

ИЗМЕРЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВАННОЙ МОДЫ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ

*Г. П. Мирошниченко**

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 1 декабря 2006 г.

Развита теория дискретной модели фотодетектирования, где в качестве указателей (пойнтеров) используются отдельные невозбужденные атомы из атомного потока, пролетающего через резонатор. Детекторы (ионизационные камеры), селективные к энергетическим состояниям атомов, регистрируют статистику вылетов атомов в основном или возбужденном состоянии. В основе развиваемой теории лежит метод последовательных косвенных квантовых измерений Мандельштама. В отличие от имеющихся работ, в предлагаемом подходе учитывается статистика атомного потока, неидеальность (квантовые эффективности) работы ионизационных камер, время восстановления детектора, обратное действие зонда на квантованную моду, релаксационный процесс в интервале времени, когда резонатор пуст (без атомов). Получены формулы, связывающие апостериорные вероятности срабатываний фотодетекторов с элементами главной диагонали начальной матрицы плотности моды резонатора. Численное моделирование подтверждает возможность решения обратной задачи восстановления начального закона распределения чисел фотонов в резонаторе по статистике срабатываний детекторов, снятой в течение переходного процесса.

PACS: 42.50.-p, 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее полная информация о статистических характеристиках излучения может быть получена с помощью фотодетектирования. Фотодетектирование — это развертывающийся во времени процесс последовательных квантовых измерений, которому подвергаются моды электромагнитного поля. Теоретическая постановка задачи квантовых измерений обычно состоит из следующих этапов [1–3]. В изучаемой квантовой системе выбирается физическая величина (наблюдаемая), определяется ее собственный базис и спектр. Затем для проведения измерения этой наблюдаемой необходимо правильно выбрать гамильтониан взаимодействия системы с указателем (пойнтером) измерителя и взаимодействие указателя с внешней средой, т. е. правильно выбрать измеритель. В случае фотодетектирования взаимодействие поля с измерителем определяется выбранным детектором и его конструкцией. Детектор фик-

сирует факт поглощения фотона, результатом измерения является последовательность коротких импульсов тока. Каждый импульс возникает из-за появления фотоэлектрона, и их обычно связывают с падающим фотоном поля. Можно следить за всеми импульсами (фотоэлектронами) на заданном отрезке времени.

В альтернативном варианте используется счетчик задержанных совпадений, когда изучаются импульсы в фиксированные, заданные прибором моменты времени. В обоих случаях в результате измерения получается реализация случайного классического процесса: это случайная последовательность времен между соседними импульсами (первый случай) или последовательность попаданий или отсутствия импульсов в заданных временных воротах (второй случай). В результате статистической обработки серии тождественных экспериментов по фотодетектированию можно получить требуемые статистические характеристики случайного классического процесса генерации фотоэлектронов. Это иерар-

*E-mail: gpmirosh@yahoo.com

хия совместных эксклюзивных и неэксклюзивных n -точечных плотностей вероятности появления отсчетов вблизи n точек на заданном временном интервале. Эти плотности связаны между собой и полностью характеризуют статистические свойства точечных классических процессов [4–6]. С помощью этих плотностей можно рассчитать другие характеристики процесса. Это вероятности детектирования n импульсов на заданном отрезке времени (интегральная статистика фотоэлектрического счета Мандела [7]), двухвременные корреляционные функции фототоков, плотности вероятностей времени ожидания отсчетов и др. [4–14]. Эта классическая апостериорная информация может быть использована для расчета статистических характеристик квантового ансамбля изучаемой квантовой системы (полевые моды и, в общем случае, взаимодействующие с полем атомы).

Для связи статистики фотоотсчетов со статистикой поля развита квантовая теория фотодетектирования; ссылки на основополагающие работы можно найти в книгах [4–6, 12, 14–16]. Различают теорию внешнего [12] и внутреннего [4, 16] фотодетектирования — по расположению детектора (вне или внутри резонатора). В работах [4, 5, 12, 15–18] фотодетектирование рассматривается как процесс непрерывных квантовых измерений второго рода (деструктивных из-за поглощения фотона на детекторе) и обсуждается возможность применения проективного постулата фон Неймана в случае непрерывных измерений.

В работах [9, 17–20] построена теория внутреннего непрерывного фотодетектирования. В этих работах найдены неунитарные операторы развития для квантового скачка, связанного с обнаружением фотона, и для интервалов времени, когда скачки отсутствуют. Здесь найдено уравнение Лиувилля, описывающее развитие матрицы плотности полного ансамбля моды в присутствии непрерывно включенного фотодетектора. Матрица полного ансамбля представлена в «распутанном» по отдельным квантовым траекториям (последовательностям событий) виде. Каждая индивидуальная траектория представляет собой случайную последовательность квантовых скачков, «мгновенно» изменяющих состояние поля (и связанных с появлением фотоэлектрона) и интервалов «свободного» развития условной матрицы плотности, когда фотоэлектрон не обнаружен. Такое представление редуцированной матрицы хорошо согласуется с результатами экспериментов, в которых на индивидуальном детекторе в течение времени измерения снимается одна (случайная) реализация квантовой траектории.

Теория внутреннего фотодетектирования позволяет генерировать траектории численно с помощью метода Монте-Карло. Аппарат теории, в принципе, позволяет получать не только вероятностные характеристики полного квантового ансамбля полевых мод, но и «двигаться» вдоль квантовой траектории в процессе реального эксперимента, каждый раз пересчитывая условную матрицу плотности с учетом всех событий, которые фиксирует детектор.

В работах [18, 21, 22] предложена так называемая дискретная модель внутреннего фотодетектирования. В этом методе состояние моды резонатора тестируется с помощью пролетающего через резонатор потока невозбужденных (на входе) атомов. Каждый атом является квантовым зондом, «собирающим» информацию о квантованной моде. На выходе из резонатора с помощью селективных к энергетическому состоянию атома детекторов (ионизационных камер) снимается статистика вылетов атома в возбужденном или основном состоянии. В настоящей работе теория дискретного фотодетектирования развивается по аналогии с теорией одноатомного лазера (микромозера), представленной в работах [23, 24]. В отличие от работ [18, 21, 22], в предлагаемом подходе учитывается статистика атомного потока, неидеальность (квантовые эффективности) работы ионизационных камер, время восстановления детектора, обратное действие зонда на квантованную моду, релаксационный процесс в интервале времени, когда резонатор пуст (без атомов). Для описания такого процесса необходимо развитие теории последовательных дискретных квантовых косвенных измерений. Основы теории косвенных измерений заложены в работах академика Мандельштама [25] и подробно обсуждаются в книгах [15, 26, 27]. В качестве окончательного результата получены формулы, решающие обратную задачу восстановления начального закона распределения чисел фотонов по статистике последовательности фотоотсчетов, снятой на интервале времени переходного процесса установления генерации в резонаторе в присутствии потока атомов-зондов.

