-снаряда относительно ядра снаряда, аналогично обозначим координаты электронов атома-мишени относительно ядра мишени как \mathbf{r}_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$). Потенциал взаимодействия снаряда и мишени имеет вид

$$V = - \sum_{a=1}^{a=N_A} \frac{Z_0}{|\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_a|} - \sum_{p=1}^{p=N_P} \frac{Z_A}{|\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_p|} + \sum_{p=1, a=1}^{p=N_P, a=N_A} \frac{1}{|\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_a|}, \quad (5)$$

где $\mathbf{R}(t)$ — межъядерное расстояние. Первое слагаемое в правой части (5) обозначает взаимодействие электронов мишени с ядром снаряда, второе слагаемое — взаимодействие электронов снаряда с ядром мишени, третье слагаемое — взаимодействие между электронами снаряда и мишени. Взаимодействие ядер снаряда и мишени, как не вызывающее электронных переходов, будем опускать. Состояния электронов изолированного снаряда будем описывать полным набором волновых функций $\psi_k \equiv \psi_k(\{\mathbf{r}_p\}) \equiv \psi_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_P})$, состояния электронов изолированной мишени — волновыми функциями $\varphi_n \equiv \varphi_n(\{\mathbf{r}_a\}) \equiv \varphi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_A})$. Удобно считать, что снаряд покоится в начале системы координат, а мишень движется по прямолинейной траектории со скоростью \mathbf{v} . Вероятность $w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n}$ перехода электронов атома-мишени из состояния φ_0 в состояние φ_n и электронов снаряда из состояния ψ_0 в состояние ψ_k в результате столкновения в приближении внезапных возмущений равна [14]

$$w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n} = |\langle \varphi_n \psi_k | \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} V dt \right) | \psi_0 \varphi_0 \rangle|^2. \quad (6)$$

Суммируя $w_{0 \rightarrow k}^{0 \rightarrow n}$ по всем конечным состояниям электронов атома-мишени (полный набор), получим вероятность $W_{0 \rightarrow k} \equiv W_{0 \rightarrow k}^{(p)}$ перехода электронов снаряда из состояния ψ_0 в состояние ψ_k в зависимости от прицельного параметра \mathbf{b} при произвольной судьбе мишени:

$$W_{0 \rightarrow k} = \langle \varphi_0 | \left| \langle \psi_k | \times \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} U_a dt \right) | \psi_0 \rangle \right|^2 | \varphi_0 \rangle. \quad (7)$$

Здесь U_a — потенциал, действующий со стороны мишени на электроны бомбардирующего иона,

$$U_a = - \sum_{p=1}^{p=N_P} \frac{Z_A}{|\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_p|} + \sum_{p=1, a=1}^{p=N_P, a=N_A} \frac{1}{|\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_a|. \quad (8)$$

Непосредственное использование формулы (7) затруднено в случае, когда мишени являются существенно многоэлектронными, т. е. $N_A \gg 1$. Однако это же обстоятельство позволяет воспользоваться следующим упрощением. При большом числе электронов мишени естественно считать, что потенциал,

действующий со стороны атома (мишени) на электроны бомбардирующего иона (снаряда) представляет собой среднее от потенциала (8) по начальному — основному — состоянию электронов мишени. Поэтому при проведении расчетов будем использовать значительно более простую формулу для вероятности $W_{0 \rightarrow k}$:

$$W_{0 \rightarrow k} = |\langle \psi_k | \exp \left(-i \sum_{p=1}^{p=N_P} \chi(\mathbf{b}, \mathbf{r}_p) \right) | \psi_0 \rangle|^2, \quad (9)$$

где функция $\chi(\mathbf{b}, \mathbf{r}_p)$ имеет смысл эйкональной фазы и равна

$$\chi(\mathbf{b}, \mathbf{r}_p) = -\frac{2Z_A}{v} \sum_{i=1}^{i=3} A_i K_0(\alpha_i |\mathbf{b} - \mathbf{s}_p|), \quad (10)$$

где \mathbf{s}_p — проекция \mathbf{r}_p на плоскость параметра удара \mathbf{b} , $K_\nu(x)$ — функции Макдональда. Формула (9) получена из (7) путем замены потенциала U_a на средний \overline{U}_a по начальному — основному состоянию электронов мишени и в модели Дирака–Хартри–Фока–Слэтера [18] потенциал

$$\begin{aligned} \overline{U}_a &= \langle \varphi_0(\{\mathbf{r}_a\}) | U_a | \varphi_0(\{\mathbf{r}_a\}) \rangle = \\ &= - \sum_{p=1}^{p=N_P} \frac{Z_A}{|\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_p|} \times \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{i=3} A_i \exp(-\alpha_i |\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_p|), \quad (11) \end{aligned}$$

где A_i и α_i — постоянные, табулированные [18] для всех атомных элементов. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{U}_a dt = \sum_{p=1}^{p=N_P} \chi(\mathbf{b}, \mathbf{r}_p). \quad (12)$$

