

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В СПИНОВОМ НЕМАТИКЕ

Б. А. Иванов^{*a,b}, Р. С. Химин^b^a Институт магнетизма Национальной академии наук Украины
03142, Киев, Украина^b Киевский университет им. Тараса Шевченко
03127, Киев, Украина

Поступила в редакцию 24 июля 2006 г.

В магнетике с единичным спином и со сравнимыми величинами билинейного и биквадратичного взаимодействий спинов, в которых реализуется состояние спинового нематика, существуют одномерные локализованные волны, которые можно рассматривать как солитонные элементарные возмущения системы. Эти возмущения характеризуются определенным значением импульса P и энергии E . Найдена структура этих солитонов и построена зависимость $E = E(P)$, которая играет роль закона дисперсии этих солитонных элементарных возмущений. Показано, что энергия солитона с данным значением импульса всегда меньше, чем для квазичастиц линейной теории. При малых значениях импульса эти зависимости $E = E(P)$ для солитона и квазичастиц асимптотически совпадают. Зависимость энергии солитона от его импульса является периодической с периодом $P_0 = \pi\hbar/a$, величина которого не зависит от обменных интегралов и определяется единственным параметром кристалла, межатомным расстоянием a . Эти солитонные возмущения имеют общие черты с так называемыми либовскими состояниями, известными для многих моделей упорядоченных сред.

PACS: 75.10.Jm, 05.45.Yv, 03.75.Kk

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоны являются наиболее адекватным понятием при анализе нелинейной динамики конденсированных сред и играют определяющую роль при описании низкоразмерных упорядоченных сред: магнетиков, сверхтекучих и сверхпроводящих систем (см. последний обзор [1] и литературу в нем), а также полевых моделей физики высоких энергий со спонтанным нарушением симметрии [2]. Достаточно отметить проявление одномерных солитонов типа доменных стенок, двумерных топологических солитонов Белавина–Полякова [3] и соответствующих инстантонных состояний [4, 5]; магнитных вихрей, которые обуславливают переход Березинского–Костерлица–Таулеса в двумерных системах с непрерывным вырождением [6, 7]. В настоящее время достаточно подробно исследованы солитоны для гейзенберговских ферромагнетиков, состояние которых при низких температурах (фактически при $T \rightarrow 0$) определяется заданием вектора

намагниченности \mathbf{M} практически постоянной длины [8–10]. С макроскопической точки зрения описание таких магнетиков базируется на уравнении Ландау–Лифшица для единичного (нормированного) вектора намагниченности, см. [11]. Справедливость уравнения Ландау–Лифшица, в частности, условие $|\mathbf{M}| = \text{const}$ при $T \rightarrow 0$, можно обосновать (например, с использованием спиновых когерентных состояний, см. [12, 13]) только для ферромагнетика, описываемого обменным гамильтонианом Гейзенберга, который включает изотропное билинейное взаимодействие спинов вида $J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$. Как отмечал еще Мория [14], учет одноионной анизотропии, даже слабой, приводит к изменению намагниченности по длине, а в случае сильной одноионной анизотропии возможно даже появление нулевой намагниченности при наличии ферромагнитного обмена.

Однако известно, что в общем случае изотропное (обменное) взаимодействие для спина $S > 1/2$ не ограничивается билинейным взаимодействием и может включать высшие инварианты типа $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)^n$ со значениями n до $2S$. В частности, общий гамиль-

*E-mail: bivanov@i.com.ua

тониан для изотропного обменного взаимодействия двух спинов $S = 1$ содержит слагаемые $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)$ и $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)^2$. Таким образом, для изотропной модели кристаллического магнетика со спином $S = 1$ и взаимодействием ближайших соседей следует исходить из гамильтониана

$$\hat{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} [J(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) + K(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)^2], \quad (1)$$

где параметры J и K (обменные интегралы) определяют билинейное и биквадратичное по спинам обменное взаимодействие, $\langle i, j \rangle$ обозначает пары ближайших узлов в решетке. Эта модель активно исследовалась в течение последних двух десятилетий, как в связи с описанием обычных кристаллических магнетиков, см. обзоры [15, 16], так и в приложении к низкоразмерным магнетикам, см. последние работы [17, 18]. С теоретической точки зрения эта модель интересна тем, что при некоторых соотношениях между J и K она обладает более высокой, чем $SO(3)$, группой симметрии и является точно интегрируемой, см. [17, 18]. Интерес к ней возрос в связи с исследованием многокомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатов нейтральных атомов с ненулевым спином, см. [19].

Модель (1) обладает весьма интересными физическими свойствами, отсутствующими для гейзенберговских магнетиков. Для нее при всех соотношениях параметров K и J в рамках феноменологического подхода возможно динамическое сокращение спина, которое принципиально отсутствует для уравнения Ландау–Лифшица. (При последовательном учете диссипации в уравнении Ландау–Лифшица длина вектора намагниченности \mathbf{M} может изменяться [20], однако эволюция $|\mathbf{M}|$ чисто диффузионная, т. е. динамика $|\mathbf{M}|$ невозможна.)

