

МЕХАНИЗМЫ ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИИ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

Г. Г. Зегря, Д. М. Самосват*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 апреля 2006 г.

В работе выполнен микроскопический расчет вероятности оже-рекомбинации носителей заряда, локализованных в полупроводниковой квантовой точке. Показано, что в квантовой точке присутствует два механизма оже-рекомбинации: беспороговый и квазипороговый. Беспороговый механизм оже-рекомбинации связан с рассеянием квазиимпульса на гетеробарьере, а квазипороговый — с пространственным ограничением волновых функций носителей заряда областью квантовой точки; при этом рассеяние носителей происходит на короткодействующем кулоновском потенциале. Оба механизма приводят к существенному усилению процесса оже-рекомбинации в квантовой точке по сравнению с однородным полупроводником. Выполнен детальный анализ зависимости коэффициента оже-рекомбинации от температуры и параметров квантовой точки. При низких температурах доминирует беспороговый процесс оже-рекомбинации, а при высоких — квазипороговый. Показано, что зависимость коэффициента оже-рекомбинации от радиуса квантовой точки претерпевает существенные изменения по сравнению с квантовыми ямами и квантовыми нитями.

PACS: 79.20.Fv

1. ВВЕДЕНИЕ

Полупроводниковые квантовые точки (КТ) привлекают все большее внимание исследователей в связи с тем что, во-первых, их физические свойства принципиально отличаются от свойств однородных (массивных) полупроводников и, во-вторых, возможностью их использования в различных оптоэлектронных устройствах от лазеров до квантовых компьютеров [1–4]. В последнее время полупроводниковые КТ широко используются в биологии и медицине в качестве меток [5–7] и для диагностики биологических объектов [8, 9]. В связи с тем, что интерес к квантовым точкам все больше возрастает, важно понять какие физические процессы влияют на их оптические и электрические свойства. До настоящего времени в литературе отсутствует детальный анализ механизмов рекомбинации носителей заряда в квантовых точках, контролирующей время жизни. Время жизни носителей заряда определяется как процессами рекомбинации локализованных в КТ электронно-дырочных пар, так и процесса-

ми выброса носителей из КТ. Механизмы рекомбинации делятся на излучательные и безызлучательные [10, 11]. Излучательная рекомбинация достаточно хорошо изучена экспериментально и теоретически [1, 10, 12].

Что касается безызлучательных процессов рекомбинации в КТ, то этот вопрос до сих пор остается открытым [13]. В работах [14, 15] представлены детальные экспериментальные исследования времени жизни носителей заряда и пороговых токов в лазерах на КТ. Показано, что при высоких уровнях возбуждения процессы безызлучательной оже-рекомбинации вносят существенный вклад в величину порогового тока лазера.

Анализ механизмов оже-рекомбинации в КТ на основе CdS впервые выполнен в работе [16]. В работе [17] представлен обзор экспериментальных и теоретических работ посвященных исследованию оже-рекомбинации в полупроводниковых кристаллах нанометровых размеров. В работе [18] экспериментально было измерено характерное время оже-рекомбинации в КТ. Показано, что для КТ малого радиуса скорость оже-рекомбинации

*E-mail: zegrya@theory.ioffe.ru

существенно больше скорости излучательной рекомбинации. Экспериментально измеренное время безызлучательной рекомбинации составляет величину порядка 10–100 пс, тогда как время излучательной рекомбинации порядка 1 нс. Однако в теоретических работах, представленных в обзоре [17], отсутствует детальный анализ зависимости скорости оже-рекомбинации от температуры и параметров КТ: радиуса КТ и глубины квантовых ям для электронов и дырок. Для полупроводниковых КТ на основе соединений A_3B_5 анализ механизмов оже-рекомбинации был выполнен в работах [19–21]. В этих работах рассматривается беспороговый процесс оже-рекомбинации, связанный с рассеянием носителей заряда на гетерогранице, впервые предсказанный в работе [22]. Качественный анализ зависимости скорости беспороговой оже-рекомбинации от радиуса КТ выполнен в работах [15, 17, 20, 21, 23]. Как будет показано ниже, беспороговый канал оже-рекомбинации существен для КТ малого радиуса. С ростом радиуса КТ скорость беспорогового процесса оже-рекомбинации убывает очень резко и в пределе, когда радиус КТ стремится к бесконечности, скорость стремится к нулю. Поэтому беспороговый канал оже-рекомбинации — не единственный безызлучательный процесс оже-рекомбинации в КТ. В работе [20] впервые была предпринята попытка классифицировать механизмы оже-рекомбинации в КТ. Показано, что для локализованных носителей заряда в КТ возможны два механизма оже-рекомбинации: беспороговый и квазипороговый. Квазипороговый процесс обусловлен пространственным ограничением волновых функций носителей заряда областью КТ. Данный механизм оже-рекомбинации аналогичен квазипороговому процессу в квантовых ямах [24, 25] и в квантовых нитях [26]. Беспороговый механизм связан с рассеянием электрона (дырки) на гетерогранице; при этом возбужденному носителю передаются большой момент импульса и большой квазиимпульс (т.е. нормальная к гетерогранице компонента квазиимпульса). В квантовых ямах беспороговый процесс связан с рассеянием квазиимпульса частицы на гетеробарьере [24]; при этом возбужденному носителю заряда передается большой квазиимпульс. Беспороговый процесс оже-рекомбинации в квантовых нитях связан с рассеянием на гетерогранице как квазиимпульса, так и момента импульса [26]. Недавно было показано [27], что в КТ при больших уровнях возбуждения возможен еще один канал оже-рекомбинации, связанный с кулоновским взаимодействием носителей заряда, локализованных в

КТ, с носителями заряда в барьерной области. Характерное время такого канала оже-рекомбинации зависит от концентрации носителей в барьерной области. При высоких температурах данный канал оже-рекомбинации будет контролировать время жизни носителей заряда в КТ.

Настоящая работа посвящается теоретическому исследованию основных механизмов оже-рекомбинации неравновесных носителей заряда в полупроводниковых квантовых точках. Основное внимание будет уделено исследованию беспорогового и квазипорогового процессов рекомбинации. Будет показано, что для беспорогового оже-процесса, связанного с рассеянием носителей заряда на гетеробарьере, вероятность рекомбинации пропорциональна высоте гетеробарьеров для электронов и дырок и величине переданного при рассеянии полного момента импульса; при стремлении радиуса квантовой точки к бесконечности, т.е. при переходе к однородному полупроводнику, вероятность оже-рекомбинации для беспорогового процесса стремится к нулю. Совершенно иначе ведет себя квазипороговый механизм оже-рекомбинации. Квазипороговый процесс связан с ограничением области перекрытия волновых функций частиц объемом квантовой точки. Следовательно в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга это ведет к замене δ -функции в законе сохранения квазиимпульса функцией, стремящейся к ней в пределе $R \rightarrow \infty$; здесь R — радиус квантовой точки. Этот механизм оже-рекомбинации переходит в пороговый трехмерный процесс оже-рекомбинации при стремлении радиуса КТ к бесконечности. Вероятность квазипорогового процесса оже-рекомбинации также пропорциональна полному моменту импульса рассеянной частицы. В работе будут получены условия, при которых процессы оже-рекомбинации в КТ преобладают над процессами излучательной рекомбинации. Будет найдено предельное значение радиуса квантовой точки, при котором пропадает связанное состояние; при этом вероятность оже-рекомбинации стремится к нулю при стремлении радиуса КТ к критическому радиусу. Ниже для простоты рассматривается квантовая точка сферической симметрии.

2. УРАВНЕНИЯ КЕЙНА И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для исследования механизмов оже-рекомбинации в КТ необходимо найти волновые функции и спектр носителей заряда. Для нахождения волновых функций воспользуемся моделью Кейна, кото-

рая наиболее точно описывает спектр и волновые функции носителей заряда в узкозонных полупроводниках A_3B_5 [28]. Волновые функции электронов в зоне проводимости в центре зоны Бриллюэна описываются представлением Γ_6^+ ; они дважды вырождены. Волновые функции в валентной зоне описываются представлениями Γ_7^+ и Γ_8^+ ; представление Γ_8^+ четырехкратно вырождено. Как правило, базисные волновые функции зоны проводимости и валентной зоны берутся в виде собственных функций углового момента [28–30]. Однако в случае сферической симметрии более подходящим является другое представление базисных функций [29]:

$$|s\rangle, |p_+\rangle, |p_-\rangle, |p_z\rangle, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |p_+\rangle &= 1/\sqrt{2} |p_x + ip_y\rangle, \\ |p_-\rangle &= 1/\sqrt{2} |p_x - ip_y\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

В формуле (1) $|s\rangle$ и $|p\rangle$ — блоховские функции s - и p -типа, соответствующие собственным значениям углового момента 0 и 1 оператора \hat{L}^2 . Первые функции s -типа описывают состояние зоны проводимости, а p -типа — состояние валентной зоны в Γ -точке. В дальнейшем, однако, мы будем использовать разложение по этому базису с помощью шаровых векторов, являющихся собственными функциями для операторов \hat{J}^2 , \hat{J}_z , \hat{L}^2 и \hat{L}_1^2 . Полный момент частиц равен $\hat{J} = \hat{L} + \hat{L}_1$; где \hat{L} — оператор орбитального момента, действующего на огибающие волновой функции (отвечает за момент электрона в сферической квантовой точке), а \hat{L}_1 — угловой момент, действующий на блоховские функции. При этом для удобства мы не включаем сюда спин электрона, поскольку в работе спин-орбитальное взаимодействие не учитывается. Тогда без учета спина полный момент электрона будет целым числом. Сохраняющимися величинами, описывающими поведение частиц в рамках симметрии задачи, будут квадрат полного момента и его проекция на ось z ; в дальнейшем будем использовать обозначения j и m для собственных значений полного момента и его проекции на ось z . Ниже будем рассматривать уравнения Кейна без учета спин-орбитального взаимодействия. Как показано в работах [24, 26], учет спин-орбитального взаимодействия при расчете скорости оже-рекомбинации приводит к умножению скорости на функцию $F(\Delta_{so}/E_g)$, где Δ_{so} — константа спин-орбитального взаимодействия, а E_g — ширина запрещенной зоны полупроводника. При любых соотношениях между Δ_{so} и E_g функция $F(x)$ меняется мало,

максимальное значение $F(x) = 1$, минимальное значение $F(x) \approx 0.9$; т. е. в общем виде $F(x) \leq 1$. При этом пренебрежение спин-орбитальным взаимодействием дает возможность существенно упростить уравнения и получить аналитические выражения для вероятности оже-рекомбинации (речь не идет об оже-рекомбинации дырок с переходом в спин-орбитальную зону).

