

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛАНДАУ – ДЫХНЕ ДЛЯ МНОГОФОТОННЫХ ДИПОЛЬНО-ЗАПРЕЩЕННЫХ ПЕРЕХОДОВ

*Б. А. Зон**, *А. С. Корнев***

*Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 2 ноября 2006 г.

Рассмотрена «двухуровневая система» в монохроматическом лазерном поле в приближении Ландау – Дыхне при нарушении дипольных правил отбора. Получено аналитическое выражение для скорости переходов. Найдены многофотонный и туннельный пределы.

PACS: 32.80.-t

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания многофотонных процессов в атомах и молекулах, происходящих в поле излучения мощных лазеров, методы квантовой теории возмущений не всегда пригодны. В связи с этим важное значение приобретают иные теоретические подходы.

Среди таких подходов достаточно часто применяется перевальный метод оценки временных интегралов, возникающих в точных квантовых формулах для вероятностей многофотонных переходов. Впервые этим методом Келдыш получил [1] вероятность туннельной ионизации атома в лазерном поле. Уточнение вычислений, изложенных в работе [1], позволившее найти спектры туннелирующих электронов, проведено в работе [2] (см. также недавнюю работу [3]).

Общий формализм перевальной оценки временных интегралов квантовой теории переходов в переменном внешнем поле был развит Дыхне [4] применительно к теории атомных столкновений. Этот формализм использовался в ряде работ для расчетов вероятностей n -фотонного возбуждения атомов при небольших значениях n , когда возникает штарковское пересечение квазиэнергетических уровней (см. [5], где имеются ссылки на предыдущие исследования, а также обзор [6]). В последнее время ука-

занный формализм для $n \gg 1$, получивший в литературе название метода Ландау – Дыхне [7], широко используется для расчетов различных многофотонных эффектов в атомах и молекулах. В качестве примера можно указать работу [8], где приведены формулы для спектров электронов при туннельной ионизации. Сравнение этих спектров с результатами расчетов по адиабатической теории [9] приведено в работе [10].

Наряду со связанно-свободными переходами, о которых говорилось выше, теория Ландау – Дыхне применяется и для вычисления вероятностей связанно-связанных переходов (см., например, [11]), описывая тем самым туннельные переходы между дискретными уровнями. Однако имеющиеся в литературе формулы ограничены случаем, когда между рассматриваемыми дискретными уровнями разрешен электрический дипольный переход [7], что фактически означает использование для реальной квантовой системы простейшего двухуровневого приближения. Очевидно, что для многофотонных процессов переходы между дипольно-связанными начальным и конечным состояниями не являются более предпочтительными по сравнению со случаем, когда однофотонный переход между этими состояниями в дипольном приближении запрещен. Поэтому желательно выяснить, как изменяются формулы теории Ландау – Дыхне для дипольно-запрещенных переходов. Рассмотрению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

В работе используется атомная система единиц.

*E-mail: zon@niif.vsu.ru

**E-mail: a-kornev@yandex.ru

2. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛАНДАУ – ДЫХНЕ

Кратко изложим общую теорию связанно-связанных переходов, возникающих под действием адиабатически изменяющегося возмущения, между соседними невырожденными состояниями [7].

Между квазиклассическим и адиабатическим приближениями прослеживается глубокая внутренняя аналогия. Так, квазиклассическое приближение требует, чтобы координатная часть волновой функции достаточно быстро осциллировала в характерной области изменения потенциальной энергии частицы. В свою очередь, адиабатическое приближение применимо, если в течение периода колебаний внешнего поля временная часть волновой функции претерпевает большое количество осцилляций. Другими словами, для получения решения в адиабатическом приближении необходимо заменить импульс и координату соответственно энергией и временем. В соответствии с [12], решение задачи о квантовых переходах под действием адиабатического возмущения математически эквивалентно квазиклассическому решению задачи о надбарьерном отражении.

