

СПИНОВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ КУПРАТОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОГО ФРУСТРИРОВАННОГО АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА. РОЛЬ ПЕРЕНОРМИРОВОК СПИНОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЙТРОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

*А. В. Михеенков, А. Ф. Барабанов**

*Институт физики высоких давлений Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 23 января 2007 г.

Экспериментальные данные по спиновой восприимчивости ВТСП-купратов воспроизводятся на основе сферически-симметричного подхода для фрустрированной модели Гейзенберга. Учет действительных и мнимых перенормировок спиновых функций Грина позволяет объяснить эволюцию спектра спиновых возбуждений $\omega(q)$ и восприимчивости $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ в диапазоне от диэлектрика до оптимального допирования. В пределе малой фрустрации, отвечающем слабодопированному режиму, воспроизводятся седловая особенность $\omega(q)$ и скейлинг $\chi_{2D}(\omega) = \int d\mathbf{q} \operatorname{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$, получено аналитическое выражение для скейлинговой функции. В режиме большой фрустрации (оптимальное допирование) демонстрируется страйп-сценарий, что позволяет получить пик $\chi_{2D}(\omega)$ в области $\omega \sim 60$ мэВ.

PACS: 74.72.-h, 71.27.+a, 75.20.-g

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент демонстрирует широкое разнообразие спиновых свойств купратов в зависимости от допирования. Объяснение этих свойств, очевидно, должно предшествовать решению вопроса о механизме высокотемпературной сверхпроводимости и в значительной мере обуславливать его.

Экспериментальное изучение спинового отклика в купратах, главным образом с помощью нейтронного рассеяния, составляет предмет огромного числа статей и значительного количества обзоров (см., например, [1–5]). Существенный прогресс был достигнут в конце 90-х — начале 2000-х годов благодаря получению больших монокристаллических образцов и использованию так называемых горячих источников (hot source) нейтронов, которые позволяют изучить спектр спиновых возбуждений с большой величиной обмена $J \sim 150$ мэВ. Лучше всего изучены одноплоскостные лантановые и двухплоскостные иттриевые соединения, в которых спиновая восприимчивость

детально исследована в диапазоне от нулевого до оптимального допирования.

Общепризнано, что решающим (в том числе и для спиновых свойств) структурным элементом купратов является плоскость CuO_2 . Нейтронные эксперименты это вполне подтверждают — спиновые свойства $\text{La}_{2-x}(\text{Sr}, \text{Ba})_x\text{CuO}_4$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ абсолютно аналогичны, за исключением очевидных различий, вызванных наличием второй плоскости. Однако теория свойств допированной плоскости CuO_2 пока далека от завершения. Настоящая работа представляет собой попытку объяснения некоторых свойств магнитной подсистемы на основе фрустрированной двумерной модели Гейзенберга. Отметим сразу, что далее мы рассматриваем температуры выше T_c , т. е. только несверхпроводящее состояние.

В главных чертах результаты нейтронных экспериментов в купратах сводятся к следующему. Основная величина, извлекаемая из эксперимента, — мнимая часть спиновой восприимчивости $\chi(\mathbf{q}, \omega)$, она только бозевским множителем отличается от непосредственно измеряемого динамического структур-

*E-mail: abarabnov@mtu-net.ru, abarab@ns.hppi.troitsk.ru

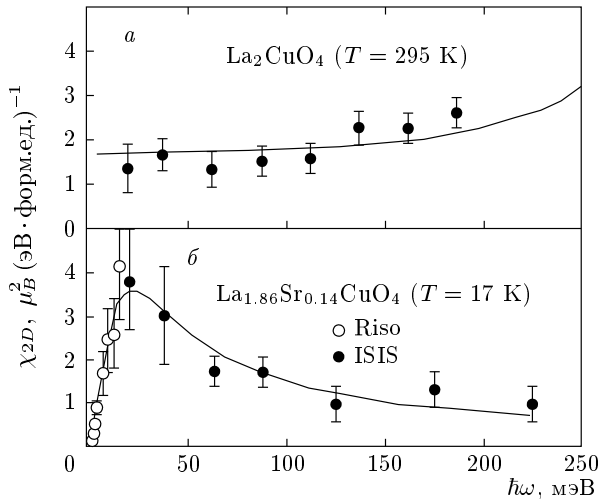


Рис. 1. Характерное изменение экспериментальной проинтегрированной восприимчивости $\chi_{2D}(\omega)$ с ростом допирования (из работы [7]). Верхняя кривая — диэлектрик La_2CuO_4 , нижняя — допирование, близкое к оптимальному, $\text{La}_{1.86}\text{Sr}_{0.14}\text{CuO}_4$ ($T_c = 35$ K). В скобках указана температура измерения. Темные и светлые точки получены на разных нейтронных источниках

ного фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$:

$$S(\mathbf{q}, \omega, T) = (m + 1) \text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega, T), \quad (1)$$

$$m = \left(e^{\omega/T} - 1 \right)^{-1}.$$

В большей части экспериментальных работ анализируется также «локальная восприимчивость» $\chi_{2D}(\omega)$ — мнимая часть спиновой восприимчивости, проинтегрированная по квазиимпульсу:

$$\chi_{2D}(\omega, T) = \int d\mathbf{q} \text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega, T). \quad (2)$$

Двумерная геометрия купратов позволяет провести это интегрирование прямо в ходе измерения [1]. Вопрос о полноте этого интегрирования не решен [6], однако хорошая воспроизводимость результатов позволяет считать, что все существенные вклады по зоне Бриллюэна учтены.

В области нулевого и малого допирования величина $\chi_{2D}(\omega)$ в широком диапазоне частот практически постоянна, см. рис. 1. Величина $\chi_{2D}(\omega)$ начинает расти при высоких частотах для $\omega \gtrsim 150$ мэВ [7, 8]. То и другое слабо зависит от температуры. При низких частотах $\chi_{2D}(\omega)$ меняется для частот, меньших щели в спектре спиновых возбуждений (последнее не видно на рис. 1 из-за ограниченного числа частот-

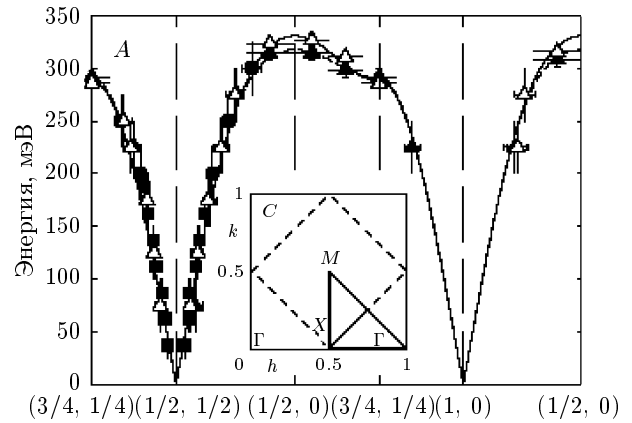


Рис. 2. Экспериментальный спектр спиновых возбуждений для La_2CuO_4 из работы [13]. На вставке показаны направления в четверти полной зоны Бриллюэна (все цифры в единицах 2π), вдоль которых представлен спектр. $\mathbf{M} \equiv \mathbf{Q} = (\pi, \pi)$, $\mathbf{X} = (0, \pi), (\pi, 0)$, $\Gamma = (0, 0)$

ных точек), и ее поведение существенно зависит от температуры.

Оказывается, что зависимость χ_{2D} от ω и T хорошо (а при очень малом допировании — практически идеально) укладывается в эмпирический скейлинговый закон [1, 9–12]

$$\frac{\chi_{2D}(\omega, T)}{\chi_{2D}(\omega, T \rightarrow 0)} = f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (3)$$

где скейлинговая функция

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctg(Ax + Bx^3),$$

A и B зависят от допирования, причем при нулевом и малом допировании $B \gg A \sim 1$, а с ростом допирования коэффициент B резко убывает.

При не слишком большом допировании спиновый отклик демонстрирует хорошие квазичастичные свойства — при фиксированном квазиимпульсе $\text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$ проявляет острый частотный пик.

Сам по себе спектр спиновых возбуждений исследован во всей зоне Бриллюэна только в диэлектрическом пределе [13]. Он качественно похож на спектр $2D$ -антиферромагнетика в приближении линейных спиновых волн, однако вблизи точки $\mathbf{q} = (\pi/2, \pi/2)$ наблюдается седловая особенность, см. рис. 2.

При увеличении концентрации дырок поведение восприимчивости $\chi_{2D}(\omega)$ радикально меняется. Ее пик, который при малом допировании приходится на область максимума спектра $\omega \gtrsim 200$ мэВ, с ростом допирования смещается вниз, опускаясь при оптимальном допировании до $\omega_0 \sim 35$ мэВ, см. рис. 1.

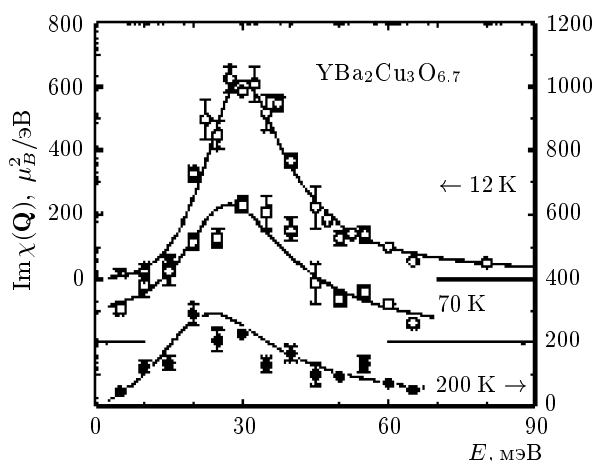


Рис. 3. Экспериментальные данные для квази-частичного пика мнимой части восприимчивости на антиферромагнитном векторе $\text{Im } \chi(\mathbf{Q}, \omega)$ ($\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$) из работы [14]. Показаны кривые, отвечающие акустической ветви спектра (odd channel) для двухплоскостного $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.7}$ ($T_c = 67$ K). Температура измерения указана возле линий (верхняя кривая — в сверхпроводящем состоянии)

Приблизительно в этой же области частот находится максимум $\text{Im } \chi(\mathbf{Q}, \omega)$, т. е. квазичастичный пик на антиферромагнитном векторе $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ [14], см. рис. 3 (в стандартных зонных обозначениях это точка M). Оба пика имеют ширину около ω_0 . Отметим сразу, что существующие теории воспроизводят пик $\text{Im } \chi(\mathbf{Q}, \omega)$, однако, насколько нам известно, ни одна из них не приводит к объяснению поведения $\chi_{2D}(\omega)$. Некоторые другие экспериментальные детали будут упомянуты в дальнейших разделах статьи.