Волновая функция носителей заряда может быть представлена в виде

$$\Psi = \Psi_s |s\rangle + \Psi |p\rangle. \quad (3)$$

Уравнения Кейна для огибающих Ψ_s и Ψ в сферическом приближении имеют вид [24]

$$\begin{cases} (E_g - E)\Psi_s - i\hbar\gamma\nabla\Psi = 0, \\ -E\Psi - i\hbar\gamma\nabla\Psi_s + \frac{\hbar^2}{2m}(\gamma_1 + 4\gamma_2)\nabla(\nabla\Psi) - \\ - \frac{\hbar^2}{2m}(\gamma_1 - 2\gamma_2)(\nabla \times (\nabla \times \Psi)) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь γ — кейновский матричный элемент [28], имеющий размерность скорости, γ_1 и γ_2 — обобщенные параметры Латтинжера [29], m — масса свободного электрона. Как показано в работах [24, 26], система уравнений Кейна не отличается от обычно используемых в литературе уравнений [30]. В первом уравнении системы (4) мы пренебрегли слагаемым с большой массой для электронов [22, 31]. Фурье-преобразование уравнений системы (4) позволяет получить спектры для электронов:

$$k^2 = \frac{\mathcal{E}(\mathcal{E} + E_g)}{\hbar^2\gamma^2}, \quad (5a)$$

и тяжелых дырок:

$$E_h = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_h}. \quad (5b)$$

Для дырок энергия E отсчитывается от вершины валентной зоны; а энергия электронов \mathcal{E} — от дна зоны проводимости. Здесь k — значение квазиимпульса носителей,

$$m_h^{-1} = m^{-1}(\gamma_1 - 2\gamma_2). \quad (6)$$

В данном случае m_h совпадает с массой тяжелой дырки. Выражение для плотности потока вероятности может быть получено из системы уравнений (4) путем подстановки $E \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ или с помощью $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -метода во втором порядке теории возмущений [24]; в результате плотности потока вероятности для электронов и дырок имеют вид

$$\mathbf{j}_e = \gamma(\Psi_s\Psi^* + \Psi_s^*\Psi), \quad (7)$$

$$\mathbf{j}_h = \frac{E_g - E}{2m_l} (\Psi_s \Psi^* + \Psi_s^* \Psi) - \frac{i\hbar}{2m_h} (\Psi \times \text{rot } \Psi^* - \Psi^* \times \text{rot } \Psi), \quad (8)$$

где $m_l^{-1} = 2\gamma^2/(E_g - E) + m^{-1}(\gamma_1 + 4\gamma_2)$.

Выражение для m_l совпадает с массой легкой дырки, так как константа спин-орбитального взаимодействия равна нулю. В дальнейшем нам понадобятся граничные условия для волновых функций на гетерогранице. Проблема граничных условий для волновых функций на гетерогранице до сих пор не решена окончательно. Наиболее продуктивным для этого является метод, развитый Бертом [31]. Согласно ему, из системы уравнений (4) можно получить уравнения Кейна, которые могут быть проинтегрированы по границе раздела:

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_g - E)\Psi_s - i\hbar\gamma\nabla\Psi = 0, \\ -E\Psi - i\hbar\gamma\nabla\Psi_s + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla[6\gamma_2\nabla\Psi] + \\ + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma_1 - 2\gamma_2)\frac{\partial}{\partial x_k}\Psi = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Используя эту систему уравнений и закон сохранения плотности потока вероятности, можно получить граничные условия для огибающих волновых функций на границе раздела [24] (формулы (16) и (20)). При этом используется приближение $\gamma_1, \gamma_2 = \text{const}$, а также учитывается, что эффективная масса тяжелых дырок намного больше эффективной массы электронов: $m_h \gg m_e$.

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ

Волновые функции и спектр носителей заряда могут быть получены из решения системы уравнений (4). Удобно рассматривать отдельно состояния электронов и дырок.

3.1. Состояния электронов в квантовой точке

Для электронов, как уже было отмечено выше, уравнения Кейна (9) упрощаются и имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{E}\Psi_s - i\hbar\gamma\nabla\Psi = 0, \\ -(\mathcal{E} + E_g)\Psi - i\hbar\gamma\nabla\Psi_s = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Выражая из второго уравнения Ψ через Ψ_s и подставляя в первое уравнение, получаем уравнение

для Ψ_s . Запишем его в сферической системе координат. Переменные разделяются и волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi_s = R(r)Y_{jm}(\theta, \phi). \quad (11)$$

Здесь $Y_{jm}(\theta, \phi)$ — сферические функции. Для радиальной части волновой функции $R(r)$ имеет место уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2}R + k^2R = 0, \quad (12)$$

где k^2 дается уравнением (5) для электронов. Решение уравнения (12) известно и представляет собой сферические функции Бесселя ($R \propto j_j(kr)$). Тогда для волновых функций электронов внутри КТ (при $r < R$) получим

$$\begin{aligned} \Psi_s &= A j_j(kr) Y_{jm}(\theta, \phi), \\ \Psi &= \frac{-i\hbar\nabla\Psi_s}{\mathcal{E} + E_g}, \\ \nabla\Psi_s &= Ak \left(\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} j_{j+1}(kr) \mathbf{Y}_{lm}^{j+1}(\theta, \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} j_{j-1}(kr) \mathbf{Y}_{lm}^{j-1}(\theta, \phi) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где A — нормировочная константа. Аналогично, волновая функция электронов под барьером при $r > R$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_s &= B k_j(\kappa r) Y_{jm}(\theta, \phi), \\ \Psi &= \frac{-i\hbar\nabla\Psi_s}{\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{E}_g}, \\ \nabla\Psi_s &= B\kappa \left(-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} k_{j+1}(\kappa r) \mathbf{Y}_{lm}^{j+1}(\theta, \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} k_{j-1}(\kappa r) \mathbf{Y}_{lm}^{j-1}(\theta, \phi) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь B — нормировочная константа и

$$\kappa^2 = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{E}_g)}{\hbar^2\gamma^2} = \frac{(V_c - \mathcal{E})(\mathcal{E} + E_g + V_v)}{\hbar^2\gamma^2}, \quad (15)$$

где V_c и V_v — высоты гетеробарьеров, соответственно, для электронов и дырок, $k_j(x)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя, связанная с цилиндрической следующим соотношением:

$$k_j(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{j+1/2}(x).$$

Граничные условия для огибающих волновых функций можно получить путем интегрирования уравнений Кейна (9) по границе раздела. Используя закон сохранения плотности потока вероятности и приближение $\gamma = \text{const}$, что является хорошим приближением для полупроводниковых структур A_3B_5 , получаем непрерывность следующих функций:

$$[\Psi_s]_R = 0, \quad \left(\frac{1}{\mathcal{E} + E_g} \frac{\partial \Psi_s^<}{\partial r} \right)_R = \left(\frac{1}{\mathcal{E} + E_g + V_v} \frac{\partial \Psi_s^>}{\partial r} \right)_R. \quad (16)$$

Индексы «<» и «>» означают, что величины берутся соответственно слева и справа от гетерограницы. Из граничных условий (16) следуют дисперсионные соотношения для электронов:

$$j_j(kR) \left[\kappa \tilde{Z} \left(\frac{j k_j(\kappa R)}{\kappa R} - k_{j+1}(\kappa R) \right) \right] = k_j(\kappa R) \left[k Z \left(\frac{j j_j(kR)}{k R} - j_{j+1}(kR) \right) \right]. \quad (17)$$

Полагая в формуле (17) $j = 0$, получаем для электронов дисперсионное уравнение

$$\frac{j_0(kR)}{j_1(kR)} = \frac{k Z}{\kappa \tilde{Z}} \frac{k_0(\kappa R)}{k_1(\kappa R)}, \quad (18)$$

где $Z = 1/(\mathcal{E} + E_g)$ — слева от барьера и $\tilde{Z} = 1/(\mathcal{E} + E_g + V_v)$ — справа от барьера.

3.2. Волновые функции дырок

Волновые функции легких дырок можно не писать. Достаточно заметить, что они аналогичны по виду волновым функциям электронов и отличие проявляется лишь в эффективной массе. Волновые функции тяжелых дырок отличаются по виду от волновых функций для электронов. В модели Кейна тяжелые дырки являются двукратно вырожденными, причем чтобы они были ортогональны функциям легких дырок и электронов, следует положить $\psi_s = 0$. Для их нахождения уравнения Кейна (4) следует переписать с учетом разложения волновой функции по базису шаровых функций. С учетом сказанного волновые функции имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{h1}^< &= A_1 j_j(k_h r) \mathbf{Y}_{jm}^j(\theta, \phi), \\ \Psi_{h2}^< &= A_2 \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}} j_{j+1}(k_h r) \mathbf{Y}_{jm}^{j+1}(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} j_{j-1}(k_h r) \mathbf{Y}_{jm}^{j-1}(\theta, \phi) \right), \quad r < R, \\ \Psi_{h1}^> &= B_1 k_j(\kappa_h r) \mathbf{Y}_{jm}^j(\theta, \phi), \\ \Psi_{h2}^> &= B_2 \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}} k_{j+1}(\kappa_h r) \mathbf{Y}_{jm}^{j+1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} k_{j-1}(\kappa_h r) \mathbf{Y}_{jm}^{j-1}(\theta, \phi) \right), \quad r > R, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\kappa_h = \sqrt{2m_h(V_v - E)/\hbar^2}$, A_i и B_i — нормировочные константы. Видно, что две волновые функции для тяжелых дырок имеют разную поляризацию. Как будет показано далее, первая волновая функция не дает вклада в оже-процесс.