2. МОДЕЛЬ ФОТОДЕТЕКТОРА

Условимся называть процесс получения данных о состоянии квантованной моды резонатора фотодетектированием. Согласно теории косвенных квантовых измерений, для получения дополнительной информации достаточно привести изучаемую квантовую систему во взаимодействие с пробной кванто-

вой системой (квантовым зондом). После их взаимодействия и перепутывания над зондом производится прямое (проективное по фон Нейману) квантовое измерение какой-либо физической наблюдаемой. Будем моделировать квантовый зонд двухуровневым атомом. Невозбужденный атом в основном (рабочем) состоянии в определенный момент времени t влетает в резонатор и в течение времени τ взаимодействует с резонаторной модой. Гамильтониан взаимодействия \hat{H} моды и зонда в представлении взаимодействия и в резонансном приближении в течение времени τ имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon}{2} (|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) + \lambda (\hat{a}|1\rangle\langle 0| + \hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1|). \quad (1)$$

Здесь ε — отстройка уровней атома зонда от резонанса с частотой моды, λ — константа взаимодействия моды и атома (полагаем далее $\hbar = 1$), $|0\rangle, |1\rangle$ — основное и возбужденное состояния зонда, \hat{a}^\dagger, \hat{a} — бозе-операторы моды (для простоты изучается одномодовый режим генерации). В конце интервала τ атом вылетает из резонатора и перестает взаимодействовать с модой. Для исключения влияния кооперативных эффектов предположим, что вероятность появления в резонаторе двух атомов очень мала. Для этого интервал времени T между появлением соседних атомов должен удовлетворять условию $T \gg \tau$. В течение времени T в резонаторе нет атомов и мода развивается свободно (релаксирует). Лиувиллиан $\gamma\hat{L}$ релаксационного процесса следующим образом действует на матрицу ρ (в представлении взаимодействия):

$$\gamma\hat{L}\rho = \frac{\gamma}{2} [(n_b + 1) (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + n_b (2\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a}\hat{a}^\dagger)]. \quad (2)$$

Здесь γ — скорость релаксации моды, n_b — среднее число планковских (термических) фотонов, $\rho = \rho(t)$ — редуцированная матрица плотности моды. Начальное состояние атома на каждом цикле измерения предполагается основным, начальная атомная матрица плотности

$$\rho_a = |0\rangle\langle 0|. \quad (3)$$

Пренебрежем релаксацией (моды и атома) на коротком интервале τ . Тогда супероператор развития редуцированной матрицы плотности моды полного ансамбля на одном цикле действия фотодетектора можно приближенно разбить на два множителя:

$$\rho(\tau + T + t) = \hat{W}\hat{D}\rho(t). \quad (4)$$

Здесь

$$\rho(t + \tau) = \hat{D}\rho(t) = \text{Sp}_a \left(\exp(-i\hat{H}\tau) \rho(t) \otimes |0\rangle\langle 0| \exp(i\hat{H}\tau) \right), \quad (5)$$

$$\hat{W} = \exp(\hat{L}\gamma T). \quad (6)$$

Здесь и далее $\text{Sp}_a, \text{Sp}_s, \text{Sp}_{a,s}$ — операции взятия следа соответственно по состояниям атома, квантовой системы и их совместный след. Измерительный процесс повторяется, причем полученная редуцированная матрица плотности становится начальной матрицей на новом цикле. Матрица плотности моды для полного ансамбля изменяется во времени (релаксирует) как из-за взаимодействия с окружением (через зеркала, скорость γ), так и из-за взаимодействия с атомом зонда (скорость λ). С течением времени в резонаторе установится равновесное состояние моды.

Дополнительная информация о состоянии вылетевшего из резонатора очередного зондирующего атома может быть использована для расщепления полного ансамбля на три подансамбля. Для этого вводится случайная переменная ξ , принимающая три значения: $\xi = 0, 1, 2$. Значение $\xi = 0$ соответствует тому, что атом обнаружен в нижнем состоянии, $\xi = 1$ — атом обнаружен верхнем состоянии, $\xi = 2$ — атом пропущен из-за несовершенства детектирования. Рассматриваемый измерительный процесс определяется неортогональной положительно определенной вероятностной операторной мерой [1], состоящей из трех операторов, $\hat{\Pi}_\xi^a, \xi = 0, 1, 2$, действующих в подпространстве энергетических состояний зонда

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_0^a + \hat{\Pi}_1^a + \hat{\Pi}_2^a &= \hat{I}, \\ \hat{\Pi}_0^a &= \varepsilon_0|0\rangle\langle 0|, \quad \hat{\Pi}_1^a = \varepsilon_1|1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\Pi}_2^a &= (1 - \varepsilon_0)|0\rangle\langle 0| + (1 - \varepsilon_1)|1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее \hat{I} — тождественная операция в соответствующем пространстве, $0 \leq \varepsilon_0, \varepsilon_1 \leq 1$ — эффективности детекторов (ионизационных камер) соответственно нижнего и верхнего состояний атома. Априорная вероятность каждого события в момент $\tau + t$ вылета атома (перед измерением) рассчитывается по формуле

$$P(\xi) = \text{Sp}_{s,a} \left(\hat{\Pi}_\xi^a \exp(-i\hat{H}\tau) \rho(t) \otimes |0\rangle\langle 0| \exp(i\hat{H}\tau) \right). \quad (8)$$

Здесь t — момент влета атома в резонатор. Введем три оператора, $\hat{M}_\xi^a, \xi = 0, 1, 2$, — трансформеры атомных состояний (операторы Крауза) [1, 28]:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\xi^a &= \hat{M}_\xi^{a\dagger} \hat{M}_\xi^a, \quad \hat{M}_\xi^a = \sqrt{\hat{\Pi}_\xi^a}, \quad \xi = 0, 1, 2, \\ \hat{M}_0^a &= \sqrt{\varepsilon_0} |0\rangle\langle 0|, \quad \hat{M}_1^a = \sqrt{\varepsilon_1} |1\rangle\langle 1|, \\ \hat{M}_2^a &= \sqrt{1 - \varepsilon_0} |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1 - \varepsilon_1} |1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (9)$$

Условная (обусловленная результатом однократного измерения) редуцированная матрица плотности системы $\rho(t + \tau|\xi)$ мгновенно трансформируется (проекторный постулат фон Неймана) согласно соотношению (ср. с (5))

$$\rho(t + \tau|\xi) = \frac{\text{Sp}_a \left(\hat{M}_\xi^a \exp(-i\hat{H}\tau) \rho(t) \otimes |0\rangle\langle 0| \exp(i\hat{H}\tau) \hat{M}_\xi^{a\dagger} \right)}{P(\xi)}. \quad (10)$$

Согласно [1, 15], определяем обобщенную положительно определенную вероятностную операторную меру (обобщенные проекторы), $\hat{\Pi}_\xi^s$, $\xi = 0, 1, 2$, действующую в гильбертовом пространстве системы (квантовой моды)

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\xi^s &= \langle 0| \exp(i\hat{H}\tau) \hat{\Pi}_\xi^a \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle, \\ \hat{\Pi}_0^s + \hat{\Pi}_1^s + \hat{\Pi}_2^s &= \hat{I}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда вероятность $P(\xi)$ (8) запишется в виде

$$P(\xi) = \text{Sp}_s \left(\hat{\Pi}_\xi^s \rho(t) \right). \quad (12)$$

Вместо операторов \hat{M}_ξ^a (9) вводим серию операторов Крауза,

$$\hat{M}_{\zeta,\xi}^s, \quad \xi = 0, 1, 2, \quad \zeta = 0, 1,$$

— трансформеров состояния в гильбертовом пространстве системы [28]:

$$\hat{\Pi}_\xi^s = \sum_{\zeta=0,1} \hat{M}_{\zeta,\xi}^{s\dagger} \hat{M}_{\zeta,\xi}^s, \quad (13)$$

$$\hat{M}_{\zeta,\xi}^s = \langle \zeta | \hat{M}_\xi^a \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle, \quad \zeta = 0, 1.$$