В адиабатическом приближении вводятся собственные значения энергии $E_j(t)$ полного гамильтониана системы атом+поле, в которых время рассматривается как параметр:

$$\hat{H}(t)\Psi_j(t) = E_j(t)\Psi_j(t). \quad (1)$$

Зависимость собственных функций $\Psi_j(t)$ от времени определяется выражением

$$\Psi_j(t) \sim \exp \left\{ -i \int_{t_1}^t E_j(t') dt' \right\}, \quad (2)$$

где t_1 — произвольная точка на вещественной оси времени t . Как известно из общей теории, амплитуда перехода A_{fi} из начального состояния $|i\rangle$ в конечное $|f\rangle$ под действием адиабатического возмущения определяется перекрытием $\langle f|i\rangle$ волновых функций. Поэтому в адиабатическом приближении после перевальной оценки фазового интеграла имеем

$$A_{fi} = i \exp \left\{ i \int_{t_1}^{\tau} \omega_{fi}(t) dt \right\}, \quad (3)$$

где $\omega_{fi}(t) = E_f(t) - E_i(t)$. В соответствии с квазиклассическим приближением, квантовые переходы осуществляются в те моменты времени τ , когда энергии начального и конечного состояний совпадают

(здесь уместна аналогия с классическими точками поворота при надбарьерном отражении):

$$E_i(\tau) = E_f(\tau), \quad \omega_{fi}(\tau) = 0. \quad (4)$$

Поскольку такие моменты τ ненаблюдаемы, в случае возбуждения системы они должны располагаться только в верхней полуплоскости комплексного времени, т. е. иметь положительную мнимую часть. Если таких точек несколько, то нужно выбрать те из них, которые лежат ближе всего к вещественной оси времени t , так как остальные корни уравнения (4) вносят в выражение для A_{fi} экспоненциально малый вклад по сравнению с ближайшей к вещественной оси точкой.

Вероятность перехода W_{fi} между начальным и конечным состояниями согласно (3) имеет вид

$$W_{fi} = |A_{fi}|^2 = \exp \left\{ -2 \operatorname{Im} \int_{t_1}^{\tau} \omega_{fi}(t) dt \right\}. \quad (5)$$

3. ДИПОЛЬНО-ЗАПРЕЩЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Рассмотрим теперь невырожденную двухуровневую систему, на которую действует поле частоты ω , находящейся в многофотонном резонансе по отношению к частоте перехода $\omega_{fi} = E_f^{(0)} - E_i^{(0)}$, где $E_i^{(0)}$ и $E_f^{(0)}$ — невозмущенные энергии соответственно начального и конечного состояний. Таким образом, предполагается, что величина ω_{fi} близка к числу, кратному ω . Пусть монохроматическое возмущение в координатном представлении имеет вид

$$V = zF \sin(\omega t),$$

что соответствует линейно поляризованному лазерному излучению с амплитудным значением напряженности F . Здесь z — декартова координата, отсчитываемая в направлении вектора поляризации.

Если начальное и конечное состояния не удовлетворяют дипольным правилам отбора (т. е. $z_{fi} = 0$), то уравнение Шредингера (1) усложняется по сравнению с задачей, рассмотренной в работе [7]. Так, если выполнены «двухфотонные» правила отбора, ненулевые значения примет двухфотонный матричный элемент $z_{j'j}^{(2)}$ ($j', j = i, f$), имеющий размерность квадрата длины, деленного на энергию. Адиабатическое уравнение Шредингера в энергетическом представлении принимает вид

$$\left(E_i^{(0)} - \frac{1}{2} \alpha_i F^2 \sin^2(\omega t) \right) a_i + z_{fi}^{(2)} F^2 \sin^2(\omega t) a_f = E(t) a_i,$$

$$z_{fi}^{(2)} F^2 \sin^2(\omega t) a_i + \left(E_f^{(0)} - \frac{1}{2} \alpha_f F^2 \sin^2(\omega t) \right) a_f = E(t) a_f,$$

