

РЕНОРМГРУППОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ: К ВОПРОСУ О СИНГУЛЯРНЫХ ВКЛАДАХ

*А. А. Погорелов, И. М. Суслов**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 февраля 2007 г.

Согласно имеющимся публикациям, метод теоретико-полевой ренормгруппы в двумерном случае приводит к значениям критических индексов, отклоняющимся от известных точных значений; это связывается с существованием неаналитических вкладов в ренормгрупповые функции. В настоящей работе проведен анализ ситуации на основе нового алгоритма суммирования расходящихся рядов, позволяющего проследить зависимость результатов для критических индексов от коэффициентов разложения для ренормгрупповых функций. Показано, что точные значения всех индексов могут быть получены при разумном виде коэффициентных функций; последние имеют небольшие немонотонности или перегибы, которые плохо воспроизводятся при естественных интерполяциях. Предполагать наличие сингулярных вкладов в ренормгрупповые функции нет необходимости.

PACS: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 11.15.Me, 64.60.Fr, 75.10.Nk

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее обоснованным методом вычисления критических индексов является метод теоретико-полевой ренормгруппы [1]. Он основан на том, что фазовые переходы описываются эффективной теорией φ^4 с действием

$$S\{\vec{\varphi}\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \vec{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \tau \vec{\varphi}^2 + \frac{1}{4} g \vec{\varphi}^4 \right\}, \quad (1)$$

где $\vec{\varphi}$ — n -компонентный вектор поля, d — размерность пространства, τ — расстояние до перехода, g — константа связи. Фурье-образ $G(k, \tau)$ корреляционной функции $G(r, \tau) = \langle \varphi(x) \varphi(x+r) \rangle$ удовлетворяет уравнению Каллана – Симанчика

$$\left[-\frac{\partial}{\partial \ln k} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \nu^{-1}(g) \frac{\partial}{\partial \ln \tau} - 2 + \eta(g) \right] \times \\ \times G(k, \tau) = 0, \quad (2)$$

которое при определенных условиях имеет решения

$$G(0, \tau) \propto \tau^{-\gamma}, \quad G(k, 0) \propto k^{-2+\eta},$$

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

соответствующие общей феноменологии фазовых переходов [2]. Практическая процедура сводится к нахождению корня уравнения $\beta(g^*) = 0$, определяющего неподвижную точку ренормгруппы, после чего основные критические индексы определяются выражениями

$$\eta = \eta(g^*), \quad \nu = \nu(g^*), \\ \gamma = \gamma(g^*), \quad \omega = \beta'(g^*), \quad (3)$$

а остальные определяются из них с помощью известных соотношений [2]. Ренормгрупповые функции $\beta(g)$, $\eta(g)$, $\nu^{-1}(g)$ и связанные с ними функции

$$\eta^{(2)}(g) = \nu^{-1}(g) + \eta(g) - 2, \\ \gamma^{-1}(g) = 1 + \eta^{(2)}(g)/(2 - \eta(g)) \quad (4)$$

определяются степенными рядами по константе связи g , первые коэффициенты разложения которых вычисляются с помощью диаграммной техники, тогда как для высоких порядков существует известная асимптотика Липатова [3, 4]. Ввиду факториальной расходимости рядов для их суммирования требуется использование специальных методов [5–7].

В трехмерном случае такой подход позволил определить критические индексы с точностью до третьего знака [5, 6, 8], но его приложение к дву-

	Точное значение	[5]	[6]	[9]	Настоящая работа
γ	1.75	1.72 ± 0.20	1.79 ± 0.09	1.790	1.785 ± 0.040
ν	1.00	0.92 ± 0.30	0.97 ± 0.08	0.966	1.01 ± 0.07
η	0.25	0.08 ± 0.20	0.13 ± 0.07	0.146	0.145 ± 0.014
$\eta^{(2)}$	-0.75	-0.83 ± 0.20	-0.85 ± 0.07	-0.872	-0.865 ± 0.050
ω	4/3 (?)	0.7 ± 0.4	1.3 ± 0.2	1.31 ± 0.03	1.345 ± 0.075
g^*	1.754 (?)	1.8 ± 0.3	1.85 ± 0.10	1.837 ± 0.030	1.82 ± 0.04

мерным системам оказалось менее успешным (см. таблицу). В пионерской работе Бейкера, Никеля, Мейрона [5] были получены четырехпетлевые разложения для ренормгрупповых функций при $n = 1$, а затем просуммированы методом Паде–Бореля; сравнительно невысокая точность суммирования позволила получить разумные результаты для «больших» индексов (ν , γ), тогда как «малые» индексы (η , α) остались практически неопределенными (см. второй столбец в таблице). Ле-Гийу и Зинн-Жюстен [6] использовали более совершенный метод суммирования («конформ-борель») и тщательно исследовали неопределенность результатов, что позволило существенно уменьшить ошибку: в результате обнаружилось отклонение η и $\eta^{(2)} = \eta^{(2)}(g^*)$ от известных точных значений для двумерной модели Изинга (третий столбец в таблице). В дальнейшем Орлов и Соколов [9] вычислили пятипетлевые вклады в ренормгрупповые функции и обнаружили, что центральные значения для критических индексов практически не меняются по сравнению с [6] (четвертый столбец в таблице). Неопределенность результатов подробно не исследовалась, но характер их сходимости по мере увеличения порядка теории возмущений позволил сделать достаточно определенный вывод, что отклонение вычисленных индексов от точных является значимым и ситуация не улучшится при учете дальнейших членов ряда. Полученные отклонения были приписаны существованию пертурбативных вкладов с сингулярностью в нуле (типа $\exp(-c/g)$) в ренормгрупповые функции. Результаты суммирования были независимо подтверждены итальянской группой [10], которая высказала возможность существования вкладов, сингулярных в неподвижной точке g^* [10, 11]. Признание неаналитичных вкладов означает, что метод теоретико-полевой ренормгруппы не позволяет проводить вычисление критических индексов с произвольно высокой точностью, т. е. принципиальная решенность проблемы подвергается сомнению.

Целью настоящей работы является анализ создавшейся ситуации на основе нового алгоритма суммирования расходящихся рядов, предложенного в работах [7, 12]. Применение этого алгоритма начинается с интерполяции коэффициентной функции, что позволяет практически полностью устранить зависимость результатов от вариации процедуры суммирования: остается лишь их зависимость от способа интерполяции, которая прямо связана с неполнотой исходной информации. Поэтому появляется возможность конструктивно исследовать связь результатов суммирования с предполагаемым поведением коэффициентных функций. По техническим причинам такая возможность отсутствовала в других алгоритмах¹⁾; поэтому они формулировались так, чтобы вообще избежать упоминания о неизвестных коэффициентах разложения [5, 6]. Это приводило к сильной зависимости результатов от вариации процедуры суммирования, которую приходилось ограничивать на основе полуэмпирических рецептов, затрудняющих объективную оценку точности.