Для получения явного вида трансформеров $\hat{M}_{\zeta,\xi}^s$ найдем оператор развития $\exp(-i\hat{H}\tau)$, записанный через операторы

$$\hat{\Theta}_1 = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a}}, \quad \hat{\Theta}_2 = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \hat{a} \hat{a}^\dagger} :$$

$$\begin{aligned} \exp(-i\hat{H}\tau) &= \\ &= \left(\cos(\tau\lambda\hat{\Theta}_1) + i \frac{\varepsilon}{2\lambda} \frac{\sin(\tau\lambda\hat{\Theta}_1)}{\hat{\Theta}_1} \right) |0\rangle\langle 0| + \\ &+ \left(\cos(\tau\lambda\hat{\Theta}_2) - i \frac{\varepsilon}{2\lambda} \frac{\sin(\tau\lambda\hat{\Theta}_2)}{\hat{\Theta}_2} \right) |1\rangle\langle 1| - \\ &- i \hat{a}^\dagger \frac{\sin(\tau\lambda\hat{\Theta}_2)}{\hat{\Theta}_2} |0\rangle\langle 1| - i \hat{a} \frac{\sin(\tau\lambda\hat{\Theta}_1)}{\hat{\Theta}_1} |1\rangle\langle 0|. \end{aligned}$$

С учетом (9) получаем

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,0}^s &= \sqrt{\varepsilon_0} \langle 0| \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle, \\ \hat{M}_{1,1}^s &= \sqrt{\varepsilon_1} \langle 1| \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle, \\ \hat{M}_{1,0}^s &= \hat{M}_{0,1}^s = 0, \\ \hat{M}_{0,2}^s &= \sqrt{1 - \varepsilon_0} \langle 0| \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle, \\ \hat{M}_{1,2}^s &= \sqrt{1 - \varepsilon_1} \langle 1| \exp(-i\hat{H}\tau) |0\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Условная редуцированная матрица (10) записывается с помощью $\hat{M}_{\zeta,\xi}^s$ как

$$\rho(t + \tau|\xi) = \frac{\sum_{\zeta=0,1} \hat{M}_{\zeta,\xi}^s \rho(t) \hat{M}_{\zeta,\xi}^{s\dagger}}{P(\xi)}. \quad (15)$$

Известно, что для квантовых измерений с ортогональной мерой (ортогональные проекторы) чистое состояние с помощью трансформеров преобразуется в чистое состояние [1]. Формула (15) не удовлетворяет этому свойству из-за неортогональности (и переполненности) меры (9). Используя выражения (11), (13), (15), можно проверить формулу Байеса — разбиение полного ансамбля с матрицей плотности $\rho(t + \tau)$ (5) на три подансамбля с условными матрицами $\rho(t + \tau|\xi)$ при однократном измерении:

$$\rho(t + \tau) = \sum_{\xi=0,1,2} P(\xi) \rho(t + \tau|\xi).$$

Далее будем интересоваться статистическими характеристиками квантованной моды, которые можно вычислить с помощью закона распределения чисел фотонов (главной диагонали редуцированной матрицы плотности в фоковском базисе). В работе [29] показано, что каждая диагональ матрицы развивается во времени независимо от других диагоналей. Это свойство выполняется, если гамильтониан моды, взаимодействующей с атомом, имеет вид (1), оператор релаксации имеет вид (2), а начальная матрица плотности атома имеет (в частности) вид (3). Это свойство существенно облегчает анализ и сокращает численный счет. Удобно переписать выражения (12)–(15) с помощью упрощающих обозначений. Обозначим множество фоковских проекторов

$$|n\rangle\langle n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

символом

$$|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и введем операторы рождения и уничтожения \hat{A}^\dagger , \hat{A} , действующие на $|n\rangle$ по обычному правилу:

$$\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{A}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (16)$$

Для того чтобы главная диагональ при действии трансформеров в (15) не перемешивалась с боковыми диагоналями, необходимо, чтобы на каждый проектор $|n\rangle\langle n|$ действовали операторы следующего вида:

$$\begin{aligned} &(\hat{a})^p \hat{F}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle\langle n| \hat{Q}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (\hat{a}^\dagger)^p = \\ &= \prod_{k=1}^p (n-k+1) \hat{F}(n) \hat{Q}(n) |n-p\rangle\langle n-p|. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $F(n)$, $Q(n)$ — аналитические функции. Запись (17) в новых обозначениях (16) имеет вид

$$\begin{aligned} &(\hat{a})^p \hat{F}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle\langle n| \hat{Q}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (\hat{a}^\dagger)^p = \\ &= \left(\sqrt{\hat{A}\hat{A}^\dagger}\hat{A}\right)^p \hat{F}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \hat{Q}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) |n\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} &(\hat{a}^\dagger)^p \hat{F}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle\langle n| \hat{Q}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (\hat{a})^p = \\ &= \left(\sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}\hat{A}^\dagger\right)^p \hat{F}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \hat{Q}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) |n\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Редуцированная матрица плотности моды, в которой оставлена только главная диагональ, в новых обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n=0} \rho_n |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0} \rho_n |n\rangle\langle n|, \\ \text{Sp}_s \left(\sum_{n=0} \rho_n |n\rangle\langle n| \right) &= \sum_{n=0} \rho_n = 1. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно ввести образующие алгебры $su(1,1)$ (индекс Баргмана $1/2$). В терминах операторов \hat{A}^\dagger , \hat{A} их образующие имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \hat{A}^\dagger \hat{A} + 1/2, \quad \hat{K}_- = \hat{A} \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}, \\ \hat{K}_+ &= \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}} \hat{A}^\dagger \end{aligned} \quad (20)$$

с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\hat{K}_0, \hat{K}_+] &= \hat{K}_+, \quad [\hat{K}_0, \hat{K}_-] = -\hat{K}_-, \\ [\hat{K}_-, \hat{K}_+] &= 2\hat{K}_0. \end{aligned}$$

Тогда лиувиллиан (2) (разделенный на γ) переписывается в виде

$$\hat{L} = (n_b + 1)\hat{K}_- + n_b \hat{K}_+ - (2n_b + 1)\hat{K}_0 + 1/2. \quad (21)$$

Формула (15) преобразования матрицы при измерении примет вид

$$\rho(t + \tau|\xi) = \frac{\hat{D}_\xi \rho(t)}{P(\xi)}, \quad P(\xi) = \text{Sp}_s \left(\hat{D}_\xi \rho(t) \right).$$

Здесь введены новые обозначения \hat{D}_ξ для трансформеров главной диагонали условной редуцированной матрицы:

$$\hat{D}_0 = \varepsilon_0 \left(\cos^2(\tau\lambda\hat{\Omega}) + \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2(\tau\lambda\hat{\Omega})}{\hat{\Omega}^2} \right), \quad (22)$$

$$\hat{D}_1 = \varepsilon_1 \hat{K}_- \frac{\sin^2(\tau\lambda\hat{\Omega})}{\hat{\Omega}^2}, \quad (23)$$

$$\hat{D}_2 = \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \hat{D}_0 + \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \hat{D}_1,$$

записанные через оператор

$$\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \hat{K}_0} - \frac{1}{2}.$$

