ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 5, стр. 808–818

ГРУППОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ХОЛОДНОМ ГАЗЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ АТОМАРНЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Л. П. Бабич, М. Л. Кудрявцева***

Российский федеральный ядерный центр,
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 августа 2006 г.

Получена система многогрупповых уравнений для трех первых моментов функции распределения электронов высоких энергий в газе неподвижных атомарных частиц. Система предназначена для численного моделирования процессов в плотной слабоионизованной плазме с участием электронов высоких энергий, в том числе убегающих электронов.

PACS: 52.25.Dg, 52.80.-s, 52.90.+z, 52.80.Tn

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее точная информация, необходимая для описания плазменных процессов, в частности, газовых разрядов, содержится в функции распределения заряженных частиц, прежде всего, в функции распределения свободных электронов (ФРЭ), которая вычисляется решением кинетического уравнения или методом Монте-Карло. Однако численное моделирование непосредственно на основе кинетического уравнения или метода Монте-Карло практически нереально в силу ограниченных возможностей современных ЭВМ. Гораздо эффективнее использование системы уравнений для моментов ФРЭ, которая позволяет вести моделирование в приближении сплошной среды. Такие уравнения для нерелятивистской плазмы получены (например, в монографии [1]) интегрированием довольно общего кинетического уравнения в диапазоне энергий $\varepsilon \in [0, \infty]$. Эта система позволяет вычислять эволюцию во времени и пространстве средних величин. Ее недостатком, критическим в случае необходимости учета кинетики электронов высоких энергий, является неспособность описать энергетическое распределение таких электронов, необходимое, например, для вычисления жестких вторичных излучений или моделирования распространения разряда на большие расстояния.

В работах [2–9] реализован многогрупповой метод, позволяющий моделировать кинетику электронов высоких энергий, в частности, убегающих электронов, в терминах уравнений для моментов ФРЭ. Метод позволяет повысить точность расчетов, естественно «сшить» область электронов высоких энергий с областью дрейфующих электронов низких энергий и получить распределение электронов в области высоких энергий. В рамках предельно упрощенной системы уравнений для моментов ФРЭ этот подход уже реализован для моделирования высоковольтного наносекундного разряда при больших перенапряжениях относительно статического пробивного напряжения [2, 3] и гигантских восходящих атмосферных разрядов [4–6]. Более точные групповые уравнения для моментов релятивистской ФРЭ использованы в последних исследованиях восходящих атмосферных разрядов [7–9], но они были записаны априорно на основании «очевидных» физических соображений, а не получены строго из кинетического уравнения, в связи с чем могут содержать некорректности, способные сказываться на точности моделирования физических процессов. В предлага-

*E-mail: babich@elph.vniief.ru, kay@sar.ru
**E-mail: kay@sar.ru

емой работе выводится система групповых уравнений для моментов релятивистской ФРЭ с использованием стандартной процедуры, принятой для вывода нерелятивистской системы для моментов во всем диапазоне энергий [1].

2. ИСХОДНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Нашей задачей является получение групповых уравнений для первых трех моментов ФРЭ [1]. Исходным является релятивистское кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f + \left[\frac{1-\mu^2}{p}\,\frac{\partial}{\partial\mu}f + \mu\frac{\partial}{\partial p}f\right] eE = \\ = \mathrm{St}_{fr} + \mathrm{St}_{sc} + \mathrm{St}_{ion} \quad (2.1)$$

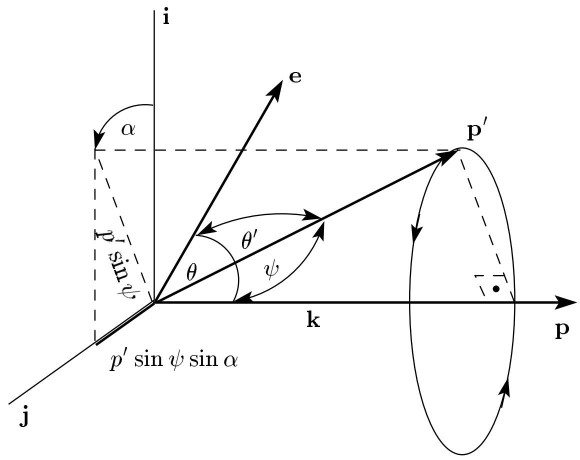
со следующими компонентами оператора столкновений электронов с молекулами [10, 11]:

$$\mathrm{St}_{fr} = \frac{1}{p^2}\,\frac{\partial}{\partial p}\left[p^2 F(p) f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right], \qquad (2.2)$$

$$\mathrm{St}_{sc} = \frac{(Z_{mol}/2+1)F(p)}{4\gamma p}\,\hat{L}_\mu f(\mathbf{r},p,\mu,t), \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{St}_{ion(1)} = N_{mol}\beta c \int\limits_{2\varepsilon+\varepsilon_{ion}}^{\infty} d\varepsilon' \left(\frac{\gamma'^2-1}{\gamma^2-1}\right) \times \\ \times \sigma_{ion}(\varepsilon,\varepsilon')\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\mathbf{r},\varepsilon',\mu',t)\,d\alpha. \quad (2.4)$$

Операторы (2.2) и (2.3) отвечают соответственно за поток в пространстве импульсов и диффузию по углам вследствие рассеяния на атомных ядрах (часть (2.3), содержащая множитель $Z_{mol}/2$) и электронах. Оператор (2.2) и компонента оператора (2.3), отвечающая за рассеяние на атомных электронах, являются дифференциальным представлением части редуцированного ионизационного интеграла, отвечающей за слабые взаимодействия электронов с атомарными частицами. Рождение электронов высоких энергий описывается оставшейся частью (2.4) редуцированного ионизационного интеграла. Обычно оператора (2.2) и электронной части оператора (2.3), описывающих множественные процессы рождения электронов малых энергий, достаточно для вычисления ФРЭ с высокой точностью, а редкие события рождения электронов высоких энергий в ионизующих соударениях с атомарными частицами



Геометрия рассеяния

игнорируются. Однако такие события могут принципиально изменить ход ионизационного процесса в присутствии электрического поля в очень больших объемах газа, таких как планетарные атмосферы в условиях грозовой активности, приводя к генерации лавин релятивистских убегающих электронов и электрическому пробою в полях, более слабых, чем необходимо для обычного пробоя [12, 13].