В самое последнее время еще одна черта спектра привлекает особый интерес — вблизи точки \mathbf{Q} наблюдаются несоизмеримые пики слабой интенсивности [4, 5, 15–18] (см. рис. 4). Для объяснения этих пиков чаще всего привлекается страйп-сценарий. Однако вопрос остается открытым, и существуют попытки альтернативных объяснений.

Для объяснения основных свойств спиновой подсистемы купратов в настоящей работе предлагается подход, основанный на двумерной фрустрированной модели Гейзенберга. Ключевое предположение — аналогия между допированием в моделях со свободными носителями и фрустрацией в чисто спиновой модели. Это предположение физически естественно: движущаяся дырка разрушает магнитный порядок, в чисто спиновой модели то же самое происходит с ростом фрустрации. Кроме того, оно основано на сходном характере изменения спиновых кор-

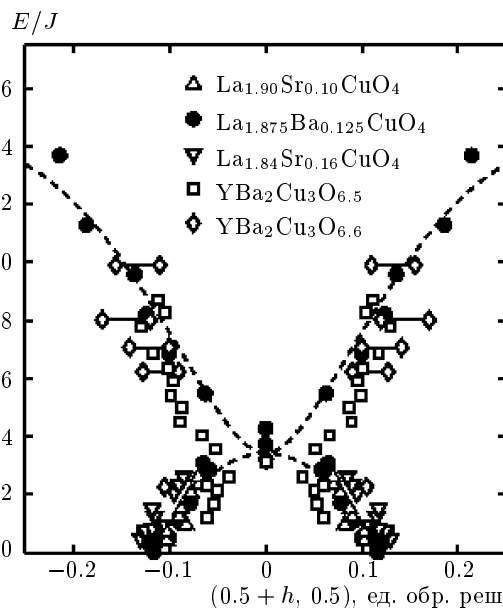


Рис. 4. Несоизмеримые пики в купратах (из обзора [4]). Нуль по горизонтали — точка $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$. Показан срез по направлению q_x . Верхняя кривая — срез симметричного купола, свисающего над \mathbf{Q} . Нижняя — несоизмеримые пики, которые наблюдаются только в показанном и перпендикулярном ему направлениях. Энергия нормирована на обменную константу родительского диэлектрика — $J = 146$ мэВ для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, $J = 106$ мэВ для $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$. Экспериментальные данные из работ [15–18]

реляторов в зависимости от фрустрации и от допирования [19]. Подчеркнем, что никаких строгих утверждений на этот счет не существует. Оказывается, однако, что чисто спиновая фрустрированная модель позволяет воспроизвести все основные свойства спиновой подсистемы купратов в диапазоне допирования от нулевого до оптимального.

Фрустрация в спиновой подсистеме ВТСП важна и сама по себе. Даже в диэлектрическом пределе отношение обмена на вторых соседях к обмену на первых оценивается примерно в $J_2/J_1 \sim 0.1$ [20]. Широко обсуждается роль фрустрации как движущей силы образования различных спин-жидкостных состояний. Считается, что в области $J_2/J_1 \sim 0.5$ (что отвечает рассмотренному в настоящей работе значению параметра фрустрации $p = J_2/(J_1 + J_2) \sim 0.3$) может иметь место квантовый фазовый переход [21]. Близкие значения параметра фрустрации возникают в последнее время при обсуждении страйп-сценария возникновения несоизмеримых пиков [22]. Упомянем, что чисто спиновая модель неоднократно ис-

пользовалась для анализа спинового отклика допированной плоскости CuO_2 (см., например, [23]).

Излагаемый здесь подход близок к подходам [24–27], основанным на методе функции памяти [28]. Однако в рамках метода функции памяти затруднительно получить явное аналитическое выражение для спектра спиновых возбуждений. А следствием этого являются трудности при вычислении самосогласованной спиновой восприимчивости.

В рамках же нашего подхода оказывается возможным аналитически, на основе явного выражения для спектра проанализировать такие экспериментальные эффекты, как скейлинг восприимчивости и постоянство $\chi_{2D}(\omega)$ в широком диапазоне частот, а также связать спиновый отклик с микроскопическими характеристиками системы — щелями в симметричных точках и затуханием.

Представляется, что наш подход выгодно отличается и от метода линейных спиновых волн, который также дает явный вид для спектра возбуждений [3, 29, 30, 34]. Однако этот подход справедлив только в диэлектрическом пределе, имеющиеся его реализации не учитывают затухания, применимы лишь при $T = 0$ и не являются самосогласованными.

План статьи следующий.

В разд. 2 излагается схема вычислений, сначала в среднеполевом приближении, а затем — с учетом действительной и мнимой перенормировок спиновой функции Грина. В разд. 3 кратко описана эволюция спиновых свойств с ростом фрустрации, который отвечает изменению допирования от нулевого до оптимального. В разд. 4 подробно рассматривается предел нулевого и малого допирования, в разд. 5 — область фрустраций, соответствующих оптимальному допированию. Раздел 6 содержит основные результаты работы и общие выводы.

2. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрение ведется в рамках двумерной фрустрированной модели Гейзенберга, гамильтониан которой имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}J_1 \sum_{i,g} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+g} + \frac{1}{2}J_2 \sum_{i,d} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+d}. \quad (4)$$

Он описывает локализованные на квадратной решетке $S = 1/2$ спины, J_1 — антиферромагнитная обменная константа для первых ближайших соседей, J_2 — для вторых ближайших, \mathbf{g}, \mathbf{d} — векторы первых и вторых ближайших соседей. Ниже использу-

ется стандартная переменная p («параметр фрустрации») $p = J_2/(J_1 + J_2)$, $J_1 = (1-p)J$, $J_2 = pJ$, все энергетические величины измеряются в единицах J и считается $J = 1$. В соответствии со сказанным выше параметр фрустрации p можно считать аналогом концентрации дырок.

Дальнейшие вычисления проведены в рамках сферически-симметричного самосогласованного подхода [31–33], основанного на двух следующих предположениях.

1. Средний спин на узле $\langle \mathbf{S}_i \rangle$ равен нулю. Таким образом, жесткие неелевские подрешетки отсутствуют (т.е. рассматривается модель спиновой жидкости), а магнитный порядок выражается на языке спин-спиновых корреляторов.

2. Сами эти спин-спиновые корреляторы сферически симметричны, т.е. $\langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle \sim \delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$) и не зависят от α .

Процедура самосогласованного вычисления функции Грина (и, соответственно, мнимой части спиновой восприимчивости) подробно изложена в работах [31–33]. Приведем здесь ее краткое описание, сначала при отсутствии затухания, т.е. в среднеполевом приближении.

Уравнение движения для двухвременной запаздывающей функции Грина $G_{\mathbf{nm}}^z = \langle S_{\mathbf{n}}^z | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} = -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [S_{\mathbf{i}}^z(t), S_{\mathbf{j}}^z] \rangle$ имеет вид

$$\omega \langle S_{\mathbf{n}}^z | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega} = i \varepsilon_{z\beta\gamma} \sum_{\mathbf{f}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{f}} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}}^\beta S_{\mathbf{n}}^\gamma | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega}, \quad (5)$$

где $J_{\mathbf{g}} = J_1$, $J_{\mathbf{d}} = J_2$ (в правой части первое — коммутаторное — слагаемое равно нулю).

На втором шаге для функции Грина из правой части (5) имеем

$$\begin{aligned} \omega i \varepsilon_{z\beta\gamma} \sum_{\mathbf{f}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{f}} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}}^\beta S_{\mathbf{n}}^\gamma | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega} = & \\ = -2J_1 c_{\mathbf{g}} \sum_{\mathbf{g}} (\delta_{\mathbf{nm}} - \delta_{\mathbf{n}+\mathbf{g},\mathbf{m}}) - & \\ - 2J_2 c_{\mathbf{d}} \sum_{\mathbf{d}} (\delta_{\mathbf{nm}} - \delta_{\mathbf{n}+\mathbf{d},\mathbf{m}}) + & \\ + i \varepsilon_{z\beta\gamma} \sum_{\substack{\mathbf{f}_1=\mathbf{g}_1,\mathbf{d}_1 \\ \mathbf{f}_2=\mathbf{g}_2,\mathbf{d}_2}} J_{\mathbf{f}_1} J_{\mathbf{f}_2} \langle i \varepsilon_{\beta j l} S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}_1}^j S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}_2}^l S_{\mathbf{n}}^\gamma + & \\ + i \varepsilon_{\gamma j l} S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}_1}^\beta S_{\mathbf{n}+\mathbf{f}_2}^j S_{\mathbf{n}}^l | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega}. & \quad (6) \end{aligned}$$

Для трехузельных членов в правой части (6) принимаем приближение следующего вида, отвечающее проекционному методу:

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l S_{\mathbf{n}}^\gamma &\approx \\
 &\approx \alpha_{\mathbf{g}} (\delta_{jl} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l \rangle S_{\mathbf{n}}^\gamma + \\
 &+ \delta_{l\gamma} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l S_{\mathbf{n}}^\gamma \rangle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j) + \\
 &+ \alpha_{\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2} \delta_{j\gamma} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}}^\gamma \rangle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l.
 \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \neq 0$ (тривиальный член с $\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 = 0$ находится точно); α — вершинные поправки (см. ниже).