Оператор развития \hat{D} (5) для полного ансамбля имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \hat{D}_0 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \\ &= \cos^2(\tau\lambda\hat{\Omega}) + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^2 + \hat{K}_- \right) \frac{\sin^2(\tau\lambda\hat{\Omega})}{\hat{\Omega}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Процесс квантовых измерений повторяется циклически в выбранные исследователем моменты времени. Для упрощения записи обозначим редуцированную матрицу плотности полного ансамбля в конце ℓ -го (вначале $\ell + 1$) цикла через $\rho(\ell)$. Тогда рекуррентное соотношение для процесса фотодетектирования, когда детектор включен, но информация не учитывается (полный ансамбль), имеет вид

$$\rho(\ell + 1) = \hat{W} \hat{D} \rho(\ell), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Операторы \hat{W} , \hat{D} и \hat{D}_ξ даются формулами (6), (22)–(24). Условную редуцированную матрицу плотности в конце ℓ -го (вначале $\ell + 1$) цикла для краткости обозначим через $\rho_c(\ell)$. Рекуррентное соотношение для $\rho_c(\ell)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_c(\ell + 1) &= \frac{\hat{W} \hat{D}_\xi \rho_c(\ell)}{P(\xi)}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \\ P(\xi) &= \text{Sp}_s \left(\hat{D}_\xi \rho_c(\ell) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $P(\xi)$ — априорная вероятность выпадения одного из возможных значений случайной переменной ξ в конце ℓ -го цикла. Операторы \hat{W} и \hat{D} сохраняют след матрицы; это свойство следует из соотношения

$$(\hat{W}\hat{D})^\dagger \sum_{n=0} |n\rangle\rangle = \sum_{n=0} |n\rangle\rangle. \quad (27)$$

3. ДИНАМИКА ПОЛНОГО АНСАМБЛЯ

В процессе фотодетектирования исследователь получает дополнительную информацию о развитии квантованной моды. Если эта информация не используется, то взаимодействие моды с зондом измерителя следует рассматривать как дополнительный канал релаксации моды. Рассмотрим развитие полного ансамбля моды с учетом взаимодействия с зондом с помощью рекуррентного соотношения (25). Предположим, что поток зондирующих атомов калиброван и имеет строго определенное время ожидания T и время взаимодействия атомов с резонатором τ . Обозначим

$$N_{ex} = (\gamma T)^{-1}$$

— среднее число атомов, пролетевших через резонатор за время релаксации. Предположим также, что зонд взаимодействует с системой слабо, т. е. выполнено условие

$$\tau\lambda\sqrt{\bar{n}} \ll 1. \quad (28)$$

Здесь \bar{n} — среднее число фотонов в моде. Именно это приближение используется в теории внутреннего фотодетектирования [17–19]. Соотношение (25) описывает процесс релаксации моды к стационарному состоянию. Стационарная матрица плотности, в силу соотношения (27), удовлетворяет уравнению

$$\rho_{ST} = \hat{W}\hat{D}\rho_{ST}. \quad (29)$$

Трансформеры (22), (23) и оператор \hat{D} (24) в приближении (28) становятся линейными функциями от образующих $su(1, 1)$, что существенно упрощает анализ:

$$\hat{D}_0 \approx \varepsilon_0 \left(\hat{I} - (\tau\lambda)^2 \left(\hat{K}_0 - 1/2 \right) \right), \quad (30)$$

$$\hat{D}_1 \approx \varepsilon_1 (\tau\lambda)^2 \hat{K}_-, \quad (31)$$

$$\hat{D} \approx \hat{I} + (\tau\lambda)^2 \left(\hat{K}_- - \hat{K}_0 + 1/2 \right).$$

Совершим преобразование операторов \hat{W} и \hat{D} с помощью оператора \hat{V} (переход в V -представление):

$$\hat{V} = \exp \left(\frac{n_b}{1+n_b} \hat{K}_+ \right) \exp \left(-(1+n_b) \hat{K}_- \right). \quad (32)$$

В новом V -представлении имеем

$$\hat{V}^{-1} \hat{W} \hat{V} = \exp \left(\frac{1/2 - \hat{K}_0}{N_{ex}} \right), \quad (33)$$

$$\hat{V}^{-1} \hat{D} \hat{V} \approx \hat{I} - (\tau\lambda)^2 \left(\frac{n_b}{(n_b + 1)^2} \hat{K}_+ + \hat{K}_0 - 1/2 \right),$$

$$\rho_{ST} = \hat{V} \tilde{\rho}_{ST} = \hat{V} \sum_{n=0} (\tilde{\rho}_{ST})_n |n\rangle\rangle.$$

В фоковском базисе из (29) получаем двухчленное рекуррентное соотношение для редуцированной матрицы плотности полного ансамбля $\tilde{\rho}_{ST}$ в V -представлении:

$$(\tilde{\rho}_{ST})_n = (\tau\lambda)^2 \frac{n_b}{(n_b + 1)^2} \times \\ \times \frac{n}{1 - \exp(n/N_{ex}) - (\tau\lambda)^2 n} (\tilde{\rho}_{ST})_{n-1}. \quad (34)$$

При выполнении условия (28) приближенное решение (34) имеет вид

$$\tilde{\rho}_{ST} \approx \frac{1}{n_b + 1} |0\rangle\rangle + (\tau\lambda)^2 \frac{n_b}{(n_b + 1)^3} \frac{1}{1 - \exp(1/N_{ex})} |1\rangle\rangle,$$

т. е. установившееся решение есть распределение, близкое к планковскому $\rho_{ST} \approx \rho_P$,

$$\rho_P = \frac{1}{n_b + 1} \hat{V} |0\rangle\rangle = \sum_{k=0} \frac{(n_b)^k}{(n_b + 1)^{k+1}} |k\rangle\rangle. \quad (35)$$

При выполнении условия (28) взаимодействие с зондирующим атомом слабо влияет на ход процесса релаксации и на конечное стационарное состояние полного ансамбля системы.

Рассмотрим другой режим фотодетектирования, положив, что время ожидания очередного атома зонда T есть пуассоновская случайная величина со средним значением $\bar{T} = 1/R$, где R — средний поток атомов через резонатор. Предположим, что время взаимодействия τ есть гауссовская случайная величина с математическим ожиданием τ_0 и среднеквадратичным отклонением $\Delta\tau$. Заменим операторы \hat{W} и \hat{D} ((6), (24)) в выражении (29) их средними значениями по этим распределениям. Усредненные операторы имеют вид

$$\hat{W} = \frac{1}{\hat{I} - \hat{L}/N_{ex}}, \quad (36)$$

$$\overline{\cos^2(\tau\lambda\hat{\Omega})} = \\ = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \cos(2\tau_0\lambda\hat{\Omega}) \exp \left\{ -2(\Delta\tau\lambda)^2 \hat{\Omega}^2 \right\} \right). \quad (37)$$

Здесь $N_{ex} = R/\gamma$. Выберем параметры измерителя из следующих соотношений:

$$\tau_0 \ll 1/R, \quad \Delta\tau \ll 1/R, \quad \Delta\tau\lambda \gg 1, \quad \varepsilon = 0. \quad (38)$$

С помощью (37) получаем усредненные выражения для трансформеров (22)–(24), записанные через операторы (20):

$$\hat{D}_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\hat{I} + |0\rangle\rangle\langle\langle 0|), \quad (39)$$

$$\hat{D}_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{1}{\hat{K}_0 + 1/2} \hat{K}_-, \quad (40)$$

$$\hat{D}_2 = \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \hat{D}_0 + \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \hat{D}_1. \quad (41)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + |0\rangle\rangle\langle\langle 0| + \frac{1}{\hat{K}_0 + 1/2} \hat{K}_- \right). \quad (42)$$

Оператор, аналогичный $(1/(\hat{K}_0 + 1/2))\hat{K}_-$, рассматривался в литературе [21, 22, 30, 31] применительно к процессу фотодетектирования. Найдем установившееся решение для полного ансамбля, решив уравнение (29) с операторами \hat{W} (36) и \hat{D} (42). Уравнение (29) в фоковском базисе имеет вид трехчленного рекуррентного соотношения. При использовании дополнительного свойства (27), эквивалентного условию сохранения потока вероятности, это трехчленное соотношение упрощается до двухчленного:

$$(\rho_{ST})_n = \frac{n_b n}{N_{ex}/2 + (n_b + 1)n} (\rho_{ST})_{n-1}, \quad (43)$$

$n = 1, 2, \dots$

При больших значениях N_{ex} ближнее крыло распределения чисел фотонов может быть сильно деформировано из-за взаимодействия с детектором, дальнее крыло остается планковским. Из выражения (43) следует, что при условии

$$n_b \gg N_{ex}$$

(большая скорость релаксации на зеркалах, достаточно большая температура резонатора) решение близко к планковскому распределению (35), т. е. влияние зонда на процесс релаксации при этом условии ослаблено.