Поскольку потенциал \overline{U}_a не зависит от координат электронов мишени $\{\mathbf{r}_a\}$ и $\langle \varphi_0(\{\mathbf{r}_a\}) | \varphi_0(\{\mathbf{r}_a\}) \rangle = 1$, вероятность (7) в результате замены U_a на \overline{U}_a принимает простой вид (9). Электронная плотность в модели Дирака–Хартри–Фока–Слэтера [18] представляется в виде

$$\rho_a(\mathbf{r}) = \frac{Z_A}{4\pi|\mathbf{r}|} \sum_{i=1}^{i=3} A_i \alpha_i^2 \exp(-\alpha_i |\mathbf{r}|). \quad (13)$$

Таким образом, выражение (9) представляет собой вероятность возбуждения покоящегося в начале системы координат структурного иона-снаряда движущимся со скоростью \mathbf{v} нейтральным атомом-мишенью, описываемым как протяженный заряд с пространственно неоднородной плотностью заряда, соответствующей точечному ядру заряда Z_A ,

окруженному «шубой» с плотностью заряда $-\rho_a(\mathbf{r})$, где $\rho_a(\mathbf{r})$ определяется формулой (13). В таком же виде искомая вероятность, следуя методике, изложенной в работе [19] для возбуждения атомов движущимися с релятивистскими скоростями протяженными зарядами, может быть получена и в приближении эйконала, применяемом к описанной задаче. Таким образом, формула (9) применима и в случае столкновений движущихся с релятивистскими скоростями снаряда и мишени, лишь бы в системе покоя снаряда электроны снаряда были бы нерелятивистскими до и после столкновения (аналогичное требование и к электронам мишени в системе покоя мишени).

Отметим, что формула (9) использовалась нами ранее в работах [10, 20] лишь на основе физических соображений без оценки погрешности. Покажем, что замена формулы (7) на (9) при вычислении неупругих сечений вносит относительную погрешность порядка $1/N_A$, где N_A — число электронов мишени, которую мы будем считать многоэлектронной, т. е. $N_A \gg 1$. Будем рассматривать высокозарядные структурные ионы, видимый заряд Z_P которых много больше единицы (например, для иона урана U^{10+} $Z_P = 10$), тогда характерный размер электронной шубы иона много меньше характерного размера нейтрального атома-мишени и можно считать среднее поле атома однородным на размерах иона, что соответствует разложению эйкональной фазы (10) по малым r_p/b с использованием формулы

$$K_0(\alpha_i |\mathbf{b} - \mathbf{s}_p|) \approx K_0(\alpha_i b) + K_1(\alpha_i b) \frac{\alpha_i \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_p}{b}. \quad (14)$$

Слагаемое $K_0(\alpha_i b)$ в правой части (14), как не вызывающее электронных переходов, может быть опущено, в результате формула (9) примет вид

$$W_{0 \rightarrow k} = W_{0 \rightarrow k}(\overline{\mathbf{q}}) = |\langle \psi_k | \times \exp \left(-i \overline{\mathbf{q}} \sum_{p=1}^{N_P} \mathbf{r}_p \right) | \psi_0 \rangle|^2. \quad (15)$$

Здесь вектор $\overline{\mathbf{q}}$ имеет смысл среднего (по положениям электронов мишени) импульса, передаваемого электронам иона при его столкновении с атомом при значении параметра удара \mathbf{b} , и равен

$$\overline{\mathbf{q}} = \frac{2Z_A}{v} \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i K_1(\alpha_i b) \frac{\mathbf{b}}{b}. \quad (16)$$

Предельные значения $\overline{\mathbf{q}}$ имеют прозрачный физический смысл: при $b \rightarrow 0$ переданный импульс

$\bar{\mathbf{q}} \rightarrow 2Z_A \mathbf{b}/vb^2$, что соответствует рассеянию на гол-
лом ядре атома; а при $b \rightarrow \infty$ импульс $\bar{\mathbf{q}} \rightarrow 0$,
поскольку поле нейтрального атома исчезает (эк-
споненциально убывает) на больших расстояниях.

Вероятность $W_{0 \rightarrow k}$ (7) также может быть пред-
ставлена в виде, аналогичном (15), если провести
разложение эйкональной фазы $\int_{-\infty}^{\infty} U_a dt$ по малым
 r_p/b :

$$W_{0 \rightarrow k} = W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) = \langle \varphi_0 | \langle \psi_k | \times \\ \times \exp \left(-i \mathbf{q} \cdot \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{r}_p \right) | \psi_0 \rangle \Big|_{\varphi_0}, \quad (17)$$

где переданный импульс \mathbf{q} равен

$$\mathbf{q} = \frac{2}{v} \left(\frac{Z_A \mathbf{b}}{b^2} + \sum_{a=1}^{N_A} \frac{\mathbf{b} + \mathbf{s}_a}{(\mathbf{b} + \mathbf{s}_a)^2} \right) = \\ = \frac{2}{v} \sum_{a=1}^{N_A} \left(\frac{Z_A}{N_A} \frac{\mathbf{b}}{b^2} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{s}_a}{(\mathbf{b} + \mathbf{s}_a)^2} \right), \quad (18)$$