Учет немалого биквадратичного взаимодействия приводит для этой системы к существованию так называемых нематических фаз, в которых средний спин $\langle \mathbf{S} \rangle$ равен нулю даже при нулевой температуре. Симметрия фазы спинового нематика выше, чем для любого состояния со спонтанной намагниченностью, так как ее группа симметрии включает операцию отражения времени. Спонтанное нарушение симметрии в этой фазе и отличие спинового нематика от парамагнетика определяются квадрупольными средними типа $\langle S_i S_k + S_k S_i \rangle / 2$, геометрическим образом которых является некоторый эллипсоид с главными осями вдоль некоторых направлений $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и полуосями, равными $\langle S_1^2 \rangle, \langle S_2^2 \rangle, \langle S_3^2 \rangle$, которые связаны условием $\langle S_1^2 \rangle + \langle S_2^2 \rangle + \langle S_3^2 \rangle = S(S+1) = 2$. Симметрия этой

фазы ниже, чем симметрия гамильтониана (1), который является изотропным за счет анизотропии таких квадрупольных средних, см. ниже. Здесь уместно отметить существенное отличие изотропной модели (1) от часто обсуждающихся моделей негейзенберговских магнетиков, в которых присутствует сильная одноионная анизотропия типа BS_z^2 [21–24], см. также обзор [16]. Такая анизотропия с величиной $B \sim J$ также может приводить к квантовому сокращению спина на узле. В подобных магнетиках присутствуют интересные особенности как статики, так и динамики ферромагнитной фазы. В частности, для них даже при $T = 0$ существуют состояния с намагниченностью, существенно меньше номинальной или даже равной нулю, а также особые типы динамических возбуждений (продольных магнонов и солитонов), в которых намагниченность меняется по длине [25, 26]. И так, в магнетиках с одноионной анизотропией возможен случай, когда состояние с $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ является основным состоянием. Однако для таких фаз симметрия квадрупольных средних чисто одноосная, например, одна из главных осей параллельна оси анизотропии, а полуоси эллипса в направлении, перпендикулярном этой оси, равны. Поэтому эти состояния не отличаются по симметрии от парамагнетика, и нематические фазы (в строгом смысле этого слова) в магнетиках с одноионной анизотропией не существуют. Известные для таких магнетиков квантовые фазовые переходы, возникающие, например, под действием внешнего магнитного поля или давления [24, 27], так или иначе связаны с ненулевой намагниченностью $\langle \mathbf{S} \rangle \neq 0$. Поэтому состояния спинового нематика могут быть связаны только с изотропным гамильтонианом типа (1). В спиновых цепочках сильные квантовые флуктуации разрушают нематический дальний порядок, что также может быть описано на основе анализа солитонных и инстантонных состояний. Здесь уместно заметить, что хотя одномерные решения часто ассоциируются со спиновыми цепочками, они могут быть устойчивыми и для ситуаций, на первый взгляд, далеких от одномерной. В частности, типично одномерные устойчивые солитоны (либовские состояния, см. [28]) были найдены для бозе-эйнштейновских конденсатов в реальных ловушках, имеющих вытянутую геометрию [29].

2. МОДЕЛЬ И ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Для описания эффектов биквадратичного обмена, в частности, квантового сокращения спина

и нематических фаз, использования спиновых когерентных состояний (состояний группы $SU(2)$) в магнетиках со спином $S > 1/2$ недостаточно и нужно использовать более общие состояния группы $SU(2S+1)$ [16, 25]. Для построения квазиклассической полевой теории, описывающей магнетик со спином $S = 1$ с гамильтонианом (1) и с учетом квантового сокращения спина на узле, введем обобщенные когерентные состояния группы $SU(3)$ в следующем виде [17, 30]

$$|\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_j (u_j + iv_j)|t_j\rangle, \quad (2)$$

где $|t_j\rangle$ — три декартовых состояния спина единица,

$$|\pm\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (|t_x\rangle \pm |t_y\rangle), \quad |0\rangle = |t_z\rangle, \quad (3)$$

$\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ — трехмерный комплексный вектор.

Обсудим кратко топологические свойства многообразия этих когерентных состояний, которое есть пространство динамической переменной $M_{SU(3)}$ задачи. Как обычно, $M_{SU(3)}$ изоморфно $SU(3)/H$, где H — стационарная подгруппа $SU(3)$, т. е. такая подгруппа, которая переводит некоторое заданное состояние физической системы само в себя [31, 32]. В нашем случае $H = SU(2) \times U(1)$, присутствие $U(1)$ отвечает произволу общего фазового множителя состояния $|\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Так как $SU(3)/SU(2)$ изоморфно сфере S^5 , вложенной в трехмерное комплексное пространство C^3 , то $M_{SU(3)} = S^5/U(1)$ изоморфно комплексному проективному пространству CP_2 , см., например [16, 33]. Это пространство односвязно, его гомотопические группы π_0 и π_1 тривиальны, и нетривиальной является только группа $\pi_2(CP_2) = Z$, где Z — группа целых чисел по отношению к сложению. При $K = J$ симметрия $SU(3)$ является точной симметрией задачи, пространство $M_{SU(3)}$ совпадает с пространством вырождения системы, и нетривиальность $\pi_2(M_{SU(3)})$ обуславливает существование трехмерных топологических солитонов типа ежей, см. [31]. Мы будем рассматривать случай $0 < J < K$, когда реализуется нематическая фаза, симметрия которой определяется только пространственными вращениями $SO(3)$ и ниже, чем $SU(3)$. В этом случае состояния системы удобно характеризовать двумя вещественными векторами \mathbf{u} и \mathbf{v} (2). С учетом условий нормировки и произвольности полного фазового фактора эти векторы удовлетворяют двум условиям:

$$\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = 1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

В терминах переменных \mathbf{u} , \mathbf{v} вектор спина и квадрупольные средние выражаются простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \mathbf{m} = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \\ \langle S_i S_k + S_k S_i \rangle &= 2(\delta_{ik} - u_i u_k - v_i v_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Понятно, что физически различимы только такие значения переменных \mathbf{u} и \mathbf{v} , для которых различаются какие-либо из спиновых средних (5). В частности, одновременная замена знаков у этих векторов не меняет состояние системы, и состояния \mathbf{u} , \mathbf{v} и $-\mathbf{u}$, $-\mathbf{v}$ следует считать тождественными. Кроме них, можно указать также и преобразования $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{u}$ или $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$, которые будут важны в дальнейшем.

