

РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА КОНДЕНСАТЕ ЗАХВАЧЕННОГО В ЛОВУШКУ БОЗЕ-ГАЗА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО СКОРОСТЯМ АТОМОВ ОТДАЧИ

*В. А. Алексеев**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2006 г.

Развит подход, позволяющий при вычислении сечения рэлеевского рассеяния света учесть квантовый характер описания движения центра инерции захваченных в ловушку рассеивающих частиц. Это позволило исследовать форму линии рассеяния на конденсате бозе-газа, захваченного в параболическую ловушку. Сдвиг центра линии рассеяния равен сдвигу отдачи, а ее ширина зависит от химического потенциала газа и времени релаксации скорости надконденсатных частиц. Найдена функция распределения по скоростям пучка атомов отдачи, возникающих при вынужденном рэлеевском рассеянии света. Показано, что в типичных условиях эксперимента характерная ширина скоростного распределения $\Delta v/v$ в этом пучке порядка 10^{-3} при скорости v порядка нескольких сантиметров в секунду.

PACS: 03.75.Nt, 03.75.Pr

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования процесса вынужденного рэлеевского рассеяния света на конденсатах захваченных в ловушку бозе-газов (см. [1–6] и цитированную в этих работах литературу) продемонстрировали яркие особенности этого явления. Было установлено, что этот процесс сопровождается образованием монохроматических пучков атомов отдачи, обладающих корреляционными свойствами, проявляющимися при их интерференции [2–4]. Обсуждаются возможности использования таких пучков в атомной оптике, литографии и в метрологических приложениях.

Известно, что рэлеевское рассеяние света является весьма информативным методом исследования рассеивающего объекта, поскольку теоретическое описание спектральной структуры линии рассеяния опирается на информацию о строении вещества и на характеристики протекающих в нем релаксационных процессов (см., например, [7, 8]). В настоящей статье показано, что линия рассеяния на конденсате газа, захваченного в параболическую ловушку, состоит из двух компонент, сдвинутых соответствен-

но в красную (стоксова компонента) и синюю (антистоксова) стороны на частоту сдвига отдачи от частоты падающего излучения. Спектральная форма этих компонент определяется квадратом модуля фурье-образа волновой функции конденсата, позволяя, таким образом, выполнить не разрушающую конденсат диагностику. Важной особенностью вынужденного рэлеевского рассеяния на конденсате является сопровождающее этот процесс образование над конденсатом пучков атомов отдачи со средней скоростью v порядка нескольких сантиметров в секунду, наблюдавшихся в работах [2–4]. В статье исследованы скоростные распределения атомных пучков отдачи и показано, что в типичных условиях эксперимента их относительная ширина $\Delta v/v \sim 10^{-3}$.

Процесс рэлеевского рассеяния состоит в поглощении фотона \mathbf{k} , ω падающей волны (\mathbf{k} — волновой вектор фотона, $\omega = kc$ — его частота) и излучения фотона \mathbf{k}' , ω' с другим волновым вектором и другой частотой. При этом электронное состояние атома остается без изменения, но изменяется квантовое число \mathbf{p} одной из частиц (квазичастиц) газа, описывающее состояние движения ее центра инерции. Квантовые числа, описывающие движение центров инерции частиц, могут оставаться и постоянными. В

*E-mail: valeks@sci.lebedev.ru

этом случае $\omega' = \omega$ и рассеяние называют упругим или когерентным. Теоретическое описание рассеяния на бозе-конденсате захваченного в ловушку газа отличается от аналогичного описания в случае однородного газа, подчиняющегося статистике Больцмана, необходимостью учета квантового характера движения центра инерции атомов и влияния на это движение поля ловушки.

В работе [9] такое исследование было выполнено численным методом. Для исследования спектра рассеяния $S(\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega)$ в работе [9] было использовано выражение

$$S(\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega) = Z^{-1} \sum_{\lambda, \lambda'} \exp(-\beta E_\lambda) |\langle \lambda' | \hat{n}(\Delta\mathbf{k}) | \lambda \rangle|^2 \times \\ \times \delta(\hbar\Delta\omega - E_\lambda + E_{\lambda'}), \quad (1)$$

где $|\lambda\rangle$ — волновые функции стационарных состояний газа, E_λ — соответствующие этим функциям энергии, $\beta = 1/T$, T — температура в энергетических единицах, Z — нормирующий множитель, $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, $\Delta\omega = \omega' - \omega$,

$$\hat{n}(\Delta\mathbf{k}) = \int \exp(-i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

— фурье-образ оператора плотности газа $\hat{n}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r})$. Выражение (1) в работе [9] является исходным и приводится без каких-либо указаний на источник его происхождения. Между тем возможность его использования нуждается в обсуждении.

В классической электродинамике, как известно (см., например, [7, 10]), спектр рассеяния в однородной среде пропорционален фурье-образу коррелятора флуктуации диэлектрической проницаемости $\langle \delta\varepsilon(0, 0) \delta\varepsilon(r, t) \rangle$, который, в свою очередь, пропорционален коррелятору флуктуации плотности $\langle \delta n(0, 0) \delta n(r, t) \rangle$ ($\delta n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) - \bar{n}$, \bar{n} — средняя плотность частиц), если считать, что флуктуация диэлектрической проницаемости пропорциональна флуктуации плотности. В работах [11, 12], в которых также рассматривалось рассеяние света в однородной среде, поле считалось классическим, а для движения частиц газа использовалось квантовое описание. В этих работах спектр рассеянного света $S(\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega)$ был выражен через пространственно-временной фурье-образ коррелятора оператора плотности $\langle \hat{n}(\mathbf{r}_1, t) \hat{n}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$, где $\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$. В случае однородного газа фурье-образ этого коррелятора сводится к выражению (1) повторением процедуры, использованной в работе [13] (выражения (86.3), (86.5), (86.13)) для вычисления фактора жидкости

$$\bar{n}\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \delta\hat{n}(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\hat{n}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle,$$

где $t = t_1 - t_2$. Однако предположение об однородности среды в этой процедуре играет весьма существенную роль, и в случае захваченного в ловушку газа она перестает быть применимой.

Вместе с тем к форме спектра (1) приводит и метод, использованный в монографии [7], в которой обоснован переход от феноменологически введенной поправки к гамильтониану (119.11) к вероятности перехода (119.13). Эта вероятность перехода становится идентичной (1), если в использованной в работе [7] поправке к гамильтониану (119.11) и, соответственно, в вероятности перехода (119.13) выполнить замену $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{n}(\mathbf{r}, t)$. Заметим теперь, что такая замена не только приводит к идентичности формул (119.13) из [7] и (1), но и освобождает приведенный в работе [7] гамильтониан (119.11) от ограничений, связанных с однородностью среды.

Раздел 2 настоящей статьи носит вспомогательный характер. В нем в рамках квантового подхода к описанию поля световых волн и движения частиц (или квазичастиц) газа выполнено микроскопическое вычисление вероятности перехода $dw(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{p} \rightarrow k', \omega', \mathbf{p}')$. Эта вероятность в случае спонтанного рассеяния приводит к форме спектра, идентичной описываемой формулой (1), однако содержит в себе и описание процесса вынужденного рассеяния, необходимого нам для исследования скоростного распределения образующегося при этом процессе пучка надконденсатных атомов. В разд. 2 приводятся также выражения для сечений неупругого (с изменением частоты) и упругого (когерентного) рэлеевского рассеяния, обсуждаются соотношения между ними и даются вытекающие из найденной вероятности перехода выражения для вероятности индуцированных переходов. В разд. 3 полученные в разд. 2 результаты используются для исследования формы линии рассеяния на конденсате захваченного в ловушку идеального газа. В разд. 4 аналогичная задача решается для случая слабонеидеального газа, когда волновая функция конденсата является решением уравнения Гросса–Питаевского [14–16]. В разд. 5 исследуется функция распределения по скоростям атомов отдачи, образующихся в процессе вынужденного рэлеевского рассеяния на конденсате слабонеидеального газа. В разд. 6 обсуждаются полученные результаты.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА

Обозначим индексом q квантовые числа, описывающие электронные состояния атома, индексом \mathbf{p}

квантовые числа, характеризующие движение его центра инерции и набор соответствующих чисел заполнения $\{N_{q\mathbf{p}}\}$; аналогично $\{N_{\mathbf{k}\rho}\}$ — набор чисел заполнения фотонов с частотой $\omega_{\mathbf{k}} = kc$, волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией \mathbf{e}_{ρ} . Состояние $|\{N_{q\mathbf{p}}\}; \{N_{\mathbf{k}\rho}\}\rangle$ является, как известно, собственной функцией вторично квантованного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \sum_{q\mathbf{p}} (E_q + \varepsilon_{q\mathbf{p}}) \hat{a}_{q\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{q\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{k}\rho} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\rho}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\rho},$$

соответствующей энергии

$$E = \sum_{q\mathbf{p}} (E_q + \varepsilon_{q\mathbf{p}}) N_{q\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{k}\rho} \hbar\omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}\rho}, \quad (2)$$

где $\hat{a}_{q\mathbf{p}}^+$, $\hat{a}_{q\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}\rho}^+$, $\hat{b}_{\mathbf{k}\rho}$ — операторы рождения и уничтожения соответственно атомов и фотонов, E_q — энергия электронного возбуждения атома, $\varepsilon_{q\mathbf{p}}$ — энергия движения его центра инерции, которая, вообще говоря, зависит от электронного состояния, как, например, в случае захваченного в ловушку атома.

