

ГРАВИТАЦИОННАЯ КОНУСНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В. Л. Поляченко^a, Е. В. Поляченко^{a}, И. Г. Шухман^b*

^a *Институт астрономии Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^b *Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Иркутск, Россия*

Поступила в редакцию 25 августа 2006 г.

Изучаются некоторые физические следствия из имеющейся аналогии между простейшими плазменными ловушками (пробкотронами) и скоплениями звезд, окружающими массивные черные дыры или плотные ядра галактик. В таких системах имеется «конус потерь», через который уходят частицы плазмы с малыми поперечными относительно оси ловушки скоростями или, аналогично, звезды с малыми угловыми моментами (которые разрушаются или поглощаются центральным телом). Последствия «пучковой» деформации функции распределения плазмы в ловушке хорошо известны: в результате развивается специфическая «конусная» неустойчивость, создающая поток плазмы в «конус потерь». Показано, что в интересующем нас галактическом случае тоже может при определенных условиях возникнуть аналогичная гравитационная конусная неустойчивость. Она связана с медленными прецессионными движениями сильно вытянутых (почти радиальных) орбит звезд, а главным условием ее раскочки является ретроградность прецессии таких орбит (когда прецессия происходит в сторону, противоположную орбитальному вращению звезд). Только при этом условии вместо неустойчивости радиальных орбит (разновидности джинсовской неустойчивости в системах с сильно вытянутыми орбитами), имеющей место при прямой прецессии, возникают колебания, которые могут стать неустойчивыми при наличии «конуса потерь». Неустойчивость вызывает поток звезд на галактический центр, т. е. служит механизмом поставки «горючего» для обеспечения ядерной активности галактик. Для математического анализа получены сравнительно простые характеристические уравнения, описывающие малые возмущения в сфере, состоящей из сильно вытянутых по радиусу звездных орбит. Эти характеристические уравнения выводятся путем ряда последовательных упрощений из общей линеаризованной системы уравнений, включающей бесстолкновительное уравнение Больцмана и уравнение Пуассона (в переменных действие–угол). Центральным пунктом исследования полученных характеристических уравнений является предварительное нахождение нейтральных мод (либо доказательство их отсутствия в случае устойчивости).

PACS: 98.10.+z, 98.35.Jk

1. ВВЕДЕНИЕ

В звездном окружении массивной черной дыры в центре галактики или скопления возникает благодаря разрушению и поглощению звезд с малыми угловыми моментами ситуация, аналогичная той, которая имеет место в простейших плазменных ловушках (пробкотронах). Напомним, что в таких ловушках из-за ухода частиц плазмы с малыми поперечными относительно оси системы скоростями v_{\perp} в «конус потерь» формируется специфическое «пучко-

вое» распределение частиц по этим поперечным скоростям, такое что $\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$ (f_0 — функция распределения плазмы) при достаточно малых v_{\perp} . Такое распределение оказывается неустойчивым [1, 2]. Ввиду принципиальной важности наличия конуса потерь соответствующую неустойчивость в плазме называют конусной. В результате развития конусной неустойчивости возникает дополнительный поток частиц плазмы в конус потерь, который в конечном итоге опустошает плазменную ловушку.

Аналогичная деформация функции распределения в области малых угловых моментов L происходит и в галактическом звездном скоплении, окружа-

*E-mail: epolyach@inasan.ru

ющем массивную черную дыру¹⁾. В этой области образуется аномальное распределение, растущее при увеличении L , $\partial f_0/\partial L > 0$. Мы покажем, что такое «пучковое» распределение является при некотором дополнительном условии (о нем будет сказано ниже) неустойчивым. Чтобы подчеркнуть очевидную генетическую связь этой неустойчивости с давно уже известной и хорошо изученной неустойчивостью, которой подвержена плазма в простейших ловушках, будем называть ее гравитационной конусной неустойчивостью.

Заметим, что ранее возможность этой неустойчивости в гравитирующих системах была установлена [3] в простейшей для анализа, но несколько искусственной дисковой модели (этот результат был подтвержден в недавней работе Тримейна [4]). В этой модели активное скопление звезд, устойчивость которого исследуется, представляется в виде бесконечно тонкого диска. Однако реально звездное скопление, окружающее галактическое ядро или центральную черную дыру, имеет, конечно, сферическую форму. Анализ устойчивости сферических скоплений существенно сложнее, чем дисковых, и таит в себе опасность ошибки, если ограничить себя исследованием неполного набора допустимых возмущений. Именно такая ошибка и была допущена Тримейном в цитированной работе [4]. Он предпринял попытку исследовать устойчивость маломассивного сферического скопления, такого что его масса M_G много меньше центральной массы M_c , $M_G \ll M_c$; орбиты звезд в такой «почти-кеплеровской» ситуации представляют собой медленно прецессирующие кеплеровские эллипсы. Рассмотрев самые крупномасштабные моды (имеющие сферические индексы $l = 1, 2$) и убедившись в их устойчивости, Тримейн сделал вывод об устойчивости почти-кеплеровских сферических скоплений относительно любых возмущений с $l > 1$.

Ниже, однако, показывается (разд. 4), что сферические скопления вокруг черной дыры или плотного ядра все-таки неустойчивы, причем неустойчивость начинается как раз с моды $l = 3$. Неустойчивы, разумеется, и все более мелкомасштабные моды $l > 3$ (с другой стороны, мы подтверждаем результат Тримейна об устойчивости наиболее крупномасштабных мод с $l = 1, 2$). Доказательство основано на анализе характеристического уравнения, описывающего малые возмущения в сферическом скоплении с сильно вытянутыми по радиусу орбитами звезд.

¹⁾ То же справедливо и для плотного галактического ядра, поглощающего попадающие в него звезды.

Неустойчивость тогда оказывается связанной с относительно очень медленными прецессионными движениями таких орбит. Поэтому характерные частоты и скорости нарастания этой неустойчивости аномально малы, если их измерять, например, в единицах орбитальных частот звезд (что, однако, не означает медленности в абсолютных единицах, учитывая быстрый рост всех характерных частот колебаний звезд при перемещении с периферии к центру галактики).

Адекватным и очень удобным для использования в такого рода задачах является приближение вращающихся спиц [3, 5]. В нем каждая спица представляет звезды, движущиеся вблизи некоторого радиального направления, с определенными значениями энергии E и углового момента L ; последний предполагается малым. Это приближение, интуитивно вполне понятное, обосновывается выводом (в разд. 3) характеристического уравнения в переменных действие – угол из исходной общей системы уравнений Власова (включающей, как известно, бесстолкновительное уравнение Больцмана и уравнение Пуассона) путем ряда последовательных упрощений. Относительно простое и поддающееся анализу (отчасти аналитическому) характеристическое уравнение выводится затем в предположении, что энергия звезд фиксирована, $E = E_0$.

Остановимся теперь на упомянутом выше дополнительном условии, необходимом (помимо дефицита звезд с малыми угловыми моментами) для неустойчивости. Оно связано с фундаментальным отличием рассматриваемых нами гравитирующих систем от плазменных. Этот вопрос ранее подробно рассматривался в работах [6, 7] (см. также [8, 9]). Совсем кратко суть дела заключается в следующем. В гравитирующих системах имеются только одноименные «заряды» (т. е. массы), которые в противоположность электрическим зарядам одного знака притягиваются друг к другу. Формально это различие проявляется в противоположных знаках правой части уравнения Пуассона для электрических зарядов и для гравитирующей среды. С этим, в конечном счете, связано наличие в гравитирующих системах джинсовской неустойчивости, занимающей место ленгмюровских колебаний плазмы (подробнее см. [8]).

Своеобразие интересующих нас в этой работе систем с сильно вытянутыми по радиусу орбитами звезд заключается, в частности, в том, что джинсовская неустойчивость в них развивается в форме неустойчивости радиальных орбит (см., например, [9]). Она возникает лишь при прямой, т. е. совпадающей по направлению с орбитальным вращением

звезд, прецессии орбит (и в том случае, если дисперсия скоростей прецессии не превышает определенного критического уровня). Напомним, что первое качественное описание неустойчивости радиальных орбит было сделано авторами в работе [10] (см. также [11]), а подробное изложение теории этой неустойчивости и ее приложений можно найти в работе [12]. Особое внимание мы хотели бы обратить на приведенную в последней работе «камертонную диаграмму», наглядно иллюстрирующую, почему в случае прямой прецессии развивается неустойчивость радиальных орбит, а при ретроградной прецессии возникают нейтральные колебания (вполне аналогичные ленгмюровским колебаниям плазмы). При дефиците или отсутствии звезд с малыми угловыми моментами эти колебания могут стать неустойчивыми. Ретроградность прецессии — это и есть упоминавшееся нами дополнительное условие гравитационной конусной неустойчивости.

Установленный в данной работе факт неустойчивости сферических скоплений звезд может иметь важное прикладное значение. Напомним, кстати, что классическая конусная неустойчивость плазмы, являясь, с одной стороны, важнейшим препятствием для построения простейших термоядерных ловушек, с другой стороны, действительно развивается в различных наблюдаемых астрономических объектах. В качестве примера отметим оригинальное использование этой неустойчивости в качестве механизма генерации солнечных радиовсплесков [13–15].

В случае массивной черной дыры в центре галактики в роли механизма, обеспечивающего активность, чаще всего рассматривается столкновительная диффузия окружающих звезд, которая приводит к захвату некоторых из них дырой [16–19]. Доказанное нами существование бесстолкновительного (коллективного) механизма потребует, возможно, пересмотра доминирующей сейчас точки зрения на природу активности таких объектов²⁾. В настоящей работе, однако, мы ставим перед собой лишь ограниченную задачу доказательства принципиальной возможности указанной неустойчивости на примере простейших моделей (см., впрочем, Заключение,

²⁾ Здесь необходимо отметить, что первое указание на важность коллективных механизмов в звездном окружении черной дыры было сделано А. М. Фридманом. Краткое упоминание об этом имеется в цитированной выше работе Докучаева и Озерного [19]. При этом А. М. Фридман имел в виду системы с орбитами, близкими к круговым. Такие орбиты, в принципе, могут быть преобладающими в непосредственной близости от черной дыры. На это обращалось внимание и в монографии [9].

где приводятся принадлежащие Тримейну [4] предварительные оценки эффективности предлагаемого механизма).

Порядок расположения материала в данной статье следующий. В разд. 2 мы напоминаем некоторые полезные для дальнейшего сведения о прецессии орбит в центрально-симметричном гравитационном поле. Здесь же выводятся необходимые формулы для скорости прецессии сильно вытянутых по радиусу орбит в различных астрономических ситуациях. В разд. 3 дается вывод характеристического уравнения для малых возмущений сферически-симметричного скопления таких орбит. Раздел 4 посвящен анализу этого характеристического уравнения и выводу условий существования гравитационной конусной неустойчивости. Для анализа применяется метод, включающий следующее. Во-первых, отыскание нейтральной моды, имеющей место при определенных значениях параметров системы, в частности, дисперсии скоростей прецессии орбит, ν_T (или дисперсии угловых моментов, L_T); на этом этапе определяется критическая величина дисперсии ν_T (или L_T) и показывается, что неустойчивыми являются только достаточно «холодные» системы. Во-вторых, теорию возмущений при малом отклонении от критических значений параметров в область неустойчивости, позволяющую найти частоты и малые инкременты слабо неустойчивых возмущений. В-третьих, численное определение комплексных частот при произвольных значениях параметров.

Краткое обсуждение полученных результатов, а также некоторые оценки их прикладного значения содержатся в разд. 5.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЕЦЕССИИ ОРБИТ

В интересующих нас низкочастотных возмущениях звездных скоплений, типичные частоты ω которых имеют порядок средней скорости прецессии почти радиальных орбит, эти последние участвуют как целое (в отличие от высокочастотных возмущений, для которых ω порядка орбитальной частоты и за которые ответственны индивидуальные звезды). Подробное обоснование этих утверждений (довольно, впрочем, очевидных) можно найти в наших статьях [12, 20, 21], а также в работе Линден-Белла [22]. При этих обстоятельствах место отдельных звезд занимают прецессирующие орбиты, поэтому приведем

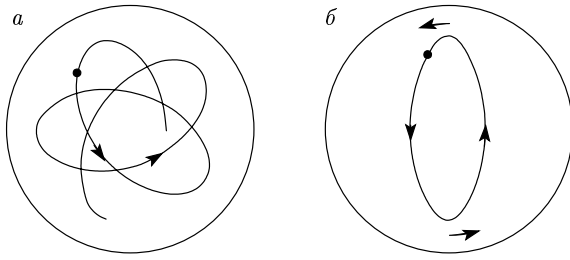


Рис. 1. Типичная орбита звезды в сферическом скоплении: *a* — «розеточная траектория» в инерциальной системе отсчета, *б* — замкнутая прецессирующая орбита во вращающейся со скоростью $\Omega = \Omega_{pr}$ системе отсчета

предварительный обзор некоторых полезных для дальнейшего сведений о прецессии.