Нематической фазе в отсутствие внешнего магнитного поля отвечает $\mathbf{u}^2 = 1$, $\mathbf{v} = 0$ (или $\mathbf{v}^2 = 1$, $\mathbf{u} = 0$, что полностью эквивалентно), и система вырождена по направлениям единичного вектора \mathbf{u} (или \mathbf{v}). В состоянии с $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{v} = 0$ для квадрупольных средних (5) можно получить $\langle (\mathbf{S}, \mathbf{u}_0)^2 \rangle = 0$, и соответствующий эллипсоид является бесконечно тонким эллипсоидом вращения (диском), плоскость которого перпендикулярна \mathbf{u}_0 . Поэтому переменная \mathbf{u} имеет смысл вектора-директора, т. е. \mathbf{u} и $-\mathbf{u}$ отвечают одному и тому же состоянию, что и определяет название «спиновый нематик». При всех значениях $\mathbf{u}^2 \neq \mathbf{v}^2 \neq 0$ в системе присутствует среднее значение спина \mathbf{m} , величина которого, однако, меньше номинальной, $|\mathbf{m}| < 1$. Такое состояние реализуется в достаточно слабом внешнем магнитном поле $|\mathbf{H}| = H < H_c$, где характерное значение магнитного поля $H_c = 4(K - J)/g\mu_B$ [17], g — гиромагнитное отношение, μ_B — магнетон Бора, а среднее значение спина параллельно полю. При этом квадрупольным средним отвечает трехосный эллипсоид, одна из главных осей которого направлена вдоль \mathbf{m} , энергия вырождена по направлению двух остальных осей. Поскольку присутствие $\mathbf{m} \parallel \mathbf{H}$ не отражается на симметрии состояния, вырождение системы определяется только квадрупольными переменными, отвечающими указанному повороту эллипсоида вокруг направления поля. Наконец, в случае $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1/2$, который отвечает основному состоянию в достаточно сильном поле $H \geq H_c$, состояние спина насыщено, $|\mathbf{m}| = 1$, а квадрупольные средние определяются эллипсоидом вращения с выбранной осью, параллельной спину \mathbf{m} , и с полуосями $\langle S_3^2 \rangle = \langle (\mathbf{S}, \mathbf{m})^2 \rangle = 1$, $\langle S_1^2 \rangle = \langle S_2^2 \rangle = 1/2$. В этом случае можно сказать, что нематический порядок отсутствует. Анализ динамики спинового нематика в присутствии внешнего магнитного поля выходит

за рамки настоящей работы, и в дальнейшем мы положим $\mathbf{H} = 0$, считая для определенности, что в основном состоянии $\mathbf{u}^2 = 1$, $\mathbf{v} = 0$.

Динамика переменных \mathbf{u} , \mathbf{v} описывается лагранжианом [17]

$$L = -2\hbar \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) - W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \quad (6)$$

где $W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ — энергия системы, которая совпадает со средним значением гамильтониана, сосчитанным на состояниях (3). Для дискретной модели на решетке выражение для энергии $W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ приведено в работе [17]. На основе этого лагранжиана легко исследовать как линейную, так и нелинейную динамику нематической фазы. В частности, используя явный вид энергии нематика $W\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, выписанный в [17], легко получить спектр линейных элементарных возбуждений (будем для определенности называть их магнонами). Этот спектр содержит две вырожденные моды, в которых на узле \mathbf{l} колебания вектора \mathbf{u} имеет вид $(u_x + iu_y)_1 = u_0 \exp[\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} - \omega(\mathbf{k})t]$, здесь \mathbf{k} — квазиимпульс, малая величина $u_0 \ll 1$ — амплитуда волны. Закон дисперсии магнонов в спиновом нематике определяется формулой

$$\hbar^2 \omega^2(\mathbf{k}) = z^2 K [K - (2J - K)C(\mathbf{k})] [1 - C(\mathbf{k})], \quad (7)$$

где введено обозначение

$$C(\mathbf{k}) = \frac{1}{z} \sum_{\mathbf{a}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}),$$

где \mathbf{a} — набор векторов ближайших соседей, z — число ближайших соседей. Для малых значений \mathbf{k} величина $C(\mathbf{k}) = 1 - a^2 \mathbf{k}^2 / z$ в точке, наиболее удаленной от центра зоны Бриллюэна, $C(\mathbf{k}) = -1$. Этот спектр методом $1/n$ -разложения был получен Папаниколау [34]. При малых \mathbf{k} спектр линейный, $\omega(\mathbf{k}) = ck$, $k = |\mathbf{k}|$, где c — фазовая скорость магнонов, $c = (a/\hbar) \sqrt{2zK(K - J)}$. Отсутствие активации в силу теоремы Голдстоуна связано с существованием в нематической фазе спонтанного нарушения симметрии. Анализ спектра, в частности, позволяет определить возможные неустойчивости нематической фазы. Зависимость $\omega(k)$ для одномерного случая ($C(\mathbf{k}) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})$) и различных значений отношения обменных интегралов J и K приведена на рис. 1. Характер зависимости $\omega(k)$ зависит от параметра J/K ; эта зависимость монотонная при $1/3 < J/K < 1$ и имеет максимум в точке $k \neq \pi/a$ при $0 < J/K < 1/3$. При $J < 0$ имеет место неустойчивость нематической фазы относительно возмущений с квазиимпульсом на краю зоны Бриллюэна,