Здесь $f = f(\mathbf{r},p,\mu,t)$ — ФРЭ по модулю импульса p и косинусу угла μ между вектором импульса $\mathbf{p}$ и единичным вектором в направлении электрической силы $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$, действующей на электроны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в конфигурационном пространстве, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности локального электрического поля, e — элементарный заряд, ε_{ion} — порог ионизации, N_{mol} — концентрация молекул, Z_{mol} — число электронов в молекуле,

$$\hat{L}_\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}$$

— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ — фактор Лоренца, $\beta = v/c$, $\sigma_{ion}(\varepsilon',\varepsilon)$ — дифференциальное сечение ионизации, $\varepsilon = (\gamma-1)mc^2$ — кинетическая энергия, $F(p)$ — сила трения, описывающая усредненные потери энергии электрона. Для F используется формула Бете для удельных потерь энергии [14]. Штрихами обозначены величины до актов взаимодействий.

На рисунке изображена геометрия рассеяния в системе координат, задаваемой ортами

$$\mathbf{i} = \frac{[\mathbf{p}\times[\mathbf{e}\times\mathbf{p}]}{p^2\sin\theta} = \frac{\mathbf{e}p^2 - \mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e})}{p^2\sin\theta},$$

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{e}}{p\sin\theta}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{p},$$

где $\mathbf{p}(p,\theta,\varphi)$ — вектор импульса электрона после рассеяния [15]. В этой системе $\mathbf{k}$ есть полярная ось, угол рассеяния $\psi \in [0,\pi]$ становится полярным углом, а угол $\alpha \in [0,2\pi]$ между $\mathbf{i}$ и направлением проекции импульса $\mathbf{p}'(p',\theta',\varphi')$ до рассеяния на плоскость $\mathbf{p}=0$ является азимутальным углом. Связь углов α и ψ с углами θ' и θ между $\mathbf{e}$ и направлениями импульсов электрона до $\mathbf{p}'(p',\theta',\varphi')$ и после $\mathbf{p}(p,\theta,\varphi)$ рассеяния дается известной формулой [15]:

$$\mu' = \mu\cos\psi + \sqrt{1-\mu^2}\,\sin\psi\cos\alpha. \tag{2.5}$$

Для вычислений удобно воспользоваться дивергентной формой кинетического уравнения (2.1)–(2.4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{r},p,\mu,t)}{\partial t} &+ \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r},p,\mu,t) + \\ &+ \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^2\left(\mu eE - F(p)\right) f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\mu}\left[eE\frac{1-\mu^2}{p} f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right] - \\ &- \frac{(Z_{mol}+4)F(p)}{8\gamma p}\hat{L}_\mu f(\mathbf{r},p,\mu,t) = \\ &= \mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\},\end{aligned} \tag{2.6}$$

которое решалось в работах [8,16–19] для $f(p,\mu,t)$. Для последнего оператора в левой части (2.6) использовано уточненное выражение [20]. ФРЭ $f(\mathbf{r},p,\mu,t)$ нормирована на концентрацию электронов $n(\mathbf{r},t)$ в заданном интервале значений модуля импульса $[p_{min},p_{max}]$ или соответствующего интервала энергии $[\varepsilon_{min},\varepsilon_{max}]$ электронов:

$$2\pi\int\limits_{p_{min}}^{p_{max}} p^2dp\int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p,\mu,t) = n(\mathbf{r},t). \tag{2.7}$$

Нижней границей p_{min} или ε_{min} может быть, в частности, порог убегания электронов p_{th} или ε_{th}, определяемый как второй корень уравнения $eE = F(\varepsilon)$ [21].

Разобьем интервал $[p_{th},p_{max}]$ на N одинаковых групп величиной Δp. Тогда

$$n(\mathbf{r},t) \approx \sum_{n=1}^{N} n_{2n}(\mathbf{r},t). \tag{2.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_{2n}(\mathbf{r},t) &= \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2dp\int\limits_{-1}^{1} d\mu\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi\, f(\mathbf{r},p,\mu,t) \approx \\ &\approx 2\pi p_{2n}^2\Delta p_{2n-1,2n+1}\int\limits_{-1}^{1} f(\mathbf{r},p_{2n},\mu,t)\,d\mu \end{aligned} \tag{2.9}$$

есть концентрация электронов в середине группы n, ограниченной нечетными числами $2n-1$ и $2n+1$, где n — натуральное число.

3. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА КОНЦЕНТРАЦИИ

Уравнение для нулевого момента ФРЭ $f(\mathbf{r},p,\mu,t)$, т.е. уравнение баланса концентрации, найдем, интегрируя кинетическое уравнение (2.6) в интервалах $p \in [p_{2n-1},p_{2n+1}]$, $\mu \in [-1,1]$ и $\varphi \in [0,2\pi]$. В уравнении (2.6) $\mathbf{p}$ и t являются независимыми переменными, поэтому, меняя порядок интегрирования и дифференцирования [1], получаем интеграл первого оператора:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2dp\int\limits_{-1}^{1} d\mu\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi f(\mathbf{r},p,\mu,t) = \frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{3.1}$$

Поскольку $f(\mathbf{r},p,\mu,t)$ не зависит от φ, после разложения вектора скорости на компоненты вдоль и перпендикулярно $\mathbf{e}$ с учетом выражения

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\mathbf{v} &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{e}v\mu) = 2\pi v\mu\mathbf{e}\end{aligned} \tag{3.2}$$

получается следующий интеграл второго оператора:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2dp\int\limits_{-1}^{1} d\mu\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi\,\mathbf{v} f(\mathbf{r},p,\mu,t) &= \\ = \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{2n} \approx \mathrm{div}\, n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t),\end{aligned} \tag{3.3}$$

где направленная скорость электронов

$$\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}\frac{2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} vp^2dp\int\limits_{-1}^{1}\mu f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu}{n_{2n}(\mathbf{r},t)}. \tag{3.4}$$

Здесь и ниже использована формула [22]

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, p, \mu, t)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} f + f \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v}, \tag{3.5}$$

в которой $\operatorname{div}_{\mathbf{r}}\mathbf{v} = 0$, поскольку в кинетическом уравнении (2.6) $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ также являются независимыми переменными.

Интеграл третьего оператора равен

$$2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \times \int\limits_{-1}^{1} d\mu \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \left(\mu e E - F(p)\right) f(\mathbf{r}, p, \mu, t)\right] = 2\pi \left[p_{2n+1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu \left(\mu e E - F(p_{2n+1})\right) f(\mathbf{r}, p_{2n+1}, \mu, t) - p_{2n-1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu \left(\mu e E - F(p_{2n-1})\right) \times f(\mathbf{r}, p_{2n-1}, \mu, t) \right]. \tag{3.6}$$

Интегрирование по μ четвертого и пятого операторов кинетического уравнения (2.6) дает нуль.

Объединяя (3.1), (3.3) и (3.6), получаем в итоге следующее групповое уравнение для нулевого момента ФРЭ:

$$\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} n_{2n}(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r}, t) + 2\pi \left[p_{2n+1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu \left(\mu e E - F(p_{2n+1})\right) f(\mathbf{r}, p_{2n+1}, \mu, t) - p_{2n-1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu \left(\mu e E - F(p_{2n-1})\right) f(\mathbf{r}, p_{2n-1}, \mu, t) \right] = 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)} \left\{p, \mu, f(\mathbf{r}, p', \mu', t)\right\} d\mu. \tag{3.7}$$

Используя приближенное выражение для концентрации согласно правой части (2.9) и включая внешний источник $S_{ext,2n}$ высокоэнергетических электронов данной группы, это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} n_{2n}(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r}, t) + \left[\langle \mu_{2n+1} \rangle e E - F(p_{2n+1})\right] \frac{n_{2n+1}}{\Delta p_{2n,2n+2}} - \left[\langle \mu_{2n-1} \rangle e E - F(p_{2n-1})\right] \frac{n_{2n-1}}{\Delta p_{2n-2,2n}} = \sum_{i=n}^{N} R_{2n}^{(i)} n_{2n}^{(i)} + S_{ext,2n}, \tag{3.8}$$

где

$$\Delta p_{2n,2n+2} = p_{2n+2} - p_{2n},$$

$$\Delta p_{2n-2,2n} = p_{2n} - p_{2n-2},$$

а ионизационный интеграл выражен через скорость генерации электронов в данной группе всеми электронами более высоких энергий:

$$R_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n_{2n}^{(i)}} 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)} \left\{p, \mu, f(\mathbf{r}, p', \mu', t)\right\} d\mu. \tag{3.9}$$

Поскольку в ионизующих соударениях вторичные электроны генерируются в основном в низкоэнергетической части спектра, практически все вторичные электроны, появляющиеся в области энергий $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ за счет ударной ионизации самими электронами, в том числе за счет внешнего источника, попадают в первую группу вблизи ε_{th}. Поэтому правую часть уравнения (3.8) можно упростить следующим образом:

$$\sum_{i=n}^{N} R_{2n}^{(i)} n_{2n}^{(i)} + S_{ext,2n} \approx \delta_{n1} \frac{1}{t_e(\delta)} \sum_{i=n}^{N} n_{2i} + S_{ext,2n}\delta_{n1}, \tag{3.10}$$

где

$$\delta_{n1} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

— символ Кронекера. Характерное время размножения электронов в области $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$,

$$t_e(\delta) = \left[2\pi \int\limits_{p_{th}}^{p_{max}} p^2 dp \times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)} \left\{p, \mu, f(p', \mu')\right\} d\mu\right]^{-1}, \tag{3.11}$$

является функцией «перенапряжения» $\delta = eE/F_{min}P$ относительно релятивистского минимума силы трения (для воздуха $F_{min} = 218$ кэВ/м·атм.), P — давление нейтрального газа [10–13]. ФРЭ $f(p,\mu)$ нормирована на единицу:

$$2\pi \int\limits_{p_{th}}^{p_{max}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} f(p,\mu)\, d\mu = 1. \qquad (3.12)$$

Для воздуха зависимость $t_e(\delta)$ вычислена из решения кинетического уравнения (2.6) [18, 19], а также с высокой точностью методом Монте-Карло [23, 24] в широком диапазоне значений δ.

В достаточно сильном поле вторичные электроны с энергиями $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ за время порядка $t_e(\delta)$ полностью теряют составляющую импульса, ортогональную вектору напряженности [23, 24], так что можно полагать $\langle\mu\rangle = 1$. В энергетическом представлении этого не требуется: учитывая выражения

$$\Delta\varepsilon_{2n,2n+2} = v_{2n+1}\Delta p_{2n,2n+2},$$

$$\Delta\varepsilon_{2n-2,2n} = v_{2n-1}\Delta p_{2n-2,2n}$$

и (3.4) для направленной скорости, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &+ \operatorname{div} n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t) = \\ &= \left[eEu_{2n-1} - F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n-1}\right]\frac{n_{2n-1}}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}} - \\ &- \left[eEu_{2n+1} - F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right]\frac{n_{2n+1}}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}} + \\ &+ \delta_{n1}\frac{1}{t_e(\delta)}\sum_{i=n}^{N} n_{2i} + S_{ext,2n}\delta_{n1}. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Это уравнение полностью совпадает с групповым уравнением баланса числа электронов, использованным в работах [7–9] и записанным из физических соображений.