Взаимодействие атомов с электромагнитным полем описывается добавкой \hat{U} к гамильтониану \hat{H}_0 :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U},$$

$$\begin{aligned} \hat{U} = & - \sum_{q_1\mathbf{p}_1, q_2\mathbf{p}_2, \mathbf{k}, \rho} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V}} \hat{a}_{q_1\mathbf{p}_1}^+ \hat{a}_{q_2\mathbf{p}_2} \times \\ & \times \left[(\mathbf{d}_{q_1q_2} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho}) (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{q_1\mathbf{p}_1, q_2\mathbf{p}_2} \hat{b}_{\mathbf{k}\rho} + \right. \\ & \left. + (\mathbf{d}_{q_1q_2} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho}^*) (e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{q_1\mathbf{p}_1, q_2\mathbf{p}_2} \hat{b}_{\mathbf{k}\rho}^+ \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{d}_{q_1q_2}$ — матричный элемент электрического дипольного момента перехода $q_1 \rightarrow q_2$,

$$(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{q_1\mathbf{p}_1, q_2\mathbf{p}_2} = \int \Phi_{q_1\mathbf{p}_1}^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi_{q_2\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4)$$

$\Phi_{q\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — волновые функции, описывающие движение центра инерции атомов, напряженность электрического поля фотонов записана в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}\rho} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V}} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}\rho} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{b}_{\mathbf{k}\rho}^+ \mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right], \quad (5)$$

что соответствует энергии поля, равной второй сумме в формуле (2), V — объем квантования. Каждый член суммы в формуле (3) соответствует переходу атома из состояния $q_2\mathbf{p}_2$ в состояние $q_1\mathbf{p}_1$, сопровождающемуся поглощением (оператор $\hat{b}_{\mathbf{k}\rho}$) или испусканием (оператор $\hat{b}_{\mathbf{k}\rho}^+$) фотона $\mathbf{k}\rho$. Оператор \hat{U} является суммой операторов испускания и поглощения

фотонов (ср. (43.6) и (43.7) в [17]), записанных в дипольном приближении по взаимодействию атома с полем.

Рассмотрим сначала процесс неупругого рассеяния. В этом случае поглощается один из имеющихся в поле фотонов $\mathbf{k}\rho$ (его частоту далее обозначаем ω , опуская индекс \mathbf{k}) и излучается другой (рассеянный) фотон $\mathbf{k}'\rho'$ (частота ω'); одновременно один из атомов ансамбля переходит из состояния $q = 0, \mathbf{p}_1$ в состояние $q = 0, \mathbf{p}_2$ (значение $q = 0$ соответствует основному электронному состоянию). Это означает, что при таком процессе происходит переход из состояния

$$|1\rangle \equiv |N_{0\mathbf{p}_1}, N_{0\mathbf{p}_2}, 0_{q \neq 0, \mathbf{p}}, N_{\mathbf{k}\rho}, N_{\mathbf{k}'\rho'}\rangle$$

в состояние

$$|2\rangle \equiv |N_{0\mathbf{p}_1} - 1, N_{0\mathbf{p}_2} + 1, 0_{q \neq 0, \mathbf{p}}, N_{\mathbf{k}\rho} - 1, N_{\mathbf{k}'\rho'} + 1\rangle$$

(здесь и далее мы указываем только те из чисел заполнения, которые изменяются в рассматриваемом процессе). В случае, когда $N_{\mathbf{k}'\rho'} = 0$, соответствующий процесс называют спонтанным рассеянием, при $N_{\mathbf{k}'\rho'} \neq 0$ — вынужденным. Поскольку состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ различаются двумя фотонными числами заполнения, переход между этими состояниями появляется только во втором порядке теории возмущений по однофотонному оператору \hat{U} . Воспользовавшись известной формулой теории возмущений (см., например, [18] (43.7), [17] (59.2)), для вероятности перехода $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ в единицу времени с излучением фотона в элемент телесного угла $d\omega'$ и интервал частот $d\omega'$ получаем

$$dw_{12} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{21}|^2 \delta(E_1 - E_2) \frac{V\omega'^2 d\omega'}{(2\pi c)^3} d\omega', \quad (6)$$

$$V_{21} = \sum_{n \neq 1, 2} \frac{\hat{U}_{2n} \hat{U}_{n1}}{E_1 - E_n},$$

$$E_1 - E_2 = \varepsilon_{0\mathbf{p}_1} + \hbar\omega - \varepsilon_{0\mathbf{p}_2} - \hbar\omega'.$$

Промежуточные состояния $|n\rangle$, по которым проводится суммирование в формуле (6), могут быть, как известно [17], двух типов. В первом случае на первом этапе поглощается фотон $\mathbf{k}\rho$ и атом переходит в электронно-возбужденное состояние $q\mathbf{p}'$, т. е.

$$|n\rangle \equiv |N_{0\mathbf{p}_1} - 1, N_{0\mathbf{p}_2}, 1_{q \neq 0, \mathbf{p}}, N_{\mathbf{k}\rho} - 1, N_{\mathbf{k}'\rho'}\rangle;$$

на втором этапе излучается фотон $\mathbf{k}'\rho'$ и атом переходит в состояние $0\mathbf{p}_2$. Во втором случае на первом этапе атом переходит в электронно-возбужденное состояние $q\mathbf{p}'$ и излучается фотон $\mathbf{k}'\rho'$, что соответствует

$$|n\rangle \equiv |N_{0\mathbf{p}_1} - 1, N_{0\mathbf{p}_2}, 1_{q \neq 0, \mathbf{p}}, N_{\mathbf{k}\rho}, N_{\mathbf{k}'\rho'} + 1\rangle;$$

при этом на втором этапе поглощается фотон $\mathbf{k}\rho$ и атом переходит в состояние $0\rho_2$.

По поводу разности энергий в знаменателе выражения, определяющего матричный элемент V_{21} , заметим следующее. В первом случае эта разность равна

$$E_1 - E_n = (E_{q=0} - E_{q\neq 0} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}) + \varepsilon_{0\rho_1} - \varepsilon_{q\rho}.$$

В современных экспериментах по рэлеевскому рассеянию света в газах для увеличения интенсивности процесса рассеяния частота падающего света подстраивается довольно близко к частоте электронного перехода (см., например, [1]), так что дефект резонанса между энергией электронного возбуждения и энергией рассеиваемого фотона $|E_{q=0} - E_{q\neq 0} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}|$ становится малым по сравнению с энергией фотона $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$. Однако эта разность все еще остается много большей энергии движения атомов, что, собственно, и отличает явление рэлеевского рассеяния от резонансной флюоресценции. Поэтому при вычислении V_{21} вкладом энергии движения центра инерции атомов в величину E_n можно пренебречь. Во втором случае такое приближение тем более справедливо.