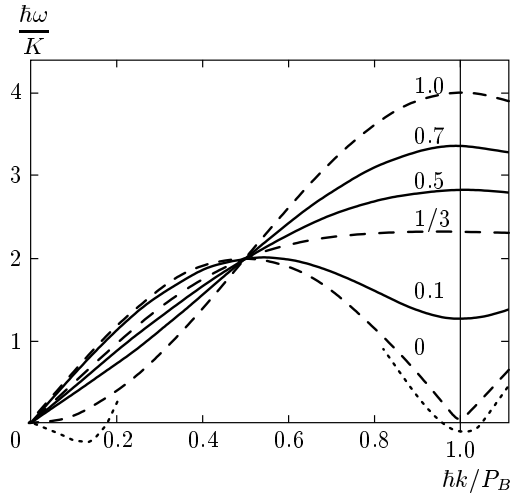


Рис. 1. Зависимость энергии элементарных возбуждений $\hbar\omega(k)$ (в единицах K) для спиновой цепочки в нематической фазе. Значения параметра J/K приведены числами над соответствующими кривыми. Здесь и ниже на графиках $P_B = \pi\hbar/a$ — граница зоны Бриллюэна. Спектр для отмеченных в тексте значений $J/K = 0, 1/3$ и 1 изображен штриховыми линиями; пунктир схематически изображает поведение $\omega^2(k)$ в области неустойчивости, где $\omega^2 < 0$, для J/K (область малых k) и $J < 0$ (область при $k \approx \pi/a$)

что отвечает переходу к антиферромагнитному состоянию. При $K > 0$, но $J > K$ величина $c^2 < 0$, что означает неустойчивость относительно длинноволновых возмущений и отвечает переходу из нематической фазы к ферромагнитной фазе, см. рис. 1. Таким образом, интересующая нас нематическая фаза устойчива при $0 < J < K$. Здесь интересно отметить достаточно нетривиальное поведение спектра при изменении параметра J/K .

При больших $K > J > 4K/7$ имеем типичный боголюбровский спектр, в котором кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ ($p = \hbar k$) загибается вверх от линейной асимптотики $\varepsilon = c|p|$ при увеличении p ($\varepsilon(p) = c|p|(1 + Ap^2)$, $A > 0$). Такой спектр характерен для слабонеидеального бозе-газа (см., например, [35]) и магнонов в легкослоистых магнетиках [36]. Если же $J < 4K/7$, то при $ka \ll 1$ кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ загибается вниз, но остается монотонной в интервале $K/3 < J < 4K/7$. При дальнейшем уменьшении J , $0 < J < K/3$, на границе зоны Бриллюэна P_B для одномерного случая, $\hbar k = \pm\pi\hbar/a = \pm P_B$, при немалых импульсах $p \approx \pi\hbar/a$ имеется минимум, см. рис. 1. Такое поведение, особенно наличие «ротонного» минимума, не характерно для боголюбовского спектра,

оно в значительно большей степени похоже на то, что имеет место в реальном сверхтекучем гелии. Таким образом, уже при анализе линейных возбуждений проявляются интересные особенности квантового нематика, отсутствующие как для рассматриваемых ранее моделей (уравнение Гросса–Питаевского для слабонеидеального бозе-газа [37, 38], уравнение Ландау–Лифшица для легкоплоскостного магнетика [36, 39]), так и для данной задачи в приближении σ -модели.

Перейдем теперь от дискретной решеточной задачи к феноменологическому описанию, полагая, что заданные на узлах решетки переменные $\mathbf{u}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ достаточно медленно изменяются в пространстве и могут быть рассмотрены как непрерывные переменные $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. В рамках этого макроскопического подхода, которому для описания солитонов нет альтернативы, энергия представляет собой функционал двух полевых переменных $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Выбирая случай гиперкубической решетки с размерностью d , запишем лагранжиан в виде

$$L = \int \frac{d^d x}{a^d} \left(-2\hbar \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - w\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \right), \quad (8)$$

где $w\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ плотность энергии системы, которая зависит от векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} и их пространственных производных:

$$w\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = (K - J)\mathbf{m}^2 + \frac{1}{4}(2J - K)(\nabla \mathbf{m})^2 a^2 + K [2(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \mathbf{u}^2(\nabla \mathbf{u})^2 + \mathbf{v}^2(\nabla \mathbf{v})^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})^2]. \quad (9)$$

Для малых отклонений от нематического состояния, что отвечает неравенству $|\mathbf{v}| \ll 1$ в рамках длинноволнового приближения, динамика этой системы сводится к изотропной σ -модели для единичного вектора \mathbf{u} [17]. В этом подходе \mathbf{u} является главной, а \mathbf{v} — подчиненной переменной. Как уже отмечалось, векторная переменная \mathbf{u} имеет смысл вектора-директора, т. е. \mathbf{u} и $-\mathbf{u}$ отвечают одному и тому же состоянию. Понятно, что σ -модель является типичной нелинейной киральной моделью, в которой нелинейность определяется геометрическим условием, в случае спинового нематика условием $\mathbf{u}^2 = 1$. Однако изотропная σ -модель как нелинейная система в достаточной степени «бедная». В частности, для нелокализованной нелинейной волны вида $u_x + iu_y = u_0 \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, $u_z = \sqrt{1 - u_0^2} = \text{const}$, где амплитуда волны может быть немалой, $u_0 < 1$, соотношение между «волновым вектором» \mathbf{k} и частотой

ω такое же, как полученное выше для линейной волны, и не зависит от амплитуды волны u_0 . Можно также убедиться, что в этой системе нет солитонов типа простой волны, которые нас интересуют. Кроме того, выбор одной из векторных переменных (в данном случае, переменной \mathbf{u}) в качестве главной нарушает симметрию задачи относительно указанных выше преобразований типа $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{u}$. Как будет показано ниже, при этом также теряются некоторые нетривиальные свойства солитонов, в частности, периодическая зависимость энергии солитона от его импульса. В силу этих обстоятельств необходим выход за рамки этой простой модели и нужно исходить из полного лагранжиана системы (6) для двух векторных переменных \mathbf{u} и \mathbf{v} , связанных соотношением (4).