4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение для первого момента (уравнение движения) получается интегрированием в тех же интервалах кинетического уравнения (2.6), умноженного на вектор импульса $\mathbf{p}$, разложенный по направлениям вдоль и ортогонально вектору электрической силы $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$, действующей на электроны:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{e}p\mu + \mathbf{p}_{\perp}. \qquad (4.1)$$

Поскольку в кинетическом уравнении $\mathbf{p}$ и t являются независимыми переменными, после перемены порядка интегрирования и дифференцирования по t с учетом независимости $f(\mathbf{r},p,\mu,t)$ от φ получается следующий интеграл первого оператора, умноженного на $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta\mathbf{p}} \mathbf{p}f(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu \times \\ &\times \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{p}_{\parallel}) f(\mathbf{r},p,\mu,t) = \\ &= \frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}(\mathbf{r},t)\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \\ &+ n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial \mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \qquad (4.2)\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{e}2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^3 dp \int\limits_{-1}^{1} \mu f(\mathbf{r},p,\mu,t)\, d\mu}{n_{2n}(\mathbf{r},t)} \approx \mathbf{e}\langle\mu\rangle_{2n} p_{2n}. \qquad (4.3)$$

С учетом того, что в кинетическом уравнении $\mathbf{p}$ и координаты в конфигурационном пространстве также являются независимыми переменными, получается следующий интеграл второго оператора кинетического уравнения (2.6), умноженного на $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta p_n} \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\, dp &= \\ &= \sum_k \nabla_{\mathbf{k}} \int\limits_{\Delta\mathbf{p}_n} \mathbf{p}v_k f(\mathbf{r},p,t)\, d\mathbf{p} = \\ &= \sum_k \nabla_k n_{2n}(\mathbf{r},t)\langle\mathbf{p}v_k\rangle_{2n} \approx \\ &\approx \sum_k \nabla_k n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)} u_{2n}^{(k)} = \\ &= \mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)} \sum_k \nabla_k n_{2n}(\mathbf{r},t) u_{2n}^{(k)} + \\ &+ n_{2n}(\mathbf{r},t)\sum_k u_{2n}^{(k)} \nabla_k \mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}, \qquad (4.4)\end{aligned}$$

где индекс k относится к компонентам векторов. Здесь пренебрегается членом, квадратичным по хаотическим величинам, который отвечает за нормальное давление и вязкие напряжения в самом потоке электронов [1]. Таким образом, частично обходится проблема моментов более высокого порядка, но применимость полученных уравнений ограничивается случаем разреженного потока электронов в плотной газовой среде, когда поведение элемента электронной «жидкости» определяется столкновениями электронов с нейтральными частицами, а эффекты, обусловленные градиентом собственного давления и трением слоев «жидкости», малы.

Выражая в (4.2) производную $\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)/\partial t$ с помощью формулы (3.7) для нулевого момента и складывая результат с (4.4), получаем сумму интегралов первых двух операторов:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta\mathbf{p}} \mathbf{p} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} + \int\limits_{\Delta\mathbf{p}_n} \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} \approx$$
$$\approx n_{2n}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{2n}\cdot\mathrm{grad}\right]\mathbf{p}_\parallel^{(2n)} - 2\pi\mathbf{p}_\parallel^{(2n)} \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\left[p_{2n+1}^2\left(\mu eE - F(p_{2n+1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) -\right.$$
$$\left. - p_{2n-1}^2\left(\mu eE - F(p_{2n-1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t)\right] +$$
$$+ 2\pi\mathbf{p}_\parallel^{(2n)} \int\limits_{p_{2n+1}}^{p_{2n-1}} p^2 dp \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\} d\mu. \quad (4.5)$$

Интегрирование суммы третьего, четвертого и пятого операторов кинетического уравнения (2.6), умноженных на $\mathbf{p}$, дает

$$2\pi\mathbf{e}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^3 dp \int\limits_{-1}^{1} \mu\, d\mu \times$$
$$\times\left\{\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^2\left(\mu eE - F(p)\right) f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right] + \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\mu}\left[eE\frac{1-\mu^2}{p} f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right] -$$
$$\left. - \frac{Z_{mol}+4}{8}\frac{F(p)}{\gamma(p)p}\hat{L}_\mu f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right\} =$$
$$= 2\pi\mathbf{e}\int\limits_{-1}^{1} \mu\, d\mu\left[p_{2n+1}^3\left(\mu eE - F(p_{2n+1})\right) \times\right.$$
$$\times f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) -$$
$$\left. - p_{2n-1}^3\left(\mu eE - F(p_{2n-1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t)\right] -$$
$$- 2\pi\mathbf{e}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu\left(eE - \mu E(p)\right) f(\mathbf{r},p,\mu,t) +$$
$$+ 2\pi\mathbf{e}\frac{Z_{mol}+4}{4}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} \frac{F(p)}{\gamma(p)} p^2 dp \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} \mu\, d\mu f(\mathbf{r},p,\mu,t). \quad (4.6)$$