а \mathbf{s}_a — проекция \mathbf{r}_a на плоскость параметра удара
 \mathbf{b} . Очевидно, что \mathbf{q} является импульсом, передава-
емым электронам снаряда при фиксированных по-
ложениях электронов мишени, и $\bar{\mathbf{q}}$ (16) является ре-
зультатом усреднения \mathbf{q} по положениям электронов
мишени. Поэтому относительная погрешность имеет
порядок

$$\frac{|(\bar{q}^2) - (\bar{q})^2|}{(\bar{q})^2} \sim \frac{1}{N_A}, \quad (19)$$

как относительная среднеквадратичная флуктуа-
ция аддитивной физической величины \mathbf{q} в систе-
ме, содержащей $N_A \gg 1$ частиц [21]. Здесь и вез-
де ниже \bar{f} означает среднее по положениям элек-
тронов (в основном состоянии) мишени значение ка-
кой-либо физической величины f . При вычислении
сечения ионизации обычно проводится усреднение
вероятности $W_{0 \rightarrow k}$ по всем возможным начальным
состояниям и суммирование–интегрирование по ко-
нечным состояниям непрерывного спектра. Будем
предполагать, что эта процедура выполнена, хотя
для удобства будем сохранять прежние обозначения
для вероятностей. В результате мы, не теряя общно-
сти, можем считать, что $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q})$ и $W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}})$ есть
функции соответственно \mathbf{q}^2 и $\bar{\mathbf{q}}^2$. Далее, поскольку
вероятность $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q})$ (17) выражена через неупру-
гий формфактор $\langle k | \exp(-i \mathbf{q} \cdot \sum_p \mathbf{r}_p) | 0 \rangle$, очевид-
но, что при ортогональных $|0\rangle$ и $|k\rangle$ вероятность
 $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Поэтому для произволь-
ных \mathbf{q} представим $W_{0 \rightarrow k}$ в виде $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) = \bar{q}^2 f(\bar{q}^2)$,

где $f(q^2)$ в согласии с общими свойствами [11]
неупругого формфактора можно считать функцией,
слабо зависящей от q^2 при $0 \leq q < Z_P$, и можно за-
менить $q^2 f(q^2)$ на $q^2 f(\bar{q}^2) = \bar{q}^2 f(\bar{q}^2)$.

Ограничение значений q областью $0 \leq q < Z_P$
при данной оценке оправдывается следующим обра-
зом: согласно (16), даже при $2Z_A/v \sim 1$ значения
 $q \sim Z_P$ достигаются лишь при крайне малых пара-
метрах удара $b \sim 1/Z_P$, тогда как характерные се-
чения обдирки определяются областью параметров
удара, соответствующих обращению $\bar{\mathbf{q}}$ в нуль, или
параметрами удара порядка размера нейтрального
атома, т.е. при $b \sim 1 \gg 1/Z_P$.

Таким образом, $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) = \bar{q}^2 f(\bar{q}^2)$, а в этих же
обозначениях вероятность $W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{q}}^2 f(\bar{q}^2)$. Та-
ким образом

$$\frac{|W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) - W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}})|}{W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}})} \sim \frac{|(\bar{q}^2) - (\bar{q})^2|}{(\bar{q})^2} \sim \frac{1}{N_A}.$$

Сечение получается интегрированием вероятности
 $W_{0 \rightarrow k}$ по всей плоскости параметра удара. Сечение,
вычисленное с заменой $W_{0 \rightarrow k}$ на $W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q})$ из (17),
будем обозначать $\bar{\sigma}$. Сечение, вычисленное с заме-
ной $W_{0 \rightarrow k}$ на $W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}})$ из (15), будем обозначать σ .
Тогда относительная погрешность

$$\frac{|\bar{\sigma} - \sigma|}{\bar{\sigma}} \approx \frac{\left| \int d^2 b \{ W_{0 \rightarrow k}(\mathbf{q}) - W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}}) \} \right|}{\int d^2 b W_{0 \rightarrow k}(\bar{\mathbf{q}})} \sim \\ \sim \frac{\left| \int d^2 b \{ (\bar{q}^2) - (\bar{q})^2 \} \right|}{\int d^2 b (\bar{q})^2} \sim \frac{|(\bar{q}^2) - (\bar{q})^2|}{(\bar{q})^2} \sim \frac{1}{N_A}. \quad (20)$$

Таким образом, при использовании мишеней с боль-
шим количеством электронов сечение какого-либо
неупругого процесса, происходящего со снарядом,
при произвольной судьбе многоэлектронной мишени
можно вычислять, используя для вероятности вме-
сто (7) несравненно более простое выражение (9).
При этом число электронов снаряда может быть про-
извольным. Однако если и снаряд является много-
электронным, то приведенное выше деление парт-
неров по столкновению на снаряд и мишень (при-
нятое только для удобства идентификации) явля-
ется условным. Поэтому аналогичные рассуждения
могут быть использованы для вычисления и интер-
претации величины $W_{0 \rightarrow n}^{(t)}$ из формулы (3), кото-
рая таким образом описывает вероятность возбуж-
дения покоящегося в начале системы координат ато-
ма ударом движущегося со скоростью \mathbf{v} иона, описы-
ваемого как протяженный объект с пространствен-
но неоднородной плотностью заряда, соответствующую