Вариация вспомогательного функционала

$$\tilde{L} = \int \frac{d^d x}{a^d} \left(-2\hbar \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - w\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} - \frac{1}{2} \lambda_1 (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2) - \lambda_2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \right), \quad (10)$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа, учитывающие соотношения (4) между векторами \mathbf{u} и \mathbf{v} , дает динамические уравнения для векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} . Мы не будем, однако, выписывать явный вид этих уравнений, так как впоследствии используем их представление через некоторые угловые переменные. Ограничимся записью динамического уравнения для плотности спина \mathbf{m} , которое имеет вид

$$-\hbar \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \frac{\delta w}{\delta \mathbf{u}} + \mathbf{v} \times \frac{\delta w}{\delta \mathbf{v}}. \quad (11)$$

С учетом явного вида энергии это уравнение можно записать в виде

$$\hbar \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) = (4J - 2K) \nabla \{ [\mathbf{u} \times \nabla \mathbf{u}] v^2 + 2[\mathbf{u} \times \mathbf{u}](\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) + [\mathbf{v} \times \nabla \mathbf{v}] u^2 \} + 2K \nabla \times \{ [\mathbf{u} \times \nabla \mathbf{u}] u^2 + 2[\mathbf{u} \times \mathbf{v}](\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) + [\mathbf{v} \times \nabla \mathbf{v}] v^2 \}, \quad (12)$$

что фактически определяет закон сохранения полного спина $\mathbf{S}^{(tot)}$ в дифференциальной форме:

$$\mathbf{S}^{(tot)} = \int \frac{\mathbf{m} d^d x}{a^d} = \text{const}. \quad (13)$$

Наличие этого интеграла движения очевидно в силу инвариантности гамильтониана (1) относительно произвольных вращений.

3. СТРУКТУРА ОДНОМЕРНЫХ ПЛАНАРНЫХ СОЛИТОНОВ

Анализ нелинейной динамики переменных \mathbf{u} и \mathbf{v} достаточно сложен, так как приходится оперировать четырьмя независимыми нелинейными уравнениями, а не двумя уравнениями для угловых переменных, как в случае σ -модели. Однако можно показать, что полная система нелинейных уравнений для векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} имеет частное планарное решение, в котором оба вектора \mathbf{u} и \mathbf{v} разворачиваются в некоторой плоскости, а вектор намагниченности \mathbf{m} меняется только по длине. Как мы покажем, именно это планарное решение имеет важный физический смысл в одномерном случае, и ниже в настоящей работе мы ограничимся его анализом.

С учетом перпендикулярности векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} в планарном решении эти переменные можно параметризовать двумя угловыми переменными

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \cos \mu (\mathbf{e}_x \cos \gamma + \mathbf{e}_y \sin \gamma), \\ \mathbf{v} &= \sin \mu (-\mathbf{e}_x \sin \gamma + \mathbf{e}_y \cos \gamma), \end{aligned} \quad (14)$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные векторы, направленные соответственно по осям x , y , выбранным в плоскости разворота векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} . При этом вектор среднего значения спина \mathbf{m} направлен вдоль оси z и равен по величине $\sin 2\mu$. Лагранжиан системы в новых переменных μ , γ для одномерного случая ($d = 1$) принимает простой вид:

$$L = \int \frac{dx}{a} \left(-\hbar \frac{\partial \gamma}{\partial t} \sin 2\mu - w \right), \quad (15)$$

где плотность энергии

$$w = (K - J) \sin^2 2\mu + K a^2 \cos^2 2\mu (\nabla \gamma)^2 + [K + 2(J - K) \cos^2 2\mu] a^2 (\nabla \mu)^2. \quad (16)$$

В рамках макроскопической модели (8), (9) спиновый нематик имеет следующие интегралы движения: энергию E и полевой импульс \mathbf{P} :

$$E = \int w \left(\frac{dx}{a} \right), \quad \mathbf{P} = \hbar \int \sin 2\mu (\nabla \gamma) \left(\frac{dx}{a} \right). \quad (17)$$

Интегралом движения является также суммарное значение спина, см. выше формулу (13), для планарного решения вида (7) оно выражается в виде

$$\mathbf{S}^{(tot)} = \mathbf{e}_z S^{(tot)}, \quad S^{(tot)} = \int \sin 2\mu \left(\frac{dx}{a} \right).$$

В настоящей работе мы ограничимся анализом простейших одномерных солитонных решений типа

локализованной простой волны, которой отвечает решение вида $\mu = \mu(\xi)$, $\gamma = \gamma(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V — скорость солитона. Для этого решения функции $\mu(\xi)$, $\gamma(\xi)$ таковы, что при $\xi \rightarrow \pm\infty$ нематик находится в основном состоянии, $\mu \rightarrow 0, \pi/2, \pi$, $d\gamma/d\xi \rightarrow 0$. Тогда из уравнения Лагранжа $\delta L/\delta \gamma = 0$ легко получить решение вида

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{V \hbar \sin 2\mu + C}{2a^2 \cos^2 2\mu}. \quad (18)$$