Следуя сложившейся традиции [5, 6, 8, 9], мы суммировали (кроме ряда для $\beta(g)$) ряды для четырех функций $\eta(g)$, $\eta^{(2)}(g)$, $\gamma^{-1}(g)$ и $\nu^{-1}(g)$, из которых лишь две являются независимыми (см. (4)); это позволяет проверить процедуру на самосогласованность. В последнем столбце таблицы приведены значения индексов, полученные для некоторого множества «естественных» интерполяций (разд. 2, 3). Нетрудно видеть, что неопределенность результатов для ν и γ замечает точное значение; поскольку эти индексы могут быть приняты в качестве независимых, принципиальной проблемы согласования получаемых результатов с точными не существует. Однако полученные значения для η и $\eta^{(2)}$ отклоняются от

¹⁾ Существенным моментом является устойчивость используемого алгоритма относительно гладких ошибок, к которым относятся ошибки интерполяции; это позволяет избежать катастрофического роста ошибок при пересуммировании ряда [7, 12].

точных²⁾ (в соответствии с результатами других авторов [5, 6, 9, 10]), что означает существование технической проблемы несогласованности «естественных» интерполяций для различных (взаимозависимых) функций. Анализ показывает (разд. 4), что вероятной причиной этого является осциллирующее поведение первых коэффициентов разложения для $\eta(g)$, порождающее в коэффициентных функциях для $\eta^{(2)}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$ небольшую немонотонность или перегиб, которые плохо воспроизводятся простейшими интерполяциями. Как показано в разд. 4, точные значения для индексов ν , γ , η и $\eta^{(2)}$ могут быть получены при вполне разумном виде коэффициентных функций. Поэтому нет никакой необходимости предполагать сингулярность ренормгрупповых функций, которая противоречит общим принципам (разд. 5).

2. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ПРОЦЕДУРА СУММИРОВАНИЯ

Исходной информацией являются пятипетлевые разложения для $\beta(g)$, $\eta(g)$, $\eta^{(2)}(g)$, полученные в работах [9, 13], и ряды для $\gamma^{-1}(g)$, $\nu^{-1}(g)$, которые могут быть из них получены³⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\beta(g)}{2} = & -g + g^2 - \frac{g^3}{(n+8)^2}(10.33501055n + 47.67505273) + \\ & + \frac{g^4}{(n+8)^3}(5.000275928n^2 + 149.1518586n + 524.3766023) - \\ & - \frac{g^5}{(n+8)^4}(0.088842906n^3 + 179.6975910n^2 + \\ & + 2611.154798n + 7591.108694) + \end{aligned}$$

²⁾ В том, что эти отклонения не имеют глубокого смысла, можно убедиться из соотношений между индексами. Если принять для индексов центральные значения $\gamma = 1.785$, $\nu = 1.01$, $\eta = 0.145$, то соотношение $\gamma = \nu(2 - \eta)$ нарушено на величину 0.09, что определяет масштаб неконтролируемой систематической ошибки, которой практически достаточно для согласования результатов из таблицы с точными значениями.

³⁾ В работе [9] имеется ошибка в пятипетлевом вкладе для $\gamma^{-1}(g)$, которая была исправлена в работе [13]. Пятипетлевой вклад для $\eta^{(2)}(g)$ можно извлечь из табл. IV работы [13] (где эта функция обозначается как $\eta_t(g)$), вклады же первых четырех петель (с более высокой точностью) могут быть получены из рядов для $\gamma^{-1}(g)$ и $\eta(g)$, приведенных в работе [9].

$$\begin{aligned} & + \frac{g^6}{(n+8)^5}(-0.00407946n^4 + 80.3096n^3 + 5253.56n^2 + \\ & + 53218.6n + 133972) + \\ & + \dots + c(-a)^N \Gamma(N+b)g^N + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(g) = & -\frac{g}{(n+8)}(2n+4) + \\ & + \frac{g^2}{(n+8)^2}(n+2)6.751257910 - \frac{g^3}{(n+8)^3} \times \\ & \times (8.406683574n^2 + 65.16862270n + 96.71051110) + \\ & + \frac{g^4}{(n+8)^4}(0.583377094n^3 + 139.655555n^2 + \\ & + 844.500099n + 1135.04499) - \\ & - \frac{g^5}{(n+8)^5}(-0.146720n^4 + 130.427n^3 + 2885.83n^2 + \\ & + 13691.4n + 16885.3) + \\ & + \dots + c'(-a)^N \Gamma(N+b')g^N + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \eta(g) = & \frac{g^2}{(n+8)^2}(n+2)0.9170859698 - \\ & - \frac{g^3}{(n+8)^2}(n+2)0.05460897758 + \\ & + \frac{g^4}{(n+8)^4}(-0.0926844583n^3 + 4.05641051n^2 + \\ & + 29.2511668n + 41.5352155) - \\ & - \frac{g^5}{(n+8)^5}(0.0709196n^4 + 1.05240n^3 + 57.7615n^2 + \\ & + 325.329n + 426.896) + \\ & + \dots + c''(-a)^N \Gamma(N+b'')g^N + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(g) = & 1 - \frac{n+2}{n+8}g + \frac{g^2}{(n+8)^2}(n+2)3.375628955 - \\ & - \frac{g^3}{(n+8)^3}(4.661884772n^2 + \\ & + 34.41848329n + 50.18942749) + \\ & + \frac{g^4}{(n+8)^4}(0.318993036n^3 + 71.70330240n^2 + \\ & + 429.4244948n + 574.5877236) - \\ & - \frac{g^5}{(n+8)^5}(-0.119702n^4 + 69.3791n^3 + 1482.76n^2 + \\ & + 6953.61n + 8533.16) + \\ & + \dots + \frac{c'}{2}(-a)^N \Gamma(N+b')g^N + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(g) = & 2 - \frac{2(n+2)}{(n+8)}g + \\ & + \frac{g^2}{(n+8)^2}(5.834171940n + 11.66834388) - \\ & - \frac{g^3}{(n+8)^3}(8.352074597n^2 + \\ & + 64.62253293n + 95.83676746) + \\ & + \frac{g^4}{(n+8)^4}(0.676061553n^3 + 135.599145n^2 + \\ & + 815.248932n + 1093.50978) + \\ & + \frac{g^5}{(n+8)^5}(-0.217639n^4 + 129.375n^3 + 2828.07n^2 + \\ & + 13366.1 + 16458.4) + \\ & + \dots + c'(-a)^N \Gamma(N+b')g^N + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

а также параметры асимптотики высоких порядков, установленные в [4]:

$$\begin{aligned} a = \frac{2.14793295333}{n+8}, \quad b = b' = \frac{n+7}{2}, \\ b'' = \frac{n+5}{2}, \\ c = 0.009838 \frac{n+8}{\Gamma(2+n/2)} 0.7335^n, \\ c' = 0.6441 \frac{n+2}{n+8} c, \quad c'' = 0.3306c'. \end{aligned} \quad (10)$$

В выражениях (5)–(9) нормировка g и $\beta(g)$ изменена по сравнению с (1), (2) таким образом, чтобы обеспечить единичные значения для первых двух коэффициентов в (5) (см. [4, 5]).