щей точечному ядру заряда Z_P , окруженному «шубой» с некоторой плотностью заряда $-\rho_p(\mathbf{r})$. Явный вид $\rho_p(\mathbf{r})$ нам для дальнейшего рассмотрения не понадобится, однако для многоэлектронных снарядов функция $\rho_p(\mathbf{r})$ может быть описана, например, в модели Брандта–Китагава [22] (см. также [8]).

Таким образом, исходя из нашей интерпретации вероятностей (4) и (3), можно записать потери энергии (2) в простом виде,

$$\kappa = \kappa^{(p)} + \kappa^{(t)}, \quad (21)$$

допускающем следующую наглядную интерпретацию: $\kappa^{(p)}$ — потери энергии на возбуждение и ионизацию электронов структурного иона атомом-мишенью, описываемым как протяженный заряд; $\kappa^{(t)}$ — потери энергии на возбуждение и ионизацию электронов атома-мишени структурным ионом, описываемым как протяженный заряд.

3. РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Обсудим сначала величину $\kappa^{(p)}$ — потери энергии на возбуждение и ионизацию электронов снаряда. Будем рассматривать высокозарядные структурные ионы, видимый заряд Z_P которых много больше единицы, тогда характерный размер электронной шубы иона много меньше характерного размера нейтрального атома-мишени и можно считать среднее поле атома однородным на размерах иона, что соответствует разложению (14) по малым r_p/b в эйкональной фазе (10). Область параметров удара, в которой справедливо такое разложение, будем называть далее областью больших параметров удара: $b_0 < b < \infty$. Точное значение параметра обрезания b_0 для нас несущественно, поскольку (см. ниже формулы (30), (28) и (29)) зависимость $\kappa^{(p)}$ от b_0 оказывается логарифмической и исчезает при вычислении $\kappa^{(p)}$ во всей области параметров удара. Рассмотрим сначала вклад области больших параметров удара в эффективное торможение $\kappa^{(p)}$, когда вероятность возбуждения снаряда описывается формулой (15) и

$$\begin{aligned} \kappa^{(p)} &= \int d^2b \sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_0) W_{0 \rightarrow k}^{(p)} = \\ &= \int d^2b \sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_0) |f_{0k}|^2, \quad (22) \end{aligned}$$

где неупругий формфактор

$$f_{0k} = \langle k | f | 0 \rangle, \quad f = \exp \left(-i \mathbf{q} \cdot \sum_{p=1}^{p=N_P} \mathbf{r}_p \right)$$

(здесь и везде ниже, чтобы не загромождать формулы, мы опускаем значок среднего у импульса $\bar{\mathbf{q}}$). Следуя работе [11], не трудно получить, что

$$\begin{aligned} \sum_k (\varepsilon_k - \varepsilon_0) |f_{0k}|^2 &= \\ &= |\langle 0 | \sum_{p=1}^{p=N_P} (\nabla_p f)(\nabla_p f^+) | 0 \rangle| = \frac{N_P}{2} q^2, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\nabla_p = \partial / \partial \mathbf{r}_p$. В результате вклад в эффективное торможение $\kappa^{(p)}$ области параметров удара $b_0 < b < \infty$, в которой справедливо разложение (14) имеет вид

$$\kappa^{(p)}(b_0 < b < \infty) = \frac{N_P}{2} \int_{b_0}^{\infty} q^2 2\pi b db. \quad (24)$$

Подставляя сюда значение \mathbf{q} из формулы (16), получим

$$\begin{aligned} \kappa^{(p)}(b_0 < b < \infty) &= \frac{4\pi Z_A^2 N_P}{v^2} \times \\ &\times \left(\sum_{i=1}^3 A_i^2 I_i + \sum_{i,j=1(i \neq j)}^3 A_i A_j \alpha_i \alpha_j I_{i,j} \right), \quad (25) \end{aligned}$$

где интегралы $I_{i,j}$ и I_i , входящие в правую часть (25), равны

$$I_{i,j} = \int_{b_0}^{\infty} K_1(\alpha_i b) K_1(\alpha_j b) b db, \quad I_i = \alpha_i^2 I_{i,i}.$$

Интеграл $I_{i,j}$ является табличным [23] и равен

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \frac{b_0}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} \times \\ &\times [\alpha_i K_0(\alpha_i b_0) K_1(\alpha_j b_0) - \alpha_j K_1(\alpha_i b_0) K_0(\alpha_j b_0)]. \end{aligned}$$

Далее, при условии $\alpha_i b_0 \ll 1$ используем асимптотики функций Макдональда при малых x :

$$K_0(x) \rightarrow \ln \frac{2}{\eta x}, \quad \eta = 1.781,$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left\{ \frac{2}{x} \right\}^\nu.$$