После этого возникающие при вычислении V_{21} суммы по квантовым числам \mathbf{p} промежуточного состояния ввиду полноты системы функций $\Phi_{q\rho}(\mathbf{r})$ сворачиваются:

$$\sum_{\mathbf{p}} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\rho_2, q\rho} (e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}})_{q\rho, 0\rho_1} = (e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\rho_2, 0\rho_1},$$

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

причем результат суммирования не зависит от электронного квантового числа промежуточного состояния q . В итоге находим

$$\begin{aligned} dw_{12} &\equiv dw(\mathbf{k}, \rho_1 \rightarrow \mathbf{k}', \rho_2) = \\ &= I_{\mathbf{k}\rho}(1 + N_{\mathbf{k}'\rho'})\chi Q_{\rho_1\rho_2}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) do'dw', \\ Q_{\rho_1\rho_2}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) &= |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\rho_2\rho_1}|^2 \times \\ &\times N_{\rho_1}(1 \pm N_{\rho_2})\delta\left(\Delta\omega + \frac{\varepsilon_{0\rho_2} - \varepsilon_{0\rho_1}}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $I_{\mathbf{k}\rho} = cN_{\mathbf{k}\rho}/V$ — плотность падающего потока фотонов, знак «+» относится к случаю ансамбля бозонов, «-» — к случаю фермионов, $\Delta\omega = \omega' - \omega$, χ — дифференциальное (в единицу телесного угла) сечение рассеяния света на покоящемся атоме (см. [17], (59.5)); все фигурирующие в формуле (7) значения квантовых чисел \mathbf{p} , описывающие движение центра инерции атома, относятся к основному электронному состоянию, что позволяет здесь и далее опустить обозначающий это состояние индекс 0. Множитель $(1 \pm N_{\rho})$ в выражении для коэффициента

$Q_{\rho_1\rho_2}$ в (7) отражает факт, уже отмечавшийся в работах [11, 12], — в случае бозонов наличие частиц в конечном состоянии усиливает переход, тогда как в случае фермионов наличие частицы в конечном состоянии делает переход невозможным. Отметим, что аналогичный коэффициент возникает и при рассеянии нейтронов на атомах (см. [19], с. 382, выражение (0.5)) и равен квадрату модуля фигурирующего в (0.5) матричного элемента после вычисления его с использованием представления вторичного квантования.

В случае упругого (когерентного) рассеяния состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ различаются только фотонными числами заполнения. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$\begin{aligned} dw_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) &\equiv dw_{12}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = \\ &= I_{\mathbf{k}\rho}(1 + N_{\mathbf{k}'\rho'})\chi G(\Delta\mathbf{k})\delta(\Delta\omega) do'dw', \\ G(\Delta\mathbf{k}) &= \left| \sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}\mathbf{p}} \right|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Просуммировав вероятность перехода (7) по всем значениям ρ_1 и ρ_2 начального и конечного состояний, получим вероятность dW_i неупругого перехода $\mathbf{k}, \omega \rightarrow \mathbf{k}', \omega' \neq \omega$:

$$dW_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \sum_{\rho_1, \rho_2; \rho_1 \neq \rho_2} dw(\mathbf{k}, \rho_1 \rightarrow \mathbf{k}', \rho_2). \quad (9)$$

Из выражений (7)–(9) видно, что полную вероятность перехода $\mathbf{k}, \omega \rightarrow \mathbf{k}', \omega'$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} dW(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) &= dw_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) + dW_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \\ &= I_{\mathbf{k}\rho}(1 + N_{\mathbf{k}'\rho'})\chi \times \\ &\times \sum_{\lambda, \lambda'} \left| \int d\mathbf{r} e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle \lambda | \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) | \lambda' \rangle \right|^2 \times \\ &\times \delta\left(\Delta\omega + \frac{E_{\lambda'}}{\hbar} - \frac{E_{\lambda}}{\hbar}\right) do'dw', \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$|\lambda\rangle = |N_{\rho_1}, N_{\rho_2}, \dots\rangle, \quad |\lambda'\rangle = |N'_{\rho_1}, N'_{\rho_2}, \dots\rangle.$$

После усреднения по распределению Гиббса выражение (10) отличается от (1) только множителями $I_{\mathbf{k}\rho}\chi$, определяющим полную интенсивность рассеяния, и $(1 + N_{\mathbf{k}'\rho'})$, ответственным за вынужденное рассеяние.

Вероятность неупругого перехода $dW_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})$ обычно представляют в виде суммы двух вероятностей

$$dW_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = dW_i^{sp}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) + dW_i^{ind}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}),$$

где $dW_i^{sp}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})$ — вероятность спонтанного перехода, характеризующая процесс рассеяния при $N_{\mathbf{k}'\rho'} = 0$, а

$$dW_i^{ind}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = N_{\mathbf{k}'\rho'} dW_i^{sp}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})$$

— вероятность вынужденного перехода, пропорциональная числу $N_{\mathbf{k}'\rho'}$ уже имеющихся в поле квантов $\mathbf{k}'\rho'$. Усредненную по распределению Гиббса вероятность спонтанного перехода $\langle dW_i^{sp}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \rangle$, как следует из формул (9) и (7), можно записать в виде

$$\langle dW_i^{sp}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \rangle = I_{\mathbf{k}\rho} \sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) d\omega' d\omega',$$

где $\sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})$ — дифференциальное (в единицу телесного угла и единичный интервал частот) сечение неупругого рэлеевского рассеяния света на системе N атомов,

$$\begin{aligned} \sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) &= \chi Q(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}), \\ Q(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2 \times \\ &\times \bar{N}_{\mathbf{p}_1} (1 \pm \bar{N}_{\mathbf{p}_2}) \delta\left(\Delta\omega + \frac{\varepsilon_{0\mathbf{p}_2} - \varepsilon_{0\mathbf{p}_1}}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{N}_{\mathbf{p}} = \langle N_{\mathbf{p}} \rangle$. В случае однородного газа, когда волновые функции, описывающие движение центра инерции частиц, являются плоскими волнами,

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar),$$

матричный элемент $(\exp[-i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}])_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}$ равен единице при $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \Delta\mathbf{k}$ и нулю в остальных случаях. При подстановке этих значений в формулу (11) получается та же спектральная зависимость интенсивности рассеяния, что и в работах [11, 12].

Число фотонов $N_{\mathbf{k}'\rho'}$ можно выразить через яркость пучка подсветки:

$$\begin{aligned} I' &= \int N_{\mathbf{k}'\rho'} c \frac{\omega'^2}{(2\pi c)^3} d\omega' d\omega_{\mathbf{k}'} = \int B'_{\mathbf{k}'\rho'} d\omega' d\omega_{\mathbf{k}'}, \quad (12) \\ N_{\mathbf{k}'\rho'} &= 2\pi\lambda'^2 B'_{\mathbf{k}'\rho'}. \end{aligned}$$

После этого вероятность вынужденного перехода записывается в виде

$$\langle dW_i^{ind}(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \rangle = I_{\mathbf{k}\rho} 2\pi\lambda'^2 B'_{\mathbf{k}'\rho'} \sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) d\omega' d\omega'.$$

Используя равенство

$$|(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}|^2 = |(e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2,$$

выполняющееся для неэрмитова оператора $\exp(-i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, из выражения (11) легко получить соотношение

$$Q(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = e^{-\beta\hbar\Delta\omega} Q(-\Delta\omega, -\Delta\mathbf{k}),$$

которое изменившимся знаком у $\Delta\mathbf{k}$ отличается от соотношения, следующего из принципа детального равновесия [7]. Если, однако, потенциал ловушки не зависит от вектора магнитного поля \mathbf{H} (а именно так обстоит дело при удержании атомов в обычно используемых магнитных ловушках, потенциал которых пропорционален $|\mathbf{H}|$, а не \mathbf{H} [20]), волновые функции, описывающие движение центра инерции атома, могут быть выбраны вещественными. В этом случае выполняется равенство

$$|(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}|^2 = |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2,$$

из которого следует соотношение

$$Q(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = e^{-\beta\hbar\Delta\omega} Q(-\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}),$$

совпадающее с формулой (118.4) из монографии [7].

В случае статистики Больцмана в (11) можно пренебречь величиной $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ по сравнению с единицей. Для проинтегрированного по частотам рассеянного фотона сечения неупругого рассеяния

$$\bar{\sigma}_i(\Delta\mathbf{k}) = \int \sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) d\omega'$$

в этом случае находим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i(\Delta\mathbf{k}) &= \chi \sum_{\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2} \bar{N}_{\mathbf{p}_1} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2 \equiv \\ &\equiv \chi \left[\sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \bar{N}_{\mathbf{p}_1} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\mathbf{p}} \bar{N}_{\mathbf{p}} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}\mathbf{p}}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая теперь очевидные соотношения

$$\sum_{\mathbf{p}_2} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}|^2 = 1, \quad \sum_{\mathbf{p}} \bar{N}_{\mathbf{p}} = N,$$

из этого выражения получаем

$$\bar{\sigma}_i(\Delta\mathbf{k}) = \chi \left[N - \sum_{\mathbf{p}} \bar{N}_{\mathbf{p}} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}\mathbf{p}}|^2 \right]. \quad (13)$$

Аналогично для сечения упругого рассеяния из соотношения (8) находим

$$\bar{\sigma}_e(\Delta\mathbf{k}) = \chi \left\langle \left| \sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{p}\mathbf{p}}|^2 \right|^2 \right\rangle. \quad (14)$$

В пределе больших частот $\chi = (e^2/m_e c^2)^2$ (см. [17], с. 255–256). В этом случае выражения (13) и (14) являются квантовым аналогом формул (80.6)

и (80.9), приведенных в монографии [21] для случая рассеяния на свободных электронах, и придают количественный смысл качественным соображениям, высказанным относительно упругого (когерентного) рассеяния в [21] и на с. 256–257 монографии [17].