Суммирование расходящегося ряда

$$W(g) = \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N(-g)^N, \quad (11)$$

коэффициенты W_N которого имеют асимптотику $ca^N \Gamma(N+b)$, осуществляется с помощью преобразования Бореля:

$$\begin{aligned} W(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \\ B(z) = \sum_{N=N_0}^{\infty} B_N(-z)^N, \quad B_N = \frac{W_N}{\Gamma(N+b_0)} \end{aligned} \quad (12)$$

(b_0 — произвольный параметр) и последующего конформного преобразования

$$z = \frac{u}{(1-u)a}.$$

Тогда переразложение $B(z)$ по степеням u

$$\begin{aligned} B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} B_N(-z)^N \Big|_z = f(u) \rightarrow B(u) = \\ = \sum_{N=0}^{\infty} U_N u^N \end{aligned} \quad (13)$$

дает сходящийся ряд с коэффициентами

$$\begin{aligned} U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N \frac{B_K}{a^K} (-1)^K C_{N-1}^{K-1}, \\ N \geq 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Асимптотика коэффициентов U_N при больших N

$$\begin{aligned} U_N = U_{\infty} N^{\alpha-1}, \quad N \rightarrow \infty, \\ U_{\infty} = \frac{W_{\infty}}{a^{\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)} \end{aligned} \quad (15)$$

связана с асимптотикой $W(g)$ в области сильной связи:

$$W(g) = W_{\infty} g^{\alpha}, \quad g \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Интерполяция коэффициентной функции проводится с помощью формулы

$$\begin{aligned} W_N = ca^N N^{\tilde{b}} \Gamma(N+b-\tilde{b}) \left\{ 1 + \frac{A_1}{N-\tilde{N}} + \right. \\ \left. + \frac{A_2}{(N-\tilde{N})^2} + \dots + \frac{A_K}{(N-\tilde{N})^K} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

путем обрыва ряда и выбора коэффициентов A_K из соответствия с известными значениями коэффициентов $W_{L_0}, W_{L_0+1}, \dots, W_L$, где L_0 не обязательно совпадает с N_0 . Если не оговорено особо, используется оптимальное значение $\tilde{b} = b - 1/2$ [12]; параметр \tilde{N} используется для варьирования интерполяционной процедуры. Коэффициенты U_N при $N \leq N_{av} \approx 20$ вычисляются непосредственно по формуле (14), а затем продолжают по степенному закону (15) во избежание катастрофического роста ошибок [7, 12]. Таким образом, последовательная реализация алгоритма с необходимостью требует нахождения асимптотики сильной связи для $W(g)$ (см. (16)). Для суммирования ряда в области $g \sim 1$ большой точности в определении этой асимптотики не требуется, и ее более или менее детальный анализ преследует перспективные приложения к области сильной связи [7].

По сравнению с предыдущими работами [7, 12] была дополнительно отработана методика оценки ошибок в области $g \sim 1$. В качестве тестового примера использовался ряд для ангармонического осциллятора с использованием первых девяти коэффициентов. Наилучшая точность в определении асимптотики сильной связи достигается при оптимальном значении $\tilde{N} = \tilde{N}_{opt} \approx 5.5$ [12]. Реальный смысл этого

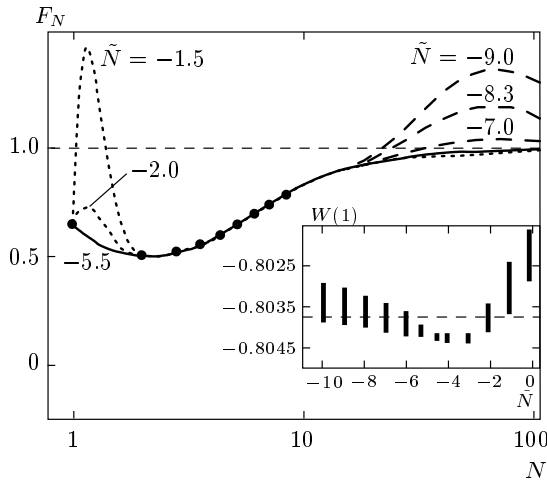


Рис. 1. Форма интерполяционных кривых для ангармонического осциллятора при различных \tilde{N} . На вставке — результаты суммирования ряда для $g = 1$; неопределенность результатов при фиксированном \tilde{N} связана с варьированием b_0 , не выводящим за пределы неопределенности найденной асимптотики сильной связи; горизонтальная штриховая линия на вставке — точное значение. Параметр $N_{av} = 22$

значения выясняется при визуальном рассмотрении интерполяционных кривых (рис. 1) для приведенной коэффициентной функции

$$F_N = \frac{W_N}{W_N^{as}} = \frac{W_N}{ca^N N^{b-1/2} \Gamma(N + 1/2)}, \quad (18)$$

соответствующей оптимальной параметризации асимптотики с $\tilde{b} = b - 1/2$ [12]. При вариациях \tilde{N} вблизи \tilde{N}_{opt} на величину порядка единицы форма кривых почти не меняется; при существенном уменьшении \tilde{N} (для значений $\tilde{N} \lesssim -8$) возникает немонотонность в выходе F_N на предельное значение $F_\infty = 1$; при существенном увеличении \tilde{N} (для значений $\tilde{N} \gtrsim -2$) возникает резкий выброс при нецелых значениях N (рис. 1). Эти наблюдения позволяют выделить множество «естественных» интерполяций $-8.3 \leq \tilde{N} \leq -2.0$: для них немонотонность кривых при больших N находится на уровне отличия последней известной точки F_L от 1, а выбросы при нецелых N малы по сравнению с характерной величиной F_N . Конкретный выбор этих ограничений не очень критичен⁴⁾, и их разумная

⁴⁾ Амплитуда максимумов возрастает при изменении \tilde{N} очень резко, тогда как результаты суммирования зависят от \tilde{N} сравнительно плавно; поэтому оценка неопределенности результатов не очень чувствительна к выбору ограничений и проводится достаточно объективно.