В результате

$$I_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \left[\ln \frac{2}{\eta b_0} + \frac{\alpha_j^2 \ln \alpha_j - \alpha_i^2 \ln \alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} \right], \quad (26)$$

$$I_i = \ln \frac{2}{\alpha_i b_0 \eta} - \frac{1}{2} = \ln \frac{2}{\alpha_i b_0 \eta \sqrt{e}}. \quad (27)$$

Подставляя в (25) значения интегралов I_i (27) и $I_{i,j}$ (26) получим

$$\begin{aligned} \kappa^{(p)}(b_0 < b < \infty) = & \frac{4\pi Z_A^2 N_P}{v^2} \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^3 A_i^2 \ln \frac{2}{\alpha_i b_0 \eta \sqrt{e}} + \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1(i \neq j)}^3 A_i A_j \frac{\alpha_j^2 \ln \alpha_j - \alpha_i^2 \ln \alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим вычисление $\kappa^{(p)}$ в области малых параметров удара: $0 < b < b_0$. При столкновениях с малыми параметрами удара или большими переданными импульсами можно считать [24] электроны структурного иона свободными и покоящимися до рассеяния на голом ядре атома заряда Z_A и воспользоваться подходом Линхарда–Соренсена [3]. Тогда, согласно численным расчетам [3], до $\gamma \leq 10$ (γ — релятивистский фактор) и зарядов иона, меньших или равных 92, эффективное торможение можно представить в часто используемом виде:

$$\begin{aligned} \kappa^{(p)}(0 < b < b_0) = & \frac{4\pi Z_A^2}{v^2} \times \\ & \times \left(\ln(b_0 \gamma v \eta) - \frac{1}{2} \beta^2 + \Delta L_{Bloch}^{Z_A} + \Delta L_{Mott}^{Z_A} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \eta = 1.781,$$

$\Delta L_{Bloch}^{Z_A}$ и $\Delta L_{Mott}^{Z_A}$ — поправки Блоха [25] и Мотта [26], эффективно отличающиеся от нуля лишь при малых параметрах удара [3] (см. также [27]) и зависящие от заряда Z_A , в поле которого рассеиваются принадлежащие структурному иону электроны.

Эффективное торможение $\kappa^{(p)}$ получаем, суммируя вклады (28) и (29) от двух областей параметра удара:

$$\kappa^{(p)} = \kappa^{(p)}(0 < b < b_0) + \kappa^{(p)}(b_0 < b < \infty). \quad (30)$$

Необходимо отметить, что при таком суммировании зависимость от параметра b_0 исчезает, именно поэтому конкретное значение b_0 несущественно для излагаемого метода шивки. В результате имеем

$$\begin{aligned} \kappa^{(p)} = & \frac{4\pi Z_A^2 N_P}{v^2} \left[\ln(2\gamma v) - \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_{i=1}^3 A_i^2 \ln \frac{1}{\alpha_i \sqrt{e}} + \right. \\ & + \sum_{i,j=1(i \neq j)}^3 A_i A_j \frac{\alpha_j^2 \ln \alpha_j - \alpha_i^2 \ln \alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2} + \\ & \left. + \Delta L_{Bloch}^{Z_A} + \Delta L_{Mott}^{Z_A} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим теперь $\kappa^{(t)}$ — потери энергии на возбуждение и ионизацию электронов атома-мишени структурным ионом, описываемым как протяженный заряд. Поскольку мы рассматриваем высокозарядные структурные ионы, видимый заряд Z_P которых много больше единицы, когда характерный размер электронной шубы иона много меньше характерного размера нейтрального атома-мишени, в данном случае можно считать ион точечной частицей заряда Z_P и сразу написать [3] стандартное выражение для эффективного торможения:

$$\begin{aligned} \kappa^{(t)} = & \frac{4\pi Z_P^2 N_A}{v^2} \times \\ & \times \left(\ln \frac{2v^2}{I(1 - \beta^2)} - \beta^2 + \Delta L_{Bloch}^{Z_P} + \Delta L_{Mott}^{Z_P} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где I — средняя [11] атомная энергия мишени, $\Delta L_{Bloch}^{Z_P}$ и $\Delta L_{Mott}^{Z_P}$ — поправки Блоха и Мотта в поле заряда Z_P , рассеивающего принадлежащие атому электроны. Таким образом, согласно выражению (21), полные потери энергии есть сумма парциальных потерь (31) и (32) и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{4\pi Z_{eff}^2 N_{tot}}{v^2} \times \\ & \times \left(\ln \frac{2(v\gamma)^2}{I_{eff}} - \beta^2 + \Delta L_{Bloch}^{eff} + \Delta L_{Mott}^{eff} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $N_{tot} = N_A + N_P$ — полное число электронов сталкивающихся систем и введены эффективные величины:

$$Z_{eff}^2 = \frac{1}{N_{tot}} \left(\frac{1}{2} Z_A^2 N_P + Z_P^2 N_A \right)$$