4. СВОЙСТВА ТРАНСФОРМЕРОВ

Каждая реализация случайного процесса фотодетектирования содержит дополнительную информацию о развитии резонаторной моды. Стохастическая траектория (последовательность событий) генерируется с помощью последовательного действия

операторов $\hat{W}\hat{D}_\xi$ (26) на начальное состояние моды. Траектории могут быть весьма разнообразны. Изучим простейшие из них. Предположим, детектор обнаруживает маловероятное событие — серию атомов в возбужденном состоянии. Если эта серия достаточно длительна, то полевая мода перейдет в квазистационарное состояние, которое определяется максимальным собственным числом оператора $\hat{W}\hat{D}_1$ [32]. Решим спектральную задачу для $\hat{W}\hat{D}_1$ для двух режимов фотодетектирования. Из выражений (6), (21), (31) для первого режима (28) изучаемое уравнение имеет вид

$$\varepsilon_1(\tau\lambda)^2 \exp(\hat{L}/N_{ex}) \hat{K}_- \rho_\mu = \mu \rho_\mu.$$

Совершим последовательные преобразования уравнения (преобразование \hat{V} дано в (32)):

$$\rho_\mu = \hat{V} \exp\left(\ln\left(\frac{n_b}{(1+n_b)^2}\right) \hat{K}_0\right) \times \exp\left(\frac{1/2 - \hat{K}_0}{2N_{ex}}\right) \tilde{\rho}_\mu. \quad (44)$$

Уравнение приобретает вид

$$\varepsilon_1(\tau\lambda)^2 n_b \exp\left(\frac{1/2 - \hat{K}_0}{2N_{ex}}\right) (\hat{K}_- + \hat{K}_+ + 2\hat{K}_0) \times \exp\left(\frac{1/2 - \hat{K}_0}{2N_{ex}}\right) \tilde{\rho}_\mu = \mu \tilde{\rho}_\mu. \quad (45)$$

В фоковском базисе соответствующее эрмитовое трехчленное рекуррентное соотношение анализируется с помощью дискретного квазиклассического метода из работы [33]. В результате анализа получают следующие оценки максимального собственного числа μ_{max} (условная вероятность) и приближенно основного состояния $\tilde{\rho}_{\mu_{max}}$ уравнения (45):

$$\mu_{max} \approx \varepsilon_1(\tau\lambda)^2 n_b (4N_{ex} - \sqrt{2}) \exp\left(\frac{1}{2N_{ex}} - 1\right),$$

$$(\tilde{\rho}_{\mu_{max}})_n \approx \text{Norm} \exp\left(-\frac{(n - N_{ex})^2}{\sqrt{2}N_{ex}}\right). \quad (46)$$

Здесь Norm — нормировочная константа. Воспользуемся точным соотношением

$$P(1) = \text{Sp}_s(\hat{D}_1\rho) = \varepsilon_1(\tau\lambda)^2 \bar{n}, \quad (47)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов, а $P(1)$ (см. (26)) — вероятность обнаружить возбужденный атом после взаимодействия с полем в состоянии ρ . Получим

среднее число фотонов в состоянии $\rho_{\mu_{max}}$ (45), (46) (в этом состоянии $P(1) = \mu_{max}$)

$$\bar{n} \approx n_b \left(4N_{ex} - \sqrt{2} \right) \exp \left(\frac{1}{2N_{ex}} - 1 \right). \quad (48)$$

Теория фотодетектирования для первого режима предсказывает парадоксальные свойства траектории, в течение которой подряд обнаруживаются вылетающие атомы в возбужденном состоянии. Парадоксальность данного результата состоит в том, что если в начальном состоянии среднее число фотонов было меньше, чем $4n_b N_{ex}$, то с увеличением числа обнаруженных в возбужденном состоянии атомов предсказывается рост среднего числа фотонов в резонаторе до величины (48). Похожая особенность обсуждалась в литературе [17, 34] (но без учета релаксационного процесса). Приведем два комментария к этому парадоксу. Во-первых, такие события редки, так как из приближения (28) и из выражения (47) следует, что $P(1) \ll 1$. Во-вторых, вероятность обнаружить очередной атом в возбужденном состоянии пропорциональна среднему числу фотонов в моде (47). Зная это, экспериментатор, обнаруживший вылетающие один за другим возбужденные атомы, склонен будет переоценивать среднее число фотонов в резонаторе в сторону увеличения.

Для второго режима фотодетектирования (38) с помощью выражений (36), (40) получаем уравнение на собственные значения для оператора $\hat{W} \hat{D}_1$:

$$\frac{\varepsilon_1}{2} \frac{1}{\hat{I} - \hat{L}/N_{ex}} \frac{1}{\hat{K}_0 + 1/2} \hat{K}_- \rho_\mu = \mu \rho_\mu. \quad (49)$$

В V -представлении (32) в базисе Фока оператор \hat{D}_1 имеет верхнетреугольную матрицу, а усредненный оператор \hat{W} диагонален. Собственные числа задачи (49) имеют вид

$$\mu_m = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{n_b}{1 + n_b} \frac{N_{ex}}{N_{ex} + m}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Для максимального собственного числа μ_{max} ($m = 0$) собственный вектор совпадает с планковским распределением (35)

$$\rho_{\mu_{max}} = \rho_P,$$

и, следовательно, среднее число фотонов $\bar{n} = n_b$. Для второго режима фотодетектирования вероятность $P(1)$ (в отличие от (47)) равна

$$P(1) = \text{Sp}_s \left(\hat{D}_1 \rho \right) = \frac{\varepsilon_1}{2} (1 - (\rho)_0),$$

где $(\rho)_0$ — заселенность вакуума в произвольном состоянии ρ , и определяется заселенностью возбужденных состояний поля.

Рассмотрим другой предельный случай: детектор обнаруживает серию атомов в основном состоянии. Если эта последовательность достаточно длительна, то полевая мода перейдет в квазистационарное состояние, которое определяется максимальным собственным числом оператора $\hat{W} \hat{D}_0$ [32]. Решим спектральную задачу для двух режимов фотодетектирования. Из выражений (6), (21), (30) для первого режима (28) получаем уравнение

$$\varepsilon_0 \exp \left(\hat{L}/N_{ex} \right) \left(\hat{I} - (\tau\lambda)^2 \left(\hat{K}_0 - 1/2 \right) \right) \rho_\mu = \mu \rho_\mu. \quad (50)$$

В V -представлении (32) при выполнении условия (28) приближенное решение уравнения (50) для основного состояния имеет вид

$$\mu_{max} = \varepsilon_0 (1 - (\tau\lambda)^2 n_b),$$

$$\tilde{\rho}_{\mu_{max}} = |0\rangle\rangle - (\tau\lambda)^2 \frac{n_b}{1 + n_b} \left(\exp \left(\frac{1}{N_{ex}} \right) - 1 \right)^{-1} |1\rangle\rangle.$$

Решение $\tilde{\rho}_{\mu_{max}}$ в исходном представлении близко к планковскому (35).