где $\alpha_j = -2z_{jj}^{(2)}$ — поляризуемость j -го уровня. Частоту перехода в присутствии излучения находим из условия нетривиальной разрешимости данной системы:

$$\omega_{fi}(t) = E_f(t) - E_i(t) = \omega_{fi} X(\gamma, \kappa; \omega t). \quad (6)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{\omega_{fi}}{|z_{fi}^{(2)}|}}, \quad \kappa = \frac{\alpha_f - \alpha_i}{4|z_{fi}^{(2)}|},$$

$$X(\gamma, \kappa; \omega t) = \left[1 - \frac{4\kappa}{\gamma^2} \sin^2(\omega t) + \frac{4}{\gamma^4} (1 + \kappa^2) \sin^4(\omega t) \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Параметр γ в некоторой степени аналогичен параметру Келдыша в задаче ионизации связанного состояния.

На основании (4) найдем нули выражения (7), расположенные в верхней комплексной полуплоскости времени:

$$\tau_N^{(\pm)} = \frac{\pm x_0 + \pi N + iy_0}{\omega}, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (8)$$

Здесь

$$x_0 = \arcsin \left\{ \frac{\gamma^2 \cos \delta (1 + \sin \delta)}{(4 + \gamma^4 \cos^2 \delta - 2\gamma^2 \sin 2\delta)^{1/2} + \gamma^2 \cos \delta + 2} \right\}^{1/2},$$

$$y_0 = \operatorname{arsh} \left\{ \frac{1}{2} \left[(4 + \gamma^4 \cos^2 \delta - 2\gamma^2 \sin 2\delta)^{1/2} + \gamma^2 \cos \delta - 2 \right]^{1/2} \right\},$$

$$\delta = \arctg \kappa.$$

Значения (8) лежат на одинаковых расстояниях от вещественной оси времени. Поэтому они все должны быть включены в рассмотрение.

Выражение для амплитуды квантовых переходов получается в результате подстановки формул (8) и (6) в (3). По принципу Фейнмана [13] полная амплитуда перехода за некоторый промежуток времени определяется суммой всех возможных амплитуд по различным комплексным траекториям из начальной точки в конечную. Результирующее выражение будет состоять из двух сомножителей: вещественной экспоненты, являющейся быстроменяющейся функцией γ , и медленноменяющегося предэкспоненциального фактора, который здесь не приводится.

Выражение для экспоненциального множителя получается в соответствии с (5):

$$W_{fi} \sim \exp \left[-2 \frac{\omega_{fi}}{\omega} f(\gamma, \kappa) \right], \quad (9)$$

где

$$f(\gamma, \kappa) = \operatorname{Re} \int_0^{y_0} X(\gamma, \kappa; x_0 + iy) dy = \operatorname{Im} Y(\gamma, \kappa; x) \Big|_{x_0}^{x_0 + iy_0}. \quad (10)$$

Первообразная $Y(\gamma, \kappa; x)$ выражается через эллиптические интегралы следующим образом:

$$Y(\gamma, \kappa; x) = \frac{X}{2 \operatorname{tg}^2 x} \left\{ -1 + \frac{2c}{s^2 b_2} \left[\frac{b}{a} (as^2 - b + 1) - 1 + \frac{X^2}{c^2} \right] \times \left[\sqrt{2} F^{(-)} + \frac{1}{2} b_2^2 E - F^{(+)} - i \frac{b + \sqrt{2} a}{(b + \Delta) X c} \Pi \right] \times \left(b - a + \frac{1}{s^4} - \frac{2}{s^2} \right)^{-1} \right\}.$$

Здесь

$$a = \frac{4(1 + \kappa^2)}{\gamma^4}, \quad b = \frac{4\kappa}{\gamma^2}, \quad \Delta = \sqrt{b^2 - 4a} = \frac{4i}{\gamma^2},$$

$$s = \sin x, \quad c = \cos x,$$

$$b_2 = \sqrt{2 - b - \Delta}, \quad X = X(\gamma, \kappa; x),$$

$$F^{(+)} = F \left[\arcsin \left(i \sqrt{\frac{b - \Delta - 2s^{-1}}{2\Delta}} \right) \Big| \frac{2\Delta}{2 - b + \Delta} \right],$$