— эффективный заряд сталкивающихся систем; средняя атомная энергия I_{eff} сталкивающихся систем, такая что

$$\ln I_{eff} = \frac{1}{Z_{eff}^2 N_{tot}} \left(\frac{1}{2} Z_A^2 N_P \ln \frac{\alpha^2}{2} + Z_P^2 N_A \ln I \right),$$

где α определяется из соотношения

$$\ln \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^3 A_i^2 \ln \frac{1}{\alpha_i \sqrt{e}} + \sum_{i,j=1(i \neq j)}^3 A_i A_j \frac{\alpha_j^2 \ln \alpha_j - \alpha_i^2 \ln \alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2};$$

эффективная поправка Блоха

$$\Delta L_{Bloch}^{eff} = \frac{1}{Z_{eff}^2 N_{tot}} \left(Z_A^2 N_P \Delta L_{Bloch}^{Z_A} + Z_P^2 N_A \Delta L_{Bloch}^{Z_P} \right);$$

эффективная поправка Мотта

$$\Delta L_{Mott}^{eff} = \frac{1}{Z_{eff}^2 N_{tot}} \left(Z_A^2 N_P \Delta L_{Mott}^{Z_A} + Z_P^2 N_A \Delta L_{Mott}^{Z_P} \right).$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для иллюстрации вклада в полное эффективное торможение потерь энергии на возбуждение и ионизацию электронных оболочек снаряда мы рассчитали величину

$$\eta = \frac{\kappa^{(p)}}{\kappa^{(p)} + \kappa^{(t)}} = \frac{\kappa^{(p)}}{\kappa}, \quad (34)$$

имеющую смысл относительного вклада неупругих переходов электронов снаряда в полное эффективное торможение. Расчеты проведены для частично ободранных ионов урана U^{q+} ($10 \leq q \leq 70$) при столкновениях с атомами аргона, т. е. в том числе для тех же партнеров по столкновению и энергий, для которых проведены измерения процессов многократной потери электронов в работах [4, 5]. Результаты расчетов приведены на рис. 1. Как следует из рис. 1, потери энергии на возбуждение и ионизацию снаряда увеличиваются с ростом числа электронов на электронных оболочках урана и оказываются существенными для многоэлектронных структурных ионов, тогда как для ионов с малым числом связанных электронов относительные поправки не велики.

Формула (33), как и формула Бете–Блоха, описывает потери энергии при столкновениях с отдельными атомами. Однако на практике обычно измеряют потери энергии при движении снаряда в среде, когда снаряд сталкивается с атомами мишени. Такие столкновения приводят к возбуждению и ионизации как атомов среды, так и снаряда. Поскольку с любым атомом среды происходит не более одного столкновения, потери энергии иона на ионизацию и возбуждение атомов мишени являются безвозвратными. К безвозвратным потерям приводят и столк-

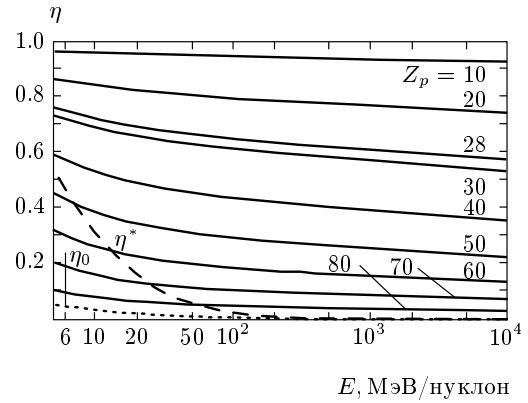


Рис. 1. Относительный вклад возбуждений и ионизации электронных оболочек снаряда в полное эффективное торможение иона урана U^{Z_p+} на нейтральных атомах аргона. Сплошные линии — $\eta = \kappa^{(p)}/\kappa$ (34), вклад возбуждений и ионизации электронных оболочек снаряда в полное эффективное торможение иона урана U^{Z_p+} на отдельном атоме Ar в зависимости от энергии иона. Z_p — видимый заряд частично ободранного иона урана; число электронов, образующих «шубу» иона, $N_p = Z_0 - Z_p$, где $Z_0 = 92$ — заряд голого ядра урана. Штриховая линия — η^* , та же самая величина при движении в среде, рассчитанная по формуле (34) путем замены Z_p на Z_p^* (36) и N_p на $N_p^* = Z_0 - Z_p^*$. Пунктирная линия — η_0 , та же самая величина при движении в среде, рассчитанная по формулам (2.28) и (2.29) из работы [8]