Тогда в \mathbf{k} -пространстве функция Грина G^z принимает вид

$$\begin{aligned}
 G^z(\mathbf{q}, \omega) &= \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_\omega = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}, \\
 S_{\mathbf{q}}^z &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^z,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$F_{\mathbf{q}} = -2 [J_1 c_g z_g (1 - \beta_g) + J_2 c_d z_d (1 - \beta_d)], \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{\mathbf{q}}^2 &= 2 [(\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2) - (\beta_3 K_3 + \beta_4 K_4) - \\
 &- (\beta_5 K_5 + \beta_6 K_6)].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Входящие в выражение для спектра величины K_1, \dots, K_6 равны

$$K_1 = J_1 J_2 K_{gd} + J_1^2 \tilde{c}_g z_g (z_g - 1) + \frac{z_g}{4} + K_{gg},$$

$$K_2 = J_1 J_2 K_{gd} + J_2^2 \tilde{c}_d z_d (z_d - 1) + \frac{z_d}{4} + K_{dd},$$

$$K_3 = J_1^2 \tilde{c}_g z_g^2, \quad K_4 = J_2^2 \tilde{c}_d z_d^2, \tag{10}$$

$$K_5 = J_1 J_2 \tilde{c}_g z_g z_d, \quad K_6 = J_1 J_2 \tilde{c}_d z_g z_d,$$

$$\begin{aligned}
 K_{gg} &= \sum_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_1 \neq -\mathbf{g}_2}} \tilde{c}_r, & K_{dd} &= \sum_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_1 \neq -\mathbf{d}_2}} \tilde{c}_r,
 \end{aligned}$$

$$K_{gd} = \sum_{\mathbf{r}=\mathbf{g}+\mathbf{d}} \tilde{c}_r,$$

$$\beta_1 = 1 - \beta_g, \quad \beta_2 = 1 - \beta_d, \quad \beta_3 = 1 - \beta_g^2,$$

$$\beta_4 = 1 - \beta_d^2, \quad \beta_5 = (1 - \beta_g)\beta_d, \quad \beta_6 = (1 - \beta_d)\beta_g,$$

$$\begin{aligned}
 \beta_g(\mathbf{q}) &= \frac{1}{z_g} \sum_{\mathbf{g}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}} = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos(q_x) + \cos(q_y)), \\
 \beta_d(\mathbf{q}) &= \frac{1}{z_d} \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{d}} = \cos(q_x) \cos(q_y).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь z_g и z_d — число первых и вторых ближайших соседей (для квадратной решетки $z_g = z_d = 4$).

В $F_{\mathbf{q}}$ и $\omega_{\mathbf{q}}^2$ входят корреляторы $c_{\mathbf{r}}$ для первых пяти координационных сфер. Выражая их через функцию Грина $G_{\mathbf{q}}^z$:

$$\begin{aligned}
 c_{\mathbf{q}}^z &= \\
 &= \langle S_{\mathbf{q}}^z S_{-\mathbf{q}}^z \rangle = -\frac{1}{\pi} \int d\omega m(\omega) \text{Im} G^z(\mathbf{q}, \omega) = \\
 &= \frac{F_{\mathbf{q}}}{2\omega_{\mathbf{q}}} (2m(\omega_{\mathbf{q}}) + 1), \\
 m(\omega) &= (e^{\omega/T} - 1)^{-1},
 \end{aligned} \tag{12}$$

получаем систему пяти самосогласованных уравнений:

$$\begin{aligned}
 c_{\mathbf{r}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} c_{\mathbf{q}} \beta_{n,m}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{r} = n\mathbf{g}_x + m\mathbf{g}_y \\
 &(\mathbf{r} = \mathbf{g}, \mathbf{d}, 2\mathbf{g}, 2\mathbf{d}, \mathbf{g} + \mathbf{d}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{n,m}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{z} \sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos(nq_x) \cos(mq_y) + \cos(mq_x) \cos(nq_y)).
 \end{aligned}$$

В приведенных выше выражениях $\tilde{c}_r = \alpha_r c_r$ — корреляторы с учетом вершинных поправок. Алгоритм определения α_r подробно обсуждается в работах [31–33]. Кратко напомним его.

В принципе, вершинные поправки могут быть различными для каждой координационной сферы (в нашем случае их пять). Мы принимаем более грубую схему: для ближайших соседей (т. е. для $r = g$) $\alpha_r = \alpha_1$; на дальних — третьей, четвертой и пятой — координационных сферах ($r > d$) $\alpha_r = \alpha_2$; в промежуточном случае вторых ближайших соседей ($r = d$) $\alpha_r = \alpha_3$. Таким образом, возникают три различных вершинных поправки, так что необходимо наложить три дополнительных условия.

Первое условие — спиновый констрейнт (правило сумм) $\langle S_i^z S_i^z \rangle = 1/4$, оно определяет коэффициент α_1 (отметим, что строгое, а не в среднем, выполнение спинового констрейнта является одним из преимуществ излагаемого подхода). В качестве второго условия используется соотношение $\alpha_3 = (1 - p)\alpha_2 + p\alpha_1$, которое обеспечивает корректный предел $p \rightarrow 1$, где решетка (после перехода в страйп-фазу) распадается на две не взаимодействующие АФМ-подрешетки. И, наконец, третье условие: $r_\alpha = (\alpha_1 - 1)/(\alpha_2 - 1) = \text{const}$. Параметр r_α не зависит от температуры, а его величина определяется надежно установленными различными методами значением спинового коррелятора для первых ближай-

ших соседей в пределе нулевой температуры и нулевой фрустрации $C_g(r_\alpha, T = 0, p = 0) = 0.33$ [34], где $C_g = \langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+\mathbf{g}} \rangle = 3 \langle S_i^z S_{i+\mathbf{g}}^z \rangle = 3c_g$ (функциональный вид третьего условия соответствует тому, что все вершинные поправки при высокой температуре стремятся к единице).

Полученная таким образом (с учетом условий на вершинные поправки) замкнутая система самосогласованных уравнений далее должна решаться численно при каждом фиксированном значении температуры T и фрустрации p .

Как видно из формул (7)–(9), изложенный подход приводит к отсутствию затухания функции Грина, т. е. отвечает приближению среднего поля в модели спиновой жидкости. Основные черты эволюции спиновой восприимчивости купратов с ростом допирования передаются уже в этом приближении. Однако, как будет видно далее, некоторые важные экспериментальные результаты невозможно даже качественно объяснить без выхода за рамки среднего поля.

В излагаемом подходе этот выход осуществляется следующим образом.

Следуя работам [31, 32, 35], можно с помощью метода неприводимых функций Грина [36, 37] вывести формально точное выражение для функции Грина $\langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_\omega$. Оно имеет вид

$$G^z(\mathbf{q}, \omega) = \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_\omega = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2 - M(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (14)$$

где $\omega_{\mathbf{q}}$, как и в формуле (7), — спектр спиновых возбуждений (9), а $M(\mathbf{q}, \omega) = M' + iM''$ — фурье-образ новой сложной функции Грина, аналитические свойства которой такие же, как у $G_{\mathbf{q}}^z$. Мы не будем выписывать полностью аналитическое выражение для $M(\mathbf{q}, \omega)$, отметим лишь, что $M(\mathbf{q}, \omega) = \langle \langle \delta b_{\mathbf{q}}^z | \delta b_{-\mathbf{q}}^z \rangle \rangle_\omega$ — трехзубельная неприводимая функция Грина, описывающая распад спиновой волны на три спиновых волны (или эффективный распад спинового возбуждения на электронное и дырочное возбуждения — в случае t - J -модели). Типичный член в $\delta b_{\mathbf{q}}^z$ имеет вид [35]

$$\begin{aligned} \delta b_{\mathbf{q}}^z = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{g} \neq \mathbf{g}'} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} [& -(S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}}^\alpha)^{irr} S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}'}^z + \\ & + (S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}}^\alpha S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}'}^\alpha)^{irr} S_{\mathbf{r}}^z - (S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}-\mathbf{g}'}^\alpha)^{irr} S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}}^z + \\ & + (S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}}^\alpha)^{irr} S_{\mathbf{r}+\mathbf{g}-\mathbf{g}'}^z], \quad (15) \end{aligned}$$

где для неприводимой части операторов приняты обозначения $(S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}'}^\alpha)^{irr} = S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}'}^\alpha - \langle S_{\mathbf{r}}^\alpha S_{\mathbf{r}'}^\alpha \rangle$.

Последовательное вычисление $M(\mathbf{q}, \omega)$ наталкивается на существенные математические трудности [35]. Поэтому приходится прибегать к полуфеноменологическому рассмотрению.

Введем в простейшем приближении поправки к затравочной функции Грина (7), происходящие от мнимой и действительной частей $M(\mathbf{q}, \omega)$. Мнимая часть $M''(\mathbf{q}, \omega)$ нечетна по ω . Поэтому, как и в [24], полагаем $M''(\mathbf{q}, \omega) \approx -\omega\gamma$ и ограничиваемся затуханием γ , не зависящим от \mathbf{q} . В качестве приближения для действительной части M' берем $M' \sim |\sin(q_x) \sin(q_y)|^3$, т. е. вводим перенормированный спектр $\tilde{\omega}_{\mathbf{q}}^2 = \omega_{\mathbf{q}}^2 + (\lambda |\sin(q_x) \sin(q_y)|)^3$ (в соответствии со сказанным выше — после (4) — λ везде далее нормирована на $J^2/3$). Выбор функционального вида M' обусловлен тем, что он должен содержать q -гармоники, отсутствующие в выражении для затравочного спектра (9). Отметим, что хотя λ -перенормировка равна нулю вдоль линий $\Gamma - \mathbf{X}$ и $\mathbf{X} - \mathbf{M}$ ($\Gamma = (0, 0)$, $\mathbf{X} = (0, \pi)$, $\mathbf{M} = (\pi, \pi)$), ее введение меняет значение спиновой щели $\Delta_{\mathbf{M}} = \tilde{\omega}_{\mathbf{Q}}$ из-за процедуры самосогласования.