При выполнении зависящего от угла рассеяния условия $\Delta k R \gg 1$, где $\Delta k = 2k \sin(\theta/2)$, θ — угол рассеяния, R — характерный линейный размер занимаемого газом объема (эффективный размер области локализации функций $\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$), диагональные матричные элементы оператора $\exp(-i\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ близки к нулю. В этом случае упругое рассеяние исчезает, а сечение неупругого рассеяния (13) становится равным

$$\bar{\sigma}_i(\Delta \mathbf{k}) = \chi N, \quad \Delta k R \gg 1,$$

т. е. пропорциональным полному числу частиц газа N . В противоположном предельном случае $\Delta k R \ll 1$ экспоненту можно заменить единицей. В этом случае исчезает неупругое рассеяние, а сечение упругого рассеяния равно

$$\bar{\sigma}_e(\Delta \mathbf{k}) = \chi N^2, \quad \Delta k R \ll 1,$$

т. е. пропорционально квадрату числа частиц.

В условиях эксперимента [1] по рассеянию света на атомах ^{23}Na , захваченных в параболическую ловушку, значения $k \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, $R \approx (3-5) \cdot 10^{-4} \text{ см}$. В итоге условие $\Delta k R \ll 1$ выполняется для очень малых углов рассеяния $\theta \ll 0.01$. Оценки показывают, что с ростом угла рассеяния вклад надконденсатной части газа в упругое рассеяние убывает гораздо быстрее, чем вклад конденсата, и в случае идеального газа можно написать

$$\bar{\sigma}_e(\Delta \mathbf{k}) = \chi N_0^2 e^{-2s^2},$$

$$s^2 = \frac{1}{4}(\Delta k_x^2 R_x^2 + \Delta k_y^2 R_y^2 + \Delta k_z^2 R_z^2),$$

где N_0 — число атомов конденсата, $R_i = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$, ω_i — частоты потенциала ловушки. При $N_0 = 10^7$ и $R = 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ сечение упругого рассеяния становится равным сечению неупругого рассеяния при $\theta \approx 0.1$ и с ростом угла рассеяния очень быстро убывает.

3. РАССЕЯНИЕ НА КОНДЕНСАТЕ ЗАХВАЧЕННОГО В ПАРАБОЛИЧЕСКУЮ ЛОВУШКУ ИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

В современных экспериментах по бозе-конденсации захваченных в ловушку газов потенциал ловушки с большой точностью имеет параболическую форму (см., например, [16]). В этом случае волновые

функции, описывающие движение центра инерции атомов, являются собственными функциями гамильтониана

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \sum_{i=1,2,3} m\omega_i^2 x_i^2,$$

где ω_i — частоты потенциала ловушки, и имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) &= \prod_{i=1,2,3} \psi_{n_i}(x_i), \\ \psi_{n_i}(x_i) &= (\pi^{1/2} 2^{n_i} n_i! R_i)^{-1/2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{x_i^2}{2R_i^2}\right) H_{n_i}\left(\frac{x_i}{R_i}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(n_1, n_2, n_3) =$$

$$= \hbar \left[\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3 + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \right],$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита, $R_i = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$.

Химический потенциал газа μ будем выражать в единицах температуры и отсчитывать его от величины $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\hbar/2$. В рассматриваемом случае $\mathbf{p} = \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \equiv (n_x, n_y, n_z)$ и распределение Бозе–Эйнштейна для заселенностей $\bar{N}_{\mathbf{p}} = \bar{N}_{n_1 n_2 n_3}$ принимает вид

$$\bar{N}_{n_1 n_2 n_3} = \left[e^{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3) - \mu} - 1 \right]^{-1}.$$

Будем считать, что подавляющее число атомов находится в конденсате. В этом случае основной вклад в сечение рассеяния (11) дают члены формирующей величину Q суммы с $\mathbf{p}_1 = 0$ (стоксовы компоненты) или с $\mathbf{p}_2 = 0$ (антистоксовы компоненты). Используя волновые функции (15), получаем

$$|(e^{-i\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})_{\mathbf{p}_2 0}|^2 = e^{-2s^2} \prod_{i=1,2,3} \frac{1}{n_i!} (2s_i^2)^{n_i},$$

$$\mathbf{n}_2 \neq 0, \quad s_i^2 = \Delta k_i^2 R_i^2 / 4.$$

В случае $s \ll 1$, что выполняется при очень малых углах рассеяния, эта величина мала. В переходной области $s \approx 1$ исследовать задачу аналитически не удастся. Однако в типичной экспериментальной ситуации уже при относительно малых углах рассеяния начинает выполняться условие $s_i \gg 1$.

Для стоксовых компонент имеем

$$\begin{aligned} Q_s(\Delta \omega) &= N_0 \sum_{n_x, n_y, n_z} (1 + \bar{N}_{\mathbf{n}}) \delta(\Delta \omega + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \\ &\times \prod_{i=x,y,z} \left[\frac{1}{n_i!} (2s_i^2)^{n_i} \exp(-2s_i^2) \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

При больших значениях s_i основной вклад в эту сумму дают большие значения n_i . Поэтому можно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_i!} (2s_i^2)^{n_i} \exp(-2s_i^2) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_i}} \exp(-n_i \ln n_i + n_i + n_i \ln(2s_i^2) - 2s_i^2) \end{aligned}$$

и разложить показатель экспоненты в окрестности его максимума, который достигается при $n_i = 2s_i^2$:

$$-n_i \ln n_i + n_i + n_i \ln(2s_i^2) - 2s_i^2 \approx -\frac{(n_i - 2s_i^2)^2}{4s_i^2}.$$

При этом надо учесть, что функции $\bar{N}_{\mathbf{n}}$ и $\sqrt{n_i}$ являются гладкими функциями по сравнению с быстро меняющимися экспонентами, и вынести их из-под знака суммы в точках максимума. Положив также $\mu = 0$, получаем

$$\begin{aligned} Q_s(\Delta\omega) &= I_s F(\Delta\omega), \\ I_s &= N_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{T}\right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F(\Delta\omega) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n_x, n_y, n_z} \delta(\Delta\omega + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \\ & \times \prod_{i=x,y,z} \left[\frac{1}{s_i} \exp\left(-\frac{(n_i - 2s_i^2)^2}{4s_i^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\Omega = 2 \sum_{i=x,y,z} \omega_i s_i^2 = \frac{\hbar\Delta k^2}{2m}$$

— сдвиг отдачи. При вычислении полной интенсивности можно перейти от суммирования по n к интегрированию, после чего получаем $\int F(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = 1$. Аналогично для антистоксовой компоненты находим

$$\begin{aligned} Q_A(\Delta\omega) &= I_A F(-\Delta\omega), \\ I_A &= N_0 \left[\exp\frac{\hbar\Omega}{T} - 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Контур линии рассеяния (16) имеет вид суперпозиции монохроматических компонент с гауссовой огибающей, центр которой сдвинут в красную сторону относительно частоты падающего света на величину сдвига отдачи, а эффективная ширина по порядку величины равна

$$\sum_{i=1,2,3} s_i \omega_i \approx \sqrt{\omega\Omega}.$$

По этому поводу необходимо сделать следующее замечание.

Закон сохранения энергии в формуле (6) показывает, что спектральная плотность перехода, т. е. коэффициент перед дифференциалом $d\omega'$ в выражении для $d\omega_{12}$, содержит δ -функцию вида

$$\delta[\omega' - \omega + (\varepsilon_{0\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{0\mathbf{p}_2})/\hbar].$$

Ее появление связано с предположением о том, что энергии поступательного движения частиц в начальном и конечном состояниях являются точно определенными величинами. В этом случае частота рассеянного кванта ω' также является определенной величиной. Однако такое предположение оправдано лишь в случае рассеяния на изолированном атоме. Атом, находящийся в ансамбле частиц, испытывает столкновения, сопровождающиеся изменением энергии поступательного движения, что приводит к появлению ширины уровней начального и конечного состояний.