Объединяя (4.5) и (4.6) и включая интеграл от произведения $\mathbf{p}$ на ионизационный интеграл в кинетическом уравнении (2.6), получаем следующее уравнение для первого момента ФРЭ:

$$n_{2n}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{2n}\cdot\mathrm{grad}\right]\mathbf{p}_\parallel^{(2n)} = 2\pi\mathbf{p}_\parallel^{(2n)} \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\left[p_{2n+1}^2\left(\mu eE - F(p_{2n+1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) -\right.$$
$$\left. - p_{2n-1}^2\left(\mu eE - F(p_{2n-1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t)\right] -$$
$$- 2\pi\mathbf{e}\int\limits_{-1}^{1} \mu\, d\mu\left[p_{2n+1}^3\left(\mu eE - F(p_{2n+1})\right) \times\right.$$
$$\times f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) -$$
$$\left. - p_{2n-1}^3\left(\mu eE - F(p_{2n-1})\right) f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t)\right] +$$
$$+ 2\pi\mathbf{e}\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\left[eE - \mu\left(1 + \frac{Z_{mol}+4}{4\gamma(p)}\right) F(p)\right] f(\mathbf{r},p,\mu,t) +$$
$$+ 2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu\left(\mathbf{e}p\mu - \mathbf{p}_\parallel^{(2n)}\right) \times$$
$$\times \mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}. \quad (4.7)$$

Упростим это уравнение, для чего выделим $\langle\mu\rangle$ и используем для концентрации n_{2n} точное и приближенное выражения (2.9) и приближенные выражения для n_{2n-1} и n_{2n+1},

$$\begin{aligned} n_{2n-1} &\approx 2\pi p_{2n-1}^2 \Delta p_{2n-2,2n} \times \\ &\quad\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t), \\ n_{2n+1} &\approx 2\pi p_{2n+1}^2 \Delta p_{2n,2n+2} \times \\ &\quad\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В итоге с учетом внешнего источника получается следующее групповое уравнение для первого момента ФРЭ:

$$n_{2n}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}_{2n}\cdot\mathrm{grad}\right]\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}= \\ =\mathbf{e}\left[eE-\left(1+\frac{Z_{mol}+4}{4\gamma(p_{2n})}\right)F(p_{2n})\right]n_{2n}+ \\ +\frac{\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}-\mathbf{e}p_{2n+1}\langle\mu\rangle_{2n+1}}{\Delta p_{2n,2n+2}}\times \\ \times\left(eE\langle\mu\rangle_{2n+1}-F(p_{2n+1})\right)n_{2n+1}- \\ -\frac{\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}-\mathbf{e}p_{2n-1}\langle\mu\rangle_{2n-1}}{\Delta p_{2n-2,2n}}\times \\ \times\left(eE\langle\mu\rangle_{2n-1}-F(p_{2n-1})\right)n_{2n-1}+ \\ 2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}p^2dp\int\limits_{-1}^{1}d\mu(\mathbf{e}p\mu-\mathbf{p}_{\|}^{(2n)})\times \\ \times\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}+S_{ext,2n}\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}\delta_{n1}. \quad (4.9)$$

Полагая, что $p_{2n+1}\langle\mu\rangle_{2n+1}\approx p_{2n+1}$, $p_{2n-1}\langle\mu\rangle_{2n-1}\approx p_{2n-1}$, в энергетическом представлении получаем аналогично (3.13):

$$n_{2n}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}_{2n}\cdot\mathrm{grad}\right]\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}= \\ =\mathbf{e}\left[eE-\left(1+\frac{Z_{mol}+4}{4\gamma(\varepsilon_{2n})}\right)F(\varepsilon_{2n})\right]n_{2n}+ \\ +\frac{n_{2n+1}}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}}\left[eEu_{2n+1}-F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right]\times \\ \times\left(\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}-\mathbf{e}p_{2n+1}\right)- \\ -\frac{n_{2n-1}}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}}\left[eEu_{2n-1}-F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n-1}\right]\times \\ \times\left(\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}-\mathbf{e}p_{2n-1}\right)+ \\ +2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}p^2dp\int\limits_{-1}^{1}d\mu(\mathbf{e}p\mu-\mathbf{p}_{\|}^{(2n)})\times \\ \times\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}+ \\ +S_{ext,2n}\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}\delta_{n1}. \quad (4.10)$$

В правой части группового уравнения движения, использованного в работах [7–9], учтен только первый член, причем слагаемое $(Z_{mol}+4)F(\varepsilon_{2n})/4\gamma(\varepsilon_{2n})$ отсутствует.

Интеграл в правой части (4.10) можно принять равным нулю. Это отражает тот факт, что в редких ионизующих событиях с рождением вторичных электронов высоких энергий ($\varepsilon\geq\varepsilon_{th}$, $\varepsilon\gg\varepsilon_{ion}$) суммарная энергия вторичных электронов после соударения равна разности энергии первичного электрона и малой энергии ионизации ε_{ion}. Как указано выше, вероятность таких событий крайне мала, а частые ионизационные события выделены из полного ионизационного интеграла и содержатся в операторах (2.2) и частично (2.3) кинетического уравнения.

Получим групповое уравнение для плотности импульса в энергетическом представлении. В этом случае нет необходимости выражать в (4.2) производную $\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)/\partial t$ посредством формулы (3.7) для нулевого момента кинетического уравнения. С учетом (3.10) уравнение для плотности импульса можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\sum_k\nabla_k n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}u_{2n}^{(k)}= \\ =\mathbf{e}p_{2n-1}\frac{n_{2n-1}}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}}\left[eEu_{2n-1}-F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n-1}\right]- \\ -\mathbf{e}p_{2n+1}\frac{n_{2n+1}}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}}\left[eEu_{2n+1}-F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right]+ \\ +\mathbf{e}\left[eE-\left(1+\frac{Z_{mol}+4}{4\gamma(\varepsilon_{2n})}\right)F(\varepsilon_{2n})\right]n_{2n}+ \\ +\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}\delta_{n1}\frac{1}{t_e(\delta)}\sum_{i=n}^{N}n_{2i}+S_{ext,2n}\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}\delta_{n1}. \quad (4.11)$$

Здесь $n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\|}^{(2n)}u_{2n}^{(k)}$ есть компонента k плотности потока импульса.

5. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

Уравнение для второго момента ФРЭ, являющееся уравнением баланса полной релятивистской энергии, получается интегрированием кинетического уравнения (2.6), умноженного на $\varepsilon=pc^2/v$.

Поскольку в кинетическом уравнении t и $\mathbf{p}$, а следовательно, и ε являются независимыми переменными, после перемены порядка интегрирования и дифференцирования по t получается следующий интеграл первого оператора, умноженного на ε:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta\mathbf{p}}\varepsilon f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}= \\ =\frac{\partial}{\partial t}2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}p^2dp\int\limits_{-1}^{1}d\mu\int\limits_{0}^{2\pi}\varepsilon f(\mathbf{r},p,\mu,t)= \\ =\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+ \\ +n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \quad (5.1)$$

где

$$\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)=\frac{2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}\varepsilon p^2dp\int\limits_{-1}^{1}f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu}{n_{2n}(\mathbf{r},t)}. \quad (5.2)$$

Для интеграла второго оператора кинетического уравнения (2.6), умноженного на ε, получаем

$$\int\limits_{\Delta\mathbf{p}_n} \varepsilon\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} = c^2 \int\limits_{\Delta\mathbf{p}_n} \mathbf{p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} = \\ = c^2 \mathrm{div}_{\mathbf{r}} 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{p} f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu = \\ = c^2 \mathrm{div}_{\mathbf{r}} n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{v}/c^2$ и учтено то обстоятельство, что в кинетическом уравнении вектор $\mathbf{p}$ и координаты в конфигурационном пространстве являются независимыми переменными.

Выражая в (5.1) производную $\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)/\partial t$ посредством формулы (3.7) для нулевого момента кинетического уравнения и складывая результат с (5.3), получаем сумму интегралов первых двух операторов:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta\mathbf{p}} \varepsilon f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p} + \int\limits_{\Delta\mathbf{p}_n} \varepsilon\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,d\mathbf{p} = \\ = n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\mathrm{div}_{\mathbf{r}} n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t) - \\ - \varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t) 2\pi \left[p_{2n+1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu\,(\mu e E - F(p_{2n+1})) \times \right. \\ \times f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) - \\ \left. - p_{2n-1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu\,(\mu e E - F(p_{2n-1}))\, f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t) \right] + \\ + \varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t) 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \times \\ \times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\} d\mu + \\ + c^2 \mathrm{div}_{\mathbf{r}} n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}. \quad (5.4)$$

Интегрирование третьего оператора кинетического уравнения (2.6), умноженного на ε, с учетом равенства $d\varepsilon/dp = v$ дает:

$$2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} \varepsilon p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu \frac{1}{p^2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p}\left[p^2\,(\mu e E - F(p))\, f(\mathbf{r},p,\mu,t)\right] = \\ = \varepsilon_{2n+1}\,(\langle\mu\rangle e E - F(p_{2n+1}))\, 2\pi p_{2n+1}^2 \times \\ \times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) - \\ - \varepsilon_{2n-1}\,(\langle\mu\rangle e E - F(p_{2n-1}))\, 2\pi p_{2n-1}^2 \times \\ \times \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t) - \\ - 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu + \\ + 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} F(p) v p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p,\mu,t). \quad (5.5)$$

Интегралы четвертого и пятого операторов кинетического уравнения (2.6), умноженных на ε, равны нулю. Объединяя (5.4) и (5.5), получаем следующее уравнение для второго момента ФРЭ:

$$n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\mathrm{div}_{\mathbf{r}}\, n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t) + \\ + c^2 \mathrm{div}_{\mathbf{r}}\, n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)} = \\ = (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1}) 2\pi p_{2n+1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu\,(\mu e E - F(p_{2n+1})) \times \\ \times f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t) - \\ - (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n-1}) 2\pi p_{2n-1}^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu\,(\mu e E - F(p_{2n-1})) \times \\ \times f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t) + \\ + 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu - \\ - 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} F(p) v p^2 dp \int\limits_{-1}^{1} d\mu\, f(\mathbf{r},p,\mu,t) + \\ + 2\pi \int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}} (\varepsilon - \varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t))\, p^2 dp \times \\ \times \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\} d\mu. \quad (5.6)$$

Используя теорему о среднем, выделим в уравнении (5.6) средний косинус $\langle\mu\rangle$:

$$n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\times$$
$$\times\,\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t)+c^2\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}=$$
$$=(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n+1})\left(\langle\mu\rangle eE-F(p_{2n+1})\right)2\pi p_{2n+1}^2\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}d\mu\,f(\mathbf{r},p_{2n+1},\mu,t)-$$
$$-(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n-1})\left(\langle\mu\rangle eE-F(p_{2n-1})\right)2\pi p_{2n-1}^2\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}d\mu\,f(\mathbf{r},p_{2n-1},\mu,t)+$$
$$+\langle e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\rangle_{2n}2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}p^2dp\int\limits_{-1}^{1}f(\mathbf{r},p,\mu,t)\,d\mu-$$
$$-F(p_{2n})v_{2n}\cdot2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}p^2dp\int\limits_{-1}^{1}f(\mathbf{r},p,\mu,t)+$$
$$+2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\right)p^2dp\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}d\mu.\qquad(5.7)$$