Таким образом, функция Грина принимает вид

$$G^z(\mathbf{q}, \omega) = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \tilde{\omega}_{\mathbf{q}}^2 + i\omega\gamma} \quad (16)$$

и содержит два параметра — γ и λ . Сама же процедура самосогласованных вычислений остается прежней (разумеется, самосогласование при введении γ и λ необходимо проводить заново).

Мнимая часть динамической спиновой восприимчивости $\chi(\mathbf{q}, \omega) = -G^z(\mathbf{q}, \omega)$ в результате имеет вид

$$\text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\gamma \omega F_{\mathbf{q}}}{(\omega^2 - \tilde{\omega}_{\mathbf{q}}^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (17)$$

В среднеполевом приближении (при отсутствии затухания γ и λ -перенормировки) формула (17) вырождается в

$$\text{Im} \chi^{mf}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi F_{\mathbf{q}}}{2\omega_{\mathbf{q}}} [\delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) - \delta(\omega + \omega_{\mathbf{q}})]. \quad (18)$$

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА В СРЕДНЕПОЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Без учета перенормировок γ и λ , т. е. в приближении среднего поля, общая картина эволюции спектра $\tilde{\omega}_{\mathbf{q}}$ (9) при изменении фрустрации (допирования) и температуры следующая.

В пределе малой фрустрации и $T \rightarrow 0$ спектр имеет вид, аналогичный тому, какой получается в

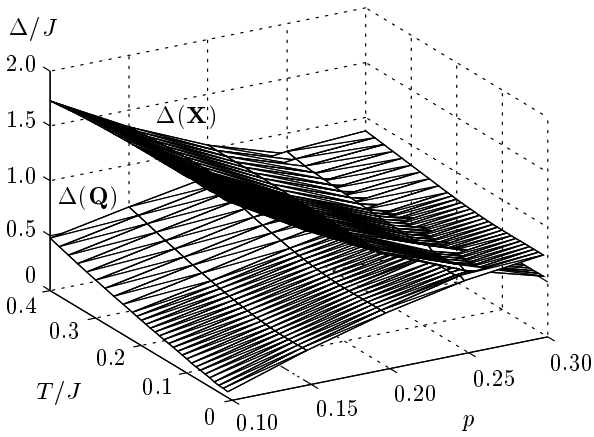


Рис. 5. Зависимость щели в точке $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ и щели в точке $\mathbf{X} = (0, \pi)$ от температуры и фрустрации в среднеполовом приближении. Параметр фрустрации $p = J_2/J$, $J = (J_1 + J_2)$, где J_1, J_2 — обменные константы на первых и вторых ближайших соседях. Щели и температура измерены в единицах J

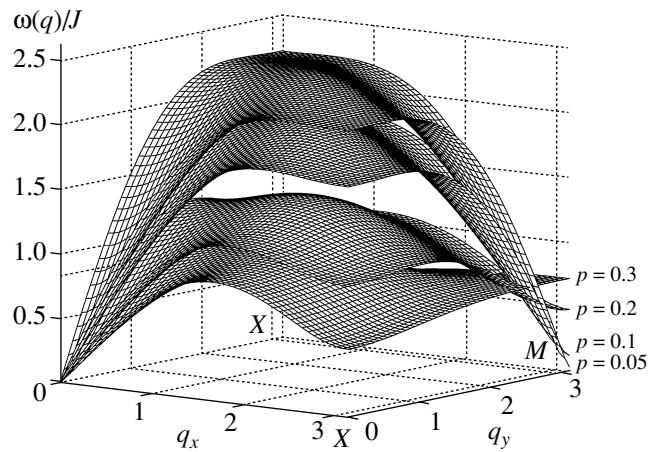


Рис. 6. Эволюция спектра спиновых возбуждений $\omega(\mathbf{q})$ в среднеполовом приближении с ростом фрустрации. Температура $T/J = 0.1$. Показана четверть полной зоны Бриллюэна, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{Q} = (\pi, \pi)$, $\mathbf{X} = (0, \pi), (\pi, 0)$

линейном подходе спиновых волн для 2D-модели Гейзенберга со взаимодействием только ближайших соседей [34]. (Отметим, что в спин-волновом подходе учет следующих членов в $1/S$ -разложении качественно не меняет вид спектра, а приводит лишь к появлению поправочных коэффициентов [29]. К такому же результату с почти такими же перенормировками ведет и разложение от изинговского предела [30].)

С ростом фрустрации открывается щель $\Delta_{\mathbf{Q}}$ в антиферромагнитной точке $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$, что означает потерю дальнего антиферромагнитного порядка (даже и при $T = 0$). При еще большем увеличении фрустрации щель в $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ продолжает расти, а спектр в точках $\mathbf{X} = (0, \pm\pi), (\pm\pi, 0)$ смягчается. Закрытие щелей в точках \mathbf{X} соответствует в чисто спиновой задаче переходу в страйп-фазу. При любой фиксированной фрустрации с ростом температуры все щели растут. Зависимость щели в точках (π, π) и $(\pi, 0)$ от p и T при $\gamma = \lambda = 0$ показана на рис. 5.

Качественно такая картина отвечает экспериментальной зависимости

$$\chi_{2D}(\omega, T) = \int d\mathbf{q} \text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$$

от допирования. В пределе малой фрустрации на малых частотах, отвечающих линейному ходу спектра вблизи точки \mathbf{Q} , основной вклад в интеграл по квазиимпульсу от $\text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$ (17) набирается вблизи этой точки (числитель $F_{\mathbf{q}}$ подавляет вклад от окрестности $\mathbf{q} = 0$). И тогда на этих частотах

$\chi_{2D} \sim \text{const}$. При частотах, близких к максимуму спектра, образуется максимум χ_{2D} . При большей фрустрации, когда щели в точках \mathbf{Q} и \mathbf{X} становятся близкими по величине, максимум χ_{2D} перемещается в область меньших частот, порядка величины этих щелей. Эволюция спинового спектра в среднеполовом приближении, т.е. без учета перенормировок, показана на рис. 6, а соответствующие проинтегрированные восприимчивости $\chi_{2D}(\omega)$ — на рис. 7.

Качественно такая картина сохраняется и при учете перенормировок γ и λ . Однако некоторые важные черты спиновых флуктуаций могут быть воспроизведены только с учетом последних. Например, при малых фрустрациях среднеполовая восприимчивость $\chi_{2D}(\omega)$ в области малых частот представляет собой ступеньку ($\chi_{2D}(\omega) \sim \theta(\omega - \Delta_{\mathbf{Q}})$), что делает невозможным объяснение скейлинга восприимчивости. При больших же фрустрациях среднеполовой подход не передает экспериментальные пики $\text{Im} \chi(\mathbf{Q}, \omega)$. Для объяснения эксперимента в широком диапазоне фрустраций необходим выход за среднее поле.

4. ПРЕДЕЛ МАЛОГО ДОПИРОВАНИЯ

В пределе малого допирования $p \rightarrow 0$ щель в АФМ-точке \mathbf{Q} при $T \rightarrow 0$ закрыта (в согласии с теоремой Мермина–Вагнера). С ростом температуры наблюдается узкий участок $T < T^*$ экспоненциальной зависимости щели от T [31]. Реально из-за взаимодействия между плоскостями этот режим,

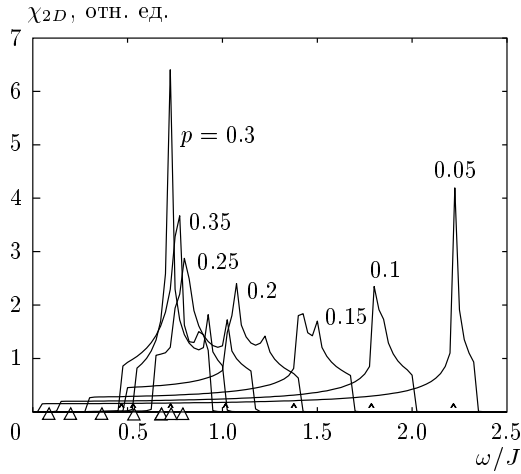


Рис. 7. Изменение проинтегрированной восприимчивости $\chi_{2D}(\omega)$ в среднеполевом приближении с ростом фрустрации. Знаком Δ показано положение щели в точке $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ при данной фрустрации (с ростом параметра p эта щель монотонно возрастает), знаком \wedge — щель в точках $\mathbf{X} = (0, \pi)$ (с ростом p она монотонно убывает)

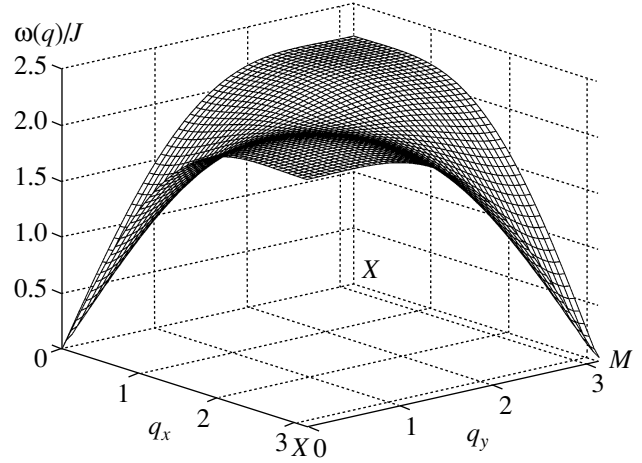


Рис. 8. Спектр спиновых возбуждений $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$ для случая малой фрустрации $p = 0.04$ с учетом перенормировок ($\gamma = 0.025$, $\lambda = -1.1$). Температура $T/J = 0.1$ ($T \sim 100$ К для $J \sim 100$ мэВ). Показана четверть полной зоны Бриллюэна, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{Q} = (\pi, \pi)$, $\mathbf{X} = (0, \pi), (\pi, 0)$

по-видимому, трудно наблюдать экспериментально. При $T > T^*$ щель растет степенным образом (сначала — линейно).