Константу C в формуле (18) можно найти из граничных условий, которые отвечают предположению, что на бесконечности система находится в основном состоянии. Это дает значение $C = 0$. Далее, с учетом явного выражения для $d\gamma/d\xi$ (18), второе уравнение Лагранжа $\delta L/\delta \mu = 0$ можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение имеет первый интеграл, выражение для которого можно записать непосредственно, построив с учетом (18) эффективную функцию Лагранжа для переменной $\mu(\xi)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} L\{\mu\} &= [K + 2(J - K) \cos^2 2\mu] \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 a^2 + \\ &+ \sin^2 2\mu \left[(K - J) - \frac{\hbar^2 V^2}{4K a^2 \cos^2 2\mu} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда с учетом граничных условий $\sin 2\mu \rightarrow 0$, $d\mu/d\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ для $\mu(\xi)$ получаем простое уравнение с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} a^2 \left[\frac{K}{K - J} - 2 \cos^2 2\mu \right] \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 &= \\ = \sin^2 2\mu \left[1 - \frac{V^2}{c^2 \cos^2 2\mu} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где c — введенная выше скорость магнонов линейной теории, для одномерного случая $c = 2(a/\hbar) \times \sqrt{K(K - J)}$.

Решение этого уравнения при $J \neq K$ может быть выписано только в эллиптических функциях, и более целесообразно проанализировать его качественно. Прежде всего, мы видим, что вид решения формально различен для $V = 0$ и для ненулевой скорости. В неподвижном солитоне ($V = 0$) величина $d\mu/d\xi$ не обращается в нуль ни при каких значениях μ , кроме $\mu = 0, \pi/2$, поэтому справа и слева от солитона переменная μ имеет значения, различающиеся на $\pi/2$. На языке векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} эти состояния характеризуются соответственно значениями $|\mathbf{u}| = 1$, $\mathbf{v} = 0$ и $|\mathbf{v}| = 1$, $\mathbf{u} = 0$, и эти состояния не переводятся друг в друга поворотом «жесткого» репера

$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Если же скорость солитона отлична от нуля, то значение угла μ не превышает некоторой величины μ_0 , $2\mu_0 = \arccos(V/c)$, $\mu_0 < \pi/4$, а справа и слева от солитона значение μ одинаково, $\mu \rightarrow 0$ при $\xi = \pm\infty$. На первый взгляд, эта ситуация похожа на ту, что присутствует в солитонных решениях уравнения Ландау–Лифшица для модели чисто одноосного ферромагнетика. В этом случае неподвижное решение описывает 180-градусную доменную стенку с энергией E_{DW} , в которой намагниченность справа и слева от стенки имеет противоположный знак и которая является π_0 -топологическим солитоном, а при любой ненулевой скорости существуют только нетопологические солитоны. Отличие состоит в том, что солитоны в ферромагнетике при малых скоростях можно рассматривать как связанные состояния двух доменных стенок, и при $V \rightarrow 0$ энергия солитона стремится к величине $2E_{DW}$, в то время как в спиновом нематике предельные значения энергии и импульса солитона с $V \neq 0$ при $V \rightarrow 0$ переходят в значения для неподвижного солитона. Как мы покажем ниже, различие солитонов в нематике и ферромагнетике имеет принципиальный характер, и для спинового нематика решения $d\gamma/d\xi = 0$ и $V = 0$ и с $V \neq 0$, $V \rightarrow 0$ фактически описывают одно и то же солитонное состояние.

Простой анализ показывает, что скорость солитона ограничена сверху величиной c , которая совпадает с фазовой скоростью возбуждений линейной теории, см. (7). Это является достаточно естественным условием для солитонов типа простой волны. Отметим, что солитонные решения существуют не во всей области существования нематической фазы (которая устойчива при $0 < J < K$), а только при $K/2 < J < K$. Формально это связано с тем обстоятельством, что при $J < K/2$ правая часть (20) при $\mu \rightarrow 0$ отрицательна. Появление критического значения $J/K = 1/2$ достаточно неожиданно. Оно никак не связано ни с устойчивостью нематической фазы ($0 < J < K$), ни с изменением характера закона дисперсии магнонов, которое происходит при $J/K = 1/3$ и $J/K = 4/7$, см. выше рис. 1. Естественного физического объяснения этого свойства нам не удалось обнаружить и при анализе зависимости энергии солитона от его импульса, см. следующий раздел. Вопрос о существовании каких-либо солитонных состояний в нематической фазе при $0 < J < K/2$, например непланарных, остается открытым.

Как уже говорилось, явный вид зависимостей $\mu(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ удается записать только через эллиптические функции. Однако в предельном случае

$(K - J) \ll K$ вид соответствующих интегралов упрощается, и их можно вычислить через элементарные функции. При этом для неподвижного солитона имеем решение вида

$$\gamma = \text{const}, \quad \cos 2\mu = \text{th} \left(\sqrt{\frac{K - J}{K}} \frac{\xi - \xi_0}{a} \right), \quad (21)$$

где произвольная величина ξ_0 определяет положение центра солитона, и значения μ справа и слева от солитона отличаются на $\pi/2$. Для движущегося солитона ($V \neq 0$) в обсуждающемся предельном случае $(K - J) \ll K$ решение $\mu(\xi)$ имеет более громоздкий вид, но также может быть записано в явном виде:

$$\begin{aligned} \sin 2\mu &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\text{ch} [\hbar\sqrt{c^2 - V^2}(\xi - \xi_0)/a^2K]}, \\ \frac{d\gamma}{d\xi} &= \\ &= \frac{\hbar V \sqrt{c^2 - V^2} \text{ch} [\hbar\sqrt{c^2 - V^2}(\xi - \xi_0)/a^2K]}{2ca^2K \{ \text{sh}^2 [\hbar\sqrt{c^2 - V^2}(\xi - \xi_0)/a^2K] + V^2/c^2 \}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видно из этих формул, значения переменной γ справа и слева от солитона различаются на некоторую величину $\Delta\gamma$. Это свойство солитона делает его похожим на волны поворота в легкоплоскостных магнетиках (см. [8]) или на так называемые темные солитоны, известные в нелинейной оптике [40]; в последнем случае величина γ имеет смысл фазы волны, на фоне которой распространяется солитон. В случае $K \rightarrow J$ величина $\Delta\gamma = \pi/2$ и не зависит от скорости солитона. Интересно отметить также, что подобное условие (разворот спинов на угол π , который не зависит от скорости) реализуется для волны поворота в изотропном антиферромагнетике, которую рассмотрели Ахиезер и Боровик [41].