Для второго режима фотодетектирования (38) с помощью (36), (39) получаем уравнение на собственные значения для оператора $\hat{W} \hat{D}_0$:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{\hat{I} - \hat{L}/N_{ex}} \left(\hat{I} + |0\rangle\rangle\langle\langle 0| \right) \rho_\mu = \mu \rho_\mu.$$

Собственные числа μ являются решениями трансцендентного уравнения

$$1 = \frac{\nu}{1 + n_b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n_b}{1 + n_b} \right)^k \frac{N_{ex}}{(1 - \nu)N_{ex} + k}, \quad (51)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_0}{2\mu}.$$

Максимальное значение собственного числа лежит в интервале $\varepsilon_0/2 < \mu_{max} < \varepsilon_0$, решение для любого ν из (51) в V -представлении имеет вид

$$\tilde{\rho}_\mu = \text{Norm} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n_b}{(1 + n_b)^2} \right)^k \frac{(-1)^k}{(1 - \nu)N_{ex} + k} |k\rangle\rangle.$$

В V -представлении состояние $\tilde{\rho}_{\mu_{max}}$ локализовано около $|0\rangle\rangle$, а в исходном представлении — близко к планковскому (35).

5. ИНФОРМАЦИЯ, ПОЛУЧАЕМАЯ ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ

Приготовим поле в резонаторе в начальном состоянии с матрицей плотности

$$\rho = \sum_{k=0} (\rho)_k |k\rangle$$

и изучим переходный процесс релаксации моды к равновесию при включенном детекторе фотонов (невозбужденный пучок атомов пропускается через резонатор). Последовательность срабатываний детекторов формирует трихотомическую случайную переменную $\xi = 0, 1, 2$ (срабатывают детекторы нижнего состояния, верхнего состояния, атом пропущен). С помощью статистической обработки этой последовательности (случайной траектории) можно получить вероятности различных конфигураций — отрезков траектории. Если пучок атомов калиброван (первый режим фотодетектирования (28)), то можно, в принципе, многократно повторяя эксперимент, получить совместную вероятность конкретной последовательности срабатываний детекторов $P_K(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots, \xi_K)$ длительности K пролетов атомов, где ξ_n — значение случайной переменной, выпавшее на n -ом цикле. Свяжем линейным соотношением эти вероятности $P_K(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots, \xi_K)$ с вектором главной диагонали матрицы плотности моды (вероятностями чисел фотонов). Такая связь позволяет определить начальный закон распределения чисел фотонов из эксперимента по счету фотонов. Перепишем матрицу плотности ρ в V -представлении (32):

$$\rho = \hat{V} \tilde{\rho}.$$

Воспользуемся свойством матричных элементов оператора \hat{V} в базе Фока

$$\sum_{k=0} \hat{V}_{k,m} = (1 + n_b) \delta_{m,0}. \quad (52)$$

Здесь $\delta_{m,k}$ — символ Кронекера. Получаем формулу связи вероятности $P_1(1)$ обнаружения возбужденного атома после однократного пролета невозбужденного атома-зонда с матричными элементами начальной матрицы плотности $(\tilde{\rho})_m$ в V -представлении:

$$P_1(1) = \text{Sp} (\hat{W} \hat{D}_1 \rho) = \varepsilon_1 (\tau \lambda)^2 (n_b + (1 + n_b)^3 (\tilde{\rho})_1). \quad (53)$$

Вероятность однократного обнаружения невозбужденного атома

$$P_1(0) = \text{Sp} (\hat{W} \hat{D}_0 \rho) = \varepsilon_0 (1 - (\tau \lambda)^2 n_b - (\tau \lambda)^2 (1 + n_b)^3 (\tilde{\rho})_1). \quad (54)$$

Вероятность однократного пропуска атома легко получается из выражений (53), (54) с помощью (23). Вероятность обнаружить возбужденный атом дважды подряд

$$P_2(1, 1) = \text{Sp} (\hat{W} \hat{D}_1 \hat{W} \hat{D}_1 \rho) = \varepsilon_1 (\tau \lambda)^2 (n_b^2 (1 + \exp(-1/N_{ex})) + n_b (1 + n_b)^3 (1 + 3 \exp(-1/N_{ex})) \times (\tilde{\rho})_1 + 2 \exp(-1/N_{ex}) (1 + n_b)^5 (\tilde{\rho})_2). \quad (55)$$

Вероятность любого отрезка траектории, полученного в первом режиме фотодетектирования, линейно связана с диагональными матричными элементами исходной матрицы $(\tilde{\rho})_m$. Существенно, что вероятность отрезка траектории длительностью K пролетов зависит от первых K матричных элементов $(\tilde{\rho})_m$. Другими словами, есть матрица \hat{B} , имеющая нижнетреугольную форму, связывающая вектор, заполненный измеренными вероятностями $P_1(\xi_1), P_2(\xi_1, \xi_2), \dots, P_K(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots, \xi_K)$ обнаружения последовательно (на единицу) удлиняющихся отрезков траекторий с $(\tilde{\rho})_m$. Тогда матричные элементы $(\tilde{\rho})_m$ (в V -представлении) определяются из решения линейной системы уравнений

$$P_K(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots, \xi_K) = \sum_{n=1}^K \hat{B}_{K,n} (\tilde{\rho})_n + b_K, \quad K = 1, 2, \dots$$

Матричные элементы $\hat{B}_{K,n}$ и компоненты вектора b_K с младшими номерами определяются с помощью (53)–(55). Остальные матричные элементы нетрудно найти по аналогии.

Рассмотрим процесс фотодетектирования с помощью пуассоновского потока атомов с гауссовским разбросом по скоростям, при выполнении условия (38) (второй режим). Если пучок атомов хаотичен, то определить моменты пропуска атомов детектором проблематично. В этом случае возможно получение из эксперимента суммарных вероятностей распределения фотоотсчетов $P(K, m, n)$, т. е. вероятностей обнаружения на заданном временном интервале длительностью K пролетов m срабатываний детектора нижнего состояния и n срабатываний детектора верхнего состояния. Полное число пролетевших атомов K можно оценить по атомному потоку R и длительности отрезка времени измерения t_{meas} :

$$K = R t_{meas}.$$

Эту вероятность можно связать линейным соотношением с элементами главной диагонали начальной матрицы моды в базисе Фока. Предположим, что измерение проводится в высокодобротном резонаторе и занимает отрезок времени t_{meas} , когда $K \ll N_{ex}$. Тогда релаксационным процессом на интервале измерения можно пренебречь. В этом приближении получим формулы, связывающие вероятности распределения фотоотсчетов $P(K, m, n)$ с начальными вероятностями чисел фотонов в резонаторе в базисе Фока. Точечные вероятности $P_K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K)$ и вероятности фотоотсчетов $P(K, m, n)$ связаны соотношением

$$P(K, m, n) = \sum_{\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K\}_m^n} P_K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K).$$