вариация мало влияет на результаты (см. вставку на рис. 1). Суммирование ряда для $g = 1$ на множестве «естественных» интерполяций приводит к неопределенности $-W(1) = 0.8033-0.8042$, которая замечает точное значение $-W(1) = 0.80377$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СУММИРОВАНИЯ ДЛЯ «ЕСТЕСТВЕННЫХ» ИНТЕРПОЛЯЦИЙ

3.1. Функция $\beta(g)$

Согласно (5), известны коэффициенты разложения β_N с $N = 1, 2, \dots, 6$. Интерполяция по формуле (17) с использованием всех коэффициентов ($L_0 = 1, L = 6$) выявляет следующее: во-первых, интерполяционные кривые для всех \tilde{N} относятся к числу недопустимых в смысле разд. 2, т. е. имеют существенные выбросы при нецелых N или существенную немонотонность при больших N ; во-вторых, попытка восстановления асимптотики сильной связи приводит к неудовлетворительным результатам: картина минимумов χ^2 [12] оказывается нечеткой и трудно интерпретируемой. Причину этого мы заподозрили в том, что значение F_N с $N = 1$ не лежит на гладкой кривой, получаемой аналитическим продолжением с точек $N = 2, 3, 4, \dots$. Такая ситуация заведомо имеет место в схеме размерной ренормировки, когда $\beta(g)$ имеет вид $-\epsilon g + \beta_0(g)$ для пространства размерности $d = 4 - \epsilon$, а функция $\beta_0(g)$ относится к четырехмерному пространству (ее разложение начинается с g^2 , а коэффициенты не зависят от ϵ). Результат (5) относится к другой ренормировочной схеме, но аналогичная ситуация по-прежнему возможна. Это приводит к необходимости выбирать значение $L_0 = 2$, т. е. не учитывать при интерполяции первую точку. В общем случае возможность возникновения таких ситуаций ясна из процедуры суммирования по Зоммерфельду–Ватсону [12, разд. 8.3]: функция $\mathcal{W}(z)$, являющаяся аналитическим продолжением W_N на комплексную плоскость ($\mathcal{W}(N) = W_N, N = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$), имеет особую точку при $z = \alpha$, где α — показатель асимптотики сильной связи (см. (16)). Если α оказывается больше, чем N_0 , то следует положить

$$W(g) = W_{N_0} g^{N_0} + \dots + W_{N_1} g^{N_1} + \tilde{W}(g) \quad (19)$$

(где номер N_1 выбран из условия $N_1 \leq \alpha < N_1 + 1$) и суммировать ряд для $\tilde{W}(g)$, после чего добавить к сумме выделенные первые члены. Из сказанного ясно, что для функции $\beta(g)$ нужно принять $N_1 = 1, L_0 = 2$. После этого результаты для асимптотики оказываются вполне удовлетворительными (рис. 2)

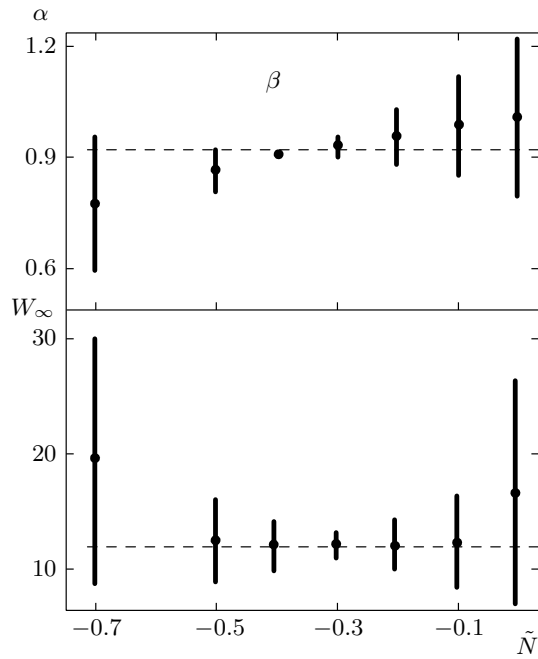


Рис. 2. Параметры асимптотики сильной связи для функции $\beta(g)$. Неопределенность результатов для фиксированного \tilde{N} определялась по методике работы [12]; рабочий интервал $21 \leq N \leq 40$

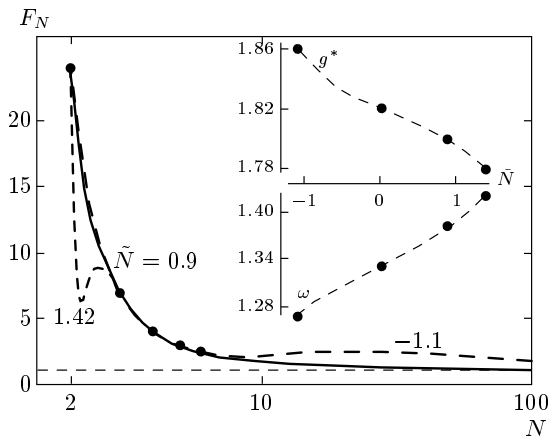


Рис. 3. Интерполяционные кривые для функции $\beta(g)$. На вставке — результаты для g^* и ω

и приводят к значению $\alpha \approx 1$, что *a posteriori* оправдывает использованное разбиение (19); при этом существенно, что отличие W_∞ от $-W_1$ лежит за пределами ошибки, так что асимптотика $W(g) \propto g$ справедлива для всей функции $W(g)$.

На рис. 3 представлены интерполяционные кривые для F_N , полученные для различных \tilde{N} . Легко

видеть, что «естественным» интерполяциям соответствует интервал $-1.1 < \tilde{N} < 1.42$ и суммирование ряда дает для корня уравнения $\beta(g^*) = 0$ результат

$$g^* = 1.78-1.86. \tag{20}$$

Обычно его сравнивают со значением 1.754, полученным из анализа высокотемпературных рядов [14] (см. таблицу). Такое сопоставление полезно для ориентировки, но буквального совпадения результатов ожидать не следует. Известно, что ренормгрупповые функции зависят от выбора ренормировочной схемы [15] и лишь наблюдаемые величины (критические индексы) являются инвариантными. Результат (20) справедлив для теоретико-полевой модели (1) с изотропным обрезанием по импульсам $|k| < \Lambda$, тогда как высокотемпературные ряды строятся для решеточных моделей, в которых эффективное обрезание по импульсам анизотропно. Такие детали физически малосущественны, но именно они определяют различие ренормировочных схем. Как будет видно в дальнейшем, результаты для критических индексов не указывают на желательность какого-либо систематического сдвига g^* — так при уменьшении g^* улучшаются результаты для γ и $\eta^{(2)}$, но ухудшаются результаты для η ; поэтому центральное значение $g^* = 1.82$ выглядит идеальным компромиссом.

Численное дифференцирование $\beta(g)$ дает результаты для индекса ω , приведенные в таблице: они согласуются со значением $\omega = 4/3$, возникающим в одном из вариантов конформной теории поля, хотя имеются и другие возможности (см. обсуждение в [9]).