Для вывода граничных условий необходимо проинтегрировать уравнения Кейна для тяжелых дырок через границу раздела. Тогда для последних граничные условия примут вид:

$$[\Psi_r]_R = 0, \quad \left[\frac{d\Psi_{\perp}}{dr} \right]_R = 0, \quad (20)$$

где Ψ_{\perp} — огибающая p -компонента волновой функции, перпендикулярная радиус-вектору \mathbf{r} . При выводе формулы (20) считается, что масса тяжелой дырки не меняется при переходе через барьер и что $m_h \gg m_l$. Тогда можно пренебречь смешиванием функций легкой и тяжелой дырок. Окончательно дисперсионное соотношение для тяжелых дырок имеет вид

$$\begin{aligned} j_j(k_h R) \frac{\kappa_h}{k_h} \left[j \left(\frac{(j+1)k_{j+1}(\kappa_h R)}{\kappa_h R} - k_{j+2}(\kappa_h R) \right) + (j+1) \left(\frac{(j-1)k_{j-1}(\kappa_h R)}{\kappa_h R} - k_j(\kappa_h R) \right) \right] = \\ = k_j(\kappa_h R) \frac{k_h}{\kappa_h} \left[j \left(\frac{(j+1)j_{j+1}(k_h R)}{k_h R} - j_{j+2}(k_h R) \right) - (j+1) \left(\frac{(j-1)j_{j-1}(k_h R)}{k_h R} - j_j(k_h R) \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее выражение в пределе бесконечно широкой или бесконечно глубокой квантовой точки переходит в следующее:

$$j_j(k_h R) = 0. \quad (22)$$

Решениями уравнения (22) являются

$$(k_h)_{jn} = \frac{\gamma_{jn}}{R}, \quad (23)$$

где γ_{jn} — n -й корень сферической функции Бесселя $j_j(x)$.

4. ВЕРОЯТНОСТЬ ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИИ

Вероятность оже-рекомбинации в единицу времени согласно золотому правилу Ферми в рамках первого порядка теории возмущений имеет вид

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (24)$$

Здесь M_{fi} — матричный элемент кулоновского взаимодействия. С учетом антисимметризации волновых функций матричный элемент равен

$$M_{fi} = M_I - M_{II}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \left\langle \Psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \left| \frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right| \Psi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right\rangle, \\ M_I &= \left\langle \Psi_3(\mathbf{r}_1)\Psi_4(\mathbf{r}_2) \left| \frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right| \Psi_1(\mathbf{r}_1)\Psi_2(\mathbf{r}_2) \right\rangle, \\ M_{II} &= \left\langle \Psi_3(\mathbf{r}_1)\Psi_4(\mathbf{r}_2) \left| \frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right| \Psi_1(\mathbf{r}_2)\Psi_2(\mathbf{r}_1) \right\rangle, \end{aligned} \quad (26)$$

где ε — высокочастотная диэлектрическая проницаемость полупроводника [11]. Здесь и далее будем считать функции с индексами «1» и «2» — функциями локализованных электронов, функцию с индексом «3» — функцией тяжелой дырки, а функцию с индексом «4» — функцией возбужденного электрона.

В квантовых точках, как и в квантовых ямах и в квантовых нитях, основной вклад в вероятность оже-рекомбинации вносят два процесса: СНСС и СННС¹⁾. Такая терминология, строго говоря не применима к носителям, локализованным в КТ, если имеется смешивание легких, тяжелых и спин-отщепленных дырок. Как уже было отмечено выше, в случае $m_l \ll m_h$ смешивание

¹⁾ Такие общепринятые обозначения [11] следуют из типов взаимодействующих частиц. Так, при СНСС-процессе электрон (С) рекомбинирует с тяжелой дыркой (Н); при этом другой электрон возбуждается высоко по энергии. При СННС-процессе электрон (С) рекомбинирует с тяжелой дыркой (Н); при этом другая тяжелая дырка переходит в спин-отщепленную зону (S).

тяжелых и легких дырок мало. Как показано в работе [24], подмешиванием спин-отщепленных дырок к тяжелым можно пренебречь при выполнении условия $\Delta_{so} \gg T$. Итак, можно пользоваться указанной выше терминологией и для КТ. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением СНСС-процесса оже-рекомбинации. Все зависимости для СННС-процесса при $\Delta_{so} < E_g$ имеют качественно такой же вид, как и для СНСС-процесса. Подробные выражения для вероятности оже-рекомбинации для СННС-процесса рассмотрены в работе [32]. В случае СНСС-процесса в рекомбинации принимают участие два локализованных электрона и одна тяжелая дырка.

5. МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИИ

Волновые функции носителей заряда являются собственными функциями операторов полного момента $\hat{\mathbf{J}}$ и его проекции \hat{J}_z на ось z . В этом случае матричный элемент оже-рекомбинации автоматически удовлетворяет закону сохранения момента импульса и его проекции на ось z . Как было показано выше, для тяжелых дырок существуют две волновые функции, имеющие разные поляризации (19). Первая волновая функция не дает вклада в матричный элемент оже-процесса. Это следует из того, что для шаровых векторов имеет место соотношение [33]

$$\sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\theta, \phi) (\mathbf{Y}_{jm}^j(\theta, \phi))_{\mu} = 0. \quad (27)$$

Поскольку такая комбинация входит в произведение первой функции тяжелой дырки и функции электрона, первая функция не даст вклада в процесс оже-рекомбинации.

Рассмотрим теперь произведение волновой функции тяжелой дырки и волновой функции электрона, которые войдут в выражение для матричного элемента (26) оже-процесса:

$$\begin{aligned} \Psi_3^*(\mathbf{r}_1)\Psi_1(\mathbf{r}_1) &= (-1)^m \frac{i\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \times \\ &\times A_1 A_3 k_1 \sqrt{\frac{j_3(j_3 + 1)}{4\pi}} \left(\frac{j_j(k_3 r_1)}{k_3 r_1} \right) \times \\ &\times j_1(k_1 r_1) Y_{jm}(\theta_1, \phi_1). \end{aligned} \quad (28)$$

В интеграл перекрытия между состояниями, локализованными в КТ, и состояниями непрерывного спектра входит произведение следующих волновых функций электронов:

$$\begin{aligned} \Psi_4^*(\mathbf{r}_2)\Psi_2(\mathbf{r}_2)^< &\approx A_2A_4j_0(k_2r_2)j_{j_4}(k_4r_2) \times \\ &\times Y_{j_4m_4}^*(\theta_2, \phi_2)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ \Psi_4^*(\mathbf{r}_2)\Psi_2(\mathbf{r}_2)^> &\approx B_2B_4k_0(\kappa_2r_2)j_{j_4}(\kappa_4r_2) \times \\ &\times Y_{j_4m_4}^*(\theta_2, \phi_2)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \end{aligned} \quad (29)$$

В формуле (29) мы пренебрегли слагаемым, содержащим скалярное произведение векторных частей волновых функций, так как отношение его к первому слагаемому пропорционально k_2/k_4 . Состояние «4» — это возбужденное состояние электрона, поэтому $k_4 \gg k_2$ (напомним, что $k_4 \approx \sqrt{2mE_g}/\hbar$, а $k_2 \approx \sqrt{2mE_2}/\hbar$, здесь E_2 — энергия первого уровня размерного квантования электрона; поэтому $E_2 \ll E_g$). Матричный элемент кулоновского взаимодействия в случае сферической симметрии удобнее всего вычислять с помощью разложения кулоновского потенциала по мультиполям. Вводя обозначение $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, запишем

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{4\pi}{r_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^j (Y_j(\Omega_1) \cdot Y_j(\Omega_2)) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j^>(r_1, r_2) (Y_j(\Omega_1) \cdot Y_j(\Omega_2)), & r_1 < r_2, \\ \frac{4\pi}{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j (Y_j(\Omega_1) \cdot Y_j(\Omega_2)) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j^<(r_1, r_2) (Y_j(\Omega_1) \cdot Y_j(\Omega_2)), & r_2 < r_1, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$Y_j(\Omega_1) \cdot Y_j(\Omega_2) = \sum_{m=-j}^j Y_{jm}^*(\Omega_1)Y_{jm}(\Omega_2). \quad (31)$$

Тогда матричный элемент можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_I &= (-1)^{m_3} \frac{e^2}{\varepsilon} \int dV_1 \int dV_2 (\mathbf{R}_3^*(r_1)\mathbf{R}_1(r_1)) \times \\ &\times (\mathbf{R}_4^*(r_2)\mathbf{R}_2(r_2))Y_{j_3m_3}(\theta_1, \phi_1)Y_{j_4m_4}^*(\theta_2, \phi_2)\frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (32)$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — радиальные части волновых функций частиц. Матричный элемент M_{II} получается из M_I перестановкой индексов у волновых функций R_1 и R_2 . Функция R_1 отвечает локализованному состоянию электрона, а R_4 — электрону в возбужденном состоянии; рекомбинирующей паре электрон–тяжелая дырка отвечают функции R_2 и R_3 .

Проинтегрировав выражение (32) по углам, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} M_I &= (-1)^{m_3} \int_0^{\infty} r_1^2 dr_1 \times \\ &\times \int_0^{\infty} r_2^2 dr_2 F_{j_3}(r_1, r_2) \delta_{j_4j_3} \delta_{m_4, -m_3}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, для процесса оже-рекомбинации мы получили закон сохранения момента импульса и его проекции на ось z :

$$m = m_4 = -m_3, \quad j = j_4 = j_3. \quad (34)$$

Выражение (34) было получено в пренебрежении моментом импульса для локализованных электронов. Это оправдано, поскольку локализованному электрону с малой эффективной массой и энергией соответствует малое значение полного момента j . Такое предположение существенно упрощает аналитические выражения и незначительно влияет на результат. Состояния с большим моментом для электронов расположены высоко по энергии и их заполнением можно пренебречь.