Результативно это приводит в (6) и, соответственно, в (16) к заменам

$$\begin{aligned} \delta(E_1 - E_2) &\rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\hbar} \frac{\gamma/\pi}{\left(\omega' - \omega + \frac{\varepsilon_{0\mathbf{p}_2} - \varepsilon_{0\mathbf{p}_1}}{\hbar}\right)^2 + \gamma^2}, \\ \delta(\Delta\omega + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) &\rightarrow \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + \gamma^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где γ — ширина линии перехода $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$.

По поводу ширины γ линии перехода $0 \rightarrow \mathbf{n}$ заметим следующее. В условиях, когда подавляющее число частиц находится в конденсате, частицы конденсата фактически сталкиваются только друг с другом. Частота таких столкновений мала, поскольку мала скорость конденсатных частиц. Скорость надконденсатных частиц v , соответствующих значениям $n_{0i} = 2s_i^2$, по порядку величины равна $v \approx \hbar\Delta k/m$. Умножив эту величину на сечение столкновений πa^2 , где a — длина рассеяния, и на плотность частиц в конденсате N_0/R^3 , получим скорость распада конечного состояния, которая определяет ширину линии

$$\gamma \approx \frac{\pi}{2} \omega N_0 \left(\frac{a}{R}\right)^2 (\Delta k R). \quad (19)$$

В условиях эксперимента [1] $\omega \approx 100 \text{ с}^{-1}$, $N_0 \approx 2 \cdot 10^6$, $a/R \approx 10^{-3}$ (длина рассеяния в случае используемых в [1] атомов натрия $a \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}$), $\Delta k R \approx 30$. Подставляя эти значения в формулу (19), получаем

значение $\gamma \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$, которое хорошо согласуется с измеренной в работе [1] величиной.

С помощью волновых функций (15) можно, как известно, описывать конденсат лишь до тех пор, пока выполняется условие $Na/R < 1$, ограничивающее полное число частиц газа (см., например, [16]). В реально используемых ловушках это условие ограничивает число N частиц значениями порядка 10^4 – 10^5 . Однако при $N = 10^5$ ширина γ может уже значительно превышать частоту ω . Это означает, что возможны три предельные ситуации. При малых N выполняется условие $\gamma \ll \omega$. В этом случае контур линии рассеяния (16) имеет вид хорошо разрешенных лоренцевых контуров с гауссовой огибающей, центр которой сдвинут в красную сторону относительно частоты падающего света на величину сдвига отдачи, а эффективная ширина по порядку величины равна $\sqrt{\omega\Omega}$ (в условиях [1] сдвиг отдачи Ω порядка 10^5 с^{-1}). В промежуточном случае $\omega < \gamma \ll \sqrt{\omega\Omega}$ в формуле (16) можно перейти от суммирования по n к интегрированию, что дает

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma} \exp\left(-\frac{(\Delta\omega + \Omega)^2}{\Gamma^2}\right), \quad (20)$$

$$\Gamma^2 = \frac{\hbar(\omega_x \Delta k_x^2 + \omega_y \Delta k_y^2 + \omega_z \Delta k_z^2)}{m}.$$

Наконец, при $\gamma \gg \sqrt{\omega\Omega}$ форма линии принимает вид лоренцева контура,

$$F(\Delta\omega) = \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega + \Omega)^2 + \gamma^2},$$

с шириной, определяемой только временем жизни верхнего уровня.

Нетрудно проверить, что выражение (16) остается справедливым и в том случае, когда одна из компонент вектора $\Delta\mathbf{k}$ равна нулю. В результате можно утверждать, что условие применимости выражения (16) имеет вид $s^2 = (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) \gg 1$.

Объединяя соотношения (16) и (17), можно окончательно написать:

$$Q(\Delta\omega) = I_s F(\Delta\omega) + I_A F(-\Delta\omega), \quad (21)$$

$$\frac{I_s}{I_A} = \exp \frac{\hbar\Omega}{T}.$$

4. РАССЕЯНИЕ НА КОНДЕНСАТЕ ЗАХВАЧЕННОГО В ПАРАБОЛИЧЕСКУЮ ЛОВУШКУ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА БОЗОНОВ

При температуре более низкой, чем температура вырождения, и при выполнении условия

$\beta = aN/R \geq 1$ в поведении захваченного в ловушку бозе-газа может серьезно проявляться влияние межатомных взаимодействий [16]. Это в первую очередь относится к изменению под влиянием межатомных взаимодействий волновой функции конденсата, которая при $\beta \geq 1$ уже существенно отличается от волновой функции идеального газа. Условие $\beta \geq 1$ выполняется практически во всех экспериментах с конденсатами бозе-газов. В этом случае волновая функция частиц конденсата Ψ определяется решением уравнения Гросса–Питаевского [14–16]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + (V(\mathbf{r}) + g|\Psi|^2)\Psi = \mu\Psi, \quad (22)$$

$$g = N_0 \frac{4\pi\hbar^2 a}{m},$$

в котором химический потенциал μ определяется условием нормировки

$$\int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1$$

(при такой нормировке волновая функция Ψ отличается от обычно используемой волновой функции конденсата множителем $\sqrt{N_0}$). Строго говоря, уравнение (22) становится применимым, когда подавляющее число частиц находится в конденсате: $N - N_0 \ll N$, что, однако, с хорошей точностью начинает выполняться уже при температуре, всего в два раза меньшей температуры вырождения, и достигается практически во всех экспериментах.

В случае, когда β порядка единицы, решение уравнения (22) можно найти только численными методами. Однако в большинстве экспериментов выполняется условие $\beta \gg 1$ (например, в экспериментах [1, 3] по рэлеевскому рассеянию света на конденсате атомов натрия $\beta \approx 10^3$ – 10^4). В этом случае в уравнении (22) можно пренебречь членом с лапласианом (квантовым давлением) [16], после чего волновая функция частиц в основном состоянии принимает вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{g} (\mu - V(\mathbf{r})) \right]^{1/2}, \quad (23)$$

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2,3} \frac{m\omega_i^2 x_i^2}{2},$$

в области $\mu - V(\mathbf{r}) > 0$ и $\Psi(\mathbf{r}) = 0$ вне этой области. Химический потенциал определяется условием нормировки и равен

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{R} \right)^{2/5}, \quad \bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}, \quad (24)$$

$$R = \left(\frac{\hbar}{m\bar{\omega}} \right)^{1/2}.$$

Для вычисления ответственного за рассеяние на конденсате матричного элемента $(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}}$ необходимо знать также волновые функции возбужденных состояний. Вопрос о влиянии взаимодействия частиц на эти состояния подробно не изучен. Однако ясно, что это влияние уменьшается с увеличением энергии возбуждения, т. е. при больших значениях n_i можно использовать волновые функции идеального газа (15). Более того, при больших n_i вместо точных функций (15) можно использовать квазиклассическое приближение, что значительно упрощает вычисления.

В квазиклассическом приближении вместо функций (15) имеем

$$\psi_{n_i}(x_i) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{(x_{0i}^2 - x_i^2)^{1/4}} \cos \left[(2n_i + 1) \times \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x_i}{x_{0i}} + \frac{1}{2} \frac{x_i}{x_{0i}} \sqrt{1 - \frac{x_i^2}{x_{0i}^2}} \right) - \frac{\pi n_i}{4} \right], \quad (25)$$

где $x_{0i} = R_i \sqrt{2n_i + 1}$ — классическая точка поворота. Условием применимости функций (25) в качестве волновых функций возбужденных состояний является значительная удаленность точки поворота x_{0i} от точки поворота волновой функции конденсата (на вопросе о выполнении этого условия в экспериментальной ситуации мы остановимся ниже). Поэтому при вычислении матричного элемента $(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}}$ вклад в интеграл дают значения $|x_i| \ll x_{0i}$, и вместо (25) можно написать

$$\psi_{n_i}(x_i) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{(2n_i + 1)^{1/4} R_i^{1/2}} \times \cos \left[\sqrt{2n_i + 1} \frac{x_i}{R_i} - \frac{\pi n_i}{2} \right]. \quad (26)$$

Используя формулы (23) и (26) и выполняя при интегрировании замену $x_i/R_i = y_i$, получаем

$$(e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}} = B \int \sqrt{\mu - \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1,2,3} \omega_i^2 y_i^2} \times \left[\prod_{i=1,2,3} e^{-i\Delta k_i R_i y_i} \cos \left(\sqrt{2n_i + 1} y_i - \frac{\pi n_i}{2} \right) \right] dy_1 dy_2 dy_3, \\ B = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} g^{-1/2} \left[\prod_{i=1,2,3} \frac{R_i^{1/2}}{(2n_i + 1)^{1/4}} \right],$$

где интегрирование выполняется по области, на границе которой стоящее под знаком квадратного кор-