Ниже мы считаем $T > T^*$. Самосогласование, на котором основан наш подход, удается выполнить для $T \gtrsim 0.02J \sim 20$ К.

С ростом фрустрации для нулевых перенормировок $\gamma = \lambda = 0$ щель открывается при $T \rightarrow 0$ при достижении $p = p^* \approx 0.09$ (см. рис. 5). Учет затухания γ уменьшает щель, т. е. увеличивает значение p^* .

На рис. 8 представлен спектр $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$ для $p = 0.04$, $T = 0.1$, $\gamma = 0.025$ и $\lambda = -1.1$ ($T \sim 100$ К для $J \sim 100$ мэВ). Значение параметра фрустрации $p = 0.04$ — наименьшее из рассматриваемых ниже — мы связываем с диэлектрическим пределом в купратах.

Видно, что в окрестности щели спектр почти линейен по $\tilde{q} = |\mathbf{q} - \mathbf{Q}|$ до $\omega_0 \sim 1.5$. Для $J = 120$ мэВ скорость спиновых волн $\hbar c \approx 900$ мэВ·Å, что близко к экспериментальному значению [7].

Можно также убедиться, что при любом фиксированном \mathbf{q} наблюдается хорошо определенный частотный пик $\text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$, который определяется спектром $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$. Более точно, максимум $\text{Im} \chi(\mathbf{q}, \omega)$ по ω всегда соответствует частоте, близкой к $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$, но несколько меньшей ее (из-за затухания γ).

В согласии с экспериментом [13] $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$ демонстрирует седловую особенность вблизи $\mathbf{q} = \mathbf{Q}/2$

($\tilde{\omega}(\mathbf{q} = (0, \pi)) > \tilde{\omega}(\mathbf{q} = (\pi/2, \pi/2))$). Отметим, что в рамках спин-волновой теории для объяснения особенности приходится привлекать ферромагнитный обмен J_2 на вторых ближайших соседях с $p \leq -0.1$ [13]. Это плохо согласуется с физической идеей о фрустрации (т. е. положительном обмене вторых соседей) как механизме разрушения дальнего порядка. Кластерные расчеты [20] также дают в диэлектрическом пределе всегда положительные значения J_2 .

На рис. 9 показана восприимчивость $\chi_{2D}(\omega)$ при той же фрустрации $p = 0.04$ и линейном по температуре затуханию $\gamma = 0.25T$ для двух случаев: $T = 0.1$, $\lambda = -1.0$ и $T = 0.3$, $\lambda = 2.0^{1/3}$. Значения λ выбирались из условия, чтобы результирующая щель в точке \mathbf{Q} также была приблизительно линейной по T : $\Delta_{\mathbf{Q}}(T = 0.1) = 0.048$, $\Delta_{\mathbf{Q}}(T = 0.3) = 0.134$. Как будет показано ниже, в пределе малой фрустрации линейность затухания и щели по температуре является необходимым условием скейлинга. Представленная восприимчивость $\chi_{2D}(\omega)$ демонстрирует качественное согласие с экспериментом [7, 8] — она почти постоянна в широком интервале частот и растет при $\omega \gtrsim 150$ мэВ.

Рисунок 10 для $p = 0.04$ представляет вычисленную скейлинговую функцию $f(\omega/T)$ (3). Сплошные кривые 2 и 3 отвечают, соответственно, температурам $T = 0.1$ и $T = 0.3$ (значения остальных параметров те же, что на рис. 9, в частности,

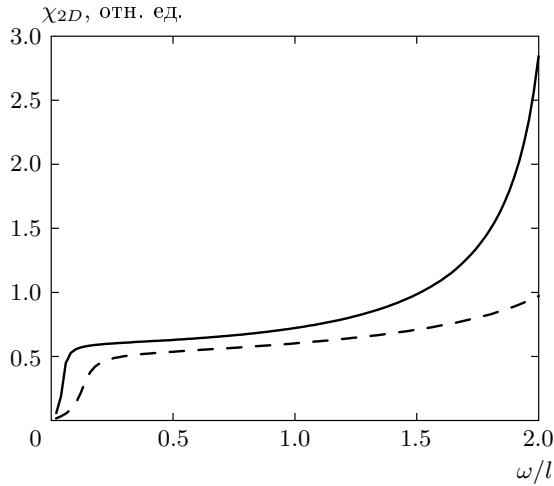


Рис. 9. Проинтегрированная восприимчивость $\chi_{2D}(\omega)$ для фрустрации $p = 0.04$ и линейного по температуре затухания $\gamma = 0.25T$. Сплошная линия — $T = 0.1J$, $\lambda = -1.0$, штриховая — $T = 0.3J$, $\lambda = 2.0^{1/3}$. Щели в антиферромагнитной точке равны, соответственно, $\Delta_{\mathbf{Q}}(T = 0.1J) = 0.048J$, $\Delta_{\mathbf{Q}}(T = 0.3J) = 0.134J$ ($J \sim 100$ мэВ)

$\gamma = 0.25T$). Штрихпунктирная линия 1 — наилучшая подгонка к экспериментальному скейлингу в $\text{La}_{1.96}\text{Sr}_{0.04}\text{CuO}_4$ [9]

$$f_{ex}\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{2}{\pi} \arctg\left\{0.43\left(\frac{\omega}{T}\right) + 10.5\left(\frac{\omega}{T}\right)^3\right\}.$$

Кривая 4 соответствует тем же, что для кривой 3, значениям $T = 0.3$, $\lambda = 2.0^{1/3}$, но большему затуханию $\gamma = 0.3 > 0.25T = 0.075$. Видно, что при отклонении затухания от линейности по температуре скейлинг разрушается.

На вставке показаны аналогичные кривые для большего значения фрустрации $p = 0.1$ (мы связываем этот случай с недодопированным режимом в купратах [12]). Здесь выбрано $\gamma = T$ и $\lambda = 0$. Скейлинговые функции вычислены для температур $T = 0.1, 0.2, 0.4$ (соответственно кривые 6, 7, 8). Они близки к экспериментальному скейлингу

$$f_{ex}\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{2}{\pi} \arctg\left\{a\left(\frac{\omega}{T}\right)\right\},$$

$a \sim 1$ [10, 11, 12]. Кривая 9 соответствует $T = 0.4$ и $\gamma = 0.1 < T = 0.4$. Как и в предыдущем случае, отклонение $\gamma(T)$ от линейности разрушает скейлинг.

Таким образом, при не слишком больших p численные результаты демонстрируют скейлинг $\chi_{2D}(\omega, T)$, если γ линейна по T . При $p \ll 1$ этот

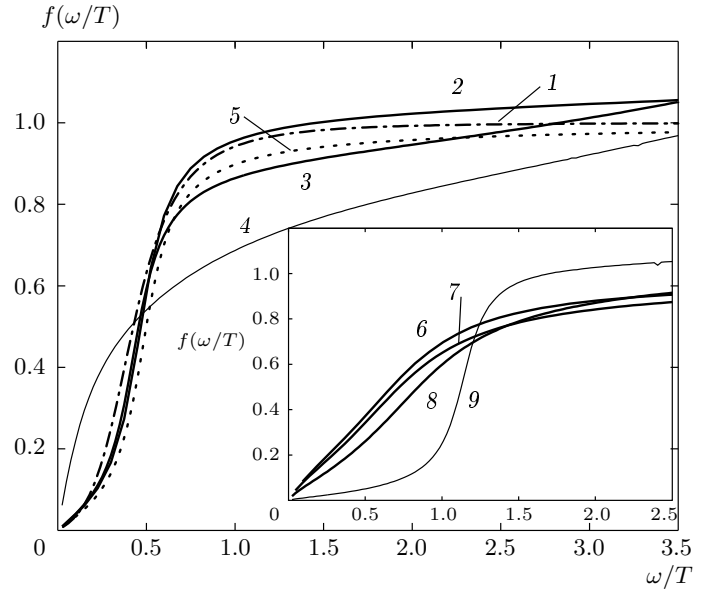


Рис. 10. Скейлинговая функция $f(\omega/T)$ для фрустрации $p = 0.04$. Кривая 1 — наилучшая подгонка к эксперименту в $\text{La}_{1.96}\text{Sr}_{0.04}\text{CuO}_4$ [9] $f_{ex}(\omega/T) = (2/\pi) \arctg\{0.43(\omega/T) + 10.5(\omega/T)^3\}$. Сплошные кривые 2, 3 — численные результаты для температур соответственно $T = 0.1$ и $T = 0.3$ (значения остальных параметров те же, что на рис. 9, в частности, $\gamma = 0.25T$). Кривая 4 демонстрирует разрушение скейлинга, она соответствует тем же значениям $T = 0.3$, $\lambda = 2.0^{1/3}$, что для 3, но большему затуханию $\gamma = 0.3 > 0.25T = 0.075$. Пунктирная линия 5 — скейлинговый закон (23) при $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$ (линия 5 практически совпадает с численной кривой $f_{T/J=0.2, \gamma=0.25T}$). Все энергетические параметры — в единицах J . На вставке аналогичные кривые для $p = 0.1$. Численные скейлинговые функции для температур $T = 0.1, 0.2, 0.4$ — соответственно кривые 6, 7, 8 (везде $\gamma = T$ и $\lambda = 0$). Они близки к экспериментальному скейлингу $f_{ex}(\omega/T) = (2/\pi) \arctg\{a(\omega/T)\}$, $a \sim 1$ [10–12]. Кривая 9 — разрушение скейлинга — $T = 0.4$ и $\gamma = 0.1 < T = 0.4$

вопрос может быть прояснен аналитически. Как ясно из формулы (17) и рис. 8, 9, основной вклад в $\chi_{2D}(\omega)$ при не слишком больших частотах дает область вблизи точки \mathbf{Q} : $\tilde{q} = |\mathbf{q} - \mathbf{Q}| \leq \tilde{q}_0$, где $c\tilde{q}_0 \sim J$ — наибольший энергетический параметр задачи (вклад от окрестности $\mathbf{q} = 0$ подавляется числителем $F_{\mathbf{q}}$ (8)). Тогда разложение спектра

$$\tilde{\omega}^2(q) \approx \Delta^2 + c^2\tilde{q}^2 \quad (\Delta \equiv \Delta_{\mathbf{Q}})$$