Вследствие того, что эффективная масса дырки $m_h \gg m_e$, волновая функция дырки быстро затухает под барьером; тогда в матричном элементе можно пренебречь подбарьерной областью перекрытия волновой функции тяжелой дырки и электрона. Нужно отметить, что это вовсе не означает, что задача решается в приближении бесконечного потенциально-го барьера для тяжелой дырки, поскольку ее спектр находится из точных граничных условий (20). При таких предположениях матричный элемент принимает вид

$$M_I = \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1)\mathbf{R}_1(r_1)) \times \\ \times \left[\int_0^{r_1} r_2^2 dr_2 \Phi^< F_j^< + \int_{r_1}^R r_2^2 dr_2 \Phi^< F_j^> + \right. \\ \left. + \int_R^\infty r_2^2 dr_2 \Phi^> F_j^> \right]. \quad (35)$$

В матричном элементе (35) можно выделить два различных вклада. Первый из них связан с наличием гетерограницы. Процесс, определяемый этим вкладом в матричный элемент, соответствует рассеянию возбужденного электрона на гетерогранице. В этом случае возбужденный электрон приобретает большую величину нормальной к границе раздела компоненты квазиимпульса и момента импульса. Такое рассеяние в случае одиночного гетеробарьера [22], квантовой ямы [24] и квантовых нитей [26] приводит к появлению беспорогового канала оже-рекомбинации. Скорость беспорогового процесса оже-рекомбинации стремится к нулю быстрее, чем $1/R^6$, в пределе КТ бесконечного радиуса. Второй вклад в (35) связан с большой передачей квазиимпульса при кулоновском рассеянии электрона [24, 25]. В случае СНСС-процесса оже-рекомбинации происходит возбуждение электрона в непрерывную часть спектра, соответствующего энергии $\mathcal{E}_4 \approx E_g$ и квазиимпульсу $k_4 \approx \sqrt{2m_c E_g}/\hbar$. В этом случае электрон приобретает большую величину проекции полного момента на ось z . При переходе локализованного электрона в непрерывный спектр с увеличением полного момента снятия порога для процесса оже-рекомбинации не происходит. Этот механизм оже-рекомбинации переходит в пороговый процесс оже-рекомбинации при стремлении радиуса КТ к бесконечности. Таким образом, разделяя беспороговый и квазипороговый механизмы оже-рекомбинации в КТ, запишем матричный элемент оже-рекомбинации (35) в виде

$$M_I = M^{(1)} + M^{(2)}, \quad (36)$$

где $M^{(1)}$ — беспороговый, а $M^{(2)}$ — квазипороговый матричные элементы. Они равны

$$M^{(1)} = \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1)\mathbf{R}_1(r_1)) \times \\ \times \left[\int_R^\infty r_2^2 dr_2 \Phi^> F_j^> - \int_R^\infty r_2^2 dr_2 \Phi^< F_j^> \right], \quad (37) \\ M^{(2)} = \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1)\mathbf{R}_1(r_1)) \times \\ \times \left[\int_0^{r_1} r_2^2 dr_2 \Phi^< F_j^< + \int_{r_1}^\infty r_2^2 dr_2 \Phi^< F_j^> \right],$$

где

$$\Phi^< = A_2 A_4 j_0(k_2 r) j_j(k_4 r), \\ \Phi^> = B_2 B_4 k_0(k_2 r) j_j(k_4 r). \quad (38)$$

5.1. Матричный элемент квазипорогового оже-процесса

Как уже было отмечено выше, квазипороговый процесс связан с ограничением области перекрытия волновых функций носителей заряда объемом КТ. Это ведет к замене δ -функции на функцию, стремящуюся к ней в пределе $R \rightarrow \infty$. Рассмотрим матричный элемент квазипорогового оже-процесса $M^{(2)}$. Общее выражение для матричного элемента приведено в Приложении А. Ниже мы приведем выражение для матричного элемента в пределе больших значений радиуса КТ R (формула (64) Приложения А):

$$M^{(2)} \approx \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{1}{k_4^2} \frac{\hbar \gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \frac{1}{R^5} \frac{2k_c}{k_3} \times \\ \times \sqrt{j(j+1)} \frac{\sin((k_4 - k_3)R)}{k_4 - k_3}. \quad (39)$$

Итак, мы получили, что

$$M^{(2)} \propto \frac{\sin(k_4 - k_3)R}{k_4 - k_3}. \quad (40)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ это выражение, возведенное в квадрат, дает δ -функцию, умноженную на радиус квантовой точки:

$$|M^{(2)}|^2 \propto \frac{\sin^2(k_4 - k_3)R}{(k_4 - k_3)^2} \rightarrow \frac{\pi R}{2} \delta(k_4 - k_3). \quad (41)$$

Отсюда ясно виден закон сохранения квазиимпульса, что приводит к наличию порога в этом пределе, и поэтому коэффициент оже-рекомбинации $C^{(2)}$ после умножения на V^2 переходит в трехмерное выра-

жение для коэффициента оже-рекомбинации; здесь $V = (4\pi/3)R^3$ — объем КТ²⁾.

5.2. Матричный элемент беспорогового оже-процесса

Беспороговый оже-процесс связан с рассеянием носителей на гетерогранице. Это означает, что величина $M^{(1)}$ определяется значениями волновых функций и их производных на гетерогранице; следовательно $M^{(1)} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Подробное вычисление матричного элемента приведено в Приложении В; здесь же мы выпишем только окончательное выражение (формула (71) Приложения В):

$$M^{(1)} = (-1)^{m+1} \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{i\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \times \\ \times A_1 A_2 A_3 A_4 \frac{k_1}{k_3^2} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \times \\ \times j_1(k_1 R) j_0(k_2 R) j_{j+1}(k_3 R) \frac{R}{k_4^2} \times \\ \times \left[(j+1) \frac{V_v}{\mathcal{E}_4 + E_g} j_j(k_4 R) + (k_4 R) \frac{V_c}{\mathcal{E}_4} j_{j-1}(k_4 R) \right]. \quad (42)$$

Итак, из выражений для $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ следует, что в обоих матричных элементах для оже-процесса отсутствует закон сохранения квазиимпульса. Однако механизмы, приводящие к снятию запрета на несохранение квазиимпульса для двух процессов, как уже было отмечено выше, разные. Так, в матричном элементе $M^{(1)}$ несохранение квазиимпульса связано с рассеянием носителей заряда на гетеробарьере; при этом матричный элемент $M^{(1)}$ пропорционален высотам гетеробарьеров для электронов и дырок. Также видно, что при $R \rightarrow \infty$ матричный элемент $M^{(1)} \rightarrow 0$. Выражение для квазипорогового матричного элемента $M^{(2)}$ при больших значениях R пропорционально $\sin(k_4 - k_3)R / (k_4 - k_3)$ и в пределе $R \rightarrow \infty$ этот множитель переходит в δ -функцию. Это означает, что данный механизм оже-рекомбинации переходит в обычный пороговый процесс для трехмерного полупроводника.

Следует отметить, что для сферической ямы конечной глубины существует критический радиус R^* , при котором исчезает связанное состояние для носителей заряда. Рассмотрим поведение матричных

элементов для кулоновского взаимодействия вблизи критического радиуса. При радиусах квантовой точки $R > R^*$ волновая функция носителей заряда локализована в основном в области под барьером. Это значит, что нормировочные коэффициенты для волновых функций электронов A_1 и A_2 при этом стремятся к нулю. При этом вовсе не нарушается предположение, что перекрытием волновых функций тяжелой дырки и локализованного электрона можно пренебречь. Действительно, гораздо раньше исчезнет связанное состояние для электронов в КТ, чем для тяжелых дырок, поскольку $m_h \gg m_e$. Поэтому в то время как волновая функция электрона локализована под барьером, волновая функция тяжелой дырки остается быстро затухающей под барьером. Тогда $M^{(i)} \propto (R - R^*)$, где $i = 1, 2$.

6. СКОРОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИИ

Для нахождения скорости оже-рекомбинации необходимо просуммировать вероятность оже-перехода в единицу времени по всем начальным и конечным состояниям носителей:

$$G = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} |M_{fi}|^2 f_1 f_2 (1 - f_3) (1 - f_4) \times \\ \times \delta(\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2). \quad (43)$$

Здесь f_1, f_2 — степени заполнения электронного уровня в начальном состоянии, f_3, f_4 — степени заполнения в конечном состоянии. В формуле (43) подразумевается также суммирование и по j , и по m . Для высоковозбужденных состояний функцию распределения f_4 можно положить равной нулю. Далее, вместо $1 - f_3$ можно писать \tilde{f}_3 , где \tilde{f}_3 — степень заполнения дырочного уровня; \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — энергии электронов в начальном состоянии, \mathcal{E}_3 — энергия дырки в начальном состоянии, \mathcal{E}_4 — энергия электрона в конечном состоянии. Нужно отметить, что скорость оже-рекомбинации (43) имеет размерность обратного времени (с^{-1}). Вклады в скорость оже-рекомбинации от беспорогового и квазипорогового матричных элементов M_1 и M_2 , вообще говоря, нельзя разделить, так как между ними имеет место интерференция. При малых значениях радиуса КТ эта интерференция особенно существенна, поскольку оба процесса являются беспороговыми. Для КТ большого радиуса интерференцией между $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ можно пренебречь, так как основные квазипороговые переходы в отличие от беспороговых происходят с участием тяжелых дырок с большим значением момента импульса. С учетом этих

²⁾ В формуле (41) присутствие δ -функции означает действительно закон сохранения квазиимпульса \mathbf{k} . Мы учли, что в случае сферической системы координат $\delta(\mathbf{k}) = (\delta(k) / \sin(\theta) k^2) \delta(\phi) \delta(\theta)$.