ня выражение обращается в нуль. Надлежащим выбором направления координатных осей всегда можно добиться, чтобы проекции Δk_i , а вместе с ними и значения $\Delta k_i R_i = 2s_i \gg 1$ были положительными величинами. В этом случае из двух осциллирующих экспоненциальных слагаемых, формирующих косинус, только слагаемое с положительной частотой $\exp(\sqrt{2n_i + 1} y_i)/2$ вносит заметный вклад в результат. При этом максимум матричного элемента достигается при значениях n_i , равных

$$n_i = n_{0i} = \frac{4s_i^2 - 1}{2} \approx 2s_i^2,$$

при которых показатель стоящей под интегралом экспоненты обращается в нуль. Разлагая показатель экспоненты в окрестности этого значения:

$$2s_i - \sqrt{2n_i + 1} \approx -\frac{n_i - n_{0i}}{2s_i},$$

выполняя замену переменных $y_i = \sqrt{2\mu/\hbar}(x_i/\omega_i)$ и переходя к обозначениям $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x, y, z$, получаем

$$(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{\mu^2}{\hbar^{3/2} g^{1/2}} \times (\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z)^{-1/2} \bar{\omega}^{-3/2} \varphi(q), \quad (27) \\ \varphi(q) = \int_{r < 1} \sqrt{1 - r^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \\ q_i = \sqrt{\frac{\mu}{\hbar\Omega_i}} (n_i - n_{0i}), \quad \Omega_i = \frac{\hbar\Delta k_i^2}{2m}, \\ \Omega_x + \Omega_y + \Omega_z = \Omega.$$

Теперь можно уточнить условия применимости волновых функций возбужденных состояний (26), использованных для получения результата (27). Главный вклад в описывающий процесс рассеяния матричный элемент (27) дают значения n_i , близкие к $n_{0i} = 2s_i^2$. Соответствующая этим значениям точка поворота $x_{0i} \approx 2R_i s_i$ находится далеко от точки поворота волновой функции конденсата при выполнении условия $2R_i s_i \gg \omega_i^{-1} \sqrt{2\mu/m}$, что эквивалентно условию $\sqrt{\mu/\hbar\Omega_i} \ll 1$. Другой, видимо более правильный, критерий получается из требования, чтобы энергия возбужденных состояний, формирующих матричный элемент (27), значительно превышала химический потенциал, $\hbar\omega_i n_{0i} \gg \mu$, и является менее жестким:

$$\mu/\hbar\Omega_i \ll 1. \quad (28)$$

С наименьшим запасом этот критерий выполняется для получаемого в работах [1, 3] конденсата с атомами натрия, на котором было выполнено исследование рэлеевского рассеяния. В этих работах в газе содержится большое число частиц $N \sim 10^6 - 10^7$,

так что химический потенциал газа $\mu \approx 25\hbar\omega$ при $N = 10^6$ и $\mu \approx 50\hbar\omega$ при $N = 10^7$ (длина рассеяния $a \approx 3 \cdot 10^{-7}$ см, $R \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см, $\omega \approx 200$ с $^{-1}$). Сдвиг отдачи в этом случае порядка 10^5 с $^{-1}$, так что параметр $\mu/\hbar\Omega_i \sim 5 \cdot 10^{-2} - 10^{-1}$.

Для стоковой компоненты рассеяния на конденсате из формулы (11) с учетом (18) имеем

$$Q_s(\omega') = N_0 \sum_{\mathbf{n}} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}}|^2 (1 + \bar{N}_{\mathbf{n}}) \times \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega + \omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)^2 + \gamma^2}. \quad (29)$$

Оценим разброс значений $\Delta n_i = n_i - n_{0i}$, при которых матричный элемент $(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}}$ убывает на порядок своей величины. Как видно из формулы (27), зависимость этого матричного элемента от \mathbf{n} определяется функцией $\varphi(q)$. Эта функция имеет максимум при $q = 0$ и убывает на порядок своей величины при значениях q порядка единицы, т. е. при $|\Delta n_i| \leq \sqrt{\hbar\Omega_i/\mu}$. Как видно из условия (28), эта величина много больше единицы, однако она остается много меньшей значения n_{0i} , при котором матричный элемент $(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{0\mathbf{n}}$ имеет максимум,

$$\frac{|\Delta n_i|}{n_{0i}} \leq \frac{\sqrt{\hbar\Omega_i/\mu}}{2s_i^2} = \sqrt{\frac{2\omega_i^2}{\Omega_i \bar{\omega}} \left(\frac{15aN_0}{R}\right)^{-1/5}} \ll 1.$$

Такая зависимость матричного элемента от \mathbf{n} позволяет при вычислении суммы в выражении (29) вынести из-под знака суммирования по \mathbf{n} гладкую функцию $1 + \bar{N}_{\mathbf{n}}$, положив $\bar{N}_{\mathbf{n}} \approx \bar{N}_{\mathbf{n}_0}$, и перейти от суммирования по \mathbf{n} к суммированию по $\Delta\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n}_0$ в бесконечных пределах. Учитывая также, что для функции $\varphi(q)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta\mathbf{n}} |\varphi(q)|^2 &\approx \int |\varphi(q)|^2 d(\Delta\mathbf{n}) = \\ &= \int \left| \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sqrt{1-r^2} d\mathbf{r} \right|^2 d(\Delta\mathbf{n}) = \\ &= \frac{64\pi^4}{15} \left(\frac{\hbar^3 \Omega_x \Omega_y \Omega_z}{\mu^3} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

получаем

$$Q_s(\omega') = I_s G(\Delta\omega').$$

Здесь частота $\Delta\omega'$ отсчитывается от сдвига отдачи $\Delta\omega' = \Delta\omega + \Omega$, $G(\Delta\omega')$ — нормированный на единицу контур линии рассеяния:

$$G(\Delta\omega') = \frac{15}{64\pi^4} \frac{\mu^{3/2}}{\hbar^{3/2}(\Omega_x \Omega_y \Omega_z)^{1/2}} \eta(\Delta\omega'), \quad (30)$$

$$\eta(\Delta\omega') = \sum_{\Delta\mathbf{n}} |\varphi(q)|^2 \times \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega' + \omega_x \Delta n_x + \omega_y \Delta n_y + \omega_z \Delta n_z)^2 + \gamma^2}. \quad (31)$$

При малых γ этот контур имеет вид суперпозиции хорошо разрешенных лоренцевых контуров с огибающей, определяемой функцией $|\varphi(q)|^2$. Центр огибающей смещен в красную сторону на величину сдвига отдачи, а ее ширина порядка

$$\sqrt{\hbar/\mu} \sum_{i=x,y,z} \omega_i \sqrt{\Omega_i}.$$

С увеличением γ при достижении условия $\omega < \gamma \ll \omega \sqrt{\hbar\Omega/\mu}$ в формуле (31) можно перейти от суммирования по $\Delta\mathbf{n}$ к интегрированию, заменяя при этом лоренцев контур δ -функцией. Выполняя интегрирование и подставляя этот результат в формулу (30), для контура линии рэлеевского рассеяния получаем

$$G(\Delta\omega') = \frac{15}{32\pi^3} \frac{1}{\Gamma} \int_{|\Delta\omega'|/\Gamma}^{\infty} |\varphi(q)|^2 q dq, \quad (32)$$

$$\Gamma^2 = \frac{\hbar}{\mu} (\omega_x^2 \Omega_x + \omega_y^2 \Omega_y + \omega_z^2 \Omega_z).$$

Контур рассеяния (32) смещен на величину сдвига отдачи и при больших значениях $\Delta\omega'$ убывает как $(5/8)\Gamma^2 |\Delta\omega'|^{-3}$. Его характерная ширина Γ примерно в $\sqrt{\hbar\omega/\mu}$ раз меньше, чем в случае идеального газа, и с ростом числа частиц это отношение пропорционально $N^{-1/5}$, т. е. очень медленно убывает.