Упростим это уравнение, используя для групповой концентрации выражения (2.9) и (4.8). В итоге с учетом внешнего источника получается следующее групповое уравнение для второго момента ФРЭ:

$$n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\times$$
$$\times\,\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t)+c^2\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}=$$
$$=\frac{\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n+1}}{\Delta p_{2n,2n+2}}\left(eE\langle\mu\rangle_{2n+1}-F(p_{2n+1})\right)n_{2n+1}-$$
$$-\frac{\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n-1}}{\Delta p_{2n-2,2n}}\left(eE\langle\mu\rangle_{2n-1}-F(p_{2n-1})\right)n_{2n-1}+$$
$$+\left(eEu_{2n}-F(p_{2n})v_{2n}\right)n_{2n}+$$
$$+2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\right)p^2dp\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}d\mu+$$
$$+S_{ext,2n}\varepsilon_{2n}.\qquad(5.8)$$

В энергетическом представлении это уравнение принимает следующий вид:

$$n_{2n}(\mathbf{r},t)\frac{\partial\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\times$$
$$\times\,\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t)+c^2\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}=$$
$$=\frac{\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n+1}}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}}\left(eEu_{2n+1}-F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right)n_{2n+1}-$$
$$-\frac{\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{2n-1}}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}}\left(eEu_{2n-1}-F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n+1}\right)n_{2n-1}+$$
$$+\left(eEu_{2n}-F(\varepsilon_{2n})v_{2n}\right)n_{2n}+$$
$$+2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}\left(\varepsilon-\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)\right)p^2dp\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}d\mu+$$
$$+S_{ext,2n}\varepsilon_{2n}.\qquad(5.9)$$

По той же причине, что и в уравнении для первого момента (4.10), по теореме о среднем ионизационный интеграл в правой части (5.8) и (5.9) можно принять равным нулю.

Получим групповое уравнение для плотности полной энергии в энергетическом представлении. В этом случае нет необходимости выражать в (5.1) производную $\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)/\partial t$ посредством формулы (3.7) для нулевого момента кинетического уравнения, поэтому это уравнение имеет более простой вид, чем (5.9):

$$\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+c^2\mathrm{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}=$$
$$=\frac{n_{2n-1}\varepsilon_{2n-1}}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}}\left(eEu_{2n-1}-F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n+1}\right)-$$
$$-\frac{n_{2n+1}\varepsilon_{2n+1}}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}}\left(eEu_{2n+1}-F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right)+$$
$$+\left(eEu_{2n}-F(\varepsilon_{2n})v_{2n}\right)n_{2n}+2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}\varepsilon p^2dp\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}d\mu+$$
$$+S_{ext,2n}\varepsilon_{2n}.\qquad(5.10)$$

Групповое уравнение для плотности кинетической энергии $n_{2n}(\mathbf{r},t)(\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)-mc^2)$ в энергетическом представлении находится в результате вычитания из (5.10) уравнения для нулевого момента (3.13), умноженного на mc^2. Учитывая релятивистское соотношение

$$c^2\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t)\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t),$$

получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial n_{2n}(\mathbf{r},t)\left(\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)-mc^2\right)}{\partial t}+\\ +\operatorname{div}_{\mathbf{r}}n_{2n}(\mathbf{r},t)\left(\varepsilon_{2n}(\mathbf{r},t)-mc^2\right)\mathbf{u}_{2n}(\mathbf{r},t)=\\ =\frac{n_{2n-1}(\varepsilon_{2n-1}-mc^2)}{\Delta\varepsilon_{2n-2,2n}}\left(eEu_{2n-1}-F(\varepsilon_{2n-1})v_{2n+1}\right)-\\ -\frac{n_{2n+1}(\varepsilon_{2n+1}-mc^2)}{\Delta\varepsilon_{2n,2n+2}}\left(eEu_{2n+1}-F(\varepsilon_{2n+1})v_{2n+1}\right)+\\ +\left(eEu_{2n}-F(\varepsilon_{2n})v_{2n}\right)n_{2n}+2\pi\int\limits_{p_{2n-1}}^{p_{2n+1}}(\varepsilon-mc^2)p^2dp\times\\ \times\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{St}_{ion(1)}\left\{p,\mu,f(\mathbf{r},p',\mu',t)\right\}d\mu+\\ +S_{ext,2n}(\varepsilon_{2n}-mc^2).\end{gathered}\quad(5.11)$$

С учетом (3.10) компоненты уравнений (5.10) и (5.11), отвечающие за изменение энергии за счет ионизационного интеграла и внешнего источника, можно соответственно упростить следующим образом:

$$\delta_{n1}\frac{\varepsilon_{2n}}{t_e(\delta)}\sum_{i=n}^{N}n_{2i}+S_{ext,2n}\varepsilon_{2n}\delta_{n1},\qquad(5.12)$$

$$\delta_{n1}\frac{\varepsilon_{2n}-mc^2}{t_e(\delta)}\sum_{i=n}^{N}n_{2i}+S_{ext,2n}(\varepsilon_{2n}-mc^2)\delta_{n1}.\qquad(5.13)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен последовательный вывод системы многогрупповых уравнений для трех первых моментов функции распределения электронов высоких энергий в газе неподвижных атомарных частиц. Исходным является релятивистское кинетическое уравнение с редуцированным ионизационным интегралом, из которого выделены множественные слабые взаимодействия, отвечающие за рождение электронов низких энергий. Система включает уравнение баланса концентрации электронов, уравнение движения (или уравнение для плотности импульса) и уравнения баланса полной релятивистской энергии и кинетической энергии (или соответствующие уравнения для плотности энергии). Ионизационный интеграл, отвечающий за генерацию электронов высоких энергий, выражен через характерное время нарастания в электрическом поле числа электронов высоких энергий в e раз, для зависимости которого от перенапряжения в воздухе рекомендуется использовать результаты расчетов, выполненных методом Монте-Карло [23, 24].