$$F^{(-)} = F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{b - \Delta - 2s^{-1}}{2\Delta}} \right) \Big| -\frac{2\Delta}{2 - b - \Delta} \right],$$

$$E = E \left[\arcsin \left(i \sqrt{\frac{b - \Delta - 2s^{-1}}{2\Delta}} \right) \Big| \frac{2\Delta}{2 - b + \Delta} \right],$$

$$\Pi = \Pi \left[\frac{2\Delta}{b + \Delta}; \arcsin \left(i \sqrt{\frac{b - \Delta - 2s^{-1}}{2\Delta}} \right) \mid -\frac{2\Delta}{2 - b - \Delta} \right].$$

Введены стандартные обозначения для эллиптических интегралов:

$$F(\varphi \mid m) = \int_0^\varphi [1 - m \sin^2 \theta]^{-1/2} d\theta,$$

$$E(\varphi \mid m) = \int_0^\varphi [1 - m \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta,$$

$$\Pi(n; \varphi \mid m) = \int_0^\varphi (1 - n \sin^2 \theta)^{-1} [1 - m \sin^2 \theta]^{-1/2} d\theta.$$

В случае монохроматического излучения квантовые переходы имеют резонансный характер. Поэтому в соответствии с [7] фазовый интеграл в амплитуде (3) на промежутке $(\text{Re } \tau_N^{(\pm)}, \text{Re } \tau_{N+1}^{(\pm)})$ должен быть кратным 2π . Данное требование приводит к следующему соотношению между частотой излучения и расстоянием между невозмущенными уровнями:

$$\omega_{fi} = n\omega / \sigma(\gamma, \kappa), \quad n = 2, 4, \dots, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma, \kappa) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X(\gamma, \kappa; x_0 + x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} Y(\gamma, \kappa; x) \Big|_{x_0}^{x_0 + \pi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношение (11) отражает закон сохранения энергии с учетом сдвига уровней в сильном переменном поле (динамический эффект Штарка).

Подстановка (11) в (9) приводит к следующему выражению для скорости перехода с учетом условия резонанса:

$$W_{fi}^{(n)} \sim B_{fi}^{2n}, \quad (13)$$

где

$$B_{fi} = \exp \left\{ -\frac{f(\gamma, \kappa)}{\sigma(\gamma, \kappa)} \right\}. \quad (14)$$

Полученное выражение для $W_{fi}^{(n)}$ будет справедливым при выполнении адиабатического соотношения между частотами:

$$\omega_{fi} / \omega \gg 1, \quad (15)$$

т. е. когда возмущение является медленноменяющейся величиной, но при этом не обязано быть малым.

Для корректного использования выражения (13) необходимо, чтобы время действия возмущения T было не слишком велико, т. е. $W_{fi}^{(n)} \omega T \ll 1$. При больших временах наступает режим насыщения. Следует также учитывать, что с ростом напряженности лазерного поля сама двухуровневая модель перестает быть корректной: начинаются переходы на более высокие уровни, а также происходит ионизация электронов из рассматриваемых состояний i и f .

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Множители $f(\gamma, \kappa)$ и $\sigma(\gamma, \kappa)$ допускают аналитическое представление через неполные эллиптические интегралы. В отличие от случая дипольно-разрешенных переходов, эти аналитические выражения будут существенно более сложными, и поэтому более рациональным здесь оказывается численное интегрирование выражений для $f(\gamma, \kappa)$ и $\sigma(\gamma, \kappa)$. Результаты таких расчетов для множителя B_{fi} даны на рис. 1.

В пределе малых и больших значений параметра γ для $f(\gamma, \kappa)$ и $\sigma(\gamma, \kappa)$ можно найти простые аналитические выражения.