замечаний ясно, что пренебрежение интерференцией дает почти точный результат для КТ большого радиуса и приводит к результату правильному по порядку величины для КТ малого радиуса. Кроме этого, два механизма имеют различную температурную зависимость и поэтому вклады в суммарный процесс оже-рекомбинации могут быть разделены при не слишком маленьких радиусах КТ. Полученная таким образом скорость оже-рекомбинации имеет правильную зависимость от температуры и от параметров КТ: от ее радиуса, высот барьеров для электронов и дырок. Введем коэффициент оже-рекомбинации, связанный со скоростью следующим соотношением:

$$G = Cn^2p, \quad (44)$$

где n и p — числа электронов и дырок в КТ. Пренебрегая интерференцией между вкладами от различных процессов, представим коэффициент оже-рекомбинации в виде

$$C = C^{(1)} + C^{(2)}, \quad (45)$$

где коэффициенты $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ соответствуют беспороговому и квазипороговому оже-процессам с матричными элементами $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, которые даются выражениями (42) и (63) (Приложение А).

Выражение для коэффициента оже-рекомбинации может быть получено при подстановке матричного элемента M_{fi} в формулу (43). Согласно определению для коэффициента оже-рекомбинации для КТ (44), мы перенормируем функции распределения f_i , где $i = 1, 2, 3$, на единицу; тогда мы получим нуль-мерный коэффициент оже-рекомбинации для КТ. Нуль-мерный коэффициент оже-рекомбинации C , так же, как и G , имеет размерность с^{-1} . В дальнейшем будем вычислять коэффициент оже-рекомбинации. Эффективное число состояний для возбужденных электронов имеет вид

$$d\Gamma_4 = \frac{R dk_4}{\pi}. \quad (46)$$

Согласно дисперсионному уравнению (5а), волновой вектор возбужденного электрона равен

$$k_4^2 = \frac{\mathcal{E}_4(\mathcal{E}_4 + E_g)}{\hbar^2 \gamma^2}. \quad (47)$$

Поскольку энергия возбужденного электрона $\mathcal{E}_4 \approx E_g$, из формулы (47) получаем

$$dk_4 \approx \frac{d\mathcal{E}_4}{\hbar \gamma}. \quad (48)$$

Подставляя все это в формулу (43), мы можем провести интегрирование по k_4 с помощью δ -функции. В результате для коэффициента оже-рекомбинации получаем

$$C = \frac{2}{\hbar} \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{R}{\hbar \gamma} f_1 f_2 \tilde{f}_3 |M_{fi}|^2. \quad (49)$$

Выражение для беспорогового коэффициента оже-рекомбинации может быть получено подстановкой матричного элемента (42) в (49). В результате получаем

$$C^{(1)} \approx \frac{128 E_B}{\pi^3 \hbar} \left(\frac{E_R}{E_g} \right)^{3/2} \times \\ \times \sum_{k_1, k_2, k_3} f_1 f_2 \tilde{f}_3 \frac{k_1^2}{R^2 k_3^4} \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} \times \\ \times \left(\frac{j_0(k_c R) j_1(k_c R)}{\frac{j_0^2(k_c R)}{k_0^2(\kappa_c R)} k_1(\kappa_c R) k_{-1}(\kappa_c R) - j_1(k_c R) j_{-1}(k_c R)} \right)^2 \times \\ \times \left(\frac{j+1}{k_4 R} \frac{V_v}{\mathcal{E}_4 + E_g} j_j(k_4 R) + j_{j-1}(k_4 R) \frac{V_c}{\mathcal{E}_4} \right)^2, \quad (50)$$

где

$$k_4 \approx \sqrt{\frac{4m_c E_g}{\hbar^2} + 3 \left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{m_c}{m_h} k_3^2 \right)}. \quad (51)$$

Здесь $E_B = m_c e^4 / 2 \hbar^2 \epsilon^2$ — характерная (боровская) энергия межэлектронного взаимодействия; $E_R = \hbar^2 \pi^2 / 2 m_c R^2$ — характерная энергия размерного квантования в КТ. При выводе формулы (50) мы учли, что $\gamma = \sqrt{E_g / 2 m_c}$.

Следует отметить, что при больших радиусах КТ, в пределе $R \rightarrow \infty$, беспороговый коэффициент оже-рекомбинации $C^{(1)}$ стремится к нулю как $1/R^7$. Поэтому даже после умножения на R^6 , т.е. на V^2 , $C^{(1)}$ остается убывающей функцией радиуса КТ. Поэтому беспороговый процесс оже-рекомбинации может быть преобладающим только для КТ малого радиуса. Из формулы (50) отчетливо видно, что беспороговый процесс оже-рекомбинации связан с рассеянием носителей заряда на гетерогранице, так как коэффициент $C^{(1)}$ пропорционален V_c и V_v . Для коэффициента квазипорогового оже-процесса после под-

становки матричного элемента (39) в (49) получаем

$$C^{(2)} \approx \frac{8}{\pi^7} \frac{E_B}{\hbar} \left(\frac{E_R}{E_g} \right)^{7/2} \sum_{k_1, k_2, k_3} f_1 f_2 \tilde{f}_3 \frac{k_1^2}{k_3^2} \times$$

$$\times \left(\frac{j_0(k_c R) j_1(k_c R)}{\frac{j_0^2(k_c R)}{k_0^2(k_c R)} k_1(\kappa_c R) k_{-1}(\kappa_c R) - j_1(k_c R) j_{-1}(k_c R)} \right)^2$$

$$\times j(j+1) \frac{\sin^2(k_4 - k_3) R}{(k_4 - k_3)^2 R^2}. \quad (52)$$

Как и следовало ожидать, $C^{(2)}$ отличается от $C^{(1)}$. Различие между двумя разными процессами рекомбинации выражается разными множителями: в $C^{(1)}$ входит отношение $(V_{c,v}/E_g)^2$, что связано с рассеянием электрона на гетерогранице; а в $C^{(2)}$ входит множитель $\sin^2 kR/(kR)^2$, что является причиной нарушения закона сохранения квазиимпульса электрона из-за его локализации в пределах КТ.

Следует отметить, что коэффициент $C^{(2)}$, как и $C^{(1)}$, пропорционален величине полного момента j . В пределе КТ бесконечного радиуса выражение для квазипорогового коэффициента оже-рекомбинации переходит в выражение для коэффициента оже-рекомбинации в однородном полупроводнике. Чтобы перейти в (52) к пределу при $R \rightarrow \infty$, следует перейти от суммирования по дискретным состояниям к интегрированию по непрерывным, так как в этом случае уровни размерного квантования сливаются в непрерывный спектр. Кроме того, при $R \rightarrow \infty$ в формуле (52) можно провести замену

$$\frac{\sin^2((k_4 - k_3) R)}{(k_4 - k_3)^2} \rightarrow \frac{\pi R}{2} \delta(k_4 - k_3). \quad (53)$$

Из этого выражения явно видно наличие порога в этом пределе, т. е. имеет место закон сохранения квазиимпульса. В результате для коэффициента квазипорогового процесса получаем

$$C^{(2)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{R^6} \frac{e^4}{\varepsilon^2} \frac{\hbar^3}{m_c^{1/2} m_h^{3/2} E_g^{5/2} T^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{E_{th}}{T}\right), \quad (54)$$

где E_{th} — пороговая энергия СНСС-процесса в однородном полупроводнике; в модели Кейна $E_{th} \approx 2m_c/m_h E_g$ [22]. Выражение (54) можно сравнить с известными результатом для коэффициента оже-рекомбинации в однородном полупроводнике [30]. Для этого домножим равенство (54) на квадрат объема КТ V^2 . Тогда наше предельное выра-

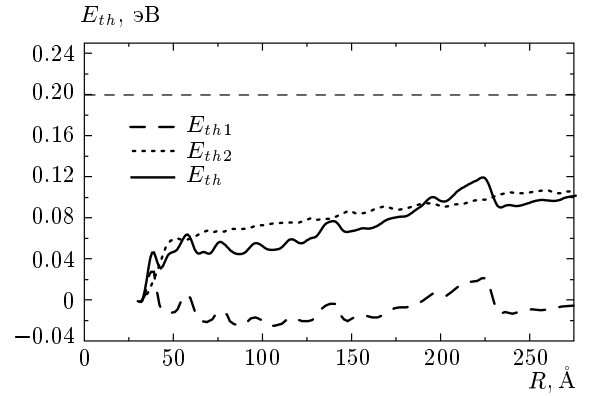


Рис. 1. Зависимость пороговой энергии для оже-процесса от радиуса КТ при температуре $T = 300$ К для структуры InGaAsP/GaAs , E_{th1} соответствует беспороговому процессу, E_{th2} — квазипороговому, E_{th} — суммарному процессу. Горизонтальная штриховая линия отвечает пороговой энергии для трехмерного оже-процесса E_{th}^{3D}

жение и выражение из работы [30] практически совпадают:

$$V^2 C^{(2)} = \frac{64}{9} \pi^{5/2} \frac{e^4}{\varepsilon^2} \frac{\hbar^3}{m_c^{1/2} m_h^{3/2} E_g^{5/2} T^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{E_{th}}{T}\right), \quad (55)$$

$$C_{3D} = 6\sqrt{2} \pi^{5/2} \frac{e^4}{\varepsilon^2} \frac{\hbar^3}{m_c^{1/2} m_h^{3/2} E_g^{5/2} T^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{E_{th}}{T}\right). \quad (56)$$

Небольшое различие в численном коэффициенте связано во-первых с тем, что в работе [30] сделано предположение, что $\Delta_{SO} \gg E_g$; мы, наоборот, положили $\Delta_{so} = 0$.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Микроскопический анализ процессов оже-рекомбинации в полупроводниковых структурах с КТ показал, что существуют два различных механизма оже-рекомбинации: беспороговый и квазипороговый. В квантовых ямах, помимо указанных двух процессов оже-рекомбинации, существует еще и третий процесс, связанный с переходом электрона в дискретный спектр; при этом возбужденный электрон с большой энергией остается в связанном состоянии. В квантовых нитях изменения, по сравнению с КТ, претерпевает беспороговый процесс