и простое интегрирование (2), (17) дает для $\omega < \omega_0 = c\tilde{q}_0$

$$\chi_{2D}(\omega) = \frac{\overline{F_{\mathbf{q}}}}{4\pi c^2} \left\{ \arctg \left(\frac{c^2 \tilde{q}_0^2 + \Delta^2 - \omega^2}{\gamma \omega} \right) - \arctg \left(\frac{\Delta^2 - \omega^2}{\gamma \omega} \right) \right\} = \frac{\overline{F_{\mathbf{q}}}}{4\pi c^2} \left[\begin{array}{ll} \Phi(\omega, \Delta, \gamma), & \theta < 1 \\ \pi + \Phi(\omega, \Delta, \gamma), & \theta > 1 \end{array} \right], \quad (19)$$

$$\Phi(\omega, \Delta, \gamma) = \arctg \left\{ \frac{c^2 \tilde{q}_0^2 \gamma \omega}{\gamma^2 \omega^2 + (c^2 \tilde{q}_0^2 + \Delta^2 - \omega^2)(\Delta^2 - \omega^2)} \right\}, \quad (20)$$

$$\theta = \frac{(c^2 \tilde{q}_0^2 + \Delta^2 - \omega^2)(\omega^2 - \Delta^2)}{\gamma^2 \omega^2}. \quad (21)$$

Здесь $\overline{F_{\mathbf{q}}}$ — среднее от медленно меняющейся в рассматриваемой области функции $F_{\mathbf{q}}$.

Из эксперимента известно, что скейлинговый знаменатель $\chi_{2D}(\omega, T \rightarrow 0)$ постоянен в широком диапазоне частот (вопрос о возможном его отклонении от константы при $\omega \rightarrow 0$ будет обсуждаться ниже). Это же видно из формулы (19) — поскольку при $T \rightarrow 0$ в диэлектрическом пределе $\Delta, \gamma \rightarrow 0$, то $\chi_{2D}(\omega, T \rightarrow 0) = \overline{F_{\mathbf{q}}}/4c^2$. Таким образом, скейлинг фактически управляется числителем $\chi_{2D}(\omega, T)$, т. е. функцией $\Phi(\omega, \Delta, \gamma)$, которая при $\Delta^2, \omega^2, \gamma^2 \ll c^2 \tilde{q}_0^2$ приобретает вид

$$\Phi(\omega, \Delta, \gamma) \approx \arctg \left\{ \frac{\gamma \omega}{\Delta^2 - \omega^2} \right\} = \arctg \left\{ \frac{(\frac{\gamma}{T}) \frac{\omega}{T}}{\left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2} \right\}. \quad (22)$$

Выражение (19) доказывает, что линейности щели и затухания по температуре $\gamma = \alpha T$ и $\Delta = \beta T$ являются необходимым условием скейлинга.

В рассматриваемом пределе переключение режимов (19), (21) определяется Θ -функцией:

$$\Theta(\theta) \approx \Theta(\omega^2 - \Delta^2) = \Theta \left(\left(\frac{\omega}{T} \right)^2 - \beta^2 \right).$$

Тогда скейлинговая функция приобретает вид

$$\tilde{f} \left(\frac{\omega}{T} \right) = \Theta \left(\left(\frac{\omega}{T} \right)^2 - \beta^2 \right) + \frac{1}{\pi} \arctg \left\{ \frac{\alpha \omega / T}{\beta^2 - (\omega / T)^2} \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, в противоположность экспериментальным подгонкам с помощью простого арктангенса или арктангенса от кубического полинома,

здесь получается арктангенс «с переключателем» (переключение происходит при $\omega = \Delta$), содержащий к тому же микроскопическую информацию о Δ и γ .

На рис. 10 $\tilde{f}(\omega/T)$ (23) представлена для $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$ пунктирной линией 5 (отметим, что она практически совпадает с вычисленной из формулы (17) $f_{T=0.2, \gamma=0.25T}$). Скейлинговая функция $\tilde{f}(\omega/T)$ со слегка отличными параметрами $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.43$ с высокой точностью совпадает с упомянутой выше экспериментальной подгонкой с арктангеном от кубического полинома (кривая 1). Напомним еще раз, что все численные результаты для $f(\omega/T)$ получены при $\gamma \sim T$ и таком выборе $\lambda(T)$, чтобы результирующая щель тоже была линейной по температуре $\Delta \sim T$.

Итак, в рассмотренном аналитическом приближении $\chi_{2D}(\omega)$ (а с ней и скейлинговая функция $\tilde{f}(\omega/T)$) при $\omega \lesssim J$ определяется выражением (23) и представляет собой ступеньку, обращающуюся в нуль при $\omega \sim \Delta$ и размытую на ширину порядка γ . Однако измерения при гелиевых температурах в слабодопированных купратах демонстрируют отклонение от такого поведения — на самых низких частотах $\chi_{2D}(\omega)$ начинает расти и лишь затем обращается в нуль [9–11].

Такое поведение также нетрудно продемонстрировать аналитически, если считать, что в очень узкой окрестности точки \mathbf{Q} спектр уплотняется по отношению к использованному выше дираковскому виду ($\tilde{\omega}^2(q) \approx \Delta^2 + c^2 \tilde{q}^2$), т. е. для $\omega < \tilde{\omega}_0 \ll \omega_0$ спектр имеет вид $\tilde{\omega}^2(q) \approx \Delta^2 + \mu^2 \tilde{q}^4$. Отметим, что разложение (9), в том числе и с учетом γ - и λ -перенормировок, не приводит к такому виду, т. е. здесь предположено наличие еще одной действительной перенормировки M' .

В этом случае интегрирование по $d\mathbf{q}$ (как и выше, с точностью до усреднения медленной функции $F_{\mathbf{q}}$) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2D}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \frac{\gamma \omega F_{\mathbf{q}}}{(\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \approx \\ &\approx \frac{2\pi \overline{F_{\mathbf{q}}} \gamma \omega}{2\mu(2\pi)^2} \int_0^{\mu \tilde{q}_0^2} \frac{du}{(\omega^2 - \Delta^2 - u^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \\ &= \frac{2\pi \overline{F_{\mathbf{q}}} \gamma \omega}{2\mu(2\pi)^2 (4\sqrt{2} p^2 \gamma \omega)} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{p^2 - z} \ln \left(\frac{u^2 + \sqrt{2} u \sqrt{p^2 + z} + p^2}{u^2 - \sqrt{2} u \sqrt{p^2 + z} + p^2} \right) + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{p^2 + z} \arctg \left(\frac{u^2 - p^2}{\sqrt{2} u \sqrt{p^2 - z}} \right) \right\} \Big|_0^{\mu \tilde{q}_0^2}. \quad (24) \end{aligned}$$

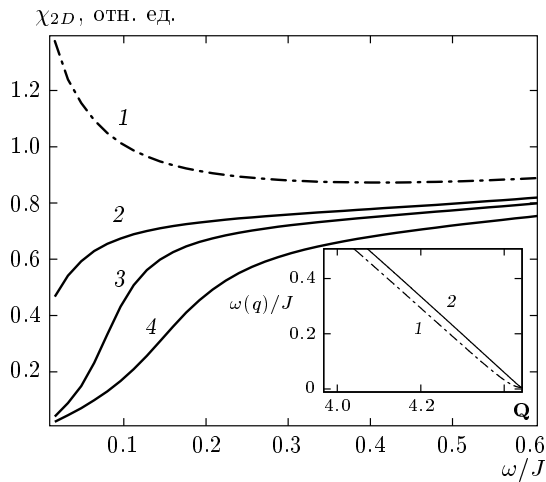


Рис. 11. Изменение $\chi_{2D}(\omega)$ на низких частотах при уплощении спектра вблизи АФМ-точки $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$. Фрустрация $p = 0.1$. Сплошная линия 2 — $T = 0.01$, $\gamma = 0.045$, недеформированный спектр; штихпунктирная кривая 1 — те же T и γ , но спектр уплощен вблизи точки \mathbf{Q} . Участки спектров вдоль диагонали зоны Бриллюэна вблизи \mathbf{Q} изображены соответствующими линиями на вставке. Щель в обоих случаях равна $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.005$. При такой малой щели для недеформированного спектра $\tilde{\omega}(q) \approx (\Delta^2 + c^2 q^2)^{1/2}$ нелинейный по q участок практически не заметен. Сплошные кривые 3 и 4 — пример эволюции $\chi_{2D}(\omega)$ с ростом температуры при линейном по T затухании (спектр без уплощения): 3 — $T = 0.1$, $\gamma = 0.8$, $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.089$; 4 — $T = 0.2$, $\gamma = 0.16$, $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.1686$ (везде $\lambda = 0$, энергетические величины T , γ , Δ — в единицах J)

Здесь $u = \mu \tilde{q}^2$, $\mu \tilde{q}_0^2 = \tilde{\omega}_0$, $z = \omega^2 - \Delta^2$, $p^2 = \sqrt{z^2 + \gamma^2 \omega^2}$.

Считаем щель Δ наименьшим параметром. Тогда (24) растет с понижением частоты ω в области $\tilde{\omega}_0^2 \gg \omega^2 \gg \gamma^2 \gg \Delta^2$. Действительно, в этой области $z \sim \omega^2$, $p \sim \omega$, $\sqrt{p^2 - z} \lesssim \omega$, $\sqrt{p^2 + z} \sim \omega$. Аргумент логарифма на обоих пределах близок к единице, аргумент арктангенса на обоих пределах близок к $\pi/2$. Таким образом, ведущий вклад в этой области дает второе слагаемое и его частотная зависимость $\sim \sqrt{p^2 + z}/p^2 \sim 1/\omega$, как это и наблюдается экспериментально [9–11] (нетрудно увидеть, что вклад от остальных областей зоны Бриллюэна не изменяет этот результат). С другой стороны, очевидно, что в области частот $\omega < \Delta$ проинтегрированная восприимчивость $\tilde{\chi}_{2D}(\omega)$ убывает до нуля.