В случае слабых полей, $\gamma^2 \gg 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma, \kappa) &= 1, \quad f(\gamma, \kappa) = \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(2\gamma) \left(\frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta} \right)^{\sin \delta / 2}. \end{aligned} \quad (16)$$

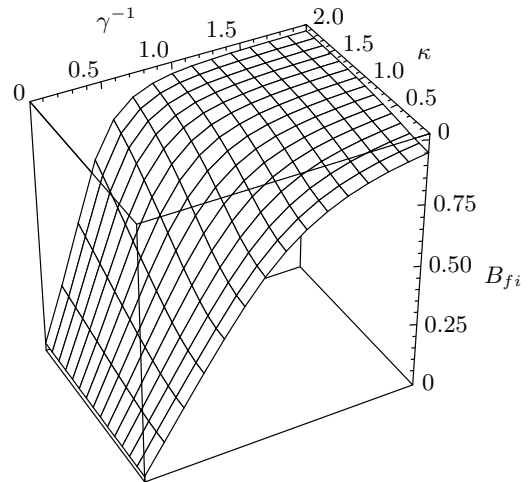


Рис. 1. Множитель B_{fi} как функция параметров γ^{-1} и κ

Условие резонанса (11) в этом пределе $\omega_{fi} = n\omega$ соответствует поглощению n квантов. Подстановка (16) в (14) приводит к следующему предельному выражению для скорости перехода:

$$W_{fi}^{(n)} \sim \left[\frac{|z_{fi}^{(2)}| e \left(\frac{1 + \sin \delta}{\cos \delta} \right)^{\sin \delta}}{4\omega_{fi}} \right]^n F^{2n}. \quad (17)$$

Таким образом, в слабых полях возбуждение двухуровневой системы будет n -фотонным. Условие применимости адиабатического приближения (15) требует большого количества поглощаемых фотонов. От случая дипольно-разрешенных переходов выражение (17) отличается множителем при F^{2n} .

В случае сильных полей, $\gamma^2 \ll 1$, имеем

$$\sigma(\gamma, \kappa) = \frac{1}{\gamma^2 \cos \delta}, \quad f(\gamma, \kappa) = \frac{\gamma}{2} \Xi(\sin \delta). \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Xi(\sin \delta) &= (1 - s^2)^{1/4} (1 - s)^{1/2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^1 \left[1 - s \Omega(s, z) + \frac{1}{4} \Omega^2(s, z) \right]^{1/2} dz = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\cos \delta} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\sin \delta \exp \left\{ -\frac{i(\delta - \pi/2)}{2} \right\} E(\varphi_0 | m_0) - \right. \\ &\left. - \exp \frac{i(\delta - \pi/2)}{2} F(\varphi_0 | m_0) \right] \Big|_{\Omega=\Omega(\sin \delta, 0)}^{\Omega=\Omega(\sin \delta, 1)}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$s = \sin \delta, \quad \Omega(s, z) = (1 - s) \left(\sqrt{\frac{1 + s}{1 - s}} + iz \right)^2,$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - i \frac{2s - \Omega}{\cos \delta}}, \quad m_0 = \frac{2i}{\kappa + i}.$$

Условие резонанса (11) в этом пределе нельзя привести в соответствие с числом поглощаемых фотонов. Подстановка (18) в (14) приводит к следующему предельному выражению для скорости перехода:

$$W_{fi}^{(n)} \sim \exp \left\{ -\frac{n\Xi(\sin \delta)}{F^3} \cos \delta \left[\frac{\omega_{fi}}{|z_{fi}^{(2)}|} \right]^{3/2} \right\}. \quad (20)$$

В области $\kappa \in (0 \dots 1)$ множитель $\Xi(s)$ можно аппроксимировать более простым выражением (см. рис. 2):

$$\Xi(s) \approx 0.874(1 - s), \quad (21)$$

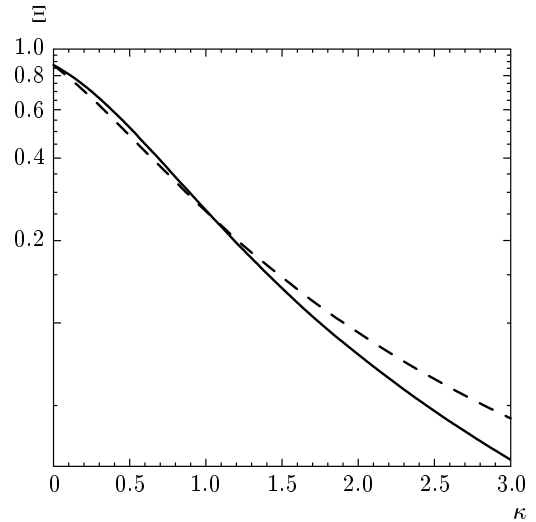


Рис. 2. Зависимости $\Xi(\kappa)$. Сплошная линия — точный расчет по формуле (19), штриховая — результат расчета по приближенной формуле (21)