Как известно [23], произвольная орбита звезды в сферическом скоплении представляет собой розетку (рис. 1*a*). При этом всегда можно найти систему отсчета, вращающуюся с некоторой угловой скоростью Ω (своей для каждой орбиты), в которой орбита становится замкнутым овалом. Движение звезды по розеточной траектории в исходной инерциальной системе можно тогда представить как быстрое вращение по этому замкнутому овалу, который, в свою очередь, медленно поворачивается (прецессирует) со скоростью Ω (рис. 1*б*). Таким образом и определяется скорость прецессии орбиты — как скорость системы отсчета, в которой орбита становится замкнутой: $\Omega_{pr} = \Omega$.

Еще одним хорошо известным фактом, который нам хотелось бы напомнить, является замкнутость любой звездной орбиты для квадратичного потенциала,

$$\Phi_0(r) = \Phi_0(0) + \frac{1}{2} \Omega_0^2 r^2,$$

где $\Omega_0^2 = \text{const}$, и потенциала точечной массы M_c ,

$$\Phi_0(r) = -GM_c/r.$$

Причем, как можно показать (доказательство см., например, в книге Арнольда [24]), этими двумя примерами исчерпываются все возможные потенциалы, в которых движение звезд происходит по замкнутым орбитам. Сами же эти орбиты представляют собой эллипсы, симметричные относительно центра в случае квадратичного потенциала, и асимметричные по отношению к центру кеплеровские эллипсы для потенциала точечной массы. В первом случае отношение частоты радиальных колебаний звезды,

Ω_1 , к частоте азимутальных колебаний, Ω_2 , равно, очевидно, двум (поскольку за время одного колебания по азимуту звезда успевает совершить два полных колебания по радиусу). Аналогично, во втором случае это отношение равно единице. Другими словами, описанные замкнутые орбиты являются резонансными (так как отношение частот выражается отношением целых чисел); в первом случае мы имеем резонанс типа 2:1, а во втором — типа 1:1.

Ввиду замкнутости орбит можно сказать, что в двух рассмотренных предельных случаях скорость прецессии любой орбиты точно равна нулю. Соответственно, при малом отступлении от этих двух выделенных потенциалов орбиты будут уже медленно прецессировать со скоростями Ω_{pr} , много меньшими типичных частот орбитального движения Ω_1 и Ω_2 . В такой ситуации мы оказываемся, например, вблизи центра галактики. При этом, если в центре ($r = 0$) отсутствует точечная масса, т.е. потенциал является несингулярным, отношение частот радиальных и азимутальных колебаний звезды близко к 2:1. Если же в центре сосредоточена точечная масса, то недалеко от центра это отношение будет близко к 1:1. Отступление от точного резонанса (и связанная с этим медленная прецессия орбит) обязано в этом случае гравитации звезд, окружающих центральную точечную массу.

Как уже отмечалось, нас в этой работе будут в основном интересовать почти радиальные орбиты с малыми угловыми моментами L (по сравнению, например, с угловыми моментами звезд с теми же энергиями E на круговых орбитах). Важной особенностью этих орбит в несингулярном потенциале является их почти-резонансность (с отношением частот, близким к 2:1) вне зависимости от размаха радиальных колебаний, которые могут уводить звезду в области, где потенциал существенно отличается от квадратичного.

Это утверждение легко доказать. Будем исходить из очевидной общей формулы (фактически определения) для отношения азимутальной Ω_2 и радиальной Ω_1 частот колебаний звезды в гравитационном поле с потенциалом $\Phi(r)$:

$$\frac{\Omega_2(E, L)}{\Omega_1(E, L)} = \frac{\Delta\varphi}{\pi},$$

где

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \oint \frac{L}{r^2} \frac{dr}{v_r(r; E, L)} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi(r) - L^2/r^2}} \quad (2.1)$$

— угол поворота траектории звезды по азимуту при ее проходе от r_{max} до r_{min} , E — энергия, L — абсолютное значение углового момента. Соответственно, удвоенный угол $2\Delta\varphi$ представляет угол поворота траектории при проходе звезды от максимума по r до минимума по r и снова до максимума.

Вычислим асимптотическое значение интеграла (2.1) при $L \rightarrow 0$. Рассмотрим выражение для квадрата радиальной скорости

$$v_r^2 = 2E - 2\Phi(r) - L^2/r^2.$$

Его нули определяют точки поворота. Предположим сначала, что потенциал несингулярный и $\Phi(0)$ конечен. В этом случае без ограничения общности можно положить $\Phi(0) = 0$. Легко понять, что нуль при малых r находится в точке $r_{min} \approx L/\sqrt{2E}$. Поскольку при малых L величина r_{min} тоже мала, очевидно, что основной вклад в интеграл дает область вблизи нижнего предела интегрирования. Имеем

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi(r) - L^2/r^2}} \approx \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r} \frac{dr}{\sqrt{2Er^2 - L^2}}.$$

Совершая подстановку $(\sqrt{2E}/L)r = x$, получим

$$\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r} \frac{dr}{\sqrt{2Er^2 - L^2}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Подстановка $s = \sqrt{x^2 - 1}$ переводит этот интеграл в интеграл $\int_0^{\infty} ds/(1 + s^2)$, который равен $\pi/2$. Таким образом, в случае любого несингулярного потенциала, абсолютное значение угла есть

$$\Delta\varphi = \pi/2.$$

Соответственно, $2\Delta\varphi = \pi$ и орбита звезды представляет собой прямую линию, проходящую (почти) через центр, а абсолютное значение отношения Ω_2/Ω_1 равно 1:2.

Поскольку для кеплеровского потенциала это отношение равно 1:1, возникает вопрос, а есть ли для отношения частот $(\Omega_2/\Omega_1)|_{L \rightarrow 0}$ плавный переход от одного предельного значения (1:2) к другому (1:1) при постепенном изменении потенциала от несингулярного к кеплеровскому.

Совершенно ясно, что если такой переход есть, т. е. если угол $\Delta\varphi$ может принимать все промежуточные значения от $\pi/2$ (случай несингулярного потенциала) до π (случай Кеплера), то траектория звезды при проходе ее от r_{max} до r_{min} и снова до r_{max} не может быть прямой линией: одно радиальное направление при движении от r_{max} до r_{min} (фактически до центра диска) должно смениться на другое радиальное направление при продолжении движения от центра к r_{max} ³⁾. Это новое направление будет составлять с первоначальным направлением угол $\Delta\varphi$, такой что $\pi < 2\Delta\varphi < 2\pi$, а сама траектория звезды должна представлять собой подобие спиц велосипедного колеса с тем только отличием, что если отношение $\Delta\varphi/\pi$ не является рациональным числом m/n (m, n — целые числа), спицы колеса заштрихуют весь круг.

Итак, пусть теперь вблизи центра

$$\Phi(r) = -\frac{\alpha}{r^s}, \quad 0 < s < 2. \quad (2.2)$$

Потенциал с особенностью в центре типа (2.2) связывает несингулярный потенциал, который мы должны рассматривать как соответствующий случаю $s = 0$, и кеплеровский, для которого $s = 1$. (Заметим, что нет физического смысла рассматривать случай $s > 1$, так как невозможно представить соответствующее распределение плотности, которое могло бы создать такой потенциал.)

Для модуля радиальной скорости вблизи центра имеем

$$\sqrt{2E - 2\Phi(r) - L^2/r^2} \approx \sqrt{2\alpha r^{-s} - L^2/r^2},$$

так что

$$r_{min} = (L/2\alpha)^{1/(2-s)}.$$

Основной вклад в интеграл по-прежнему дает область вблизи нижнего предела, так что

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi(r) - L^2/r^2}} \approx \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha r^{2-s} - L^2}}.$$

Подстановка $(2\alpha/L^2)r^{2-s} = x^2$ дает $\Delta\varphi = \pi/(2-s)$, так что отношение частот равно

$$\Omega_2/\Omega_1 = 1/(2-s). \quad (2.3)$$

³⁾ Заметим, что в кеплеровском пределе радиальная орбита вырождается в «полупрямую», точнее, в два слившихся луча, один из которых выходит из центра, а другой входит в центр.

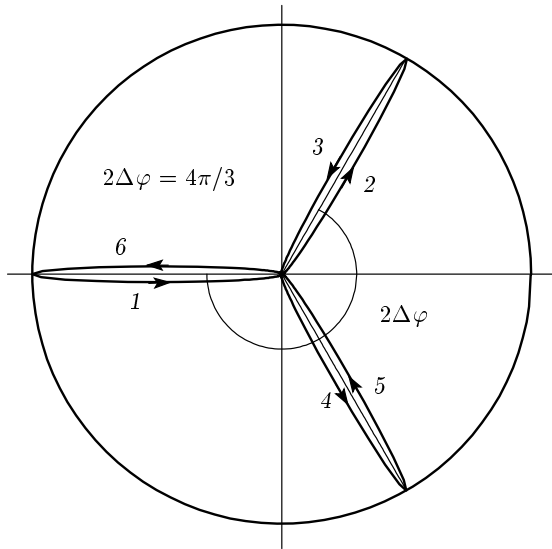


Рис. 2. Траектория частицы с малым угловым моментом L . Параметр $s = 0.5$

Соотношение (2.3) осуществляет сшивку при переходе от несингулярного потенциала к кеплеровскому. Еще раз подчеркнем, что в этом случае траектория звезды при переходе от максимума к центру и снова к r_{max} совершает «излом».

На рис. 2 схематически изображена траектория звезды в потенциале $\Phi(r) \sim -r^{-1/2}$ (т. е. $s = 1/2$), для которого «излом» (поворот) орбиты вблизи центра составляет

$$2\Delta\varphi = \frac{2\pi}{2-s} = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ.$$

Цифры 1, ..., 6 указывают последовательность участков движения звезды. Для иллюстрации выбран маленький положительный момент L — звезда движется против часовой стрелки. Траектория является замкнутой, так как отношение $1/(2-s)$ является рациональным числом ($2/3$).

Мы ограничимся рассмотрением сферических систем с почти радиальными орбитами звезд (вообще говоря, любой протяженности) в двух ситуациях: для сингулярного в центре почти-кеплеровского потенциала и для несингулярного в центре (а в остальном произвольного) потенциала. Для наглядности будем называть орбиты звезд в первом случае орбитами 1:1-типа, а во втором — орбитами 2:1-типа. Напомним, что наиболее наглядно различие между этими двумя типами орбит проявляется в предельном случае чисто радиального движения, когда орбита 1:1-типа вырождается в полупрямую, исходящую из

центра, в то время как орбита 2:1-типа — в симметричный относительно центра отрезок прямой.

Как мы объяснили во Введении, для рассматриваемого в данной статье круга проблем принципиальное значение имеет направление прецессии орбит по отношению к направлению вращения звезды по орбите. Оказывается, в частности (см. разд. 4), что гравитационная конусная неустойчивость возможна лишь при ретроградной, т. е. противоположной вращению, прецессии (в то же время в случае прямой прецессии может развиваться неустойчивость радиальных орбит).

Для того чтобы понять, в каких случаях следует ожидать прямую, а в каких — ретроградную прецессию, выведем формулы, определяющие скорость прецессии Ω_{pr} , отдельно для орбит двух интересующих нас типов.

2.1. Начнем с орбит 1:1-типа в маломассивном сферическом скоплении, окружающем центральную массу M_c . Имеем

$$\frac{1}{\Omega_1} = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{2E + 2GM_c/r - 2\Phi_G(r) - L^2/r^2}},$$

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{L}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2E + 2GM_c/r - 2\Phi_G(r) - L^2/r^2}} \equiv \frac{\Delta\varphi}{\pi},$$

где $\Delta\varphi$, как и в (2.1), — угол поворота звезды (в плоскости орбиты) при прохождении ею от r_{min} до r_{max} . Если прецессия отсутствует, т. е. если пренебречь вкладом $\Phi_G(r)$ в общий потенциал, этот угол точно равен π . Его малое отличие от π и приводит к медленному повороту эллиптической орбиты, т. е. к прецессии:

$$\Omega_{pr} = \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_1 \left(\frac{\Delta\varphi}{\pi} - 1 \right). \quad (2.4)$$

Выражение для скорости прецессии имеет наглядный смысл. Запишем его в виде

$$\Omega_{pr} = \frac{\Delta\varphi - \pi}{T/2}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega_1}.$$

Отсюда видно, что если за пол-оборота, т. е. при колебании звезды от r_{min} до r_{max} (за время $T/2$), она пройдет угловой путь, больший чем π , это и будет означать, что апогей дрейфует с угловой скоростью прецессии (2.4).