3.2. Функция $\eta(g)$

Согласно выражению (6), разложение для $\eta(g)$ начинается с g^2 . Интерполяция с $L_0 = 2$ (т.е. с использованием всех коэффициентов), предполагающая гладкость F_N при $N \geq 2$, приводит к неудовлетворительным (в смысле разд. 2) результатам. Для $L_0 = 3$ удовлетворительные интерполяционные кривые получаются при $1.2 < \tilde{N} < 2.9$ (рис. 4a); при этом параметры асимптотики сильной связи (рис. 5a)

$$\begin{aligned} \alpha &= 2.01 \pm 0.01, \\ \tilde{W}_\infty &= 0.051 \pm 0.007 \end{aligned} \tag{21}$$

указывают на существование особенности $W(z)$ при $z \approx 2$, что подтверждает правильность отбрасывания первой точки. Результаты суммирования ряда на множестве естественных интерполяций показаны

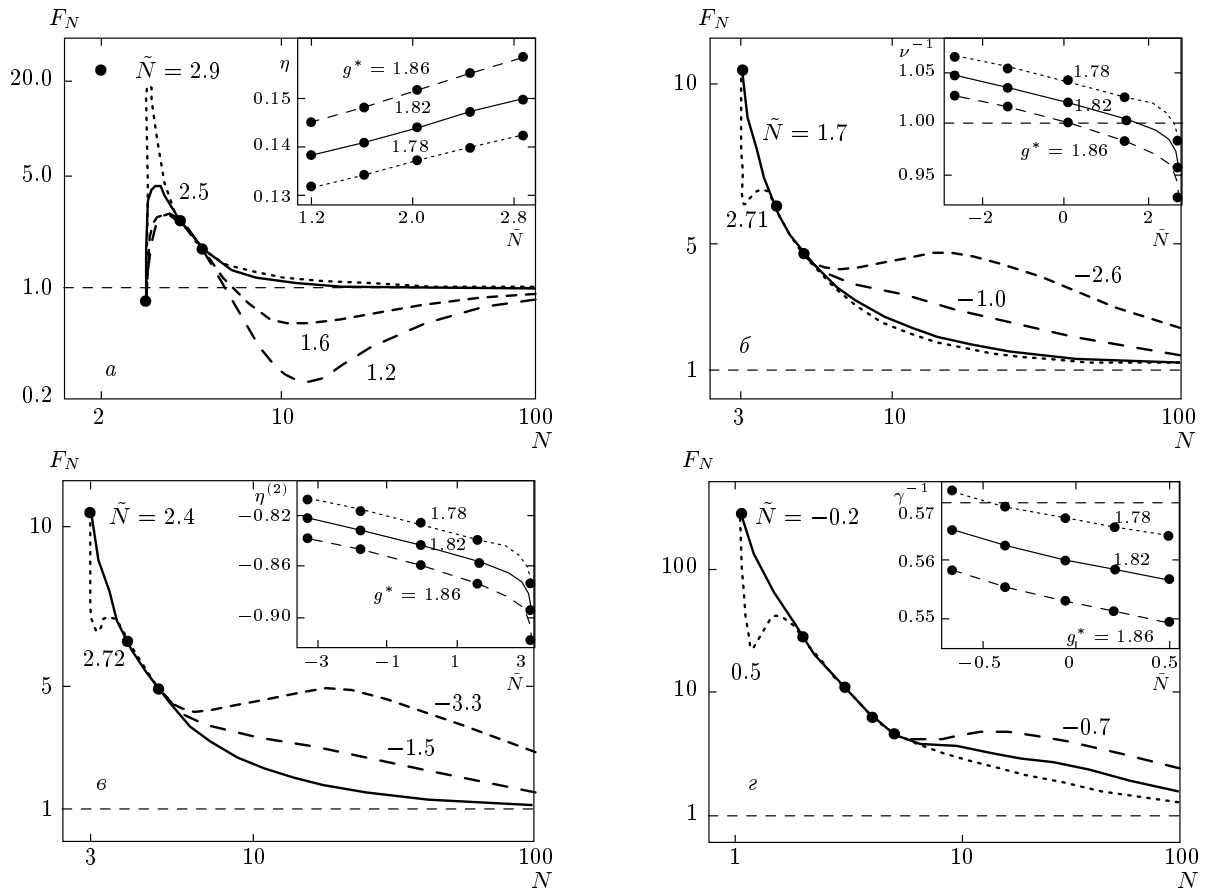


Рис. 4. Интерполяционные кривые для функций $\eta(g)$, $\nu^{-1}(g)$, $\eta^{(2)}(g)$ ($L_0 = 3$) и $\gamma^{-1}(g)$ ($L_0 = 1$). На вставках — результаты суммирования при $g = g^*$

на вставке к рис. 4а. Совокупная неопределенность результатов

$$\eta = 0.131\text{--}0.158 \quad (22)$$

оказывается довольно малой и не замечает точного значения $\eta = 0.25$.

3.3. Функции $\eta^{(2)}(g)$, $\nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$

Интерполяция с $L_0 = 1$ приводит к очень неопределенным результатам для асимптотики сильной связи, поэтому естественно попробовать интерполяцию с $L_0 = 2$; тогда в соответствии с рис. 5б,в,г имеем

$$\eta^{(2)}(g) : \quad \alpha = 0.99 \pm 0.01, \quad \tilde{W}_\infty = 0.47 \pm 0.03, \quad (23)$$

$$\nu^{-1}(g) : \quad \alpha = 0.985 \pm 0.115, \quad \tilde{W}_\infty = 0.345 \pm 0.235, \quad (24)$$

$$\gamma^{-1}(g) : \quad \alpha = 0.955 \pm 0.105, \quad \tilde{W}_\infty = 0.22 \pm 0.11. \quad (25)$$

Естественные интерполяции соответствуют интервалам $-2.5 < \tilde{N} < 1.8$, $-4.6 < \tilde{N} < 1.7$ и

$-3.3 < \tilde{N} < 1.7$ соответственно для функций $\eta^{(2)}(g)$, $\nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$, после чего суммирование дает

$$\eta^{(2)} = -(0.835\text{--}0.879), \quad \nu^{-1}(g) = 0.980\text{--}1.060, \quad (26)$$

$$\gamma^{-1}(g) = 0.536\text{--}0.570.$$

Как ясно из выражения (4), асимптотики рассматриваемых функций не противоречат друг другу лишь в пренебрежении функцией $\eta(g)$. Это связано с тем, что коэффициенты разложения $\eta(g)$ значительно меньше, чем у других функций, поэтому различие приведенных коэффициентных функций для $\eta^{(2)}(g)$, $\nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$ оказывается очень малым и ускользает при приближенном анализе. Функция $\eta(g)$ мала при $g \sim 1$, но имеет более быструю асимптотику в области сильной связи (см. (21)). Поэтому приблизительно линейное поведение $\eta^{(2)}(g)$, $\nu^{-1}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$ имеет место при не слишком больших g , тогда как при увеличении g оно начинает искажаться за счет функции $\eta(g)$.