так что

$$W_{fi}^{(n)} \sim \exp \left\{ -\frac{0.874n}{F^3} \cos \delta (1 - \sin \delta) \left[\frac{\omega_{fi}}{|z_{fi}^{(2)}|} \right]^{3/2} \right\}. \quad (22)$$

Оно применимо при условии $n/\gamma^2 \cos \delta \gg 1$, что не требует жесткого ограничения на минимальное число n . Таким образом, выражение (22) описывает туннельный связанно-связанный переход. Выражение для скорости дипольно-разрешенного туннельного перехода, построенное на основе теории Ландау – Дыхне [7], содержит другой показатель степени напряженности поля:

$$W_{fi}^{(n)} \sim \exp \left\{ -\frac{\pi^2 n}{16F^2} \frac{\omega_{fi}^2}{|z_{fi}^{(2)}|^2} \right\}.$$

Для множителей $f(\gamma, \kappa)$ и $\sigma(\gamma, \kappa)$ найдена также приближенная интерполяционная формула, справедливая в области $\kappa \in (0 \dots 0.1)$ с точностью до нескольких процентов:

$$\sigma(\gamma, \kappa) \approx 1 + \frac{1}{\gamma^2 \cos \delta},$$

$$f(\gamma, \kappa) \approx \ln \{ \lambda \gamma + [(\beta - \lambda)^\mu \gamma^\mu + 1]^{1/\mu} \}.$$

Здесь $\mu = 3$,

$$\lambda = 0.437(1 - \sin \delta), \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta} \right)^{\sin \delta/2}.$$