Нашей целью сейчас является получение выражения для скорости прецессии как величины порядка $O(\Phi_G)$. Поскольку $\Delta\varphi/\pi - 1 = O(\Phi_G)$, при вычислении скорости прецессии из формулы (2.4) мы можем для множителя Ω_1 ограничиться главным порядком $O(1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= L \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2E+2GM_c/r-2\Phi_G(r)-L^2/r^2}} = \\ &= L \frac{\partial}{\partial E} \left[\sqrt{2|E|} \times \right. \\ &\times \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^3} \sqrt{(b-r)(r-a) - \Phi_G(r)r^2/|E|} \left. \right] \approx \\ &\approx L \frac{\partial}{\partial E} \left[\sqrt{2|E|} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^3} \sqrt{(b-r)(r-a)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2|E|}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}} \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Здесь для удобства вместо переменных E и L введены новые переменные

$$a(E, L) = r_{min}(E, L), \quad b(E, L) = r_{max}(E, L),$$

где

$$a, b = \frac{GM_c}{(2|E|)} \mp \left\{ \left(\frac{GM_c}{2|E|} \right)^2 - \frac{L^2}{2|E|} \right\}^{1/2}.$$

Отметим несколько полезных для дальнейшего соотношений, которые выполняются в чисто кулоновском потенциале:

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{GM}{|E|}, \quad ab = \frac{L^2}{2|E|}, \\ L &= (2GM_c)^{1/2} \sqrt{\frac{ab}{a+b}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно показать, что первое слагаемое в правой части (2.5) обращается в нуль, так что

$$\frac{\Delta\varphi}{\pi} - 1 = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{L}{\sqrt{2|E|}} \int_a^b \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}} \right],$$

и для скорости прецессии получаем

$$\Omega_{pr} = -\frac{\Omega(E)}{\pi} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{L}{\sqrt{2|E|}} \int_a^b \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}} \right],$$

где

$$\Omega(E) = \Omega_1(E) = \Omega_2(E) \approx \frac{(2|E|)^{3/2}}{GM_c}.$$

Полезно еще записать выражение для скорости прецессии в переменных (a, b) . Используя соотношения, следующие из (2.6):

$$\frac{L}{\sqrt{2|E|}} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\partial}{\partial E} = \frac{1}{GM_c} \frac{b+a}{b-a} \left(b^2 \frac{\partial}{\partial b} - a^2 \frac{\partial}{\partial a} \right),$$

найдем

$$\begin{aligned} \Omega_{pr} &= -\frac{\Omega(a, b)}{\pi GM_c} \frac{b+a}{b-a} \left(b^2 \frac{\partial}{\partial b} - a^2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \times \\ &\times \left[\sqrt{ab} \int_a^b \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}} \right], \end{aligned}$$

где

$$\Omega(a, b) = (GM_c)^{1/2} \left(\frac{2}{a+b} \right)^{3/2}.$$

Упростим выражение для Ω_{pr} , считая a малым, но под корнем в знаменателе подынтегрального выражения не будем пока полагать $a = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \Omega_{pr} &\approx -\frac{\Omega(b)}{\pi GM_c} b^2 \frac{\partial}{\partial b} \left[\sqrt{ab} \int_a^b \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}} \right], \\ \sqrt{a} &= \frac{L}{\sqrt{2GM_c}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$J(a, b) = \int_a^b \frac{\Phi_G(r) dr}{r \sqrt{(b-r)(r-a)}}.$$

Легко непосредственно убедиться, что

$$J(a, b) = \int_a^b \Phi_G(r) d \left[\frac{1}{\sqrt{ab}} \arcsin \frac{(b+a)r - 2ab}{r(b-a)} \right].$$

Интегрируя по частям и выполняя в явном виде дифференцирование по b , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left[\sqrt{ab} J(a, b) \right] &= \int_a^b \frac{d\Phi_G}{dr} \frac{1}{b-a} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{r-a}{b-r}} dr \approx \\ &\approx \frac{a^{1/2}}{b^{3/2}} \int_0^b \frac{d\Phi_G}{dr} \sqrt{\frac{r}{b-r}} dr. \end{aligned}$$

В результате имеем окончательное выражение для скорости прецессии орбит, близких к радиальным:

$$\Omega_{pr}(a, b) \approx -\Omega(b) \frac{\sqrt{ab}}{\pi GM_c} \int_0^b \frac{d\Phi_G}{dr} \sqrt{\frac{r}{b-r}} dr,$$

$$\Omega(b) = (GM_c)^{1/2} \left(\frac{2}{b}\right)^{3/2},$$

или

$$\Omega_{pr}(E, L) = \varpi(E) L,$$

$$\varpi(E) = -\frac{2}{\pi GM_c b} \int_0^b \frac{d\Phi_G}{dr} \sqrt{\frac{r}{b-r}} dr, \quad (2.7)$$

$$b = \frac{GM_c}{|E|}.$$

Из выражения (2.7) для Ω_{pr} видно, что в рассматриваемом случае прецессия совершенно однозначно является ретроградной и ни при каких распределениях плотности в активной составляющей галактики не может быть прямой. Действительно, формула (2.7) показывает, что если значение силы $F(r) = -\Phi'_G(r)$, создаваемой притяжением сферической составляющей, везде отрицательно, то прецессия обязана быть ретроградной: $\varpi(E) < 0$, $\Omega_{pr} < 0$. Но для сферически-симметричного распределения потенциала сила $F(r)$ всегда отрицательна, поскольку она на любом радиусе r обусловлена исключительно полной массой, заключенной внутри сферы этого радиуса, и эта сила всегда направлена к центру. Это же утверждение тривиально следует прямо из уравнения Пуассона.

Таким образом, можно заключить, что для сферических почти-кеплеровских систем естественной является именно ретроградная прецессия орбит. Как мы увидим ниже, для орбит 2:1-типа ситуация прямо противоположна: во всех реальных случаях прецессия является прямой, ретроградная прецессия возможна лишь при экзотических распределениях плотности.

2.2. Формулы для скорости прецессии близких к радиальным орбит 2:1-типа могут быть записаны по-разному, ранее была опубликована [12] не очень удобная для практических вычислений формула, содержащая процедуру предельного перехода. Мы выведем здесь более удобную в этом отношении формулу.

Имеем для скорости прецессии:

$$\begin{aligned} \Omega_{pr}(E, L) &= \Omega_2(E, L) - \frac{1}{2}\Omega_1(E, L) = \\ &= \Omega_1(E, L) \left[\frac{\Omega_2(E, L)}{\Omega_1(E, L)} - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Вычислим производную при постоянной E от скорости прецессии при нулевом моменте, т. е. величину $[\partial\Omega_{pr}(E, L)/\partial L]_{L=0}$. Учитывая, что

$$\Omega_1(E, L) = \Omega(E) + O(L^2),$$

имеем

$$\Omega_{pr}(E, L) \approx \Omega(E) \left(\frac{\Delta\varphi}{\pi} - \frac{1}{2} \right),$$

где

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}(E, L)}^{r_{max}(E, L)} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}}$$

— угол поворота звезды при движении по орбите от r_{min} до r_{max} , который, как мы показали ранее, в главном приближении по L для любого несингулярного потенциала равен $\pi/2$. Учет следующих членов в разложении $\Delta\varphi$, т. е. членов, линейных по L , покажет, с какой по величине скоростью и в какую сторону (прямо или ретроградно) будет прецессировать сильно вытянутая орбита звезды, если придать ей маленький момент. Ясно, что при $\Delta\varphi > \pi/2$ (или $2\Delta\varphi > \pi$) прецессия будет прямой, т. е. в ту же сторону, что и вращение звезды, а при $\Delta\varphi < \pi/2$ — в другую сторону. Таким образом, знак производной $\partial/\partial L (\Delta\varphi - \pi/2)$ определяет, будет прецессия прямой или ретроградной. Обозначим $\phi(E, L) = \Delta\varphi - \pi/2$, так что

$$\begin{aligned} \varpi(E) &\equiv \left[\frac{\partial\Omega_{pr}(E, L)}{\partial L} \right]_{L=0} = \\ &= \frac{\Omega(E)}{\pi} \left[\frac{\partial\phi(E, L)}{\partial L} \right]_{L=0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_{r_{min}(E, L)}^{r_{max}(E, L)} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial E} \int_{r_{min}(E, L)}^{r_{max}(E, L)} \frac{L}{r^2} \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - \frac{L^2}{r^2}} dr. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, запишем

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial E} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L^3}{r^4} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}} - L \frac{\partial}{\partial E} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\Phi'_0(r)}{r} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}}.$$

Несложно показать, что основной вклад в первый интеграл дает область вблизи нижнего предела, поэтому верхний предел в нем можно заменить на бесконечность. Поскольку вблизи центра для несингулярных потенциалов можно также опустить под знаком корня $\Phi_0(r) \approx \Phi(r_{min})$, величина которой мала по сравнению с E , для первого интеграла получим

$$\int_{r_{min}(E, L)}^{r_{max}(E, L)} \frac{L^3}{r^4} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}} = 2E \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \pi E.$$

В результате для $\phi(E, L)$ имеем

$$\phi(E, L) \approx -L \frac{\partial}{\partial E} \int_{r_{min}(E, L)}^{r_{max}(E, L)} \frac{\Phi'_0(r)}{r} \times \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}},$$

или после очевидных упрощений:

$$\phi(E, L) \approx -L \frac{d}{dE} \int_0^{r_{max}(E, 0)} \frac{\Phi'_0(r)}{r} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r)}}.$$

Подставляя последнее соотношение в (2.8), получим

$$\varpi(E) = -\frac{\Omega(E)}{\pi} \frac{d}{dE} \times \int_0^{r_{max}(E)} \frac{\Phi'_0(r)}{r} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r)}}. \quad (2.9)$$

Можно предложить еще одну альтернативную запись с уже выполненным дифференцированием по E . Опуская подробности, приведем результат:

$$\varpi(E) = \frac{\Omega(E)}{\pi} \times \left[\int_0^{r_{max}(E)} \frac{dr}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r)}} - \frac{1}{\sqrt{2E}} \right) - \frac{1}{r_{max}(E) \sqrt{2E}} \right]. \quad (2.10)$$

С помощью выведенных формул, в частности, легко показать, что для потенциала, имеющего при малых r разложение

$$\Phi_0(r) = \Phi_0(0) + \Omega_0^2 \left(\frac{1}{2} r^2 + \beta r^4 + \dots \right),$$

знак прецессии определяется знаком коэффициента β , поскольку $\varpi = -\beta$. Следовательно, звезды, имеющие достаточно малую амплитуду колебаний по радиусу, будут иметь ретроградную прецессию при условии, что коэффициент β положителен. Нетрудно убедиться в том, что в случае сферического скопления положительность коэффициента β означает рост плотности с увеличением радиуса вблизи центра. Ввиду очевидной нереалистичности такого поведения плотности, можно сделать вывод о невозможности гравитационной конусной неустойчивости в сферических скоплениях с несингулярными потенциалами. Заметим, что в дисковых системах эта неустойчивость возможна [3] (более подробное обсуждение см. в Заключение).

3. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО СКОПЛЕНИЯ ЗВЕЗД

3.1. Полная система интегральных уравнений

Рассмотрим точное интегральное уравнение, описывающее возмущения в сферически-симметричной системе с функцией распределения $F = F(E, L)$, где

$$E = \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{1}{2} L^2/r^2 + \Phi_0(r)$$

— энергия звезды,

$$L = r v_{\perp} \equiv r (v_{\theta}^2 + v_{\varphi}^2)^{1/2}$$

— модуль ее углового момента, $\Phi_0(r)$ — невозмущенный гравитационный потенциал. Считаем, что от третьего интеграла движения $L_z = r v_{\varphi} \sin \theta$ функция распределения не зависит. В этом случае, как

известно, (см. [25], а также, например, [4, 8]), спектр собственных частот ω не зависит от азимутального числа m . Поэтому вместо общего представления возмущения потенциала и плотности в виде секториальной гармоники,

$$\begin{aligned} \Phi(t; r, \theta, \varphi) &= \chi(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \\ \rho(t; r, \theta, \varphi) &= \hat{\rho}(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

можно ограничиться более простым вариантом:

$$\begin{aligned} \Phi(t; r, \theta, \varphi) &= \chi(r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \\ \rho(t; r, \theta, \varphi) &= \hat{\rho}(r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

где $P_l(x)$ — полином Лежандра. Основное интегральное уравнение (точнее, система интегральных уравнений) получено ниже с помощью формализма действие–угол. Этот формализм применительно к сферически-симметричным гравитирующим системам впервые был изложен в работе Поляченко и Шухмана [26]. Вывод приведенной ниже системы фактически содержит те же шаги, что и представленный в цитированной работе. Единственным существенным отличием является использование здесь интегральной, а не дифференциальной (т. е. уравнения Пуассона) связи между возмущениями потенциала и плотности:

$$\Phi(r, \theta) = -G \int \frac{\rho(r', \theta') dV'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta}},$$

где dV' — элемент объема, Θ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Это означает, что радиальные части возмущения потенциала $\chi(r)$ и плотности $\hat{\rho}(r)$ связаны соотношением

$$\chi(r) = -\frac{4\pi G}{2l+1} \int r'^2 dr' \hat{\rho}(r') \mathcal{F}_l(r, r'),$$

$$\mathcal{F}_l(r, r') = \frac{(r_{<})^l}{(r_{>})^{l+1}},$$

где $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$. Приведем также альтернативную форму для $\mathcal{F}_l(r, r')$ (иногда она оказывается удобнее):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(r, r') &= \\ &= (2l+1) \int_0^\infty dk \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{k r}} \frac{J_{l+1/2}(kr')}{\sqrt{k r'}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя (см. [27]).