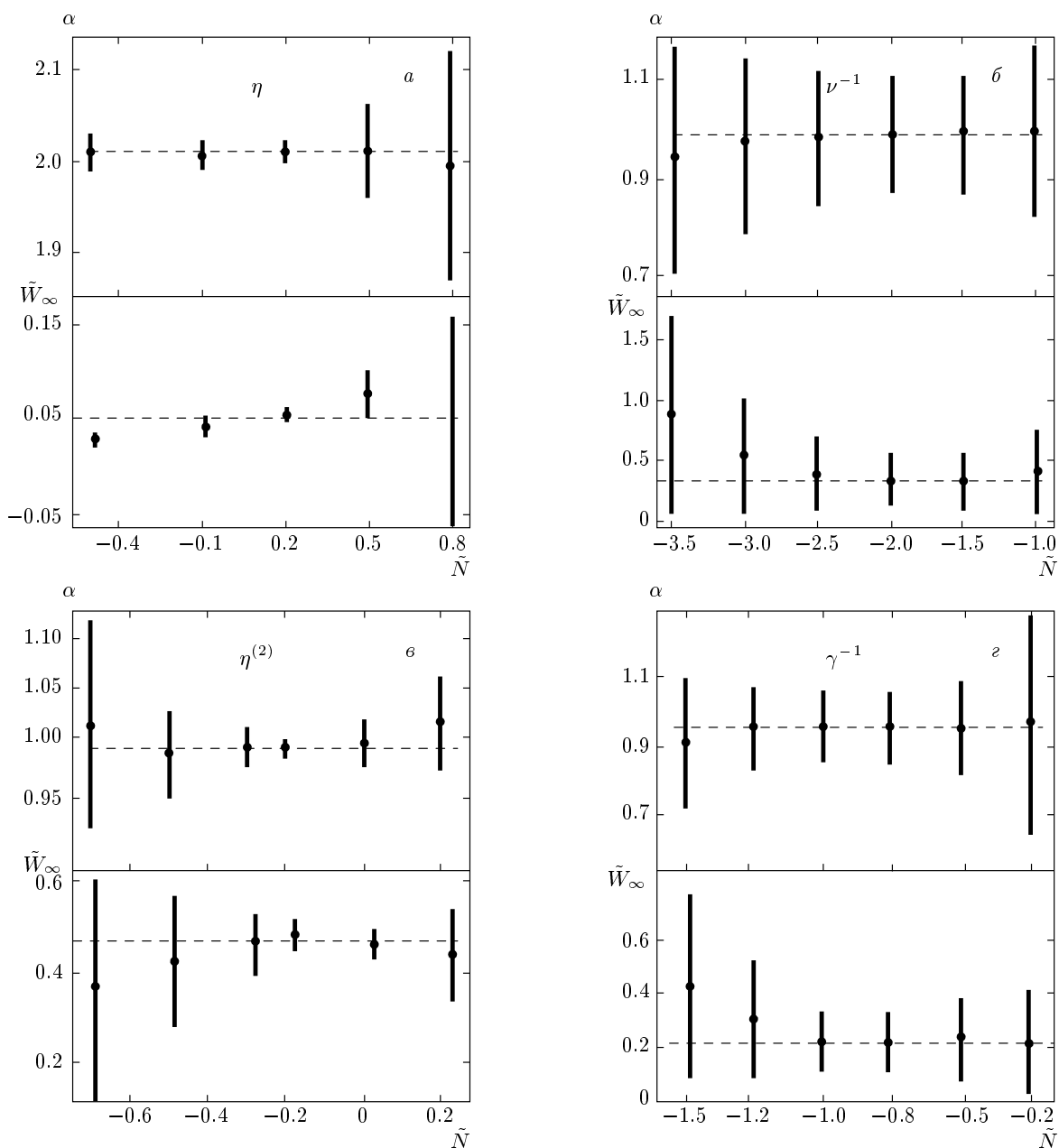


Рис. 5. Параметры асимптотики сильной связи для функций $\eta(g)$, $\nu^{-1}(g)$, $\eta^{(2)}(g)$, $\gamma^{-1}(g)$; использовался интервал $N_{av} \leq N \leq 40$, где соответственно $N_{av} = 20, 19, 18, 19$

Согласно выражению (4), к линейному в целом поведению $\eta^{(2)}(g)$ и $\nu^{-1}(g)$ (см. (23), (24)) возникают добавки, пропорциональные g^2 с малыми коэффициентами, так что в $\mathcal{W}(z)$ имеются слабые сингулярности при $z \approx 2$, делающие незаконной интерполяцию с $L_0 = 2$. При $L_0 = 3$ интерполяционные кривые имеют удовлетворительный вид для $-3.3 < \tilde{N} < 2.72$ в случае функции $\eta^{(2)}(g)$ и для $-2.6 < \tilde{N} < 2.71$ в

случае $\nu^{-1}(g)$ (рис. 4б,в). Результаты суммирования ряда представлены на вставках к рис. 4б,в и имеют неопределенности

$$\eta^{(2)} = -(0.814-0.915), \quad \nu^{-1}(g) = 0.930-1.065. \quad (27)$$

Функция $\gamma^{-1}(g)$ имеет приблизительно линейное поведение при $g \sim 1$, тогда как при больших g оно

сменяется выходом на константу или убыванием⁵⁾ (см. (4)); это указывает на отсутствие особенностей в коэффициентной функции при $N \geq 1$. Поэтому интерполяцию нужно проводить с $L_0 = 1$, что дает удовлетворительные результаты при $-0.7 < \tilde{N} < 0.5$ (рис. 4з); тогда суммирование ряда дает

$$\gamma^{-1} = 0.548-0.573. \quad (28)$$

Сопоставление выражения (26) с выражениями (27), (28) показывает, что согласование асимптотик приводит к некоторому сдвигу центральных значений для индексов и более адекватной оценке точности. На множестве естественных интерполяций неопределенность ν^{-1} и γ^{-1} (см. (27), (28)) замечает точные значения ($\nu^{-1} = 1$, $\gamma^{-1} = 4/7 \approx 0.5714$), и, следовательно, принципиальной проблемы согласования результатов суммирования с точными не существует. Однако для η и $\eta^{(2)}$ отклонение от точных значений (0.25 и -0.75, соответственно) выходит за пределы ошибки (см. (22), (27)) и существует техническая проблема, связанная с тем, что «естественные» интерполяции для различных (взаимозависимых) функций не являются вполне согласованными.

4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Посмотрим, можно ли обеспечить точные значения для всех индексов при разумном (и согласованном) выборе коэффициентных функций.