новения с ионизацией снаряда. Однако потери, связанные с возбуждением иона-снаряда в общем случае не являются таковыми. Действительно, возбужденный ион-снаряд может сохранить свое возбужденное состояние вплоть до столкновения со следующим атомом мишени, что, естественно, зависит от плотности среды и скорости снаряда. Мы можем избежать необходимости рассмотрения эволюции возбужденного состояния снаряда в среде, описываемой сложными кинетическими уравнениями радиационно-столкновительных переходов вдоль траектории движения частицы-снаряда, если предположим, что ион, возбужденный в результате столкновения с каким-либо атомом среды, успевает релаксировать до столкновения со следующим атомом. Очевидно, что в этом случае потери энергии на возбуждение электронных оболочек снаряда, как и потери на ионизацию снаряда, окажутся безвозвратными. Далее нам понадобится оценка характерного полного неупругого сечения σ , следующая из унитарного выражения (15) для вероятности, согласно

которому полная вероятность всех возможных электронных переходов в снаряде

$$w = \sum_{k \neq 0} w_{0 \rightarrow k} = 1 - w_{0 \rightarrow 0},$$

где $w_{0 \rightarrow 0}$ — вероятность того, что снаряд останется в основном состоянии. Поэтому (при $qr_p \leq 1$)

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d^2b (1 - |\langle 0 | \exp \left(-i\mathbf{q} \cdot \sum_{p=1}^{N_P} \mathbf{r}_p \right) | 0 \rangle|^2) \sim \\ &\sim \int d^2b (1 - |\langle 0 | \exp \left(-iq \sum_{p=1}^{N_P} r_p \right) | 0 \rangle|^2) \sim \\ &\sim |\langle 0 | \sum_{p=1}^{N_P} r_p | 0 \rangle|^2 \int d^2b q^2 \sim 8\pi \frac{Z_A^2 N_P}{Z_P^2 v^2} C, \end{aligned} \quad (35)$$

где C — величина порядка единицы. Введем обозначения: σ_e — сечение возбуждения снаряда, σ_i — сечение ионизации снаряда (причем $\sigma_i \sim \sigma_e \sim \sigma$), σ_c — сечение захвата электронов мишени снарядом (причем при установившемся среднем заряде снаряда, $\sigma_c \approx \sigma_i$), $l \sim 1/n\sigma$ — среднее расстояние вдоль траектории движения частицы-снаряда между двумя последовательными столкновениями, n — плотность атомов среды, τ — время жизни возбуждения иона (причем для релятивистских скоростей $\tau = \gamma\tau_0$, где τ_0 — время жизни в системе покоя). Отметим, что основным каналом релаксации тяжелого иона является радиационный распад, гораздо более вероятный, чем оже-распад. Ион успеет релаксировать, если среднее время движения между двумя последовательными столкновениями $l/v \gg \tau$ или $\tau n \sigma v \ll 1$. При выполнении этого (легко оцениваемого в каждом конкретном случае с помощью (35)) неравенства, мы можем считать, что ион-снаряд в результате процессов потери и захвата электронов приобретает некоторый, не зависящий от плотности среды, равновесный средний заряд Z_P^* . Для иллюстрации в этом случае вклада в полное эффективное торможение потерь энергии на возбуждение и ионизацию электронных оболочек снаряда при движении в среде мы рассчитали η^* (аналогичную (34)) — величину относительного вклада неупругих переходов электронов снаряда в полное эффективное торможение. Расчеты проведены нами для потерь энергии ионов урана при движении в среде, состоящей из атомов аргона. При проведении расчетов мы, как и в работе [28], для среднего заряда иона Z_P^* в среде использовали эмпирическую формулу:

$$Z_P^* = Z_0 \left(1 - \exp \frac{-0.95v}{Z_0^{2/3}} \right), \quad (36)$$

где Z_0 — заряд полностью ободранного иона, тогда среднее число связанных с ионом электронов равно $N_P^* = Z_0 - Z_P^*$. Таким образом, при расчетах мы заменяли в формулах (31), (32), (33) величину Z_P на Z_P^* и N_P на N_P^* . На рис. 1 относительный вклад η^* представлен штриховой линией. Как видно из рис. 1, в приведенном диапазоне энергий $5 < E < 10000$ МэВ/нуклон лишь при эффективных зарядах $Z_P^* \geq 45$ вносится заметный вклад неупругих переходов электронов снаряда в полное эффективное торможение. Причем лишь для энергий $E < 200$ МэВ/нуклон относительные вклады в эффективное торможение η^* за счет электронных возбуждений и ионизации снаряда заметны, т.е. составляют более одного процента при $E = 200$ МэВ/нуклон и достигают при $E = 5$ МэВ/нуклон пятидесяти процентов. Энергии $E < 200$ МэВ/нуклон по сути дела соответствуют нерелятивистским столкновениям, поэтому для выделения и иллюстрации вклада более чем одноэлектронных ионизации и возбуждений снаряда мы провели расчеты относительной поправки по теории возмущений с использованием формул (2.28) и (2.29) из работы [8] (формулы мы не приводим из-за их громоздкости), представляющих по смыслу теории возмущений вклады соответственно одноэлектронных ионизации и возбуждений снаряда и мишени. Причем формулы (2.28) и (2.29) из работы [8] содержат зависимость числа электронов снаряда от скорости снаряда. Рассчитанный таким образом относительный вклад мы обозначили η_0 и привели на рис. 1 (пунктирная линия). Как видно из рис. 1, величина η_0 заметно меньше η^* , что в рассматриваемом нами случае иллюстрирует существенный вклад многоэлектронных ионизации и возбуждений снаряда для процессов потерь энергии многоэлектронными снарядами.