Аккуратный анализ этих формул позволяет объяснить упоминавшееся выше формальное различие поведения решения при $V = 0$ и поведения предельного решения с $V \neq 0$ при $V \rightarrow 0$. В случае $V = 0$ мы исходили из условия $\gamma = \text{const}$, что отвечает изменению \mathbf{u} и \mathbf{v} только по длине, и нашли, что справа и слева от солитона векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} «меняются местами», например, если при $\xi = +\infty$ векторы $\mathbf{u} = \mathbf{a}$, $\mathbf{v} = 0$ (\mathbf{a} — некоторый постоянный вектор), то при $\xi = -\infty$ получается $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{a}$. Предельное же поведение векторных переменных для решения (22) при $V \rightarrow 0$ иное: вектор \mathbf{v} обращается в нуль при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и при изменении ξ от $-\infty$ до $+\infty$ пара векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} разворачивается на $\pi/2$. Однако легко

видеть, что с учетом ортогональности \mathbf{u} и \mathbf{v} и эквивалентности пар $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ и $\{\mathbf{u}, -\mathbf{v}\}$ получающиеся в обоих случаях состояния физически неразличимы. Формально, такое сложное поведение решений обусловлено тем, что решение типа (22) имеет особенность в точке $\xi = \xi_0$, ξ_0 определяет положения центра солитона в движущейся системе отсчета. Если внимательно проследить за поведением производной $d\gamma/d\xi$ при $V \rightarrow 0$, то можно получить формулу

$$\lim \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\pi}{2}\delta(\xi - \xi_0), \quad (23)$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция. С другой стороны, из выражения (21) следует, что при переходе через точку $\xi = \xi_0$ величина $\cos 2\mu$ меняет знак, чего нет в решении (22) при сколь угодно малой скорости. Исходя из определения векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} (14), следует считать, что угол μ определен в области $0 \leq \mu \leq \pi/2$, тогда изменение знака $\cos 2\mu$ следует связать со скачком фазы $\Delta\gamma = \pi/2$. Таким образом, оба решения формально эквивалентны. Важнее, что они эквивалентны физически, поскольку намагниченность \mathbf{m} и все компоненты тензора квадрупольных переменных в этой точке остаются непрерывными.

Итак, солитонные решения при $(K - J) \ll K$ допускают полное аналитическое исследование, и решения могут быть записаны через элементарные функции. Гораздо важнее иное обстоятельство, а именно, то, что при таком соотношении обменных интегралов область локализации солитона $\Delta\xi = (a/\sqrt{1 - V^2/c^2})\sqrt{K/(K - J)}$, см. (21), (22), всегда больше, чем постоянная решетки. Условие $\Delta\xi \gg a$ важно для строгой применимости феноменологического подхода. При немалых скоростях оно выполнено при любом допустимом соотношении параметров K и J , $K/2 < J < K$, но при $V \ll c$ важно выполнение неравенства $(K - J) \ll K$. Однако мы считаем полезным рассмотреть и случай сравнимых J и K , прежде всего, для выяснения общих закономерностей квазиклассического квантования солитонов. Дело в том, что часто уравнения феноменологического подхода, даже полученные разложением по градиентам, неплохо описывают и состояния с $\Delta\xi \sim a$. Это особенно касается интегральных характеристик солитона, таких как значения энергии и импульса. Хорошее согласие результатов феноменологического подхода с данными прямого численного моделирования было получено для доменных стенок в модели Изинга в слабом поперечном поле, для которой $\Delta\xi \leq a$ [42]. Поэтому можно надеяться, что результаты феноменологического расчета энергии и импульса солитона будут справедливы, по меньшей

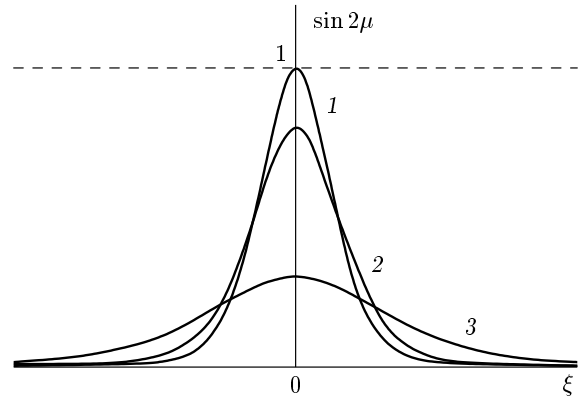


Рис. 2. Зависимости $\sin 2\mu(\xi)$ при различных значениях скорости солитона (схематически): 1 — $V = 0$, 2 — $V \ll c$, 3 — $c - V \sim V \sim c$

мере полуколичественно, и для случая $K \sim J$, и мы кратко обсудим структуру солитонов в этом общем случае.