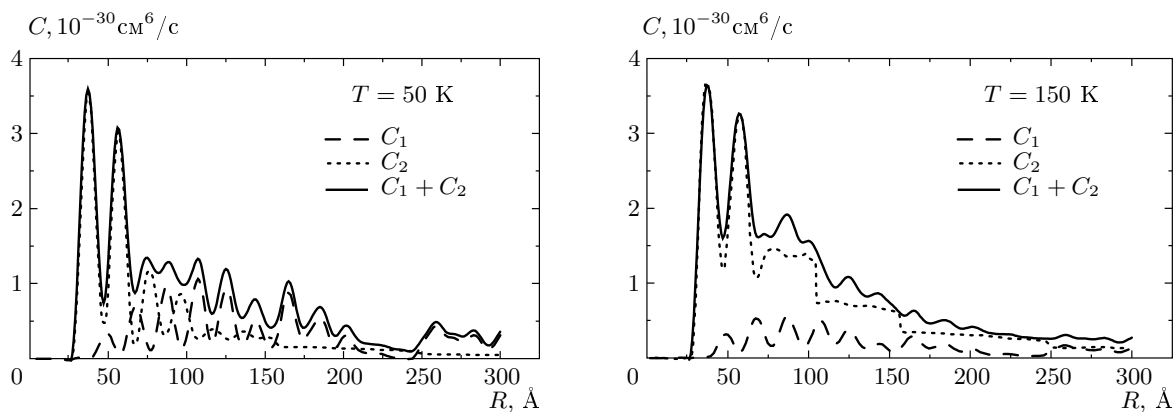


Рис. 2. Зависимость суммарного коэффициента оже-рекомбинации от радиуса КТ и парциальные вклады при температурах $T = 50$ К и $T = 150$ К. При этих температурах скорость оже-процесса для однородного полупроводника на несколько порядков меньше, чем скорость оже-процесса в квантовой точке

оже-рекомбинации. В квантовых нитях беспороговый процесс имеет два канала, связанных с передачей возбужденному электрону квазиимпульса и момента импульса. На рис. 1 представлена зависимость пороговой энергии от радиуса КТ для двух механизмов оже-рекомбинации $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ в отдельности и для суммарного процесса оже-рекомбинации $C = C^{(1)} + C^{(2)}$, определенной по формуле

$$E_{th}^i = T^2 \frac{d \ln C^{(i)}}{dT}, \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Горизонтальная штриховая линия на рис. 1 соответствует пороговой энергии E_{th}^{3D} для трехмерного оже-процесса [30]. Для беспорогового оже-процесса пороговая энергия убывает с ростом радиуса КТ и при определенном значении радиуса становится отрицательной. Такое поведение связано с тем, что коэффициент оже-рекомбинации $C^{(1)}$ становится убывающей функцией температуры для достаточно больших радиусов КТ (см. ниже рис. 4). Пороговая энергия для квазипорогового процесса положительна и меньше трехмерного значения E_{th}^{3D} . С ростом радиуса КТ пороговая энергия для суммарного коэффициента оже-рекомбинации стремится к своему предельному значению E_{th}^{3D} .

На рис. 2 и 3 приведены зависимости коэффициентов оже-рекомбинации $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ от радиуса КТ при различных температурах для структуры на основе InGaAsP/InP (с шириной запрещенной зоны в области КТ, равной 1 эВ). Во-первых, суммарный коэффициент оже-рекомбинации является немонотонной функцией радиуса КТ в широком диапазоне температур; т. е. имеется резко выраженный

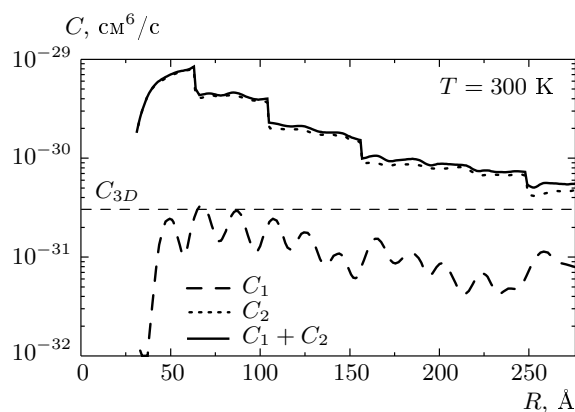


Рис. 3. Зависимость суммарного коэффициента оже-рекомбинации от радиуса КТ и парциальные вклады при температуре $T = 300$ К. Горизонтальная линия соответствует оже-коэффициенту в однородных полупроводниках C_{3D}

максимум. Важно отметить, что положение максимумов слабо зависит от температуры. Во-вторых, как видно на рисунке, с ростом температуры возрастает относительная роль квазипорогового процесса оже-рекомбинации. Немонотонная зависимость коэффициента оже-рекомбинации от R имеет следующее объяснение: для малых значений радиуса КТ малость оже-коэффициента связана, в первую очередь, со слабым перекрытием волновых функций электронов и дырок, находящихся в связанных состояниях; во-вторых, при $R = R^*$ связанное состояние вообще отсутствует и интеграл перекрытия равен нулю. При дальнейшем увеличении радиуса

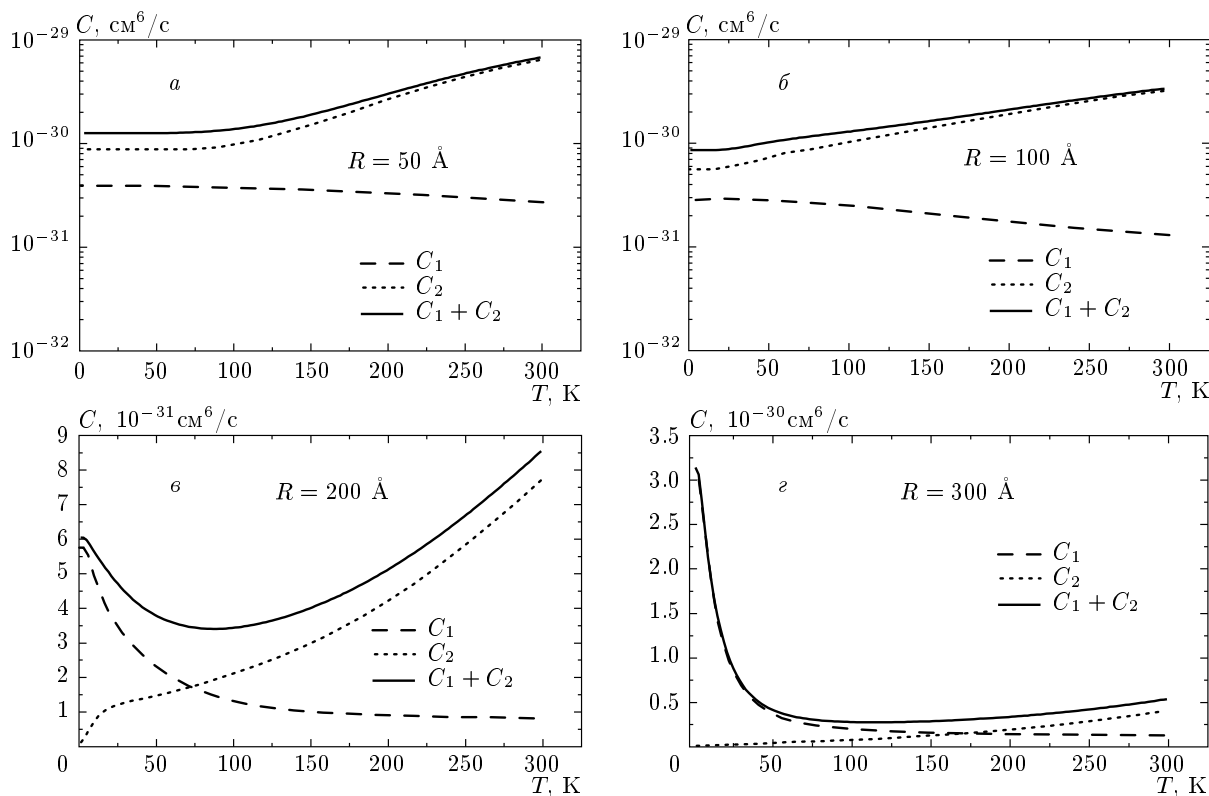


Рис. 4. Температурная зависимость коэффициентов оже-рекомбинации при различных радиусах КТ для структуры $\text{InGaAsP}/\text{GaAs}$: $R = 50 \text{ \AA}$ (а), 100 \AA (б), 200 \AA (в), 300 \AA (г)

КТ коэффициент оже-рекомбинации достигает максимума и затем начинает убывать. С увеличением радиуса КТ уменьшается влияние гетеробарьеров на процессы оже-рекомбинации, при этом проявляется пороговая природа этих процессов. Таким образом, для КТ большого радиуса происходит уменьшение коэффициента оже-рекомбинации до значения, соответствующего трехмерному коэффициенту оже-рекомбинации для однородного полупроводника C_{3D} .

На рис. 3 представлена зависимость коэффициентов оже-рекомбинации для беспорогового ($C^{(1)}V^2$) и квазипорогового ($C^{(2)}V^2$) процессов от радиуса КТ при температуре $T = 300 \text{ K}$. Сплошная кривая на этом рисунке соответствует суммарному коэффициенту оже-рекомбинации; горизонтальная линия соответствует трехмерному коэффициенту ШНС-процесса C_{3D} . Из анализа следует, что в широком интервале значений радиуса R оже-рекомбинация в КТ усилена по сравнению с оже-рекомбинацией в однородном полупроводнике.