Здесь введено обозначение правила суммирования $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K\}_m^n$, соответствующее суммированию по всем перестановкам K случайных переменных $\xi = 0, 1, 2$, среди которых m переменных принимает значение $\xi = 0$ и n переменных принимает значение $\xi = 1$. Воспользовавшись представлением оператора $(1/(\hat{K}_0 + 1/2))\hat{K}_-$ (40) в базисе Фока

$$\frac{1}{\hat{K}_0 + 1/2} \hat{K}_- = \sum_{m=0} |m\rangle \langle m+1|,$$

получаем формулы для младших вероятностей:

$$P(1, 0, 1) = \frac{\varepsilon_1}{2}(1-\rho_0), \quad P(1, 1, 0) = \frac{\varepsilon_0}{2}(1+\rho_0),$$

$$P(1, 0, 0) = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}P(1, 0, 1) + \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}P(1, 1, 0),$$

$$P(1, 0, 1) + P(1, 1, 0) + P(1, 0, 0) = 1.$$

Остальные формулы получаются по аналогии. Особой простотой обладают формулы для вероятностей фотодетектирования для траекторий из $K + 1$ пролетов, каждая из которых заканчивается обнаружением атома-зонда в возбужденном состоянии. Упрощение связано с возможностью перестановки операторов \hat{D}_0, \hat{D}_1 и \hat{D}_2 в произведении из $K + 1$ сомножителя, которое заканчивается (слева) оператором \hat{D}_1 (39)–(41). Обозначим $P'(K + 1, m, n + 1)$ суммарную вероятность пучка траекторий длительностью $K + 1$ пролетов каждая, которые заканчиваются срабатыванием детектора верхнего состояния и для которых зафиксировано m вылетов в основном состоянии, $n + 1$ вылетов в возбужденном состоянии, а детекторы не сработали $K - m - n$ раз. Тогда

$$\begin{aligned} P'(K + 1, m, n + 1) &= \\ &= \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^m \frac{K!}{m!n!(K - m - n)!} \times \\ &\quad \times \left(\left(1 - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}\right)^{K - m - n} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q=0}^{K - m - n} \frac{(K - m - n)!}{q!(K - m - n - q)!} \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{2}\right)^q \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{2}\right)^{K - m - n - q} \sum_{r=0}^{q+n} (\rho)_r \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему линейных уравнений, позволяющих по измеренным в процессе фотодетектирования вероятностям $P'(K + 1, m, n + 1)$ восстановить матричные элементы главной диагонали $(\rho)_r$ начальной матрицы плотности моды. Формулы восстановления существенно упрощаются для идеальных детекторов: $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$. В этом случае все атомы детектируются и решение имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_R &= \frac{2^{K+1}R!(K - R + 1)!}{K!} \times \\ &\quad \times \left(\frac{P'(K + 1, K - R + 1, R)}{R} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P'(K + 1, K - R, R + 1)}{K - R + 1} \right), \end{aligned}$$

$$1 \leq R \leq K,$$

$$\rho_0 = 1 - 2^{K+1}P'(K + 1, 0, K + 1).$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численную проверку формулы (56) можно выполнить разными способами. Выберем начальное распределение чисел фотонов ρ , сгенерируем с помощью стохастических рекуррентных соотношений (26) множество из S траекторий длительностью в $K + 1$ пролетов (выборка объемом S). Отберем из них такие траектории, в которых последний атом обнаружен в возбужденном состоянии. Среди отобранных найдем траектории, в которых не обнаружены атомы в основном состоянии $m = 0$. Количество таких траекторий обозначим $S(K)$. Оценим суммарную вероятность $\sum P(K)$ этих траекторий (отбираемых условием $m = 0$) по относительной частоте

$$\sum P(K) \approx \frac{S(K)}{S}. \quad (57)$$

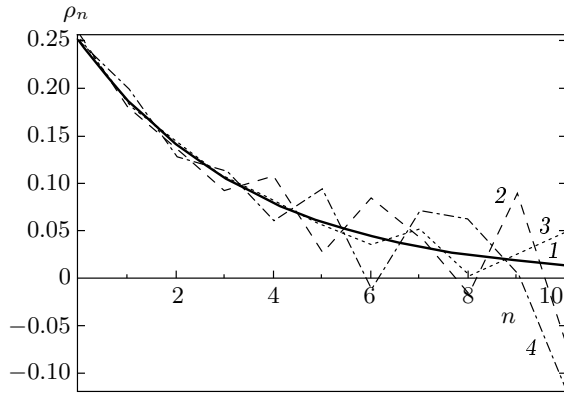


Рис. 1. Зависимости главной диагонали ρ_n начальной тепловой матрицы плотности моды от фокковского числа n : 1 — начальное (априорное) тепловое распределение (61); 2 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 10^5$; 3 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 5 \cdot 10^5$; 4 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.7, \varepsilon_1 = 0.5, S = 5 \cdot 10^5$

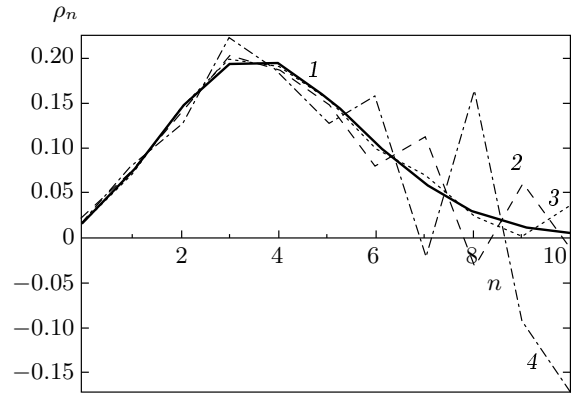


Рис. 2. Зависимости главной диагонали ρ_n начальной когерентной матрицы плотности моды от фокковского числа n : 1 — начальное (априорное) когерентное распределение (62); 2 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 10^5$; 3 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 5 \cdot 10^5$; 4 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.7, \varepsilon_1 = 0.5, S = 5 \cdot 10^5$

Формулы восстановления принимают вид

$$(\rho)_{K+1} = 2^{K+1} \left(Y_{K+1} - \sum_{R=0}^K A_{K+1,R}(\rho)_R \right), \quad (58)$$

$$(\rho)_0 = Y_0.$$

Здесь введены вектор Y_K и матрица $A_{K,R}$:

$$Y_K = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)^K - \frac{2}{\varepsilon_1} \sum P(K), \quad (59)$$

$$A_{K,R} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)^K - \left(\frac{1}{2}\right)^K \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{R-1} \sum_{q=0}^{R-n-1} (\varepsilon_1)^n \frac{K!}{n!q!(K-n-q)!} \times$$

$$\times (1 - \varepsilon_0)^{K-n-q} (1 - \varepsilon_1)^q, \quad (60)$$

$$A_{K,K} = \left(\frac{1}{2}\right)^K, \quad A_{K,0} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)^K.$$

На рис. 1–3 приведены результаты численного моделирования. Использовались три начальных распределения: планковское (термическое) (рис. 1)

$$(\rho_T)_n = \frac{1}{1+n_T} \left(\frac{n_T}{1+n_T} \right)^n, \quad n_T = 3, \quad (61)$$