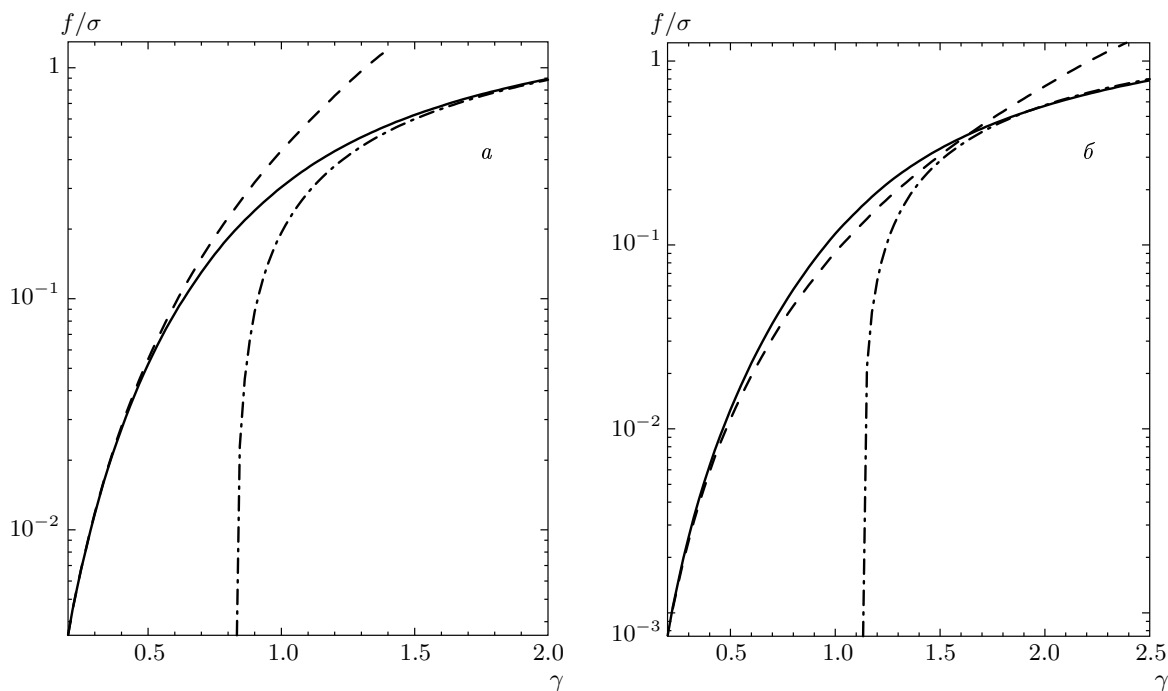


Рис. 3. Зависимости отношения f/σ от γ . Сплошные линии — точный расчет по формулам (10), (12), штриховые — результаты расчета по формулам «туннельного» предела (18), штрих-пунктирные — результаты расчета по формулам «многофотонного» предела (16); $\kappa = 0$ (а), 1 (б)

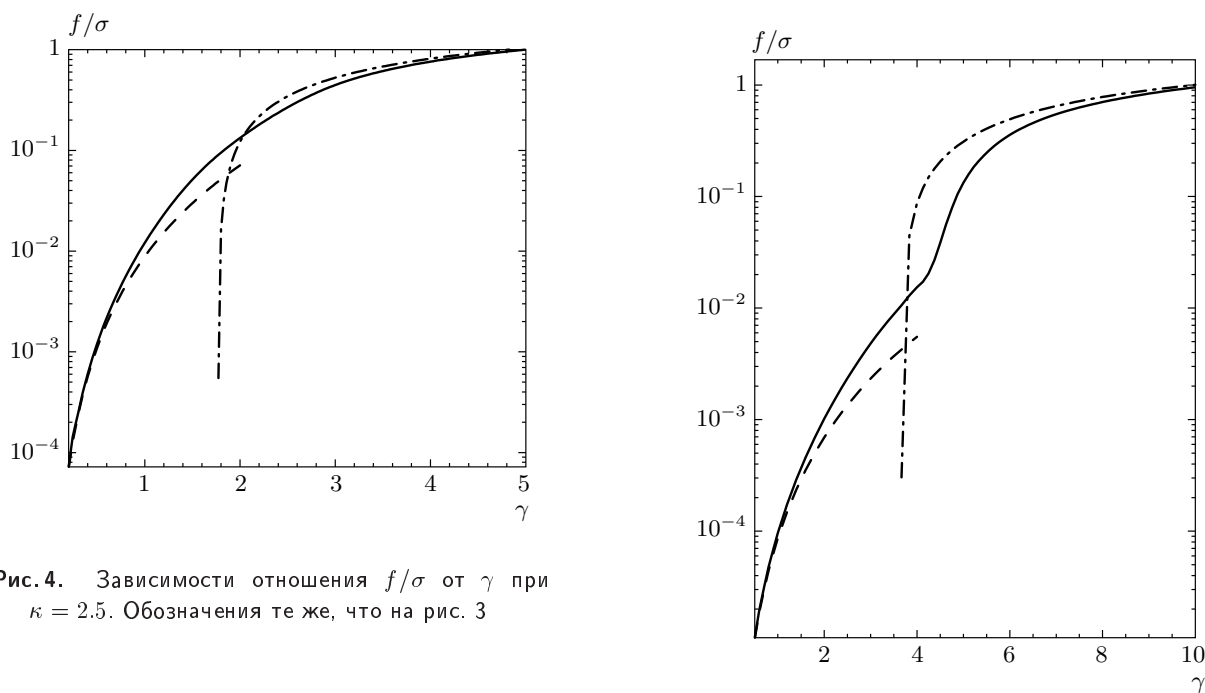


Рис. 4. Зависимости отношения f/σ от γ при $\kappa = 2.5$. Обозначения те же, что на рис. 3

Переход от многофотонного предела к туннельному при возбуждении системы показан на рис. 3–5. Заметим, что туннельный режим может возникать при переходах между связанно-связанными со-

Рис. 5. Зависимости отношения f/σ от γ при $\kappa = 10$. Обозначения те же, что на рис. 3, 4

стояниями в многозарядных ионах, образуемых в интенсивных лазерных полях (см., например, [14]).