Наконец, в случае $\gamma \gg \Gamma$ (этот случай реализуется в работах [1, 3]) контур линии принимает лоренцеву форму:

$$G(\Delta\omega') = \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega')^2 + \gamma^2}.$$

Естественно, полный контур линии определяется формулой (21) с заменой $F(\Delta\omega) \rightarrow G(\Delta\omega)$.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО СКОРОСТЯМ АТОМОВ ОТДАЧИ

Каждый акт спонтанного рассеяния фотона $\omega, \mathbf{k} \rightarrow \omega', \mathbf{k}'$ на конденсате захваченного в ловушку газа сопровождается переходом одного из атомов из основного состояния в возбужденное $0 \rightarrow \mathbf{n} = (n_x n_y n_z)$, причем, как было видно из предыдущего рассмотрения, \mathbf{n} близко к значению

$n_{0i} \approx \Delta k_i^2 R_i^2 / 2$. Поскольку распределение вектора \mathbf{k}' по углам практически изотропно, проекции вектора \mathbf{n} также пробегает практически все значения в области $|n_i| < 2k^2 R^2$. Иначе обстоит дело в том случае, когда одновременно с потоком рассеиваемого излучения I газ подвергается дополнительному облучению пучком подсветки I' , причем оба пучка имеют узкое спектральное и угловое распределения, как это реализовано в эксперименте [1]. В этом случае в выражении (7) главной становится часть, пропорциональная $N_{\mathbf{k}'\rho'}$, т. е. начинает преобладать процесс вынужденного рассеяния, при котором направление вектора рассеянного фотона \mathbf{k}' задается направлением пучка подсветки. Интенсивность рассеяния в этом случае имеет резкий максимум в направлении распространения пучка подсветки \mathbf{k}' и квантовые числа \mathbf{n} сосредоточены в узкой окрестности значения $n_{0i} = \Delta k_i^2 R_i^2 / 2$, что соответствует образованию весьма монохроматического по скоростям пучка атомов отдачи. Исследуем интенсивность и степень монохроматичности такого пучка.

Для этого выразим интенсивность пучка

$$I = \int B_{\mathbf{k}\rho} d\mathbf{k} d\omega$$

аналогично (12) через его яркость и пренебрежем в (7) единицей по сравнению с $N_{\mathbf{k}'\rho'}$. Используя выражения (7) и (12), находим

$$\begin{aligned} w(0 \rightarrow \mathbf{n}) &= \int dw(0, \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{n}, \mathbf{k}') d\mathbf{k} d\omega = \\ &= \chi N_0(1+N_{\mathbf{n}}) \int B_{\mathbf{k}\rho} 2\pi\lambda'^2 B'_{\mathbf{k}'\rho'} |(e^{-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})_{\mathbf{n}0}|^2 \times \\ &\times \frac{\gamma/\pi}{(\omega' - \omega + \Omega + \Delta\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + \gamma^2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega', \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\Delta n_i = n_i - n_{0i}, \quad n_{0i} = 2s_i^2 = \frac{\Delta k_i R_i^2}{2}.$$

Далее мы сделаем следующие допущения, которые с хорошим запасом выполняются в эксперименте [1]. Будем считать, что число частиц газа относительно велико, $Na/R \gg 1$, и для волновой функции основного состояния применимо выражение (23). Будем считать также, что выполняется условие (28) и для значения матричного элемента перехода можно использовать соотношение (27). Наконец, константа затухания γ достаточно велика, так что она много больше ширины спектров пучков B и B' , а также величин $\Delta n_i \omega_i$, значения которых, как видно из (27), ограничены условием

$$\Delta n_i \omega_i \leq \omega_i (\hbar\Omega_i/\mu)^{1/2}.$$

Используя эти ограничения, выполняем интегрирование в формуле (33) и находим

$$w(0 \rightarrow \mathbf{n}) = N_0(1 + N_{\mathbf{n}})S(\Delta\omega)A(\Delta\mathbf{n}). \quad (34)$$

Функция $S(\Delta\omega)$ характеризует зависимость вероятности перехода от интенсивностей и разности частот $\Delta\omega = \omega'_0 - \omega_0$ условных «центральных частот» лазерных пучков ω_0 и ω'_0 соответственно:

$$S(\Delta\omega) = 2\pi\lambda^2 \chi I I' \frac{\gamma/\pi}{(\Delta\omega + \Omega)^2 + \gamma^2},$$

тогда как нормированная на единицу функция $A(\Delta\mathbf{n})$ отражает зависимость вероятности перехода от \mathbf{n} :

$$A(\Delta\mathbf{n}) = \frac{\mu^4}{\pi^3 \hbar^3 g} (\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z)^{-1} \bar{\omega}^{-3} |\varphi(\mathbf{q})|^2,$$

$$q_i = \sqrt{\frac{\mu}{\hbar\Omega_i}} (n_i - n_{0i}), \quad \int A(\Delta\mathbf{n}) d\Delta\mathbf{n} = 1.$$

Используя формулу (34) и вероятность обратного процесса $w(\mathbf{n} \rightarrow 0)$, которая получается из (34) заменой $N_0(1 + N_{\mathbf{n}}) \rightarrow N_{\mathbf{n}}(1 + N_0)$, можно написать уравнение для скорости заселения уровня \mathbf{n} :

$$\dot{N}_{\mathbf{n}} = -\gamma(N_{\mathbf{n}} - \bar{N}_{\mathbf{n}}) + AS(N_0 - N_{\mathbf{n}}). \quad (35)$$

В стационарных условиях, полагая $\dot{N}_{\mathbf{n}} = 0$, из уравнения (35) находим

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{\gamma}{\gamma + AS} \bar{N}_{\mathbf{n}} + \frac{AS}{\gamma + AS} N_0.$$

Из этого соотношения видно, что наиболее узкое распределение $N_{\mathbf{n}}$ получается при выполнении условия

$$AS/\gamma \ll 1, \quad (36)$$

которое одновременно обеспечивает малость обеднения конденсата процессом вынужденного рассеяния. Считая это условие выполненным и полагая $\bar{N}_{\mathbf{n}} = 0$, получаем

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{N_0}{\gamma} S(\Delta\omega)A(\Delta\mathbf{n}). \quad (37)$$

Перейдем теперь от распределения по \mathbf{n} к распределению по скоростям атомов \mathbf{v} . В связи с этим заметим, прежде всего, следующее. В использованной нами волновой функции (26) состояния n_i в равной степени представлены частицы, движущиеся с абсолютным значением скорости $|v_i| = (2\hbar\omega_i n_i/m)^{1/2}$ как

в положительном, так и в отрицательном направлении оси i , тогда как накачка осуществляется лишь в одном из этих направлений — положительном, если $\Delta k_i < 0$, и отрицательном в противоположном случае. Это связано с тем обстоятельством, что две формирующие квазиклассическую волновую функцию экспоненты, описывающие движение атома в положительном и отрицательном направлениях соответствующей оси, должны быть сшиты в точке поворота, чем собственно и объясняется, почему волновая функция имеет вид косинуса. В рассматриваемом случае, когда $\gamma \gg \omega$, атом, волновая функция которого в области конденсата считалась равной (26), вообще не долетает до точки поворота, переходя из-за столкновений на другие уровни. В этом смысле в рассматриваемых условиях было бы более правильно вместо волновой функции (26) использовать две составляющие косинус экспоненты как две разные волновые функции. Это, впрочем, не влияет на результат, поскольку в матричный элемент (27) дает вклад только одна из двух составляющих косинус экспонент, откуда видно, что распределение (37) соответствует скоростям, направленным вдоль вектора $\Delta \mathbf{k}$, т. е.

$$v_i = -\frac{\Delta k_i}{|\Delta k_i|} \left(\frac{2\hbar\omega_i n_i}{m} \right)^{1/2}.$$

Используя это соотношение, можно в формуле (37) перейти от распределения по \mathbf{n} к распределению по скоростям \mathbf{v} . Учитывая также, что функция $|\varphi(q)|$ имеет узкий максимум в окрестности

$$v_{0i} = -\frac{\Delta k_i}{|\Delta k_i|} \left(\frac{2\hbar\omega_i n_{0i}}{m} \right)^{1/2} = -\frac{\hbar}{m} \Delta k_i,$$

получаем

$$N(\mathbf{v}) = (N_0/\gamma)S(\Delta\omega)L(\mathbf{v}),$$

где $L(\mathbf{v})$ — нормированная на единицу функция распределения по скоростям атомов отдачи,

$$L(\mathbf{v}) = \frac{\mu^4}{\pi^3 \omega^6 \hbar^3 g} |\varphi(q)|^2, \quad (38)$$

$$q_i = \frac{\sqrt{2\mu m}}{\hbar\omega_i} (v_i - v_{0i}), \quad i = x, y, z.$$

Функция $|\varphi(q)|$, как уже отмечалось, имеет максимум при $q = 0$ и уменьшается на порядок своей величины при $q \approx 1$. Из этого следует, что характерная ширина Δv_i распределения (38) порядка $\Delta v_i \approx \hbar\omega_i/2\mu m$, а относительная ширина $\Delta v_i/|v_{0i}|$ порядка

$$\frac{\Delta v_i}{|v_{0i}|} \approx \left(\frac{\hbar\omega_i^2}{4\mu\Omega_i} \right)^{1/2}.$$

В условиях работы [1] эта относительная ширина составляет величину порядка $3 \cdot 10^{-3}$, а $v_{0i} \approx 3$ см/с.