Расчет $\chi_{2D}(\omega)$ на основе выражения (17) с уплощенным вблизи точки \mathbf{Q} спектром воспроизводит полученный результат, что продемонстрировано на

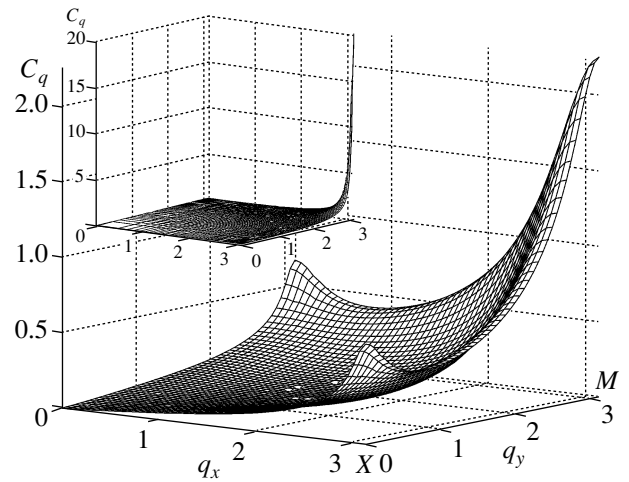


Рис. 12. Структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ при большой фрустрации $p = 0.28$. Температура $T = 0.025$, $\gamma = 0.4$, $\lambda = 10.0^{1/3}$. Для сравнения на вставке показан узкий пик $c_{\mathbf{q}}$ при малой фрустрации $p = 0.1$. Здесь температура выше — $T = 0.1$, остальные параметры $\gamma = 0.08$, $\lambda = 0$ (при меньших T и p пик $c_{\mathbf{q}}$ еще острее)

рис. 11.

Обсудим кратко поведение корреляционной длины ξ . С учетом перенормировок γ и λ выражение для структурного фактора $c_{\mathbf{q}}$ (см. (12)) принимает вид

$$c_{\mathbf{q}}^z = -\frac{1}{\pi} \int d\omega m(\omega) \text{Im} G^z(\mathbf{q}, \omega) = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{(2m(\omega) + 1)\gamma\omega}{(\omega^2 - \tilde{\omega}_{\mathbf{q}}^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (25)$$

При малом допировании (фрустрации) $c_{\mathbf{q}}$ имеет вид острого симметричного пика вокруг точки \mathbf{Q} (см. вставку на рис. 12). Это позволяет ввести корреляционную длину ξ , которая при $p \ll 1$ определяется выражением

$$c_{\mathbf{q}} \sim \frac{1}{\tilde{q}^2 + \kappa^2}, \quad \kappa = \xi^{-1}.$$

С ростом температуры полуширина лоренциана, т. е. обратная корреляционная длина, растет и численно оказывается порядка экспериментально наблюдаемой. Растет ξ^{-1} и с увеличением фрустрации. Однако при достаточно больших значениях параметра фрустрации ситуация качественно изменяется (см. ниже).

5. ДОПИРОВАНИЕ, БЛИЗКОЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ

Как уже упоминалось, с ростом фрустрации щель в точке \mathbf{Q} растет, а в точке \mathbf{X} — падает. Значение параметра фрустрации $p = 0.28$, при котором $\Delta_{\mathbf{Q}} \approx \Delta_{\mathbf{X}}$, мы связываем со случаем оптимального допирования в купратах. В этой области структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ уже не является узким пиком вокруг точки \mathbf{Q} , а имеет гораздо более сложный вид.

В 2D-модели Гейзенберга со взаимодействием первых и вторых ближайших соседей в случае $p \rightarrow 0$ реализуется шахматная фаза, а для $p \rightarrow 1$ — страйп-фаза, причем в сферически-симметричном подходе страйп-фаза представляет собой не классическую структуру из чередующихся полос спинов вверх и спинов вниз, а квантовую суперпозицию горизонтальных и вертикальных полос [32, 33].

При $T = 0$ в обоих пределах существует дальний порядок и спиновые корреляторы на больших расстояниях имеют вид

$$\begin{aligned} c_{r \rightarrow \infty}^{Neel} &= c_{\infty} (-1)^{n_x + n_y}, \\ c_{r \rightarrow \infty}^{stripe} &= c_{\infty} (1/2) [(-1)^{n_x} + (-1)^{n_y}], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{r} = n_x \mathbf{g}_x + n_y \mathbf{g}_y$$

($\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y$ — векторы ближайших соседей по горизонтали и по вертикали).

Первому случаю отвечает закрытая щель в точке \mathbf{Q} , второму — в точке \mathbf{X} . Структурный фактор представляет собой острый пик вокруг соответствующей точки. При конечной температуре щель открывается, дальний порядок исчезает, c_{∞} в (26) переходит в убывающую функцию r , структурный фактор размывается на величину порядка обратной корреляционной длины ξ^{-1} .

В области же промежуточных фрустраций дальний порядок нарушен уже при $T = 0$ и «мотивы» неелевской и страйп-фаз присутствуют с сопоставимыми весами. Поэтому структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ представляет собой суперпозицию размытых пиков вокруг \mathbf{Q} и \mathbf{X} с переходными участками между ними. Фактор $c_{\mathbf{q}}$ при $p = 0.28$ представлен для случая низкой температуры $T = 0.025$ на рис. 12 (здесь значения перенормировок $\gamma = 0.4$, $\lambda = 10.0^{1/3}$, качественная картина $c_{\mathbf{q}}$ от них зависит слабо).

Корректно ввести в этой ситуации корреляционную длину нельзя, можно лишь говорить, что спин-спиновые корреляции сохраняются на расстояниях порядка нескольких постоянных решетки.

Что же касается проинтегрированной восприимчивости χ_{2D} , то интеграл для нее даже и при $T \rightarrow 0$ уже не определяется вкладом только от окрестности

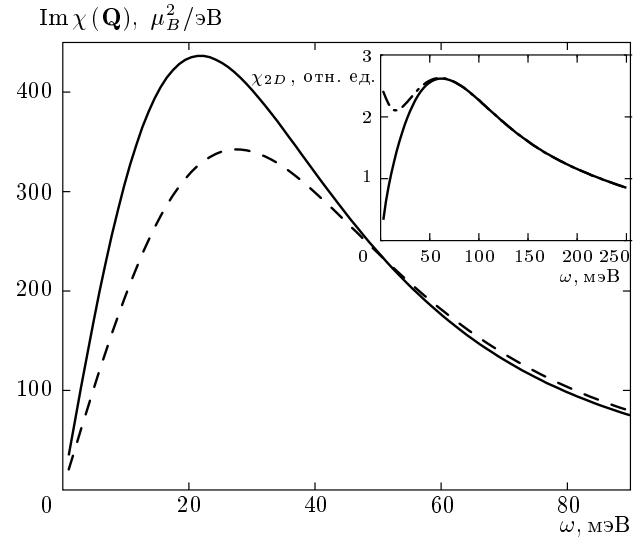


Рис. 13. Q -пики (мнимая часть восприимчивости в АФМ-точке $\text{Im} \chi(\mathbf{Q}, \omega)$) для случая фрустрации $p = 0.28$. Сплошная линия $T/J = 0.025$, штриховая — $T/J = 0.05$. Затухание $\gamma = 0.38 + 0.8T$, параметр $\lambda = 10.0^{1/3}$. При пересчете в абсолютные единицы использовано $J_1 = (1 - p)J = 140$ мэВ. На вставке: $\chi_{2D}(\omega)$ — сплошная кривая и $\chi_{2D}(\omega)(2n_{Bose} + 1)$ — штрихпунктир для случая $T/J = 0.05$

\mathbf{Q} , и аналитическое рассмотрение становится невозможным.

Ниже характеристики спиновой подсистемы находятся на основе формулы (17) для $p = 0.28$ и сравниваются с экспериментом для купратов, близких к оптимально допированным. Результаты приведены для температур $T = 0.025, 0.05$. Затухание взято в виде $\gamma = 0.38 + 0.8T$, в отличие от предела малой фрустрации, здесь γ не стремится к нулю при $T \rightarrow 0$. Второй ренормировочный параметр $\lambda = 10.0^{1/3}$. Значения γ и λ выбирались так, чтобы наилучшим возможным образом удовлетворить эксперименту.

При выбранных γ и λ для $T = 0.025, 0.05$ щели равны соответственно $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.197, \Delta_{\mathbf{X}} = 0.179$ и $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.228, \Delta_{\mathbf{X}} = 0.210$.

На рис. 13 представлены для этих температур Q -пики, т. е. зависимости $\text{Im} \chi(\mathbf{Q}, \omega)$. Они находятся в хорошем согласии с экспериментом [14], в том числе воспроизводятся наиболее заметные черты экспериментальных Q -пигов: положение максимума почти не зависит от температуры, ширина пиков порядка щели (т. е. «плохие» квазичастицы).

Спектр $\tilde{\omega}_{\mathbf{q}}$ для $T = 0.05$ представлен на рис. 14.