Начнем с функции $\eta(g)$, первые коэффициенты разложения для которой имеют осциллирующий характер (рис. 4а), поэтому возможность их правильной интерполяции с асимптотикой высоких порядков с самого начала представляется сомнительной. Согласно разд. 3, для используемого там однопараметрического множества интерполяций точного значения $\eta = \eta(g^*)$ получить не удастся. Проведем простейшее усложнение процедуры и используем двухпараметрическое семейство интерполяций: тогда с помощью одного параметра можно обеспечить точное значение η , а второй использовать для придания интерполяционной кривой максимально «естественного» вида. Наилучшие из полученных результатов представлены на рис. 6а. Сплошная кривая получена на основе формулы (17) при подборе двух параметров \tilde{N} и \tilde{b} и соответствует значениям $\tilde{N} = -2.0$, $\tilde{b} = -7.506$. Штриховая кривая получена при подборе \tilde{N} и первого неизвестного коэффициента W_6

(при $\tilde{b} = b - 1/2$) и соответствует значениям $\tilde{N} = 2.0$ и $W_6 = 0.0787$. В последнем случае для асимптотики сильной связи получаются четкие и легко интерпретируемые результаты, соответствующие $\alpha \approx 2$, $W_\infty \approx 0.7$ и подтверждающие правильность выбора L_0 ⁶⁾. Обе полученные кривые (рис. 6а) оказались аналогичными и характеризуются осцилляциями с амплитудой того же масштаба, что и осцилляции первых коэффициентов: на наш взгляд, такое поведение является вполне допустимым.

В качестве второй независимой функции примем $\nu^{-1}(g)$, для которой точное значение при $g^* = 1.82$ достигается для одной из естественных интерполяций, соответствующей $\tilde{N} = 1.77$ (рис. 6б). Принимая эту интерполяционную кривую для $\nu^{-1}(g)$ и сплошную кривую на рис. 6а для $\eta(g)$, можно воспользоваться соотношениями (4) и получить коэффициенты разложения для $\eta^{(2)}(g)$ и $\gamma^{-1}(g)$, представленные на рис. 6в,г; при суммировании ряда они приводят к точным значениям $\eta^{(2)}$ и γ^{-1} . Согласно выражению (4), коэффициентная функция для $\eta^{(2)}(g)$ является суперпозицией плавной зависимости для $\nu^{-1}(g)$ (рис. 6б) и сильно осциллирующей зависимости для $\eta(g)$ (рис. 6а), что приводит к ее перегибу (рис. 6в) (или немонотонности, если допускать на рис. 6а более сильные осцилляции). Такой перегиб плохо описывается простейшими интерполяциями, что и приводило в разд. 3 к отлнчению $\eta^{(2)}$ от точного значения. Аналогичный перегиб (рис. 6г) или немонотонность (рис. 4з) ожидается для функции $\gamma^{-1}(g)$.

Таким образом, точные значения всех четырех величин η , ν , $\eta^{(2)}$ и γ могут быть достигнуты при вполне разумном выборе коэффициентных функций. Поэтому предполагать существование сингулярных вкладов в ренормгрупповые функции [9–11] нет необходимости.

5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СТАТУС СИНГУЛЯРНЫХ ВКЛАДОВ

Предположение о непертурбативных вкладах с особенностью в нуле (типа $\exp(-c/g)$) [9] противоречит общим принципам теории расходящихся рядов. Действительно, непротиворечивая работа с расходящимися рядами возможна лишь в рамках некоторой аксиоматики, в которой борелевская процедура суммирования ряда принимается фактически по определению [7]. Если это определение принято, то никакие

⁵⁾ Убывание возможно в случае, если асимптотика $\eta^{(2)}(g)$ является чисто линейной и не содержит добавок, пропорциональных g^2 , что выглядит вполне вероятным ввиду малой неопределенности в (23).

⁶⁾ Использовалась интерполяция с $L_0 = 3$; при $L_0 = 2$ подходящих кривых получить не удавалось — они имели сильные выбросы в интервале $2 < N < 3$, указывая на наличие полюса при $N \geq 2$.