Умножив характерную ширину Δv распределения (38) на Δk , можно убедиться, что с точностью до численного коэффициента это произведение совпадает с шириной линии рассеяния (32). Это означает, что, как и следовало ожидать, при малых γ ширина линии рассеяния связана с эффектом Доплера, возникающим из-за скоростного распределения атомов отдачи.

Функция распределения (38) получена в предположении, что вероятность (34) индуцированного рассеяния фотона много больше вероятности спонтанного рассеяния w_{sp} . Оценим, при каких значениях плотности мощности поля подсветки это начинает выполняться. Пренебрегая в соотношении (11) относительно слабой зависимостью величины χ от угла и величиной N_n по сравнению с единицей, для вероятности спонтанного рассеяния находим

$$w_{sp} = N_0 I \int \sigma_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) d\omega' d\omega'' = 4\pi\chi N_0 I.$$

Полная вероятность индуцированного перехода w_{ind} получается суммированием парциальной вероятности (34) по всем конечным состояниям \mathbf{n} . Полагая $\Delta\omega = -\Omega$, получаем

$$w_{ind} = \sum_{\mathbf{n}} dw(0 \rightarrow \mathbf{n}, \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = N_0 \chi I \frac{2\lambda'^2}{\gamma} I'.$$

Отношение этих величин равно

$$w_{ind}/w_{sp} = \lambda'^2 I' / 2\pi\gamma$$

и при плотности мощности подсветки $I_{\mathbf{k}'\rho'} = 0.1$ мВт/см² (соответствующей минимальному значению в работе [1]) и $\gamma = 10^4$ примерно равно 50. Нетрудно проверить, что при этих значениях мощности подсветки, параметра релаксации и используемой в работе [1] мощности задающего излучения $I = 5$ мВт/см² условие (36) также выполняется с хорошим запасом.

В этих оценках не учтено, однако, еще одно важное обстоятельство. При решении уравнения (35) мы полагали, что значения N_0 , \bar{N}_n и γ являются заданными величинами, т. е. температура газа в процессе рассеяния поддерживается постоянной. Во всех известных нам работах, в том числе в работах [1–4], сначала завершается процедура охлаждения газа и уже после этого удерживаемый ловушкой газ взаимодействует с лазерным полем. При рассеянии фотона атом выбрасывается из конденсата, получая

энергию отдачи, которая после этого передается другим частицам газа, т. е. греет газ. В условиях работы [1] энергия отдачи примерно в 1000 раз превышает энергию возбуждения $\hbar\bar{\omega}$. Поэтому для применимости распределения (38) число рассеянных за время импульса лазерного света фотонов N_{ph} должно быть по меньшей мере в 1000 раз меньше числа атомов конденсата, которое в условиях работ [1, 3] было примерно равно 10^7 . Оценки показывают, что при используемых в эксперименте [1] плотностях мощностей и отстройке частот лазерных полей от частоты электронного перехода число фотонов $N_{ph} \geq 4 \cdot 10^7$, так что предположение о постоянстве температуры газа заведомо не выполняется. Увеличив, однако, отстройку от резонанса (плотность мощности лазерного излучения ограничена снизу требованием преобладания процесса вынужденного рассеяния над спонтанным), можно добиться условий, когда $N_{ph} = 10^4$. Полное число атомов отдачи N_r связано с числом рассеянных фотонов соотношением $N_r = N_{ph}/\gamma\tau$, где τ — длительность лазерного импульса. При $\gamma\tau = 10$ (в условиях [1] $\gamma \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$, $\tau \approx 10^{-3} \text{ с}$) в пучке отдачи оказывается 1000 атомов, что делает этот пучок вполне доступным для исследования.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе выражения для вероятности перехода (7) и сечения рэлеевского рассеяния (11) позволили исследовать характеристики рассеяния на бозе-конденсате захваченного в параболическую ловушку газа и найти распределение по скоростям в пучке атомов отдачи, образуемом при вынужденном рассеянии. Основные результаты этого исследования состоят в следующем.

1. Как в случае идеального, так и в случае слабонеидеального газа при всех значениях параметра релаксации γ центр линии стоксовой компоненты рассеяния смещен на величину сдвига отдачи в красную сторону относительно частоты падающего света, а в случае антистоксовой компоненты — соответственно в синюю. В условиях эксперимента [1], в котором наблюдалось рэлеевское рассеяние на конденсате атомов ^{23}Na , угол рассеяния составлял 135° и максимум интенсивности рассеянного света наблюдался на частоте, смещенной в красную сторону на 91 кГц относительно частоты падающего света ($\lambda = 0.59 \text{ мкм}$). В этом случае $\Delta k \approx 1.96 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ и сдвиг отдачи равен $\Omega = \hbar\Delta k^2/2m \approx 84 \text{ кГц}$, что находится в удовлетворительном согласии с наблюдаемой вели-

чиной. Ширина линии рассеяния при относительно небольшом числе частиц в конденсате определяется параметрами ловушки в случае идеального газа (20) и параметрами ловушки и химическим потенциалом в случае слабонеидеального газа (32). С ростом числа частиц в конденсате начинает преобладать однородное уширение и линия рассеяния принимает лоренцеву форму с шириной, равной параметру релаксации γ , определяемому выражением (19). В условиях эксперимента [1] определяемый этим выражением параметр $\gamma \sim 10^4 \text{ с}^{-1}$, что находится в хорошем согласии с наблюдаемой величиной. Результаты выполненного в работе [9] численного исследования подтверждают вывод о том, что стоксова компонента смещена на величину сдвига отдачи. При выбранных в работе [9] исходных параметрах среды огибающая линии рассеяния должна определяться выражением (32). Выполнить сравнение, однако, затруднительно, поскольку восстановить огибающую спектра рассеяния по приведенным в работе [9] результатам численного счета не представляется возможным.

2. Отношение интенсивностей стоксовой и антистоксовой компонент рассеяния (выражения (16) и (17)) зависит от температуры и сдвига отдачи $I_s/I_A = \exp(\hbar\Omega/T)$. Вопрос о температуре конденсации T_0 газа взаимодействующих бозонов в настоящее время мало изучен. Есть основания, однако, полагать, что эта температура не сильно отличается от температуры конденсации идеального газа $T_0 \approx \hbar\bar{\omega}N^{1/3}$. При $\bar{\omega} \approx 200 \text{ с}^{-1}$, $N \approx 2 \cdot 10^7$ [1] и угле рассеяния $\theta \leq 45^\circ$ отношение $\hbar\Omega/T$ становится порядка единицы, и экспериментальное сравнение интенсивностей стоксовой и антистоксовой компонент рассеяния позволяет определить температуру газа и исследовать зависимость температуры конденсации от числа частиц.

3. При вынужденном рассеянии света на конденсате образуется пучок атомов отдачи с характерной скоростью порядка нескольких сантиметров в секунду и относительной шириной распределения скоростей $\Delta v/v \sim 10^{-3}$. Экспериментальное исследование этого распределения позволяет определить число частиц в конденсате, химический потенциал газа и время релаксации скорости надконденсатных частиц газа.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-02-17457).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn et al., *Science* **285**, 571 (1999).
2. M. Kozuma, Y. Suzuki, Y. Torii et al., *Science* **286**, 2309 (1999).
3. S. Inouye, R. F. Low, S. Gupta et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4225 (2000).
4. S. Inouye, T. Pfau, S. Gupta et al., *Nature* **402**, 641 (1999).
5. M. G. Moore and P. Meystre, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5202 (1999).
6. J. M. Vogels, K. Xu, and W. Ketterler, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 020401-1 (2002).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
8. И. Л. Фабелинский, *Молекулярное рассеяние света*, Наука, Москва (1965).
9. A. Csordas, R. Graham, and P. Szepfalusy, *Phys. Rev. A* **54**, R2543 (1996).
10. Д. Форстер, *Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции*, Атомиздат, Москва (1980).
11. J. Javanainen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1927 (1995).
12. J. Javanainen and J. Ruostekoski, *Phys. Rev. A* **52**, 3033 (1995).
13. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978).
14. Е. Р. Gross, *Nuovo Cim.* **20**, 454 (1961); *J. Math. Phys.* **4**, 195 (1963).
15. Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961).
16. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii et al., *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
17. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
19. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Атомиздат, Москва (1979).
20. W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1967).