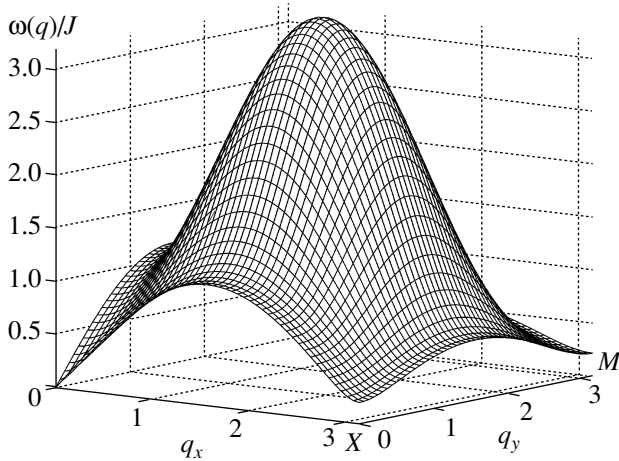


Рис. 14. Спектр спиновых возбуждений $\tilde{\omega}(\mathbf{q})$ для случая большой фрустрации $p = 0.28$ с учетом перенормировок ($\gamma = 0.42$, $\lambda = 10.1^{1/3}$). Температура $T/J = 0.05$. Показана четверть полной зоны Бриллюэна, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{Q} = (\pi, \pi)$, $\mathbf{X} = (0, \pi), (\pi, 0)$. Щели в точках \mathbf{Q} и \mathbf{X} равны $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0.228$, $\Delta_{\mathbf{X}} = 0.210$

Важной чертой спектра является наличие седловых точек около $\mathbf{q} = (\pi, \pi/2), (\pi/2, \pi)$, кроме того, спектр слабо меняется вдоль направления $\mathbf{X} - \mathbf{Q}$. Поэтому максимум $\chi_{2D}(\omega)$ формируется на частотах порядка $\Delta_{\mathbf{Q}} \sim \Delta_{\mathbf{X}}$ (точнее, при $\omega \gtrsim 2-3\Delta_{\mathbf{Q}}$). Это видно на вставке к рис. 13, где изображены $\chi_{2D}(\omega)$ (сплошная кривая) и $\chi_{2D}(\omega)(2n_{Bose} + 1)$ (штрихпунктир) для $T = 0.05$ (здесь использовано $J_1 = (1 - p)J = 140$ мэВ). Такое поведение $\chi_{2D}(\omega)$ близко к результатам эксперимента для купратов [16]: максимум $\chi_{2D}(\omega)$ при $\omega \approx 60$ мэВ, падение приблизительно вдвое на $\omega \approx 200$ мэВ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, картина эволюции спинового спектра двумерной фрустрированной модели Гейзенберга от неелевской фазы в сторону страйп-фазы позволяет воспроизвести все основные экспериментальные черты спиновой восприимчивости в купратах в диапазоне от диэлектрического до оптимально допированного режима. Существенно, что при этом не используется никакой модельный спектр спиновых возбуждений — спектр и $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ — результат самосогласованных вычислений.

В случае малой фрустрации введение действительных и мнимых перенормировок позволяет описать скейлинговое поведение восприимчивости. Температурная зависимость двух перенормировочных

параметров γ и λ полностью определяется условием линейности по T щели $\Delta_{\mathbf{Q}}$ и затухания γ — условием скейлинга. Для скейлинговой функции удается получить аналитическое выражение, адекватное экспериментальным кривым и содержащее микроскопические параметры модели. Одновременно воспроизводится седловая точка в спектре спиновых возбуждений вблизи $\mathbf{q} = (\pi/2, \pi/2)$.

В режиме большой фрустрации оказывается возможным воспроизвести результаты эксперимента для оптимально допированных купратов. Нам неизвестны другие теоретические подходы, которые бы описывали пик $\chi_{2D}(\omega)$ в области $\omega \sim 60$ мэВ. В рамках предложенного рассмотрения такой пик обусловлен малой щелью $\Delta_{\mathbf{X}}$ и седловой точкой при $\mathbf{q} \approx (\pi, \pi/2)$. То и другое — проявления спинового страйп-сценария, т. е. эволюции спиновой подсистемы от шахматной фазы к страйп-фазе. Под страйп-сценарием часто понимают образование полос (статических или динамических) спинов и полос дырок [4, 5], мы же рассматриваем чисто спиновый гамильтониан.

Очевидным недостатком используемой чисто спиновой модели с двумя обменными константами является невозможность описания несоизмеримых пиков восприимчивости (рис. 4). Для объяснения этих пиков, по-видимому, необходимо либо привлекать спиновый гамильтониан вида

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}) \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}_{-\mathbf{q}},$$

либо в явном виде учитывать дырки и их анизотропное взаимодействие со спинами.

Обе эти идеи реализованы в исходящих из передопированного предела подходах, основанных на модели почти антиферромагнитной ферми-жидкости (NAFL) [38] (см. также обзор [39] и ссылки в нем). В этих подходах рассматриваются носители с большой поверхностью Ферми, сильно взаимодействующие со спиновой бозонной модой вблизи АФМ-неустойчивости, что приводит к перенормировкам спектра носителей и возникновению затухания в спиновой подсистеме. В результате для спиновой восприимчивости часто принимается приближение «overdamped magnons», отвечающее пренебрежению в (16) членом ω^2 в знаменателе [40]. Это позволяет описать резонансный пик при $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$ в сверхпроводящем d -состоянии. Однако эта теория носит полуфеноменологический характер, основана на постулировании зависимости корреляционной длины от температуры и допирования, не учитывает правило сумм и справедлива при $\mathbf{q} \sim \mathbf{Q}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-02-00456а).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Kastner, R. J. Birgeneau, G. Shirane et al., *Rev. Mod. Phys.* **70**, 897 (1998).
2. P. Bourges, in *The Gap Symmetry and Fluctuations in High Temperature Superconductors*, ed. by J. Bok, G. Deutscher, D. Pavuna, and S. A. Wolf, Plenum, New York (1998), p. 349.
3. T. E. Mason, in *Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths: High-Temperature Superconductors-II*, ed. by J. K. A. Gschneidner, L. Eyring, and M. B. Maple, Elsevier, Amsterdam (2001), Vol. 31, p. 281.
4. J. M. Tranquada, in *Handbook on High-Temperature Superconductivity. Theory and Experiment*, ed. by J. R. Schrieffer, Springer, Berlin (2007), in press; E-print archives, cond-mat/0512115.
5. R. J. Birgeneau, C. Stock, J. M. Tranquada et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 111003 (2006).
6. J. Lorenzana, G. Seibold, and R. Coldea, *Phys. Rev. B* **72**, 224511 (2005).
7. S. M. Hayden, G. Aeppli, H. A. Mook et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1344 (1996).
8. S. M. Hayden, G. Aeppli, T. G. Perring et al., *Phys. Rev. B* **54**, R6905 (1996).
9. B. Keimer, R. J. Birgeneau, A. Cassanho et al., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1930 (1991); B. Keimer, N. Belk, R. J. Birgeneau et al., *Phys. Rev. B* **46**, 14034 (1992).
10. K. Kakurai, S. Shamoto, T. Kiyokura et al., *Phys. Rev. B* **48**, 3485 (1993).
11. H. Hiraka, Y. Endoh, M. Fujita et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 8553 (2001).
12. C. Stock, W. J. L. Buyers, R. Liang et al., *Phys. Rev. B* **69**, 014502 (2004).
13. R. Coldea, S. M. Hayden, G. Aeppli et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5377 (2001).
14. H. F. Fong, P. Bourges, Y. Sidis et al., *Phys. Rev. B* **61**, 14773 (2000).
15. N. B. Christensen, D. F. McMorrow, H. M. Rønnow et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 147002 (2004).
16. J. M. Tranquada, H. Woo, T. G. Perring et al., *Nature* **429**, 534 (2004).
17. C. Stock, W. J. L. Buyers, R. A. Cowley et al., *Phys. Rev. B* **71**, 024522 (2005).
18. S. M. Hayden, H. A. Mook, P. Dai et al., *Nature* **429**, 531 (2004).
19. M. Inui, S. Doniach, and M. Gabay, *Phys. Rev. B* **38**, 6631 (1988).
20. J. F. Annet, R. M. Martin, A. K. McMahan et al., *Phys. Rev. B* **40**, 2620 (1989).
21. P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17 (2006).
22. S. Sachdev, in *Quantum Magnetism*, Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin (2004); M. Vojta, T. Vojta, and R. K. Kaul, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 097001 (2006).
23. M. Vojta and T. Ulbricht, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 127002 (2004).
24. P. Prelovšek, I. Sega, and J. Bonča, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 027002 (2004); I. Sega, P. Prelovšek, and J. Bonča, *Phys. Rev. B* **68**, 054524 (2003).
25. I. A. Larionov, *Phys. Rev. B* **69**, 214525 (2004); *B* **72**, 094505 (2005).
26. A. Sherman, *Phys. Lett. A* **337**, 435 (2005).
27. A. Sherman and M. Schreiber, *Phys. Rev. B* **65**, 134520 (2002); *B* **68**, 094519 (2003); *Eur. Phys. J. B* **32**, 203 (2003).
28. H. Mori, *Progr. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965); **34**, 399 (1965).
29. J. Igarashi, *Phys. Rev. B* **46**, 107063 (1992); *J. Phys.: Cond. Matter* **4**, 10265 (1992).
30. R. R. P. Singh, *Phys. Rev. B* **39**, 9760 (1989).
31. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 2394 (1991).
32. А. Ф. Барабанов, В. М. Березовский, *ЖЭТФ* **106**, 1156 (1994); A. F. Barabanov and V. M. Berezovsky, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 3974 (1994).
33. A. F. Barabanov, L. A. Maksimov, and A. V. Mikheenkov, Spin Polaron in the Cuprate Superconductor: Interpretation of the ARPES Results, in: *Spectroscopy of High-T_c Superconductors. A Theoretical View*, ed. by N. M. Plakida, Taylor&Francis (2003), p. 1.
34. E. Manousakis, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 1 (1991).
35. A. F. Barabanov and L. A. Maksimov, *Phys. Lett. A* **207**, 390 (1995).
36. Ю. А. Церковников, *ТМФ* **7**, 250 (1971); **49**, 219 (1981).
37. N. N. Plakida, *Phys. Lett. A* **43**, 481 (1973).
38. A. J. Millis, H. Monien, and D. Pines, *Phys. Rev. B* **42**, 167 (1990).
39. A. V. Chubukov, D. Pines, and J. Schmalian, in *The Physics of Superconductors*, ed. by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, Springer, Berlin (2003), Vol. 1, p. 495.
40. Ar. Abanov and A. Chubukov, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1652 (1999).