На рис. 4 представлена температурная зависимость суммарного коэффициента оже-рекомбина-

ции и парциальные вклады беспорогового и квазипорогового механизмов при различных радиусах КТ. Из анализа выражения для $C^{(1)}$ (50) следует, что беспороговый процесс имеет слабую неэкспоненциальную зависимость от температуры. Температуру, при которой начинается убывание $C^{(1)}$, можно оценить из равенства энергии размерного квантования дырок температуре: $T^m \approx \hbar^2 \pi^2 / 2m_h R^2$. Квазипороговый коэффициент оже-рекомбинации $C^{(2)}$, наоборот, возрастает с ростом температуры. Для КТ малого радиуса $C^{(2)}$ также является слабой функцией температуры. С ростом радиуса КТ зависимость $C^{(2)}$ от температуры усиливается и приближается к пороговой (экспоненциальной) зависимости в объемных полупроводниках (рис. 3, 4). При этом количественное соотношение между $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ также меняется: $C^{(1)}$ убывает с ростом R быстрее чем $C^{(2)}$, так что эффективный трехмерный коэффициент $C_{3D}^{(1)} = C^{(1)}V^2$ обращается в нуль при $R \rightarrow \infty$, а $C_{3D}^{(2)} = C^{(2)}V^2$ приближается к объемному коэффициенту оже-рекомбинации C_{3D} (рис. 3). При малых значениях радиуса КТ оже-коэффициенты квазипорогового и беспорогового процессов значительно

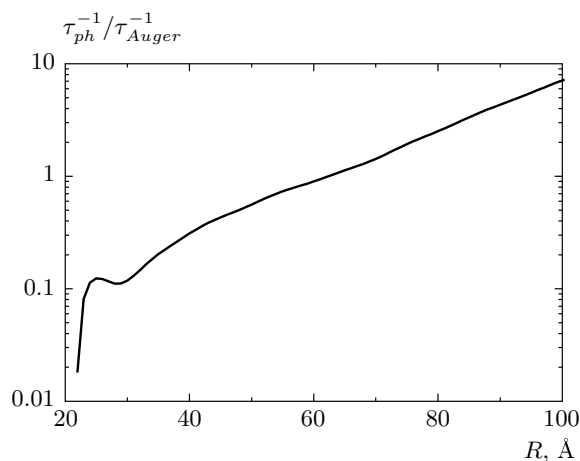


Рис. 5. Зависимость отношения обратного времени излучательной и оже-рекомбинации от радиуса квантовой точки R при температуре $T = 300$ К для структуры InAs/GaAs

превышают трехмерный коэффициент C_{3D} , отнесенный к квадрату объема КТ $(4\pi/3R^3)^2$ (см. рис. 3). Из рис. 4 видно, что для достаточно больших значений радиуса КТ при низких температурах преобладает беспороговый оже-процесс ($C^{(1)} > C^{(2)}$), а при высоких, наоборот, доминирует квазипороговый процесс ($C^{(1)} < C^{(2)}$). Поэтому зависимость суммарного коэффициента оже-рекомбинации от температуры имеет характерный вид с максимумом и минимумом. С увеличением радиуса КТ минимум суммарного коэффициента оже-рекомбинации слабо смещается в сторону высоких температур и в пределе КТ бесконечного радиуса исчезает. Таким образом, в случае однородного полупроводника коэффициент оже-рекомбинации есть монотонная функция температуры [30].

На рис. 5 представлена зависимость отношения обратного времени излучательной ($1/\tau_{ph}$) и оже-рекомбинации ($1/\tau_{Auger}$) от радиуса КТ. Из анализа следует, что при малых радиусах КТ $\frac{1/\tau_{ph}}{1/\tau_{Auger}} < 1$. С ростом радиуса КТ это отношение вероятностей приближается к единице. При дальнейшем увеличении радиуса КТ вероятность излучательной рекомбинации преобладает над вероятностью оже-рекомбинации. Для анализа мы воспользовались выражением для вероятности излучательной рекомбинации из работы [1].

При вычислении коэффициентов оже-рекомбинации мы ограничились первым порядком теории возмущений. Для однородных полупроводников первый порядок теории возмущений по межэлектрон-

ному взаимодействию недостаточен для расчета коэффициента оже-рекомбинации [34]. Это связано с тем, что на пороговый процесс оже-рекомбинации существенное влияние оказывают процессы электрон-фононной и электрон-электронной релаксаций, частично снимающие порог оже-рекомбинации. Однако первый порядок теории возмущений по межэлектронному взаимодействию дает качественно правильный результат для полупроводниковых гетероструктур с КТ, КН и КЯ так как влияние гетеробарьеров на процессы оже-рекомбинации играет более важную роль, чем процессы релаксации, если характерные размеры гетероструктуры меньше длины свободного пробега носителей заряда [34, 35].

Кроме того, при расчете коэффициента оже-рекомбинации мы не учли влияние кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой на величину коэффициента. Анализ показывает, что учет такого взаимодействия приводит к уменьшению величины переданной энергии для возбужденного электрона. А это, в свою очередь, приводит к увеличению коэффициента как беспороговой, так и квазипороговой оже-рекомбинации. Такой анализ будет приведен в отдельной работе. Также в отдельной работе будет учтено влияние спин-орбитального взаимодействия на процесс оже-рекомбинации, а также будет исследован процесс оже-рекомбинации для тяжелых дырок с переходом в спин-отщепленную зону, т. е. СННС-процесс [32].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный микроскопический расчет показал, что в полупроводниковых структурах с КТ имеются два различных механизма оже-рекомбинации: квазипороговый и беспороговый. Коэффициенты оже-рекомбинации указанных процессов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ по-разному зависят как от температуры, так и от параметров КТ: высот гетеробарьеров для электронов и дырок (V_c и V_v и радиуса КТ (см. рис. 2–4)). В пределе $R \rightarrow \infty$ квазипороговый коэффициент оже-рекомбинации, умноженный на квадрат объема КТ, стремится к объемному значению коэффициента оже-рекомбинации, а произведение $C^{(1)}V^2$ при этом стремится к нулю. Для достаточно малых величин радиуса КТ значение коэффициента оже-рекомбинации, умноженного на V^2 , больше трехмерного значения из-за преобладания беспорогового и квазипорогового процессов оже-рекомбинации (см. рис. 3). Таким образом, процесс оже-рекомбинации в КТ оказывается усиленным по сравнению с однородным полупроводником.

Это усиление оказывается тем более существенным при низких температурах. При низких температурах коэффициент оже-рекомбинации C_{3D} мал из-за наличия малого экспоненциального множителя (56). Отметим, что весь анализ зависимостей коэффициентов оже-рекомбинации $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ от температуры и параметров КТ качественно применим в равной мере и для СНСС- и для СННС-процессов. Мы проиллюстрировали все зависимости на примере СНСС-процесса.

Отметим, что полное подавление процессов оже-рекомбинации в КТ возможно при выполнении условий $(V_c, V_v) > E_g$ и $E_2 - E_1 > E_g$ (E_1 и E_2 — энергии первого и второго уровней размерного квантования носителей), т.е. в том случае, когда энергии возбужденной частицы недостаточно для перехода в непрерывный спектр или на следующий уровень размерного квантования. Для выполнения этих условий необходимо создание КТ с глубокими и узкими потенциальными ямами как для электронов, так и для дырок.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 04-02-16786, 04-07-90148, 05-02-1667) и в рамках Программ Научных Школ и Президиума РАН.

А. ПРИЛОЖЕНИЕ

Проинтегрируем $M^{(2)}$ (см. (37)) по частям и ограничимся первым членом разложения по параметру k_2/k_4 ; тогда первый интеграл в $M^{(2)}$ равен

$$\int_0^{r_1} r_2^2 dr_2 j_0(k_2 r_2) j_j(k_4 r_2) \frac{r_2^j}{r_1^{j+1}} \approx \frac{j_0(k_2 r_1)}{r_1^{j+2}} \int_0^{r_1} j_j(k_4 r_2) r_2^{j+1} dr_2 = j_0(k_2 r_1) j_{j+1}(k_4 r_1) \left(\frac{r_1}{k_4} \right). \quad (58)$$

Аналогично для второго интеграла в $M^{(2)}$ получаем

$$\int_{r_1}^{\infty} r_2^2 dr_2 j_0(k_2 r_2) j_j(k_4 r_2) \frac{r_1^j}{r_2^{j+1}} \approx r_1^j j_0(k_2 r_1) \int_{r_1}^{\infty} \frac{j_j(k_4 r_2)}{r_2^{j-1}} dr_2 = j_0(k_2 r_1) j_{j-1}(k_4 r_1) \left(\frac{r_1}{k_4} \right). \quad (59)$$

Сложив эти два вклада, получаем выражение для $M^{(2)}$ в виде

$$M^{(2)} = \frac{\sqrt{4\pi}}{k_4^2} \frac{e^2}{\varepsilon} \times \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1) \mathbf{R}_1(r_1)) (\mathbf{R}_4^*(r_1) \mathbf{R}_2(r_1)). \quad (60)$$

Подставляя в формулу (60) явные выражения для радиальных компонент волновых функций, получим, что матричный элемент пропорционален интегралу от четырех функций Бесселя:

$$M^{(2)} = (-1)^m \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{1}{k_4^2} \frac{i\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \times A_1 A_2 A_3 A_4 \frac{k_1}{k_3} \sqrt{j(j+1)} \times \int_0^R r_1^2 dr_1 (j_j(k_3 r_1) j_j(k_4 r_1)) \times \left(\frac{j_1(k_1 r_1)}{r_1} j_0(k_2 r_1) \right). \quad (61)$$

Далее учитывая, что $k_3, k_4 \gg k_1, k_2$, можно разложить подынтегральное выражение в ряд по быстроосциллирующим функциям. Разложение ведется по следующей первообразной:

$$F = \int_0^R r_1^2 dr_1 j_j(k_3 r_1) j_j(k_4 r_1) = \frac{R^2}{k_3^2 - k_4^2} \times [k_4 j_{j-1}(k_4 R) j_j(k_3 R) - k_3 j_{j-1}(k_3 R) j_j(k_4 R)]. \quad (62)$$

В результате для матричного элемента получаем окончательное выражение:

$$M^{(2)} \approx (-1)^m \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{1}{k_4^2} \frac{i\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \times A_1 A_2 A_3 A_4 \frac{k_1}{k_3 R} \sqrt{j(j+1)} F j_0(k_2 R) j_1(k_1 R). \quad (63)$$