Авторы благодарят А. Маке (A. Maquet) за проявленный интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16253), Американского фонда гражданских исследований и развития (грант № VZ-010-0, BR2M10) и Фонда Д. Зимина «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пределы слабого и сильного полей

Дадим подробный вывод соотношений (16) и (18).

В пределе $\gamma^2 \gg 1$ параметр

$$x_0 \approx \arcsin \sqrt{(1 + \sin \delta)/2},$$

а подынтегральная функция в выражении (10) представляется в виде

$$X(\gamma, \kappa; x_0 + iy) \approx [1 + 2\kappa z + (1 + \kappa^2)z^2]^{1/2},$$

где

$$z = \exp\{2(y - ix_0)\}/2\gamma^2.$$

Интегрирование осуществляется элементарно после замены $y \rightarrow z$. Верхний предел интегрирования

$$y_0 \rightarrow z_0 = (-\kappa + i)/(\kappa^2 + 1).$$

Для вычисления (12) достаточно заменить подынтегральную функцию единицей. В результате получаем соотношения (16).

В пределе $\gamma^2 \ll 1$ параметр

$$x_0 \approx \gamma \sqrt{\cos \delta (1 + \sin \delta)/4},$$

а величина $f(\gamma, \kappa)$ представляется в виде

$$f(\gamma, \kappa) \approx \frac{1}{2} \gamma \Xi(s).$$

Здесь $s = \sin \delta$,

$$\begin{aligned} \Xi(s) &= (1 - s^2)^{1/4} (1 - s)^{1/2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^1 \left[1 - s \Omega(s, z) + \frac{1}{4} \Omega^2(s, z) \right]^{1/2} dz, \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

$$\Omega(s, z) = (1 - s) \left(\sqrt{\frac{1+s}{1-s}} + iz \right)^2. \quad (\text{П.2})$$

Численное интегрирование при $s = 0 \dots 1$ показывает, что $\Xi(s)$ можно аппроксимировать простой формулой:

$$\Xi(s) \approx \alpha(1 - s),$$

где α — некоторая неизвестная константа. При $s = 0$ интеграл в формуле (П.1) вычисляется аналитически:

$$\Xi(0) = \operatorname{Re} \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{4}(1+iy)^4 \right]^{1/2} dy = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{72}\pi} \approx 0.874,$$

откуда $\alpha = 0.874$.

В выражении (12) для $\sigma(\gamma, \kappa)$ при $\gamma^2 \ll 1$ в подынтегральной функции достаточно учесть лишь последнее слагаемое. В итоге получаем выражения (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. G. F. Gribakin and M. Yu. Kuchiev, Phys. Rev. A **55**, 3760 (1997).
3. V. E. Chernov, I. Yu. Kiyan, H. Helm, and B. A. Zon, Phys. Rev. A **71**, 033410 (2005).
4. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **41**, 1324 (1961).
5. Б. А. Зон, ЖЭТФ **75**, 834 (1978).
6. М. Л. Тер-Микаелян, УФН **167**, 1249 (1997).
7. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Атом в сильном световом поле*, Энергоатомиздат, Москва (1984), гл. 4.
8. V. P. Krainov and A. V. Sofronov, Phys. Rev. A **69**, 015401 (2004).
9. Б. А. Зон, А. С. Корнев, ЖЭТФ **128**, 1156 (2005).
10. Б. А. Зон, А. С. Корнев, Опт. и спектр. **102**, 21 (2007).
11. A. Lezius, V. Blanchet, M. Yu. Ivanov, and A. Stolow, J. Chem. Phys. **117**, 1575 (2002).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989), §53.
13. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968), гл. 2.
14. E. Gubbini, U. Eichmann, M. Kalashnikov, and W. Zandner, Phys. Rev. Lett. **94**, 053602 (2005).