Итак, исходная точная система интегральных уравнений имеет вид $(l_1, l'_1 = -\infty, \dots, \infty; l_2, l'_2 = -l, \dots, l)$

$$\begin{aligned} \chi_{l_1, l_2}(E, L) &= \frac{4\pi G}{2l+1} \sum_{l'_1=-\infty}^\infty \sum_{l'_2=-l}^l D_{l'_2}^{l'_1} \int \frac{dE' L dL'}{\Omega_1(E', L')} \chi_{l'_1, l'_2}(E', L') \Pi_{l_1, l_2; l'_1, l'_2}(E, L; E', L') \times \\ &\times \frac{[l'_1 \Omega_1(E', L') + l'_2 \Omega_2(E', L')]}{\omega - l'_1 \Omega_1(E', L') - l'_2 \Omega_2(E', L')} \frac{\partial F / \partial E' + l'_2 \partial F / \partial L'}{\partial L'} \end{aligned} \quad (3.2)$$

с ядром

$$\begin{aligned} \Pi_{l_1, l_2; l'_1, l'_2}(E, L; E', L') &= \int_0^{2\pi} dw_1 \int_0^{2\pi} dw'_1 \mathcal{F}_l[r(E, L; w_1), r'(E', L'; w'_1)] \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[\left(l'_1 w'_1 + l'_2 \frac{\partial S_1}{\partial I'_2} \right) - \left(l_1 w_1 + l_2 \frac{\partial S_1}{\partial I_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Это двумерная система интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\chi_{l_1, l_2}(E, L)$, которые связаны с радиальной частью возмущения потенциала соотношением

$$\begin{aligned} \chi_{l_1, l_2}(E, L) &= \int_0^{2\pi} \exp \left\{ - \left(l_1 w_1 + l_2 \frac{\partial S_1}{\partial I_2} \right) \right\} \times \\ &\times \chi[r(E, L, w_1)] dw_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В формуле (3.2) обозначено

$$D_l^k = \begin{cases} \frac{1}{2^{2l}} \frac{(l+k)!(l-k)!}{\left[\frac{l-k}{2}!\frac{l+k}{2}!\right]^2}, & |l-k| \text{ четные,} \\ 0, & |l-k| \text{ нечетные.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Фигурирующая в формулах (3.3) и (3.4) функция радиального действия S_1 есть

$$S_1 = \int_{r_{min}}^r dr' \sqrt{2E(\mathbf{I}) - 2\Phi_0(r') - \frac{(I_2 + |I_3|)^2}{r'^2}},$$

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3),$$

где действия I_2 и I_3 связаны с интегралами движения L и L_z соотношениями $L = I_2 + |I_3|$, $L_z = I_3$, а зависимость $r(E, L; w_1)$ устанавливается выражением

$$w_1 = \frac{\partial S_1}{\partial I_1} = \Omega_1 \int_{r_{min}}^r \frac{dr'}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r') - L^2/r'^2}}.$$

Поясним также, что индексы l_1 и l_2 соответствуют разложению пространственной зависимости возмущенного потенциала по гармоникам угловых переменных w_1 и w_2 , сопряженных соответственно переменным действия

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - \frac{L^2}{r^2}} dr,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} = L - |L_z|,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{I}, w_1, w_2) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \sum \Phi_{l_1, l_2}(\mathbf{I}) \exp \{i(l_1 w_1 + l_2 w_2)\}. \end{aligned}$$

(В случае $m = 0$ зависимости от угловой переменной w_3 нет.)

3.2. Упрощенное уравнение для описания медленных мод

Будем предполагать, что в центре галактики находится массивное ядро или черная дыра массы M_c ,

которая в основном и определяет невозмущенный потенциал $\Phi_0(r)$, так что

$$\Phi_0(r) = \Phi_c(r) + \Phi_G(r),$$

где $\Phi_c(r) = -GM_c/r$, $\Phi_G(r)$ — потенциал, обусловленный собственно сферической составляющей галактики. Полагаем, что сила, действующая на звезду в галактике со стороны ядра, существенно превышает силу, действующую со стороны совокупности звезд сферической составляющей: $|\Phi'_c(r)| \gg |\Phi'_G(r)|$. В этом случае траектории звезд определяются главным образом кулоновским потенциалом ядра. Это означает, что здесь мы имеем дело с орбитами 1:1-типа. За счет малого добавочного потенциала $\Phi_G(r)$ эллипсы прецессируют, причем скорость прецессии определяется малой разностью

$$\Omega_{pr}(E, L) = \Omega_2(E, L) - \Omega_1(E, L), \quad \Omega_{pr} \ll \Omega_1 \approx \Omega_2.$$

Явное выражение для скорости прецессии через потенциал $\Phi_G(r)$ содержится в разд. 2 (формула (2.7)). Будем интересоваться медленными модами, частоты которых порядка скорости прецессии, $\omega = O(\Omega_{pr})$. Это означает, что из всех слагаемых уравнения (3.2) со знаменателями

$$\omega - l'_1 \Omega_1(E', L') - l'_2 \Omega_2(E', L')$$

мы должны оставить наибольшие, т. е. те, у которых $l'_1 = -l'_2$. При этом знаменатели приобретают вид

$$\omega - l'_1 \Omega_1(E', L') - l'_2 \Omega_2(E', L') = \omega - l'_2 \Omega_{pr}(E', L').$$

Конструкция из частот, стоящая в числителе этих вкладов, есть

$$\begin{aligned} [l_1 \Omega_1(E', L') + l'_2 \Omega_2(E', L')] \frac{\partial F}{\partial E'} + \frac{\partial F}{\partial L'} &= \\ = l'_2 \left[\Omega_{pr}(E', L') \frac{\partial F}{\partial E'} + \frac{\partial F}{\partial L'} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части (3.6) — это не что иное, как линден-белловская производная функции распределения⁴⁾,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{E}} \right)_L \Omega_{pr} + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{L}} \right)_E = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{L}} \right)_{LB}. \quad (3.7)$$

Обозначая

$$\chi(E, L)_{l_1=-l_2, l_2} = \phi_{l_2}(E, L),$$

⁴⁾ Напомним, что она определяется как производная по абсолютной величине углового момента $L = I_2 + |I_3|$ при фиксированных значениях адиабатического инварианта $J_f = I_1 + I_2 + |I_3|$ и проекции углового момента L_z .

$\Pi_{l_1=-l_2, l_1'=-l_2', l_2'}(E, L; E', L') = P_{l_2, l_2'}(E, L; E', L')$ и оставляя в сумме по l_1' в правой части (3.2) только слагаемые с $l_1' = -l_2'$, запишем «медленное уравнение» для величин $\phi_n(E, L)$:

$$\begin{aligned} \phi_n(E, L) &= \frac{4\pi G}{2l+1} \sum_{n'=-l}^l D_l^{n'} \int \frac{dE' L' dL'}{\Omega_1(E', L')} \times \\ &\times P_{n, n'}(E, L; E', L') \frac{n' (\partial F / \partial L')_{LB}}{\omega - n' \Omega_{pr}(E', L')} \times \\ &\times \phi_{n'}(E', L') \end{aligned} \quad (3.8)$$

с ядром

$$\begin{aligned} P_{n, n'}(E, L; E', L') &= \int_0^{2\pi} dw_1 \times \\ &\times \int_0^{2\pi} dw_1' \mathcal{F}_l[r(E, L; w_1), r'(E', L'; w_1')] \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[n' \left(\frac{\partial S_1}{\partial I_2'} - w_1' \right) - n \left(\frac{\partial S_1}{\partial I_2} - w_1 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ядро $P_{n, n'}$ можно переписать в явно вещественной форме, если заменить интегрирование по w_1 и w_1' от 0 до 2π интегрированием по симметричной области от $-\pi$ до π . Тогда становится очевидно, что $r(w_1, E, L)$ — симметричная функция w_1 и

$$\begin{aligned} P_{n, n'}(E, L; E', L') &= \\ &= 4 \int_0^\pi dw_1 \int_0^\pi dw_1' \mathcal{F}_l[r(E, L; w_1), r'(E', L'; w_1')] \times \\ &\times \cos \left[n' \left(\frac{\partial S_1}{\partial I_2'} - w_1' \right) \right] \cos \left[n \left(\frac{\partial S_1}{\partial I_2} - w_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Величина $\phi_n(E, L)$ тоже может быть записана в более простом виде:

$$\begin{aligned} \phi_n(E, L) &= 2 \int_0^\pi \cos \left[n \left(\frac{\partial S_1}{\partial I_2} - w_1 \right) \right] \times \\ &\times \chi[r(E, L, w_1)] dw_1. \end{aligned}$$

3.3. Уравнение для случая почти радиальных орбит

В интересующем нас случае орбит с малыми угловыми моментами L система уравнений (3.8) для медленных мод допускает существенные упрощения. Предположим, что в области малых угловых моментов функция распределения

$$F(E, L) = f^{(E)}(E) f^{(L)}(L),$$

причем будем считать, что размер области локализации δL функции $f^{(L)}(L)$ вблизи $L = 0$ достаточно мал. Во всяком случае он должен быть меньше, чем характерный масштаб изменения ΔL по моментам функций, входящих в уравнение (3.8). Поскольку характерный размер изменения этих функций определяется исключительно распределением невозмущенного (почти кулоновского) потенциала и не содержит никаких характерных масштабов, очевидно, можно считать, что $\delta L \ll \Delta L$.

Воспользуемся тем, что ядро $P_{n, n'}(E, L; E', L')$ в случае почти радиальных орбит (с точностью до квадратичных по L и L' членов)⁵⁾ зависит только от энергий E и E' и принимает вид

$$\begin{aligned} P_{n, n'}(E, L; E', L') &\approx P_{n, n'}(E, 0; E', 0) = \\ &= (-1)^{n+n'} \Pi(E, E'), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(E, E') &= 4 \int_0^\pi dw_1 \int_0^\pi dw_1' \mathcal{F}_l[r(E, w_1), r'(E', w_1')] = \\ &= 4 \Omega_1(E) \Omega_1(E') \int_0^{b(E)} \frac{dr}{v_r(E, r)} \times \\ &\times \int_0^{b(E')} \frac{dr}{v_r(E', r')} A_l(r, r'), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\Omega_1(E) = \frac{(2|E|)^{3/2}}{GM_c}, \quad b(E) \equiv r_{max}(E) = \frac{GM_c}{|E|},$$

$$v_r(E, r) = \sqrt{2|E|} \sqrt{\frac{b-r}{r}}.$$

Неизвестная функция $\phi_n(E, L)$ тоже зависит только от E (с точностью до $O(L^2)$):

$$\phi_n(E, L) \approx (-1)^n \Phi(E).$$

Кроме того, согласно формуле (3.7), линден-белловская производная по L с точностью $O(L^2 M_G / M_c)$ совпадает с производной по L при постоянной энергии E . В результате уравнение (3.8) превращается в одномерное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \frac{4\pi G}{2l+1} \int \frac{dE' L' dL'}{\Omega_1(E')} \Pi(E, E') \Phi(E') \times \\ &\times \sum_{s=-l}^l s D_l^s \frac{\partial F(E', L') / \partial L'}{\omega - s \varpi(E') L'}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

⁵⁾ Доказательство этого утверждения, как и других утверждений, касающихся аналитических свойств входящих сюда функций в окрестности $L = 0$, мы здесь опускаем.