Для больших значений радиуса КТ R можно заменить функции Бесселя их асимптотическими выражениями для большого аргумента. Тогда получаем следующее выражение для асимптотики матричного элемента при больших радиусах КТ:

$$M^{(2)} \approx \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{1}{k_4^2} \frac{\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} \frac{1}{R^5} \frac{2k_c}{k_3} \times \sqrt{j(j+1)} \frac{\sin((k_4 - k_3)R)}{k_4 - k_3}. \quad (64)$$

В. ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим подробнее беспороговый матричный элемент $M^{(1)}$. Из формулы (37) следует, что в матричный элемент $M^{(1)}$ входит также и произведение волновых функций носителей под барьером; оно имеет следующий вид:

$$\Phi^> = B_2 k_0(\kappa_2 r_2) \left(B_4^{(1)} j_j(\kappa_4 r_2) + B_4^{(2)} n_j(\kappa_4 r_2) \right) \times \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (65)$$

где сферическая функция Неймана $n_j(x)$ связана с цилиндрической функцией $N_j(x)$ соотношением

$n_j(x) = \sqrt{\pi/2x} N_{j+1/2}(x)$. При беспороговом процессе $\kappa_4 \gg \kappa_2$, поэтому можно разложить интегралы в ряд; тогда получим

$$\int_R^\infty r_2^2 dr_2 k_0(\kappa_2 r_2) j_j(\kappa_4 r_2) \frac{r_1^j}{r_2^{j+1}} \approx k_0(\kappa_2 R) r_1^j j_{j-1}(\kappa_4 R) \frac{R^{1-j}}{\kappa_4}. \quad (66)$$

Сложив оба вклада в выражении (37) для беспорогового матричного элемента, получаем

$$M^{(1)} = \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1) \mathbf{R}_1(r_1)) r_1^j \frac{\sqrt{4\pi}}{2j+1} R_{2s}(R) R^{1-j} \times \left\{ \frac{B_4^{(1)} j_{j-1}(\kappa_4 R) + B_4^{(2)} n_{j-1}(\kappa_4 R)}{\kappa_4} - \frac{A_4 j_{j-1}(k_4 R)}{k_4} \right\}. \quad (67)$$

Из граничных условий для волновых функций и их производных (16) получаем

$$\begin{cases} A_4 j_j(k_4 R) = B_4^{(1)} j_j(\kappa_4 R) + B_4^{(2)} n_j(\kappa_4 R), \\ k_4 Z A_4 \left[\frac{j j_j(k_4 R)}{k_4 R} - j_{j+1}(k_4 R) \right] = \\ = \kappa_4 \tilde{Z} \left\{ B_4^{(1)} \left[\frac{j j_j(\kappa_4 R)}{\kappa_4 R} - j_{j+1}(\kappa_4 R) \right] + \right. \\ \left. + B_4^{(2)} \left[\frac{j n_j(\kappa_4 R)}{\kappa_4 R} - n_{j+1}(\kappa_4 R) \right] \right\}. \end{cases} \quad (68)$$

Считая, что $V_c, V_v \ll E_g$, разложим выражение (68) по малым параметрам V_c/E_g и V_v/E_g (V_c и V_v — высоты гетеробарьеров соответственно для электронов и дырок). В этом случае также учтем, что величина κ_4 мало отличается от k_4 , поэтому будем раскладывать выражение (68) и по параметру $\eta = \kappa_4 - k_4$. Тогда величины η и \tilde{Z} связаны с V_c и V_v соотношениями

$$2 \frac{\eta}{k_4} = \frac{\mathcal{E}(V_v - V_c) - V_c E_g}{\mathcal{E}(\mathcal{E} + E_g)}, \quad (69)$$

$$\tilde{Z} \approx Z(1 - V_v Z).$$

Разложение в формулах (68) и в (67) ведется только до первого порядка по η и соответственно по V_c/E_g и V_v/E_g . Таким образом, можно получить матричный элемент беспорогового процесса. Подставляя соотно-

шения (69) для η и \tilde{Z} через высоты гетеробарьеров в (67), для $M^{(1)}$ получаем

$$M^{(1)} = \int_0^R r_1^2 dr_1 (\mathbf{R}_3^*(r_1) \mathbf{R}_1(r_1)) r_1^j \times \frac{\sqrt{4\pi}}{2j+1} R_{2s}(R) R^{1-j} \frac{A_4}{k_4} \times \left\{ \frac{j+1}{k_4 R} j_j(k_4 R) \frac{V_v}{\mathcal{E}_4 + E_g} + j_{j-1}(k_4 R) \frac{V_c}{\mathcal{E}_4} \right\}. \quad (70)$$

Как и в случае $M^{(2)}$, проводя аналогичную процедуру интегрирования по быстроосциллирующей функции, для матричного элемента беспорогового процесса получаем окончательное выражение

$$M^{(1)} = (-1)^{m+1} \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{i\hbar\gamma}{\mathcal{E}_1 + E_g} A_1 A_2 A_3 A_4 \frac{k_1}{k_2^2} \times \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} j_1(k_1 R) j_0(k_2 R) j_{j+1}(k_3 R) \frac{R}{k_4^2} \times \left[(j+1) \frac{V_v}{\mathcal{E}_4 + E_g} j_j(k_4 R) + (k_4 R) \frac{V_c}{\mathcal{E}_4} j_{j-1}(k_4 R) \right]. \quad (71)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Асрян, Р. А. Сурис, ФТП **38**, 3 (2004).
2. P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhaug, and A. Imamoglu, Science **290**, 2282 (2000).

3. G. Yusa and Sakaki, *Appl. Phys. Lett.* **70**, 345 (1997).
4. E. Dekel, D. Gershoni, and E. Ehrenfreund, *Phys. Rev. B* **61**, 11009 (2000).
5. M. Brucher, M. Moronne, P. Gin, S. Weiss, and A. P. Alivisatos, *Science* **281**, 2013 (1998).
6. W. C. W. Chan and S. Nie, *Science* **281**, 2016 (1998).
7. M. Han, X. Gao, J. Su, and S. Nie, *Nature Biotechnol.* **19**, 631 (2001).
8. X. Michalet, F. F. Pihaud, L. A. Betuolila et al., *Science* **307**, 538 (2005).
9. X. Y. Cui, R. M. Levenson, W. K. Chung, and S. Nie, *Nature Biotechnol.* **22**, 969 (2004).
10. A. D. Yoffe, *Adv. Phys.* **50**, 1 (2001).
11. В. Н. Абакумов, В. И. Перель, И. Н. Ясневич, *Безызлучательная рекомбинация в полупроводниках*, ПИЯФ, Гатчина (1997).
12. D. Bimberg, M. Grudman, and N. N. Ledentsov, *Quantum Dot Heterostructures*, Wiley, Chichester (1999).
13. J. L. Pan, *Phys. Rev. B* **46**, 3977 (1992).
14. S. Fathpour, Z. Mi, P. Bhattacharya, A. R. Kovch, and S. S. Mikhlin, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 5164 (2004).
15. И. И. Новиков, Н. Ю. Гордеев, М. В. Максимов, Ю. М. Шерняков, Е. С. Семенова, А. П. Васильев, А. Е. Жуков, В. М. Устинов, Г. Г. Зегря, *ФТП* **39**, 507 (2005).
16. D. I. Chepic, Al. L. Efros, A. I. Ekimov, M. G. Ivanov, V. A. Kharchenko, I. A. Kudriavtsev, and T. V. Yazeva, *J. Luminescence* **47**, 113 (1990).
17. Al. L. Efros, E-print archives, cond-mat/0204437.
18. P. Roussignal, D. Ricard, K. C. Rustagi, and C. Flytzanis, *Opt. Comm.* **55**, 143 (1985).
19. Г. Г. Зегря, А. С. Полковников, Тез. докл. 2-й Росс. конф. по физике полупроводников **1**, 95 (1996).
20. E. B. Dogonkine, V. N. Golovach, A. S. Polkovnikov, A. V. Pozdnyakov, and G. G. Zegrya, 8th Int. Symp. Nanostructures: Physics and Technology (St. Petersburg, 2000), p. 399.
21. V. A. Kharchenko and M. Rosen, *J. Luminescence* **70**, 158 (1996).
22. Г. Г. Зегря, В. А. Харченко, *ЖЭТФ* **101**, 327 (1992).
23. Al. L. Efros and M. Rosen, *Phys. Rev. B* **58**, 7120 (1998).
24. Г. Г. Зегря, А. С. Полковников, *ЖЭТФ* **113**, 1491 (1998).
25. A. S. Polkovnikov and G. G. Zegrya, *Phys. Rev. B* **58**, 4039 (1998).
26. Е. Б. Догонкин, Г. Г. Зегря, А. С. Полковников, *ЖЭТФ* **117**, 429 (2000).
27. I. Yu. Solov'ev and G. G. Zegrya, *Appl. Phys. Lett.* **82**, 2571 (2003).
28. E. O. Kane, *J. Phys. Chem. Sol.* **1**, 249 (1957).
29. P. C. Sercel and K. J. Vahala, *Phys. Rev. B* **42**, 3690 (1990).
30. Б. Л. Гельмонт, *ЖЭТФ* **75**, 536 (1978).
31. M. G. Burt, *J. Phys. Condens. Matter* **4**, 6651 (1992).
32. D. M. Samosvat and G. G. Zegrya, submitted to *Phys. Rev.*
33. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
34. A. S. Polkovnikov and G. G. Zegrya, *Phys. Rev. B* **64**, 073205 (2001).
35. A. S. Polkovnikov, E. B. Dogonkine, and G. G. Zegrya, 7th Int. Symposium Nanostructures: Physics and Technology, Russia (1999), p. 386.
36. B. A. Foreman, *Phys. Rev. B* **49**, 1757 (1994).
37. B. A. Foreman, *Phys. Rev. B* **56**, 12748 (1997).