Система предназначена для численного моделирования процессов в слабоионизованной сильно столкновительной плазме с участием электронов высоких энергий, в том числе релятивистских убегающих электронов. Метод многогрупповых уравнений позволяет повысить точность расчетов, «сшить» область электронов высоких энергий с областью дрейфующих электронов и получить распределение по энергиям электронов высоких энергий, необходимое для вычисления характеристик вторичных проникающих излучений и распространения ионизации на большие расстояния, в частности, разрядов молнии и гигантских восходящих атмосферных разрядов.

Моделирование разрядов во внешнем электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r},t)$ обычно выполняется в цилиндрически-симметричной геометрии, так что

$$\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{ext,r}(r,z,t)+\mathbf{E}_{ext,z}(r,z,t),$$

причем $\mathbf{E}_{ext,r}(r=0,z,t)=0$, ось $r\perp z$, ось $z\uparrow\downarrow\mathbf{E}_{ext,z}(r=0,z,t)$. Векторы $\mathbf{u}_{2n}$, $\mathbf{p}_{\parallel}^{(2n)}$ и $\mathbf{e}$, входящие в уравнения (3.8), (3.13), (4.9)–(4.11), (5.9)–(5.11), имеют соответствующие компоненты. В этих уравнениях

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}_p(\mathbf{r},t)$$

есть напряженность локального самосогласованного поля, включающего поля пространственных зарядов $\mathbf{E}_p(\mathbf{r},t)$.

Уместно следующее замечание. Групповой подход позволяет обойти проблему расцепления моментов более высокого порядка, так как границы энергетических групп фиксированы, а искомые величины вычисляются в середине группы ε_{2n}. Точность метода ограничивается числом групп. Так, в групповом описании кинетики нейтронов достаточно уравнения для нулевого момента, редуцированного к групповым уравнениям диффузии [25, 26]. Для численного моделирования кинетики релятивистских электронов в плотном газе с электрическим полем достаточно уравнений для двух первых моментов, из которых уравнение для нулевого момента (3.13) отвечает за изменение концентрации в данной группе, а уравнения для первого момента (4.10) и (4.11) — за изменение направления движения электронной «жидкости» в той же группе. Уже уравнения для второго момента являются избыточными. Здесь они приведены для полноты. Их можно использовать для уточнения точки в энергетической группе, в которой вычисляются концентрация и вектор импульса. В этом случае в уравнениях (3.13), (4.10) и (4.11) под ε_{2n} следует понимать именно эту точку, а не середину группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, И. Е. Сахаров, *Основы физики плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).

2. L. P. Babich and I. M. Kutsyk, in *Proc. XXII Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases*, Hoboken, USA (1995), Vol. II, p. 149.

3. Л. П. Бабич, И. М. Куцык, ТВТ **33**, 191 (1995).

4. Л. П. Бабич, К. И. Бахов, И. М. Куцык, Труды РФЯЦ–ВНИИЭФ, вып. 1, с. 440 (2001).

5. Л. П. Бабич, К. И. Бахов, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, ДАН **388**, 383 (2003).

6. Л. П. Бабич, К. И. Бахов, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, Геомагнетизм и аэрономия **44**, 254 (2004).

7. А. Ю. Кудрявцев, М. Л. Кудрявцева, И. М. Куцык, Препринт ВНИИЭФ-98 (2005).

8. А. Ю. Кудрявцев, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, РФЯЦ–ВНИИЭФ (2005).

9. А. Ю. Кудрявцев, Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ (2006).

10. R. A. Roussel-Dupré, A. V. Gurevich, T. Tunnell, and G. M. Milikh, Los Alamos Nat. Lab. Rep. LA-12601-MS (1993), p. 1.

11. R. A. Roussel-Dupré, A. V. Gurevich, T. Tunnell, and G. M. Milikh, Phys. Rev. E **49**, 2257 (1994).

12. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. A. Roussel-Dupré, Phys. Lett. **165**, 463 (1992).

13. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. A. Roussel-Dupré, Phys. Lett. A **187**, 197 (1994).

14. H. Bethe and U. Ashkin, in *Experimental Nuclear Physics*, ed. by E. Segre, New York–London (1953), Vol. 1, Part 2.

15. T. Holstein, Phys. Rev. **70**, 367 (1946).

16. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, А. Ю. Кудрявцев, И. М. Куцык, Б. Н. Шамраев, Труды РФЯЦ–ВНИИЭФ, вып. 1, с. 432 (2001).

17. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Илькаев, А. Ю. Кудрявцев, И. М. Куцык, Б. Н. Шамраев, ДАН **379**, 606 (2001).

18. L. P. Babich, E. N. Donskoy, I. M. Kutsyk, A. Yu. Kudryavtsev, R. A. Roussel-Dupré, B. N. Shamraev, and E. M. D. Symlalisty, IEEE Trans. Plasma Sci. **29**, 430 (2001).

19. А. А. Соловьев, А. В. Терехин, В. А. Терехин, В. Т. Тихончук, *Труды шестой Всероссийской конференции «Малые примеси в атмосфере. Атмосферное электричество»*, Нижний Новгород (2000).

20. Л. П. Бабич, ЖЭТФ **125**, 808 (2004).

21. Л. П. Бабич, ТВТ **33**, 659 (1995).

22. И. А. Гольдфайн, *Векторный анализ и теория поля*, Физматгиз, Москва (1962).

23. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, ДАН **394**, 320 (2004).

24. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, Физика плазмы **30**, 666 (2004); L. P. Babich, E. N. Donskoy, R. I. Il'kaev, I. M. Kutsyk, and R. A. Roussel-Dupré, Plasma Phys. Rep. **30**, 616 (2004).

25. Г. И. Марчук, *Методы расчета ядерных реакторов*, Госатомиздат, Москва (1961).

26. Л. П. Абагян, Н. О. Базазянц, М. Н. Николаев, А. М. Цибуля, *Групповые константы для расчета реакторов и защиты*, Энергоиздат, Москва (1981).