3.4. Модельный случай моноэнергетического распределения

Рассмотрим теперь модельное распределение $F(E, L) = f(L) \delta(E - E_0)$. Проинтегрируем (3.10) по E' и положим в левой и правой частях получившегося уравнения $E = E_0$. Получим характеристическое уравнение⁶⁾

$$1 = \frac{4\pi G}{2l+1} \frac{\Pi(E_0, E_0)}{\Omega_1(E_0)} \int L dL \sum_{s=-l}^l s D_l^s \frac{\partial f(L)/\partial L}{\omega - s\varpi(E_0)L}.$$

Напомним (см. разд. 2), что в случае почти-кеплевровских орбит (т. е. орбит 1:1-типа) прецессия является ретроградной для любого распределения потенциала $\Phi_G(r)$, т. е. $\varpi < 0$.

Удобно перейти от переменной L к переменной

$$\nu = |\Omega_{pr}| = |\varpi(E_0)|L = -\varpi L > 0.$$

Обозначив

$$f(L) = f(\nu/|\varpi|) \equiv f_0(\nu),$$

запишем

$$1 = -\frac{4\pi G}{2l+1} \frac{\Pi(E_0, E_0)}{|\varpi(E_0)|\Omega_1(E_0)} \times \int \nu d\nu \sum_{s=-l}^l s D_l^s \frac{df_0(\nu)/d\nu}{\omega - s\nu}. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) совпадает с уравнением (2) работы [5], выведенным непосредственно в спицевом приближении⁷⁾. Проведенный выше довольно громоздкий его вывод служит обоснованием оправданности спицевого подхода.

В завершение этого пункта заметим, что рассматриваемая моноэнергетическая модель задает вполне однозначное распределение плотности сферической составляющей $\rho_0(r)$, а следовательно, и потенциала $\Phi_G(r)$, и имеет конечный радиус $R = GM_c/|E_0|$. Для этого распределения величина $\varpi(E_0)$ вычисляется в явном виде:

$$\varpi(E_0) = -\frac{M_G}{M_c} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{R^2}. \quad (3.12)$$

⁶⁾ Отметим определенную исключительность случая $l = 1$. Для него уравнение (3.10) имеет решение с $\omega = 0$ [4], в то время как уравнения этого раздела такого решения уже не содержат. Для его получения требуется учет членов порядка $O(L^2)$ в разложениях подынтегральных функций.

⁷⁾ За исключением несущественного недостающего множителя Ω_1/π в правой части уравнения (2) работы [5].

Здесь M_G — полная масса сферической составляющей скопления, причем, напомним, предполагается, что $M_G \ll M_c$. Ядро $\Pi(E_0, E_0)$ тоже может быть вычислено практически в явном виде. С помощью соотношений (3.1) и (3.9) получаем

$$\Pi(E_0, E_0) = \frac{8\pi^2(2l+1)}{R} C_l, \quad (3.13)$$

$$C_l = \int_0^\infty \frac{dz}{z} [J_{(l+1)/2}(z)J_{l/2}(z)]^2.$$

Первые восемь коэффициентов C_l , вычисленных по формуле (3.13), представлены в табл. 1.

В результате подстановки найденных коэффициентов в уравнение (3.11) получим

$$1 = -A_l \int \nu d\nu \sum_{s=-l}^l s D_l^s \frac{df_0(\nu)/d\nu}{\omega - s\nu}, \quad (3.14)$$

$$A_l = \frac{16\pi^3 G C_l}{|\varpi|} \left(\frac{R}{2GM_c} \right)^{1/2}.$$

Это уравнение может быть также записано в виде

$$1 = -2A_l \sum_{s=1}^l s^2 D_l^s \int d\nu \frac{\nu^2 df_0(\nu)/d\nu}{\omega^2 - s^2\nu^2}. \quad (3.15)$$

Функция распределения $f_0(\nu)$ нормирована условием, что полная масса сферической составляющей равна M_G , т. е. $\int F d\Gamma = M_G$. Это дает

$$\int f_0(\nu) \nu d\nu = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \varpi^2(E_0) \Omega_1(E_0) M_G. \quad (3.16)$$

3.5. Вывод характеристического уравнения в спицевом приближении

Опишем схему вывода характеристического уравнения (3.15) непосредственно в модели вращающихся спиц. Напомним, что каждая спица представляет звезды, движущиеся вблизи некоторого радиального направления, с определенными значениями энергии E и углового момента L . Последний предполагается малым, а энергия для простоты считается фиксированной. Только в этом случае мы получим удобное для анализа характеристическое уравнение (3.15) (если не фиксировать E , получим интегральное уравнение в форме (3.10)).

Введем в рассмотрение функцию распределения спиц $f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}, t)$, где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль спицы, $\boldsymbol{\nu} = d\mathbf{n}/dt$ — скорость движения конца вектора \mathbf{n} (по поверхности сферы единичного радиуса), такую что $dn = f d\mathbf{n} d\boldsymbol{\nu}$ — число спиц внутри интервала $(\mathbf{n}, \mathbf{n} + d\mathbf{n}; \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} + d\boldsymbol{\nu})$. Для несингулярных потенциалов вектор \mathbf{n} пробегает верхнюю полусферу, для

Таблица 1. Значения коэффициентов C_l

l	1	2	3	4	5	6	7	8
C_l	0.1351	0.0630	0.0373	0.0250	0.0180	0.0137	0.0108	0.0087

почти-кешлеровских потенциалов — всю сферу целиком. Бесстолкновительное кинетическое уравнение для функции f , очевидно, имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nu \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{P} \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0, \quad (3.17)$$

где

$$\mathbf{P} = \frac{d\nu}{dt} = \frac{\mathbf{M}_{tot} \times \mathbf{n}}{I} - \Omega_{pr}^2 \mathbf{n}, \quad \Omega_{pr}^2 = \nu^2,$$

$$\mathbf{M}_{tot} = - \int_0^{r_{max}} dr \rho_{lin}(r) \mathbf{n} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.18)$$

Здесь \mathbf{M}_{tot} — полный момент сил, действующий на данную спицу, Φ — гравитационный потенциал,

$$\rho_{lin}(r) = 1/\sqrt{2E - 2\Phi_0(r)}$$

— линейная плотность массы спицы, $r_{max}(E)$ — максимальный радиус орбиты с энергией E , $\Omega_{pr} = \nu$ — угловая скорость прецессии спицы,

$$\frac{1}{I(E)} \equiv \left[\frac{\partial \Omega_{pr}(E, L)}{\partial L} \right]_{L=0} \equiv \varpi(E),$$

I — аналог момента инерции спицы. Считая, что равновесная функция распределения имеет вид $f = f_0(\nu)$, линеаризуя уравнение (3.17) и решая его для возмущения, пропорционального сферической гармонике $Y_n^m(\theta, \phi)$, можно после некоторых вычислений получить характеристическое уравнение (3.15). Отметим, что основным моментом этих вычислений является отделение углов, которое может быть проведено, например, согласно стандартной процедуре, изложенной нами в работе [26].

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье [3] доказательство неустойчивости дисковых систем, окружающих черную дыру, основано на критерии Пенроуза–Найквиста [28] (см. также, например, [2]). Формулировку критерия Пенроуза–Найквиста для сферических систем мы дадим в самом конце этого раздела. В большей же части

данного раздела мы используем несколько другой язык, который является, с одной стороны, более физически наглядным, а, с другой стороны, возможно, и более конструктивным, и позволяет достаточно просто определить границы устойчивости системы. Этот подход базируется на рассуждениях, связанных с так называемой маргинальной нейтральной модой⁸⁾.

Его суть состоит в следующем. Предположим, что при изменении параметров системы устойчивость может смениться неустойчивостью. Это означает, что при некоторых значениях этих параметров имеет место нейтральная мода. При небольшом отступлении от критических значений параметров в неустойчивую область, мы получим слабо неустойчивые решения, частоты и малые инкременты которых могут быть найдены по теории возмущений.

4.1. Устойчивость мод с $l = 1$ и $l = 2$

Исследуем сначала устойчивость мод с $l = 1$ и $l = 2$. Мы покажем, что для этих мод неустойчивости нет. Для определенности рассмотрим моду $l = 2$. Из приведенных ниже рассуждений сразу станет ясно, что они справедливы и для моды $l = 1$.

Запишем уравнение (3.15) применительно к случаю моды $l = 2$. При этом важно иметь в виду, что для этой моды, как и для моды $l = 1$, в сумме по s в правой части (3.15) остается единственное слагаемое с $s = 2$ (а в (3.14) — два слагаемых с $s = \pm 2$). Это следует из определения (3.5) величины D_l^s и самого вида уравнения (3.15). Для $l = 2$ величина $D_2^2 = 3/8$, так что

$$Q = -4 \int_0^\infty \frac{\nu^2 df_0(\nu)/d\nu}{\omega^2 - 4\nu^2} d\nu, \quad Q = \frac{4}{3} A_2^{-1} > 0. \quad (4.1)$$

⁸⁾ Интересующие нас маргинальные нейтральные моды, разделяющие устойчивые и неустойчивые решения, следует отличать от нейтральных мод, не являющихся маргинальными. Они, в принципе, также могут присутствовать в спектре возмущений, но не представляют особого интереса. Вариация параметров δQ относительно их критических значений Q_c в случае такой моды не приводит к неустойчивости ни при каком знаке δQ . В дальнейшем слово «маргинальная» будем для краткости опускать.

Пусть функция распределения имеет «пучковый» вид, связанный с дефицитом звезд с очень малыми угловыми моментами, или, что то же самое, с малыми скоростями прецессии ν . Будем считать, что при $0 \leq \nu < \infty$ она имеет единственный максимум, расположенный при $\nu = u$. Если при некотором значении $Q = Q_c$ существует нейтральная мода, положение ее резонанса обязано совпадать с положением максимума⁹⁾ $f_0(\nu)$, т. е. $\omega^2 = 4u^2$. Это означает, что при $Q = Q_c$

$$Q_c = - \int_0^{\infty} \frac{\nu^2 df_0(\nu)/d\nu}{u^2 - \nu^2} d\nu. \quad (4.2)$$

Очевидно, что для любого одногорбого распределения правая часть (4.2) отрицательна, так как подынтегральное выражение не содержит особенностей и везде положительно. Поскольку $Q > 0$, отсюда следует, что нейтральная мода невозможна. Отсутствие нейтральной моды означает, что нет и маргинального значения $Q = Q_c$, которое разделяет неустойчивые и устойчивые распределения: распределение либо везде (при всех Q) устойчиво, либо везде неустойчиво. Поскольку очевидно, что есть заведомо устойчивые одногорбые распределения, мы приходим к выводу, что для моды $l = 2$ всегда имеет место устойчивость.

Из приведенных рассуждений ясно также, что к такому выводу об устойчивости моды $l = 2$ мы приходим только в случае ретроградной прецессии, когда в уравнении (4.1) величина Q положительна. В случае прямой прецессии $Q < 0$, так что нейтральная мода, а вместе с ней и неустойчивость, существуют. Это известная неустойчивость радиальных орбит, только здесь она развивается не на фоне обычного распределения, когда основная масса звезд концентрируется вокруг чисто радиальных орбит, а на фоне немонотонного распределения с пустым конусом потерь.

Однако вывод о том, что в случае ретроградной прецессии неустойчивости нет вообще, был бы преждевременным. Именно такой вывод и сделал автор работы [4], ограничив рассмотрение первыми двумя модами. Но дело в том, что к описанному результату относительно моды $l = 2$ мы пришли только по той формальной причине, что сумма по s содержит единственное слагаемое. Поэтому при $l = 2$, как и при $l = 1$, неустойчивости действительно нет. Однако для мод с $l \geq 3$, когда в сумме присутствуют как

минимум два слагаемых, неустойчивость при подходящих условиях становится возможной. В следующем пункте мы подробно изучаем моду $l = 3$ и показываем, что здесь уже неустойчивость может быть.

4.2. Мода $l = 3$

Выше, рассматривая случай ретроградной прецессии и ограничиваясь рассмотрением моды $l = 2$, мы показали, что для одногорбых распределений не может быть нейтральной моды (а вместе с ней и неустойчивости). Однако это справедливо только в случае, когда у моды есть только единственный резонанс, как это и имеет место при $l = 2$ или $l = 1$. Доказательство, напомним, основано на том, что если резонанс является единственным, его положение обязано совпадать с положением максимума одногорбого распределения. И в этом случае характеристическое соотношение не может быть выполнено, поскольку знаки левой и правой частей характеристического уравнения (4.2) при частоте ω , равной частоте нейтральной моды, однозначно противоположные.