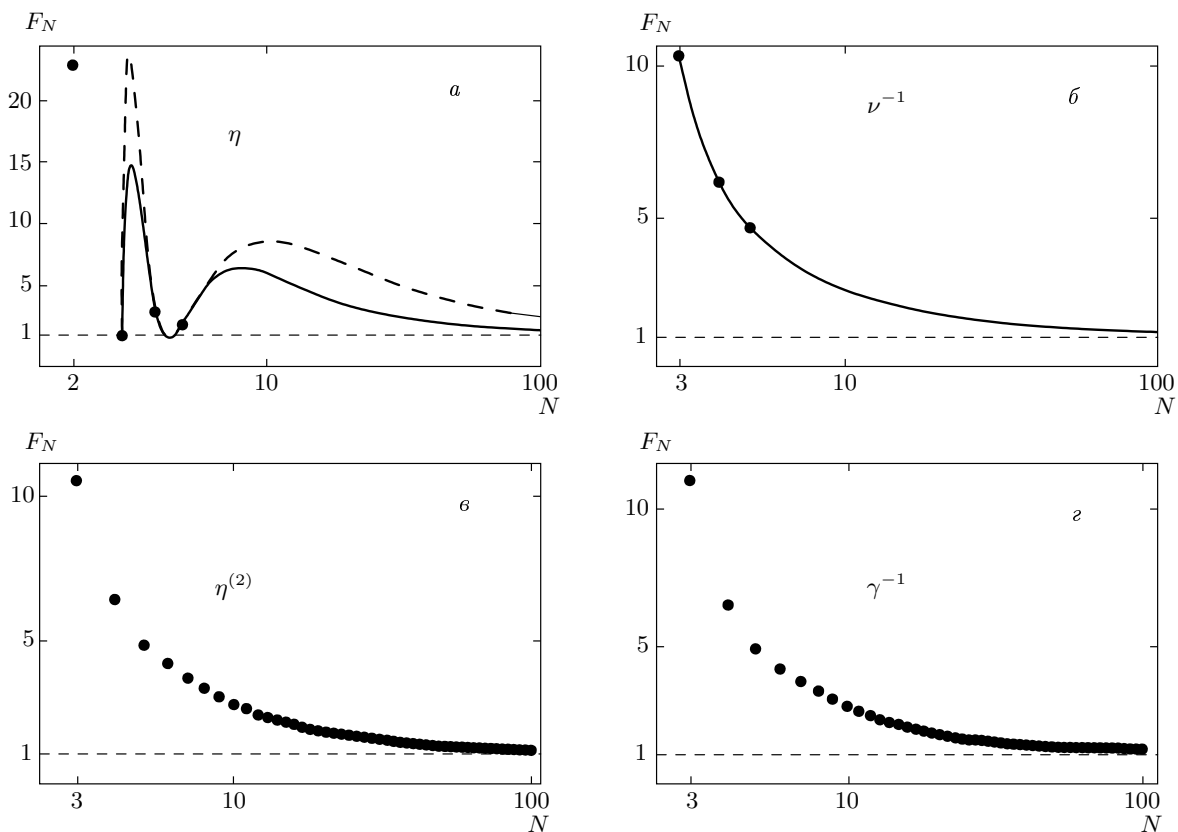


Рис. 6. Коэффициентные функции, приводящие к точным значениям индексов

добавки к борелевскому интегралу типа $\exp(-c/g)$ в явном виде делаться не должны — такие вклады уже должным образом учтены в определении суммы. Проблемы возникают лишь в ситуациях, когда борелевский интеграл плохо определен [7], но в рассматриваемом случае это не имеет места — в теории φ^4 все особенности борелевских образов лежат на отрицательной полуоси [16]. Конечно, с формальной точки зрения можно отрицать возможность непротиворечивой работы с расходящимися рядами и не принимать указанную аксиоматику, но такую позицию трудно ожидать от исследователей, занимающихся данным направлением.

Еще более сомнительной выглядит возможность вкладов, имеющих сингулярность в неподвижной точке g^* [10, 11], по следующим причинам.

1. В вильсоновской картине [17, 18] ренормгрупповые функции связывают свойства конечных блоков и не должны иметь сингулярностей ввиду отсутствия фазовых переходов в конечных системах. В общем случае регулярность ренормгрупповых функций является основным принципом современной фе-

номенологии, заменяющей феноменологию теории Ландау: если последняя объясняла сингулярное критическое поведение исходя из аналитичности термодинамического потенциала, то первая исходит из регулярности ренормгрупповых функций. Неаналитичность последних означает неудовлетворительность современной феноменологии, что противоречит ее очевидным успехам.

2. Конструктивные оценки свидетельствуют о степенном поведении борелевских образов на бесконечности (разд. 3): в этом случае борелевский интеграл (12) определяет функцию, регулярную на положительной полуоси.

3. По современным представлениям критические индексы непрерывно зависят от размерности пространства d , что, в частности, обеспечивает успех ϵ -разложения Вильсона [17, 18]. В схеме размерной регуляризации функция Гелл-Манна–Лоу для $d = 4 - \epsilon$ имеет вид

$$\beta(g) = -\epsilon g + \beta_0(g),$$

где $\beta_0(g)$ не зависит от ϵ . Неподвижную точку мож-

но плавно изменять, меняя ϵ , тогда как $\beta_0(g)$ не может быть сингулярна в каждой точке.

4. Конструктивная аргументация работ [10, 11] основана на сопоставлении поправок к скейлингу, следующих из общего (многопараметрического) варианта вильсоновской ренормгруппы, и аналогичных поправок в теоретико-полевой ренормгруппе. Однако такое сопоставление заведомо некорректно, так как теоретико-полевые модели обладают строгой перенормируемостью на уровне двух параметров и поправки к скейлингу, связанные с эволюцией других параметров, в них попросту отсутствуют. Попытка их насильственного воспроизведения как раз и приводит к необходимости предположить сингулярность ренормгрупповых функций [10, 11]⁷⁾.

5. Единственный реальный факт, к которому апеллируют авторы работ [10, 11], связан с $1/n$ -разложением. Поправка первого порядка по $1/n$ к β -функции имеет вид суммы интегралов от регулярных функций, которые могут иметь особенности лишь в случае их расходимости. Согласно работам [10, 11], такие расходимости действительно имеют место ввиду наличия малых знаменателей и приводят к сингулярностям типа $(g - g^*)^\theta$. В действительности этот результат связан лишь с некорректностью разложения подынтегральных выражений по $1/n$: наличие малых знаменателей показывает, что реальный параметр разложения не является малым в некоторой части области интегрирования, поэтому в этой области ограничение первым порядком по $1/n$ незаконно⁸⁾. Более аккуратное вычисление безусловно приведет к обрезанию найденных в работах [10, 11] сингулярностей и восстановлению аналитичности при $g = g^*$.

Из сказанного ясно, что предположение о сингулярных вкладах [9–11] противоречит общим принципам ренормгруппового подхода и является совершенно необоснованным в теоретическом смысле. Признание их существования означает, что метод теоретико-полевой ренормгруппы не дает принципиального решения проблемы критических индексов, поскольку они не могут быть вычислены с произвольно высокой точностью. На наш взгляд,

⁷⁾ В аргументации работ [10, 11] имеется правильная оговорка: «Barring miracles, the approach [to the fixed point] should have nonzero components along any of the irrelevant directions». Но теоретико-полевые модели как раз относятся к категории «miracles» и не имеют проекций на «irrelevant directions», поскольку обладают уникальным свойством — строгой перенормируемостью на уровне двух параметров.

⁸⁾ Возможно это означает, что в некоторых ренормировочных схемах ренормгрупповые функции (в отличие от критических индексов) не имеют регулярного разложения по $1/n$.

это слишком сильное предположение, в котором фактически нет необходимости: согласно проведенному анализу, точные значения индексов могут быть получены при разумном выборе коэффициентных функций.

Авторы признательны А. И. Соколову за привлечение внимания к данной проблеме и консультации по вопросам, связанным с исходной информацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-17541).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
3. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
4. E. Brezin and G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **19**, 269 (1978).
5. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1351 (1976); *Phys. Rev. B* **17**, 1365 (1978).
6. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95 (1977); *Phys. Rev. B* **21**, 3976 (1980).
7. И. М. Суслов, ЖЭТФ **127**, 1350 (2005).
8. R. Guida and J. Zinn-Justin, *J. Phys. A* **31**, 8103 (1998).
9. Е. В. Орлов, А. И. Соколов, ФТТ **42**, 2087 (2000).
10. P. Calabrese, M. Caselle, A. Celi, A. Pelissetto, and E. Vicari, *J. Phys. A* **33**, 8155 (2000).
11. A. Pelissetto and E. Vicari, *Nucl. Phys. B* **519**, 626 (1998); *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **73**, 775 (1999); *Phys. Rep.* **368**, 549 (2002); M. Caselle, A. Pelissetto, and E. Vicari, E-print archives, hep-th/0010228.
12. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
13. P. Calabrese, E. V. Orlov, D. V. Pakhnin, and A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B* **70**, 094425 (2004).
14. G. A. Baker, *Phys. Rev. B* **15**, 1552 (1977); S. Y. Zinn, S. N. Lai, and M. E. Fisher, *Phys. Rev. E* **54**, 1176 (1996); P. Butera and M. Comi, *Phys. Rev. B* **54**, 15828 (1996).
15. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).
16. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
17. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, Мир, Москва (1975).
18. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).