Мы провели расчеты эффективного торможения снарядов ^{208}Pb и ^{209}Bi на нескольких мишенях. На рис. 2 приведено сравнение результатов наших расчетов с экспериментом [28]. Поправки за счет вклада неупругих переходов электронов снаряда в полное эффективное торможение, хотя и относительно не велики (порядка нескольких процентов), но позволяют принципиально объяснить не разъясненную в работе [28] разницу между теорией Линхарда–Соренсена [3] и экспериментом [28]. Теория Линхарда–Соренсена, построенная только для голых ядер, дает результаты, хотя и близкие

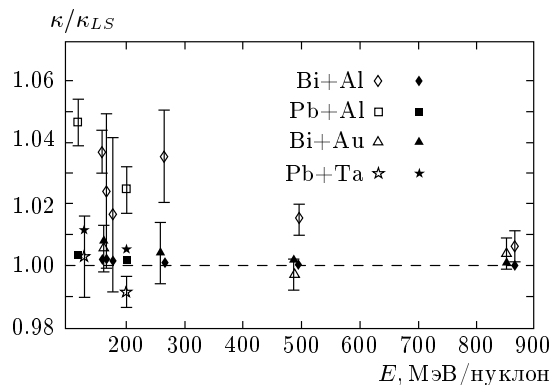


Рис. 2. Экспериментальные [28] (светлые значки) и расчетные (темные значки) значения κ — эффективного торможения снарядов ^{208}Pb и ^{209}Bi на различных мишенях, нормированные на соответствующие величины κ_{LS} теории Линхарда–Соренсена [3]. В теории Линхарда–Соренсена соответствующий заряд голого ядра заменен на эффективный заряд Z_P^* (36)

к экспериментальным, но систематически лежащие несколько ниже. При проведении расчетов мы, как и в работе [28], для среднего заряда иона Z_P^* в среде использовали эмпирическую формулу (36). На рис. 2, как и в работе [28], горизонтальная штриховая линия, проходящая через значение равное 1, представляет собой эффективное торможение κ_{LS} теории Линхарда–Соренсена, полученное при замене заряда голого ядра на эффективный заряд Z_P^* из (36), на κ_{LS} нормированы экспериментальные данные ([28], рис. 9) и наши результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС (грант INTAS-GSI 06-1000012-8530).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Eichler and W. E. Meyrhof, *Relativistic Atomic Collisions*, Acad. Press Inc., New York (1995).
2. J. Eichler, *Phys. Rep.* **193**, 167 (1990).
3. J. Lindhard and A. Sorensen, *Phys. Rev. A* **53**, 2443 (1996).
4. R. D. DuBois, A. C. F. Santos, Th. Stohlker et al., *Phys. Rev. A* **70**, 032712 (2004).
5. R. E. Olson, R. L. Watson, V. Horvat et al., *J. Phys. B* **37**, 4539 (2004).
6. Y. K. Kim and K. Cheng, *Phys. Rev. A* **22**, 61 (1980).
7. T. Kaneko, *Phys. Rev. A* **43**, 4780 (1991).
8. R. Cabrera-Trujillo, S. A. Cruz, Jens Oddershede, and John R. Sabin, *Phys. Rev. A* **55**, 2864 (1997).
9. E. J. McGuire, *Phys. Rev. A* **57**, 2758 (1998).
10. В. И. Матвеев, Д. Б. Сидоров, *Письма в ЖЭТФ* **8**, 299 (2006).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва (1989).
12. J. Eichler, *Phys. Rev. A* **15**, 1856 (1977).
13. В. И. Матвеев, *ЭЧАЯ* **26**, 780 (1995).
14. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, *УФН* **125**, 377 (1978).
15. В. И. Матвеев, С. Г. Толманов, *ЖЭТФ* **107**, 1780 (1995).
16. В. И. Матвеев, *ТМФ* **142**, 57 (2005).
17. A. J. Baltz, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1231 (1997).
18. F. Salvat, J. D. Martinez, R. Mayol, and J. Parellada, *Phys. Rev. A* **36**, 467 (1987).
19. В. И. Матвеев, Е. С. Гусаревич, *ЖЭТФ* **123**, 42 (2003).
20. В. И. Матвеев, Д. У. Матрасулов, С. В. Рябченко, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 455 (2005).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1964).
22. W. Brandt and M. Kitagawa, *Phys. Rev. B* **52**, 5631 (1982).
23. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды: специальные функции*, Наука, Москва (1983).
24. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
25. F. Bloch, *Ann. der Phys.* **16**, 285 (1933).
26. N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc. A* **124**, 425 (1929).
27. В. И. Матвеев, *ЖЭТФ* **121**, 260 (2002).
28. H. Weick, H. Geissel, C. Scheidenberger et al., *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B* **164–165**, 168 (2000).