Это доказательство, однако, неприменимо, если для нейтральной моды может быть два и более резонансов. Действительно, в этом случае положение этих резонансов таково, что для существования нейтральной моды суммарная раскачка на одних резонансах должна точно компенсироваться суммарным затуханием на других. Это значит, что положение одной группы резонансов должно быть слева, а другой — справа от положения максимума. В простейшем случае двух резонансов заключаем, что они лежат по разные стороны от максимума. И в этом случае становится трудно сказать что-либо определенное о знаке подынтегрального выражения, фигурирующего в характеристическом уравнении и включающего интегралы в смысле главного значения с особенностями на каждом из этих резонансов. А раз так, то появляется надежда, что для мод, начиная с $l = 3$, где есть хотя бы пара резонансов, мы сможем отыскать нейтральную моду, а значит, и неустойчивость. Рассмотрим простейший вариант — моду $l = 3$ и подробно изучим возможность существования нейтральной моды для нее.

Для $l = 3$ имеем $D_3^1 = 3/16$, $D_3^3 = 5/16$. Характеристическое уравнение (3.15) дает

$$Q = - \int d\nu \nu^2 \frac{df_0(\nu)}{d\nu} \left(\frac{1}{\omega^2 - \nu^2} + \frac{15}{\omega^2 - 9\nu^2} \right), \quad (4.3)$$

$$Q = \frac{8}{3} A_3^{-1}.$$

⁹⁾ Заметим, что невозможность нейтральной моды с резонансом в $\nu = 0$ устанавливается тривиально.

Снова предположим, что при некотором $Q = Q_c$ существует нейтральная мода с частотой $\omega = \omega_0$. Пусть для определенности $\omega_0 > 0$ ¹⁰⁾. Для этой частоты есть два резонанса:

$$\nu = \nu_1 = \omega_0, \quad \nu = \nu_2 = \frac{1}{3}\omega_0. \quad (4.4)$$

Очевидно, что резонанс, соответствующий меньшему ν (т. е. $\nu = \omega_0/3$), должен лежать левее максимума функции $f_0(\nu)$, положение которого обозначим через u , а резонанс, соответствующий большему ν (т. е. $\nu = \omega_0$), должен лежать правее максимума: $\omega_0/3 < u < \omega_0$. Совершая при интегрировании в первом соотношении (4.3) обход в комплексной плоскости ν^2 снизу (поскольку $\omega_0 > 0$, направление обхода в комплексной плоскости ν^2 совпадает с направлением обхода в комплексной плоскости ν , т. е. снизу) и приравнивая нулю мнимую часть всего интеграла (4.3) (условие баланса раскачки на одном из резонансов и затухания на другом), запишем

$$f_0'(\omega_0) + \frac{5}{9}f_0' \left(\frac{1}{3}\omega_0 \right) = 0. \quad (4.5)$$

Это уравнение определяет частоту нейтральной моды, которая существует при условии, что $Q = Q_c$, которое определяется из условия

$$Q_c = - \int d\nu \nu^2 \frac{df_0(\nu)}{d\nu} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \nu^2} + \frac{15}{\omega_0^2 - 9\nu^2} \right). \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) записан интеграл в смысле главного значения. Пара уравнений (4.5) и (4.6) определяет частоту нейтральной моды и критическое значение параметра $Q = Q_c$, при котором система имеет такую нейтральную моду. Фактически это условие на некий параметр, описывающий функцию распределения, скажем, на дисперсию по скоростям прецессии ν_T (или по угловым моментам L_T) либо на массу M_G сферической составляющей, т. е. на величину ее самогравитации, при которой система находится на пороге устойчивости и при отклонении от которой в определенную сторону (в какую именно, еще предстоит выяснить) система станет неустойчивой.

Заранее не очевидно, что для потенциально возможных нейтральных мод, частоты которых определяются из уравнения (4.5) (а решения этого уравнения для одногорбого распределения всегда существуют), правая часть уравнения (4.6) окажется положительной. Более того, как мы показали ранее

¹⁰⁾ Ясно, что если существует нейтральная мода с частотой ω_0 , то при том же значении $Q = Q_c$ существует нейтральная мода с частотой $-\omega_0$, и мы можем искать сразу квадрат частоты нейтральной моды.

для моды $l = 2$ (а фактически и для $l = 1$ тоже), для этих значений l в случае ретроградной прецессии нейтральных мод не может быть в принципе, так как соответствующее им Q оказывалось отрицательным.

Чтобы более подробно выяснить возможность существования нейтральных мод для $l \geq 3$, рассмотрим серию конкретных моделей одногорбых функций распределения

$$f_0^{(n)}(\nu) = N_n \nu^{2n} \exp(-\nu^2/\nu_T^2),$$

где N_n — нормировочный коэффициент, $n = 1, 2, \dots$. Если считать пока, что функция нормирована на некую полную «массу» \bar{M} условием

$$\int_0^\infty \nu d\nu f_0^{(n)} = \bar{M}, \quad (4.7)$$

то

$$N_n = \frac{2\bar{M}}{(\nu_T^2)^{n+1}} \frac{1}{n!}.$$

Удобно перейти к безразмерным переменным $x = \nu^2/\nu_T^2$, $x_0 = \omega_0^2/\nu_T^2$ и вместо функции $f_0^{(n)}(\nu)$ оперировать с функцией

$$f_n(x) = f_0^{(n)}(\nu_T \sqrt{x}) = N_n \nu_T^{2n} x^n e^{-x}.$$

В этих обозначениях система уравнений (4.5) и (4.6) приобретает вид

$$f_n'(x_0) + \frac{5}{27}f_n' \left(\frac{1}{9}x_0 \right) = 0, \quad (4.8)$$

$$Q_c = - \int_0^\infty dx x \frac{df_n(x)}{dx} \left(\frac{1}{x_0 - x} + \frac{15}{x_0 - 9x} \right), \quad (4.9)$$

где

$$f_n'(x) = N_n \nu_T^{2n} x^{n-1} (n-x) e^{-x}. \quad (4.10)$$

Из выражения (4.10) видно, что максимум функции $f_n(x)$ расположен в точке $x = n$, так что формула (4.4) дает сразу условие для величины безразмерного квадрата частоты: $n < x_0 < 9n$. Находим x_0 из уравнения (4.8), которое приобретает вид трансцендентного уравнения:

$$9n - x_0 - \frac{1}{5}3^{2n+3} \exp\left(-\frac{8}{9}x_0\right) (x_0 - n) = 0. \quad (4.11)$$

Очевидно, что по крайней мере один корень существует всегда, поскольку на концах интересующего нас интервала левая часть уравнения (4.11) имеет

Таблица 2. Значения безразмерных квадратов частот — кандидатов на нейтральную моду

n	$x_0^{(1)}$	$x_0^{(2)}$	$x_0^{(3)}$
1	1.66	3.44	8.85
2	2.27	5.3433	17.99
3	3.09	7.7337	26.99
4	4.03	10.17	35.99
5	5.01	12.63	44.99
6	—	15.09	—
7	—	17.55	—

разные знаки. Более детальный счет (или простое численное рисование графика левой части) показывает, что на самом деле при каждом n существуют три различных корня, удовлетворяющих условию $n < x_0 < 9n$. Все три корня и есть кандидаты на возможную нейтральную моду. Результаты численного решения уравнения (4.11) для $n = 1, \dots, 7$ дают для безразмерных квадратов частот возможных нейтральных мод значения, представленные в табл. 2.

Далее мы должны вставить найденные значения x_0 в соотношение (4.9), определяющее Q_c . Представим его в виде, удобном для численного счета. Введем функцию $g_n(x)$:

$$g_n(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t} e^t (x-t)^n (x-t-n), \quad x > 0.$$

С ее помощью уравнение (4.9) запишется в виде

$$\bar{Q}_c^{(n)} = g_n(x_0) + \frac{5}{3} g_n\left(\frac{1}{9}x_0\right),$$

где мы обозначили

$$\bar{Q}^{(n)} \equiv \frac{Q}{\nu_T^{2n} N_n} = n! \frac{Q}{2\bar{M}} \nu_T^2,$$

причем величина \bar{M} (см. (4.7)) определена условием нормировки для моноэнергетической модели (3.16):

$$\bar{M} = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \varpi^2(E_0) \Omega_1(E_0) M_G.$$

Подстановка всех трех корней $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}$ в уравнение (4.9) дала следующие результаты.

1. Для функции распределения с $n = 1$ правая часть выражения (4.9) оказалась отрицательной

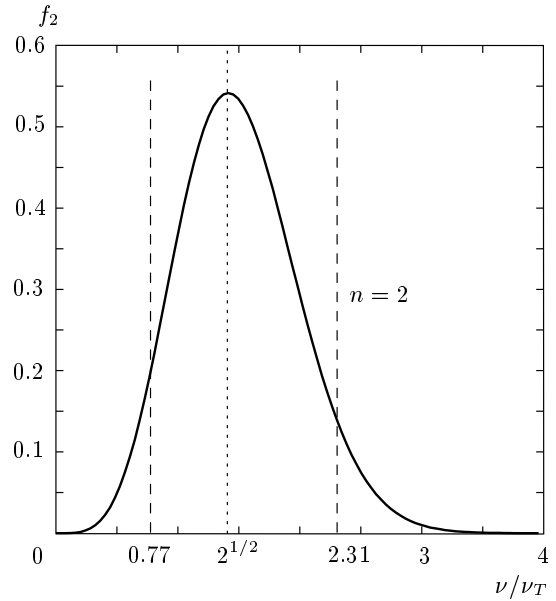


Рис. 3. Положение резонансов для моды $l = 3$ для функции распределения $f_{n=2}(\nu) \propto \nu^4 \exp(-\nu^2/\nu_T^2)$. Частота нейтральной моды $\omega_0 = \sqrt{5.34} \nu_T = 2.31\nu_T$. Максимум функции распределения при $\nu = u = \sqrt{2} \nu_T$

для всех трех потенциально возможных нейтральных мод. Это означает, что в такой модели мода $l = 3$ не имеет нейтральных мод и устойчива.

2. Для всех моделей с $n \geq 2$ существует одна нейтральная мода. Она соответствует среднему по величине корню x_0 (в табл. 2 это корень $x_0^{(2)}$). Только для этого корня правая часть выражения (4.9) оказывается положительной. Это означает, что в этих моделях возможна неустойчивость, если параметр Q отличается (пока непонятно в какую сторону) от найденного критического значения. Эти критические значения $\bar{Q}_c^{(n)}$ приведены в табл. 3.

На рис. 3 приведено для иллюстрации положение резонансов для нейтральной моды в модели с $n = 2$. Здесь безразмерная частота ω_0/ν_T , как это видно из табл. 2, равна $\sqrt{5.34} \approx 2.31$, резонансы находятся при $\nu/\nu_T = \omega_0/3\nu_T = 0.77$ и $\nu/\nu_T = \omega_0/\nu_T = 2.31$.

Таким образом, мы убеждаемся, что нейтральная мода и вместе с ней конусная неустойчивость существуют в односторонних распределениях для высших мод $l \geq 3$ при подходящих параметрах этих распределений ($n \geq 2$)¹¹⁾.

¹¹⁾Если не ограничиваться только целыми значениями n , то можно показать, что точная граница устойчивости приходится на $n \approx 1.55$.

Таблица 3. Безразмерный квадрат частоты нейтральной моды x_0 , значение критического параметра $\bar{Q}_c^{(n)}$ и значения величин A_n и B_n , определяющих поправку к комплексному квадрату частоты $\delta x_0 \equiv \delta(\omega^2/\nu_T^2)$

n	x_0	$\bar{Q}_c^{(n)}$	$\bar{Q}_c^{(n)}/n!$	A_n	B_n
2	5.3433	0.5425	0.2713	0.1880	0.7322
3	7.7337	3.4866	0.5811	0.2189	1.8845
4	10.17	15.6856	0.6536	0.08	5.46
5	12.63	74.7372	0.6228	-1.40	18.32
6	15.09	399.7582	0.5552	-11.86	70.95
7	17.55	2425.3916	0.4812	-83.65	312.89

Примечание. Невозмущенная функция распределения $f_n(x) = (N_n \nu_T^{2n}) \bar{f}_n(x)$, $\bar{f}_n(x) = x^n \exp(-x)$. (Для $n = 1$ нейтральных мод нет.)

**4.3. Теория возмущений вблизи $Q = \bar{Q}_c^{(n)}$.
Критерий неустойчивости**

Придадим теперь параметру \bar{Q} приращение $\delta\bar{Q}$ и вычислим по теории возмущений поправку δx_0 к безразмерному квадрату частоты x_0 . Наличие положительной мнимой части у δx_0 будет означать неустойчивость. Действительно,

$$\delta x_0 = \delta(\omega^2)/\nu_T^2 = 2\omega_0 \delta\omega / \nu_T^2,$$

и поскольку мы считаем $\omega_0 > 0$, знаки мнимых частей δx_0 и $\delta\omega$ совпадают.