когерентное (рис. 2)

$$(\rho_C)_n = \frac{n_C^n}{n!} \exp(-n_C), \quad n_C = 4, \quad (62)$$

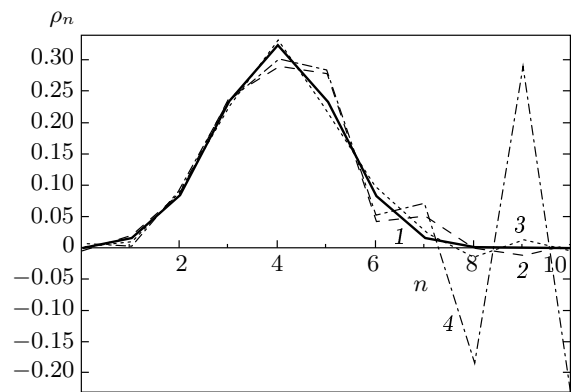


Рис. 3. Зависимости главной диагонали ρ_n начальной гауссовой матрицы плотности моды от фокковского числа n : 1 — начальное (априорное) гауссовское распределение (63); 2 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 10^5$; 3 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.9, \varepsilon_1 = 0.94, S = 5 \cdot 10^5$; 4 — восстановленное распределение при $\varepsilon_0 = 0.7, \varepsilon_1 = 0.5, S = 5 \cdot 10^5$

и гауссово (рис. 3)

$$(\rho_G)_n = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \exp\left(-\frac{(n-n_G)^2}{\delta}\right), \quad (63)$$

$$n_G = 4, \quad \delta = 3.$$

Для второго режима фотодетектирования предполагались выполненными условия (38). На интерва-

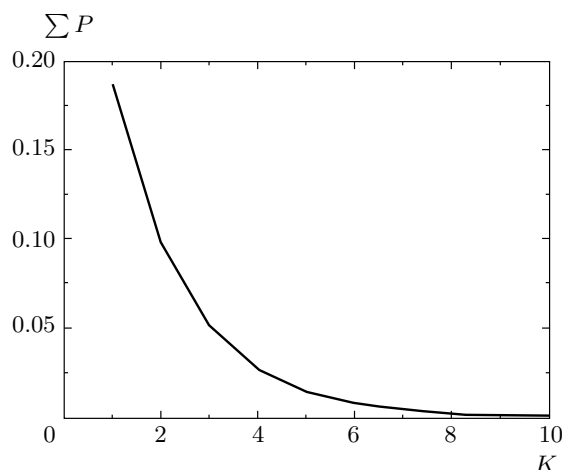


Рис. 4. Зависимость суммарной априорной вероятности $\sum P$ от количества пролетевших через резонатор атомов-зондов, построенная с помощью начального гауссова распределения (63)

ле измерения релаксацией пренебрегалось. Генерировались траектории с количеством пролетающих атомов $K + 1 = 11$. На рис. 1–3 цифрой 1 отмечен график начального распределения чисел фотонов, а цифрами 2, 3, 4 отмечены графики распределений, восстановленных в результате численного эксперимента по формулам (58)–(60). Как видно из рисунков, метод чувствителен к эффективностям детекторов. С уменьшением эффективностей ε_0 и ε_1 при фиксированном объеме выборки (графики 3 и 4) резко возрастает погрешность восстановления из-за уменьшения количества получаемой полезной информации. При одинаковых значениях эффективностей (графики 2 и 3) с уменьшением объема выборки погрешность также растет. Это связано с чувствительностью метода к количеству восстанавливаемых из эксперимента значащих цифр в величинах измеряемых вероятностей $\sum P(K)$ (57). На рис. 4 приводится типичный график изменения вероятности от количества пролетевших через резонатор атомов-зондов (использовано гауссово распределение). Для правильного восстановления закона распределения чисел фотонов требуется, чтобы третья или четвертая цифра после запятой была бы значащей, для этого требуется большой объем выборки. Как видно из рис. 1–3 погрешность восстановления возрастает с ростом фоковского числа n .

Как показывает численный анализ (результаты которого в данной работе не приводятся), возможен альтернативный метод восстановления, основанный на наблюдении траекторий длительностью в $K + 1$

пролетов. Рассмотрим выборку объемом S . Отберем такие траектории, в которых последний атом обнаружен в возбужденном состоянии. Среди отобранных найдем траектории с фиксированным числом атомов, обнаруженных в основном состоянии $m = K - M$, $0 \leq M \leq K$. Обозначим найденное число S_M . Суммарную вероятность такого пучка траекторий обозначим $\sum P_M(K)$. Тогда, заменяя искомую вероятность $\sum P_M(K)$ относительной частотой, получим оценку

$$\sum P_M(K) \approx \frac{S_M}{S}.$$

Расчет показывает, что в этом случае погрешность восстановления элементов главной диагонали матрицы плотности моды уменьшается с увеличением фоковского числа n . Комбинируя два метода, можно добиться хорошего результата по восстановлению начальной матрицы плотности из эксперимента по фотодетектированию.

Результаты численного моделирования дискретной последовательности срабатываний фотодетекторов показывают, что этим методом может быть исследован переходный процесс в резонаторе. Статистическая информация, полученная при фотодетектировании, позволяет восстанавливать начальную матрицу плотности (главную диагональ) резонаторной моды. Дискретная модель фотодетектирования может быть применена и для исследования квазистационарных состояний квантовой системы. Для этого можно воспользоваться методом периодических квантовых траекторий, развитым в работе [32]. Таким способом можно исследовать динамику квантовых скачков в трехуровневых V- или Λ-схемах, возбуждаемых двумя полями. Теория, описывающая динамику этих схем без проведения последовательности квантовых измерений, дана в работе [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Preskill, *Quantum Computing Lectures*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/> (1997).
2. W. H. Zurek, *Revs Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
3. A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Acad. Publ. (2002).
4. H. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag (1993).
5. C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

6. B. Saleh, *Photoelectron Statistics*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
7. L. Mandel, Proc. Phys. Soc. **72**, 1037 (1958).
8. M. B. Plenio and P. L. Knight, Rev. Mod. Phys. **70**, 101 (1998).
9. B. R. Mollow, Phys. Rev. **168**, 1896 (1968).
10. P. L. Kelley and W. H. Kleiner, Phys. Rev. **136**, A316 (1964).
11. R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
12. L. Mandel and E. Volf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
13. H. J. Kimble and L. Mandel, Phys. Rev. A **30**, 844 (1984).
14. С. Я. Килин, *Квантовая оптика: поля и их детектирование*, Наука и техн., Минск (1990).
15. Y. Yamamoto and A. Imamogly, *Mesoscopic Quantum Optics*, Wiley (1999).
16. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, New York (1995).
17. M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 3891 (1990).
18. N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 4127 (1990).
19. M. D. Srinivas and E. B. Davies, Opt. Acta. **28**, 981 (1981).
20. P. Zoller, M. Marte, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **35**, 198 (1987).
21. Y. Ben-Aryeh and C. Brif, E-print archives, quant-ph/9504009.
22. A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt. **7**, 99 (2005).
23. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. A **34**, 3077 (1986).
24. H.-J. Briegel, B.-G. Englert, N. Sterpi, and H. Walter, Phys. Rev. A **49**, 2962 (1994).
25. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике*, Наука, Москва (1972).
26. V. B. Braginsky and F. Ya. Khalili, *Quantum Measurement*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
27. А. С. Холево, *Квантовая вероятность и квантовая статистика*, ВИНТИ (1991).
28. K. Kraus, *States, Effects, and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
29. И. П. Вадейко, Г. П. Мирошниченко, А. В. Рыбин, Ю. Тимонен, Опт. и спектр. **89**, 328 (2000).
30. M. C. de Oliveira, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt. **5**, S271 (2003).
31. A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **72**, 023816 (2005).
32. Г. П. Мирошниченко, ЖЭТФ **122**, 965 (2002).
33. P. A. Braun, Rev. Mod. Phys. **65**, 115 (1993).
34. S. S. Mizrahi and V. V. Dodonov, E-print archives quant-ph/0207035.
35. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).