Запишем характеристическое уравнение в виде (4.3) через новые переменные $x = \nu^2/\nu_T^2$, $x_0 = \omega_0^2/\nu_T^2$ и новую функцию $\bar{f}_n(x) = x^n e^{-x}$:

$$\bar{Q}^{(n)} = \int_0^\infty dx x \frac{d\bar{f}_n(x)}{dx} \left(\frac{1}{x-x_0} + \frac{5/3}{x-x_0/9} \right), \quad (4.12)$$

где

$$\bar{f}_n'(x) = x^{n-1} (n-x) e^{-x}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta\bar{Q}^{(n)} &= \\ &= \delta x_0 \int_0^\infty dx x \frac{d\bar{f}_n(x)}{dx} \left[\frac{1}{(x-x_0)^2} + \frac{5/27}{(x-x_0/9)^2} \right], \end{aligned}$$

где, согласно сказанному выше, интегрирование совершается с обходом снизу. Теперь воспользуемся соотношением, полезным для интегрирования выра-

жений с особенностями типа $(x-x_0)^{-2}$ с обходом особенности в комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{F(x)}{(x-x_0)^2} dx = \\ &= \text{FP} \int_a^b \frac{F(x)}{(x-x_0)^2} dx + i\pi F'(x_0), \quad a < x_0 < b. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Здесь FP означает конечную часть (Finite Part) интеграла:

$$\begin{aligned} \text{FP} \int_a^b \frac{f(x) dx}{(x-x_0)^2} &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon} \frac{f(x) dx}{(x-x_0)^2} + \right. \\ &\left. + \int_{x_0+\epsilon}^b \frac{f(x) dx}{(x-x_0)^2} - \frac{2f(x_0)}{\epsilon} \right\}, \end{aligned}$$

где $a < x_0 < b$, а функция $f(x)$ регулярна в точке x_0 . Очевидно, что на реальную часть результата, т. е. на значение интеграла FP, направление обхода (снизу или сверху) не влияет. Смена знака обхода приводит только к изменению знака перед мнимой частью в (4.13).

Заметим, что понятие интеграла в смысле FP хорошо известно в гидродинамике и широко применяется в задачах, связанных с наличием так называемого критического слоя, т. е. узкой области в окрестности резонанса волны со сдвиговым течением жидкости (см., например, [29, 30]). Получаем

$$\begin{aligned} \delta\bar{Q}^{(n)} = & \\ = \delta x_0 \left\{ i\pi \left[\left(x \frac{d\bar{f}_n(x)}{dx} \right)'_{x=x_0} + \frac{5}{27} \left(x \frac{d\bar{f}_n(x)}{dx} \right)'_{x=x_0/9} \right] + \right. & \\ & + \text{FP} \int_0^\infty dx x \frac{d\bar{f}_n(x)}{dx} \times \\ & \left. \times \left[\frac{1}{(x-x_0)^2} + \frac{5/27}{(x-x_0/9)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Мнимую часть (4.13) можно упростить, воспользовавшись соотношением (4.8), выражающим баланс раскачки и затухания для нейтральной моды. Получим

$$\begin{aligned} \delta\bar{Q}^{(n)} = \delta x_0 \left\{ i\pi x_0 \left[\bar{f}_n''(x_0) + \frac{5}{243} \bar{f}_n'' \left(\frac{1}{9} x_0 \right) \right] + \right. & \\ + \text{FP} \int_0^\infty dx x \bar{f}_n'(x) \left[\frac{1}{(x-x_0)^2} + \right. & \\ & \left. \left. + \frac{5/27}{(x-x_0/9)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Записывая выражение (4.15) в форме

$$\delta\bar{Q}^{(n)} = (A_n + iB_n) \delta x_0,$$

где

$$\begin{aligned} A_n = \text{FP} \int_0^\infty dx x \bar{f}_n'(x) \times & \\ \times \left[\frac{1}{(x-x_0)^2} + \frac{5/27}{(x-x_0/9)^2} \right], & \quad (4.16) \\ B_n = \pi x_0 \left[\bar{f}_n''(x_0) + \frac{5}{243} \bar{f}_n'' \left(\frac{1}{9} x_0 \right) \right], & \end{aligned}$$

получаем для реальной и мнимой частей δx_0 :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\delta x_0) = \frac{A_n}{A_n^2 + B_n^2} \delta\bar{Q}^{(n)}, & \\ \text{Im}(\delta x_0) = -\frac{B_n}{A_n^2 + B_n^2} \delta\bar{Q}^{(n)}. & \quad (4.17) \end{aligned}$$

Мы видим, что критерий устойчивости определяется исключительно знаком B_n . Для вычисления же самого инкремента нужны оба значения A_n и B_n . Если ввести функции

$$\begin{aligned} u_n(x) = x \bar{f}_n''(x) = x^{n-1} \left[(n-1-x)(n-x) - x \right] e^{-x}, & \\ h_n(x) = e^{-x} \text{FP} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t^2} e^t (x-t)^n (n-x+t), \quad x > 0, & \end{aligned}$$

то с их помощью результат записывается в компактной форме:

$$\begin{aligned} A_n = h_n(x_0) + \frac{5}{27} h_n \left(\frac{1}{9} x_0 \right), & \\ B_n = \pi \left[u_n(x_0) + \frac{5}{27} u_n \left(\frac{1}{9} x_0 \right) \right]. & \end{aligned}$$

Значения A_n и B_n рассчитывались численно для найденных выше значений x_0 . Они приведены в табл. 3. Из табл. 3 видно, что величина B_n положительна для всех n . Следовательно, неустойчивость имеет место при $\delta\bar{Q}^{(n)} < 0$, или $\bar{Q}^{(n)} < \bar{Q}_c^{(n)}$. Критические значения $\bar{Q}_c^{(n)}$ приведены в табл. 3. Если вспомнить определение

$$\bar{Q}^{(n)} = n!(Q/2\bar{M}) \nu_T^2,$$

то условие неустойчивости для моноэнергетической модели можно переформулировать в более наглядном виде как условие на дисперсию по моментам $L_T = \nu_T / \varpi$:

$$\left(\frac{16}{3\pi^2 C_3} \right) \frac{L_T^2}{\Omega_{circ}^2(R) R^4} < \frac{\bar{Q}_c^{(n)}}{n!}, \quad C_3 \approx 0.0373.$$

Таким образом, критерий неустойчивости моды $l = 3$ может быть сформулирован как критерий на величину отношения дисперсии по угловым моментам звезд к угловому моменту звезды $\Omega_{circ}(R) R^2 = (GM_c R)^{1/2}$, совершающей круговое движение на радиусе R :

$$\frac{L_T}{\Omega_{circ}(R) R^2} < \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3C_3 \bar{Q}_c^{(n)}}{n!}}. \quad (4.18)$$

В частности, для модели с $n = 2$, где $\bar{Q}_c^{(2)} = 0.5426$ получаем из неравенства (4.18):

$$\frac{L_T}{\Omega_{circ}(R) R^2} < 0.136.$$

Заметим, что в такой форме критерий не содержит величины массы сферической составляющей M_G .

Когда надкритичность δQ не мала, описанная выше теория возмущений не позволяет вычислить комплексную собственную частоту. В этом случае характеристическое уравнение (4.12) решалось численно для значений $n = 2, \dots, 5$. Качественное поведение реальной и мнимой частей частоты одинаково для всех рассчитанных случаев, поэтому здесь мы для иллюстрации ограничимся только моделью с $n = 3$ (см. рис. 4). Заметим также, что при малых отклонениях от границы устойчивости результаты

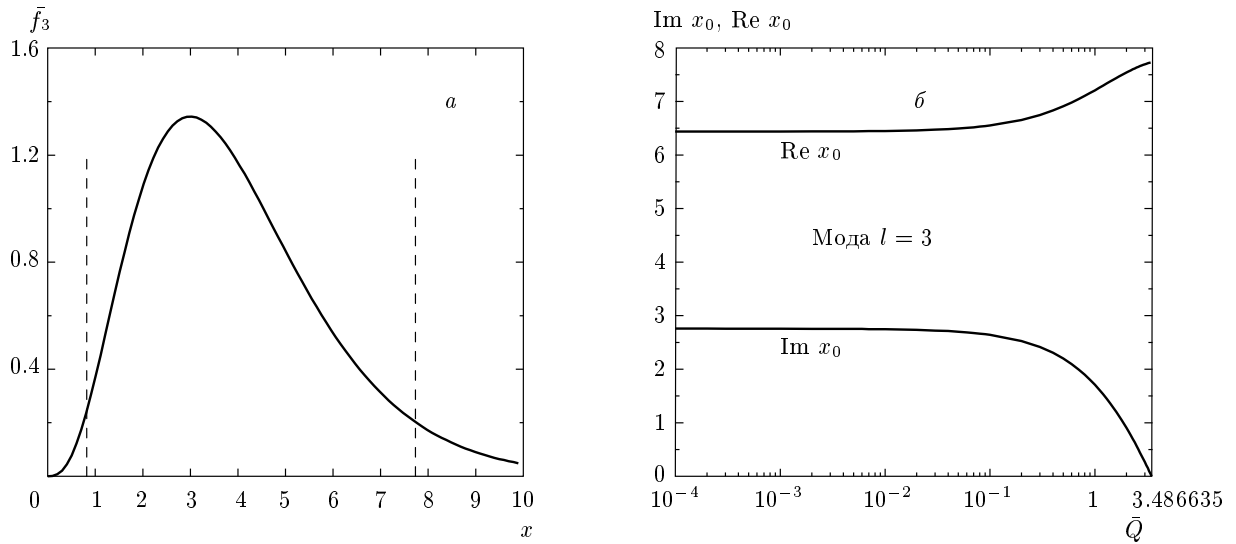


Рис. 4. Конусная неустойчивость в сферической системе. *a* — Функция распределения по скорости прецессии $\bar{f}_{n=3} = x^3 \exp(-x)$. Штриховые линии указывают положение резонансов для нейтральной моды. Квадрат безразмерной частоты нейтральной моды $x_0 = 7.7337$. *б* — Поведение квадрата безразмерной частоты x_0 неустойчивой моды: $\text{Re } x_0, \text{Im } x_0$ в зависимости от параметра \bar{Q}

численного счета полностью совпадают с результатами наших асимптотических расчетов, полученными по теории возмущений (4.17).

В заключение этого раздела обсудим вопрос о причинах отсутствия неустойчивости в модели с $n = 1$. Мы видим, что для конусной неустойчивости в гравитирующих сферических системах недостаточно просто иметь (помимо ретроградности прецессии) положительную производную в области малых моментов, $\partial f / \partial L > 0$. Напомним, что в плазменном пробкотроне, напротив, положительность производной одномерного распределения по поперечным скоростям, $df/dv_{\perp} > 0$ (f — проинтегрированная по продольным к магнитному полю скоростям функция распределения плазмы), оказывается достаточным условием для неустойчивости. Можно предположить, что устойчивость модели с $n = 1$ связана со слишком близким к нулю положением максимума функции распределения при $n = 1$ по сравнению с моделями с $n > 1$ ¹²). Для проверки гипотезы о критическом значении удаленности максимума распределения мы исследовали устойчивость в модели, позволяющей регулировать положение максимума,

$$f(x) = N \bar{f}(x), \quad \bar{f}(x) = t \exp[-(t - \Delta)^2], \quad (4.19)$$

$$t \equiv \sqrt{x} = \nu/\nu_T,$$

¹²) Отметим также большую «опустошенность» конуса потерь в моделях с $n > 1$.

где N — нормировочная константа. Здесь для полноты картины мы не ограничились модой $l = 3$, а рассчитали устойчивость для большого количества разных l .

Запишем характеристическое уравнение в виде

$$\bar{Q} = C_l \int_0^{\infty} dx x \frac{d\bar{f}(x)}{dx} \sum_{s=s_{min}}^l \frac{D_l^s}{x - x_0/s^2}, \quad (4.20)$$

где s_{min} равно 1 или 2 в зависимости от четности l . При такой записи уравнения величина \bar{Q} не зависит от l . На рис. 5 на плоскости (\bar{Q}, Δ) показана общая для всех l маргинальная кривая, разделяющая области устойчивости и неустойчивости для модели (4.19). Мы видим, что, действительно, при достаточно сдвинутом (в сторону больших моментов, или скоростей прецессии) максимуме, $\Delta > 1.142$, система становится неустойчивой. Интересно отметить, что эта кривая, являющаяся огибающей маргинальных кривых отдельных мод, образована фактически маргинальными кривыми только четырех мод, а именно, мод $l = 3, 5, 7, 9$, причем граничное значение $(\bar{Q} = 0, \Delta = 1.142)$ соответствует моде $l = 9$.

Формальная причина обнаруженного нами различия в условиях развития конусной неустойчивости в сферических гравитирующих системах и в пробкотроне (см., например, [2]) (а также в гравитирующем диске, где ситуация с условием неустойчиво-

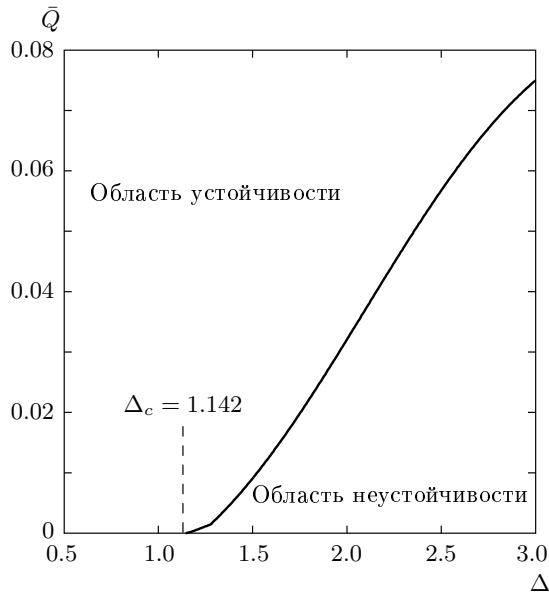


Рис. 5. Области устойчивости и неустойчивости на плоскости \bar{Q}, Δ для модели (4.19)

сти мало отличается от плазменной, см. [3]) состоит в довольно сильном различии характеристических уравнений. В отличие от случаев конусной неустойчивости в плазме и в гравитирующем диске, в случае гравитирующей сферической системы мы имеем дело с большим количеством резонансных членов, как это видно, например, из формулы (3.14), а не с единственным резонансным членом, как в случае пробкотрона или диска). Довольно хитрая игра этих резонансов и приводит к различиям в условиях неустойчивости. Физическую причину нужно, очевидно, искать в отличии трехмерного случая в сфере от двумерного случая в плазме и гравитирующем диске.

Однако оказывается, что отмеченное различие в характере устойчивости дисковых (или плазменных) систем и сферических систем можно понять на языке известного критерия Пенроуза–Найквиста [28] (см. также книгу Михайловского [2]). Дело в том, что хотя сферическое характеристическое уравнение (4.20) по виду сильно отличается от характеристического уравнения для электростатических колебаний плазмы, для которого этот критерий был получен, оно, тем не менее, может быть сведено к уравнению плазменного вида, но уже для некой новой функции. Действительно, замена $f(x)$ на

$$F^{(l)}(x) = C_l \sum_{s=s_{min}}^l D_l^s f\left(\frac{x}{s^2}\right)$$

превращает (4.20) в уравнение

$$Q = \int_0^\infty dx x \frac{dF^{(l)}(x)/dx}{x - x_0}. \quad (4.21)$$

Для уравнения (4.21) можно получить критерий, являющийся фактически полным аналогом критерия Пенроуза–Найквиста [28]. Напомним, что согласно этому критерию (если его сформулировать в терминах нейтральных мод), распределение устойчиво тогда и только тогда, когда нет нейтральных мод, связанных с минимумами функции распределения. Таким образом, отсутствие минимумов автоматически означает и отсутствие связанных с ними нейтральных мод, а следовательно, и неустойчивости. Поскольку новая функция $F^{(l)}$, в отличие от исходной одногорбой функции f , может, начиная с $l = 3$, иметь также и минимумы, становятся понятны причина отсутствия неустойчивости для случая мод $l = 1$, когда $F^{(l)}(x) \sim f(x)$, и $l = 2$, когда $F^{(l)}(x) \sim f(x/4)$, и возможность её появления при $l \geq 3$ (когда $F^{(l)}(x)$ уже существенно отличается от $f(x)$). Более того, удастся понять, почему даже при $l \geq 3$ не любое распределение приводит к неустойчивости. Дело в том, что, согласно этому критерию, при недостаточно глубоком минимуме новой функции $F^{(l)}$ условие неустойчивости (т. е. появление связанной с этим минимумом нейтральной моды) не может быть выполнено. Именно с этим мы и столкнулись при рассмотрении модели с $n = 1$ и моделей (4.19) при недостаточно большом Δ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен ряд результатов, которые мы здесь перечислим.

1. Доказана возможность гравитационной конусной неустойчивости в сферических почти-кеплеровских скоплениях. Тем самым опровергнуто утверждение Тримейна [4] о ее невозможности в такого рода системах. С другой стороны, показано, что эта неустойчивость невозможна в сферических скоплениях с несингулярными потенциалами. Причина заключается в том, что в этих случаях необходимое для неустойчивости условие ретроградности прецессии орбит выполняется лишь для явно нереалисти-

ческих распределений плотности (растущих с увеличением радиуса)¹³⁾.

Как отмечалось в работе [3], в реальных дисковых системах ретроградность прецессии и, соответственно, гравитационная конусная неустойчивость могут иметь место. С некоторым «запасом» это обеспечивается в дисках с растущей с увеличением радиуса поверхностной плотностью — так называемой депрессией, наблюдающейся у части спиральных галактик. Граница между прямой и ретроградной прецессиями проходит, очевидно, по известному закону $\sigma_0(r) \propto \sqrt{1 - r^2/R^2}$ для поверхностной плотности диска с квадратичным самосогласованным потенциалом. Поэтому, например, диск с постоянной поверхностной плотностью, $\sigma_0(r) \propto H(R - r)$, тоже имеет ретроградно прецессирующие орбиты вблизи центра. Здесь $H(x)$ — единичная функция Хевисайда.

2. Приводится последовательный вывод из общих линеаризованных уравнений Власова (записанных в переменных действие–угол) простых характеристических уравнений для малых возмущений сферических звездных систем с почти радиальными орбитами. Одновременно дается строгое обоснование наглядному и очень удобному для практического использования приближению вращающихся спиц.

Характеристические уравнения для сферических и дисковых систем (как и получающиеся из них результаты) существенно отличаются друг от друга. В случае диска мы имеем (см. [3]) единое одночленное уравнение, описывающее возмущения с любым азимутальным индексом m , причем качественно свойства возмущений с разными m совпадают. Неустойчивыми, вообще говоря, являются возмущения с любой азимутальной зависимостью и, как в плазме, при любой «пучковости» (во всяком случае, если участок растущей с L функции распределения $f_0(L)$ начинается с $f_0(L) = 0$). В сферическом случае одночленными характеристическими уравнениями описываются лишь возмущения с индексами $l = 1, 2$ (и они оказываются устойчивыми). При $l = 3, 4$ характеристические уравнения двучленные, при $l = 5, 6$ — трехчленные и т. д. Все эти возмущения могут быть при определенных условиях неустойчивыми.

3. Показано, что физическая причина исследуемой неустойчивости вполне аналогична опустоше-

нию функции распределения плазмы внутри «конуса потерь» в простейших ловушках. Неустойчивость возникает вследствие поглощения или разрушения звезд с достаточно малыми угловыми моментами. Подчеркивается необходимость ретроградной прецессии орбит для возникновения гравитационной конусной неустойчивости. Выведены формулы для скорости прецессии, из которых, в частности, следуют условия ее ретроградности.

Остановимся теперь кратко на предварительных оценках эффективности предложенного механизма. Для практически наиболее интересного почти-кеплеровского случая такие оценки были сделаны Тримейном [4], и ниже мы воспользуемся этими оценками.

Существует несколько характерных временных масштабов. Первый из них — это динамическое время $t_{dyn} \sim \Omega^{-1} \sim (R^3/GM_c)^{1/2}$, где R — типичный орбитальный радиус, M_c — центральная точечная масса. Прецессия орбит определяет, пользуясь терминологией Тримейна [4], секулярный масштаб времени:

$$t_{sec} \sim t_{dyn} \frac{M_c}{M_G} \sim t_{dyn} \frac{M_c}{N_G m},$$

где M_G , N_G и m — соответственно масса скопления, число звезд в нем и типичная масса одной звезды. Гравитационная конусная неустойчивость развивается именно на этом масштабе времени, ср. с формулой (3.12) для скорости прецессии в нашей моноэнергетической модели:

$$\gamma = \text{Im } \omega \sim \Omega_{pr} = \varpi L \sim \frac{M_G}{M_c} \frac{L}{R^2} \sim \Omega(M_G/M_c).$$

Следующий важный временной масштаб определяет время столкновительной релаксации:

$$t_{relax} \sim \frac{R^{3/2} M_c^{3/2}}{G^{1/2} m M_G} \sim t_{dyn} \frac{M_c^2}{m M_G} \sim t_{dyn} \frac{M_c^2}{m^2 N_G}.$$

Эти три временных масштаба общеприняты и хорошо известны. Тримейн [4] вводит еще один, менее известный масштаб времени со ссылкой на работу [31] — время резонансной релаксации угловых моментов:

$$t_{res} \sim \frac{R^{3/2} M_c^{1/2}}{G^{1/2} m} \sim t_{dyn} \frac{M_c}{m}.$$

Существенно, что для почти-кеплеровских систем (когда $M_G \ll M_c$, $N_G \gg 1$) эти четыре масштаба времени сильно различаются:

$$t_{dyn} \ll t_{sec} \ll t_{res} \ll t_{relax}.$$

¹³⁾ Здесь нужно пояснить, что подобные «инверсные» распределения плотности естественным образом должны возникать вблизи черных дыр в сферических скоплениях с почти круговыми орбитами [9].

Таким образом, скорость нарастания неустойчивости должна, согласно этим оценкам Тримейна [4, 30], происходить быстрее, чем обычная столкновительная (и резонансная) релаксация, причем независимо от того, насколько малой является масса звездного скопления.

Мы благодарим А. М. Фридмана, обратившего внимание на имеющуюся аналогию с плазменными ловушками, выражаем признательность С. М. Чурилову за полезное обсуждение некоторых вопросов и В. А. Мазуру за постоянный стимулирующий интерес к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17874, 07-02-00931), грантов «Ведущие научные школы» (№ 7629.2006.2) и «Молодые кандидаты наук» (№ 2917.2005.2) Министерства промышленности, науки и технологий РФ, а также гранта «Протяженные объекты во Вселенной» Отделения физических наук Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. N. Rosenbluth and R. F. Post, *Phys. Fluids* **8**, 547 (1965).
2. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1970), т. 1.
3. В. Л. Поляченко, *Письма в Астрон. ж.* **17**, 877 (19916).
4. S. Tremaine, *Astrophys. J.* **625**, 143 (2005).
5. В. Л. Поляченко, *Письма в Астрон. ж.* **17**, 691 (1991).
6. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман, *Ж. прикл. мех. и техн. физ.* **3**, 3 (1969).
7. А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, *ЖЭТФ* **61**, 457 (1971).
8. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
9. A. M. Fridman and V. L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Springer, New York (1984).
10. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Препринт СибИЗМИР СО АН СССР*, № 1-2-72, Иркутск (1972).
11. В. А. Антонов, *Динамика галактик и звездных скоплений*, Наука, Алма-Ата (1973), с. 139.
12. В. Л. Поляченко, *ЖЭТФ* **101**, 1409 (1992).
13. А. В. Степанов, *Астрон. ж.* **50**, 1243 (1973).
14. V. V. Zaitsev and A. V. Stepanov, *Solar Phys.* **88**, 297 (1983).
15. D. B. Melrose, *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986), p. 288.
16. A. P. Lightman and S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **211**, 244 (1977).
17. S. L. Shapiro and A. V. Marchant, *Astrophys. J.* **225**, 603 (1978).
18. J. Frank and M. J. Rees, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **176**, 633 (1976).
19. В. И. Докучаев, Л. М. Озерной, *ЖЭТФ* **73**, 1587 (1977).
20. E. V. Polyachenko, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **348**, 345 (2004).
21. В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко, *Астрон. ж.* **81**, 963 (2004).
22. D. Lynden-Bell, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **187**, 101 (1979).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 1, Наука, Москва (1988).
24. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1979).
25. В. С. Сынах, А. М. Фридман, И. Г. Шухман, *ДАН СССР* **201**, 827 (1971).
26. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. ж.* **58**, 933 (1981).
27. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. ж.* **59**, 228 (1982).
28. O. Penrose, *Phys. Fluids*, **3**, 258 (1960).
29. F. J. Hickernell, *J. Fluid. Mech.* **142**, 431 (1984).
30. I. G. Shukhman, *J. Fluid. Mech.* **233**, 587 (1991).
31. K. P. Rauch and S. Tremaine, *New Astron.* **1**, 149 (1996).