Характер распределения $\mu(\xi)$ для случая $K \sim J$ в основном остается таким же, как и в случае $(K - J) \ll K$, см. рис. 2. При $V = 0$ имеем решение $\gamma = \text{const}$, при том что значения угла μ различаются на $\pi/2$ справа и слева от солитона, и в некоторой точке (центре солитона $\xi = \xi_0$) значение $\mu = \pi/4$, момент $|\mathbf{m}| = 1$ и квадрупольный порядок отсутствует, см. рис. 2. Если же $V \neq 0$, то функция, описывающая $\sin 2\mu(\xi)$, имеет колоколообразную форму с максимальным значением $\sin 2\mu_0 = \sqrt{1 - V^2/c^2} < 1$, при том что угловая переменная γ меняется на величину $\Delta\gamma$ при изменении ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Легко показать, что в предельном случае при $V \rightarrow 0$ величина $\Delta\gamma = \pi/2$ при любом допустимом соотношении K и J . Это согласовано с указанным выше поведением векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} при $V = 0$. В отличие от предельного случая $J \rightarrow K$, для движущегося солитона величина $\Delta\gamma$ зависит от скорости солитона тем более существенно, чем больше величина $(K - J)/K$, см. рис. 3. В предельном случае $K = J/2$ величина $\Delta\gamma \rightarrow 0$ при $V \rightarrow c$.

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ СОЛИТОНОВ В ОДНОМЕРНОМ КВАНТОВОМ НЕМАТИКЕ

Наиболее естественными характеристиками солитона, полезными как при чисто классическом полевом подходе, так и при проведении квазиклассического анализа, являются энергия солитона E и его импульс P . Зависимость $E = E(P)$ можно рассмат-

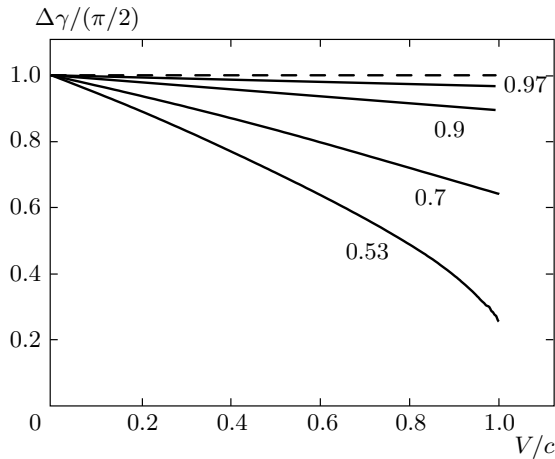


Рис. 3. Зависимости полного угла разворота $\Delta\gamma$ в солитоне от скорости солитона для различных значений J/K (указаны цифрами около соответствующей кривой). Штриховая линия отвечает значению $\Delta\gamma = \pi/2$, которое независимо от скорости имеет место при $J \rightarrow K$

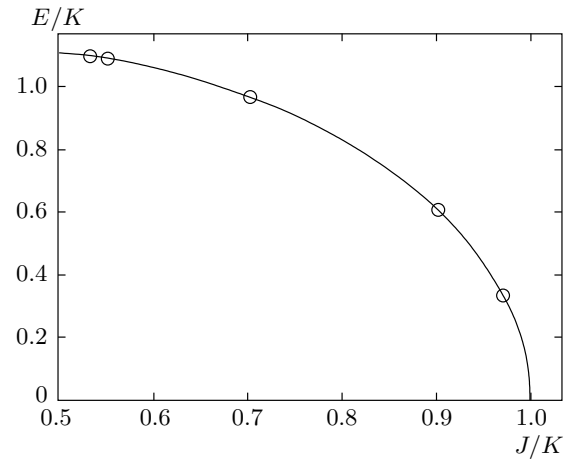


Рис. 4. Зависимость максимальной энергии солитона (т. е. при $V = 0$) от параметра J/K . Сплошная линия проведена в соответствии с аналитической формулой, символы обозначают данные численного расчета

ривать как закон дисперсии нелинейных элементарных возбуждений системы, описывающихся солитонами. Обычно эта зависимость, найденная из классических решений, хорошо передает свойства соответствующих квантовых результатов. Как отмечалось выше, такое соответствие имеет место даже в случае, когда величина области локализации классического солитонного решения $\Delta\xi$ не существенно превышает межатомное расстояние a [42]. Для некоторых точно решаемых квантовых моделей типа XUZ -спиновой цепочки со спином $S = 1/2$ соответствующие результаты точно совпадают, см. обзор [8].

Рассмотрим зависимость $E(P)$ для данного случая. Выражение для энергии и импульса (17) с учетом формул (18), (20) можно представить в виде определенных интегралов:

$$E = \int_0^{\mu_0} \frac{(K-J) \sin 4\mu \sqrt{(K^2 a^2 / \hbar^2) - (c^2/2) \cos^2 2\mu}}{\sqrt{c^2 \cos^2 2\mu - V^2}} d\mu, \quad (24)$$

$$P = 2 \frac{\hbar V}{a\sqrt{K}} \times \int_0^{\mu_0} \frac{\sin 2\mu \sqrt{K - 2(K-J) \cos^2 2\mu}}{\cos 2\mu \sqrt{c^2 \cos^2 2\mu - V^2}} d\mu, \quad (25)$$

где, как и ранее, $\cos 2\mu_0 = V/c$.

Как уже отмечалось, максимальное значение энергии достигается для неподвижного солитона. Эта энергия обращается в нуль при $J \rightarrow K$ и растет с ростом величины $(K - J)/K$ в соответствии с формулой (см. рис. 4)

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{K^2 - J^2} + 2K \arcsin \sqrt{\frac{K - J}{K + J}} \right). \quad (26)$$

С другой стороны, как энергия, так и импульс солитона стремятся к нулю, когда его скорость V приближается к максимальной скорости солитона c , при этом амплитуда солитона μ_0 стремится к нулю. В этой области легко получить асимптотическое соотношение $E \rightarrow cP$ при $V \rightarrow c$, справедливое при всех допустимых значениях параметра J/K .

Явный вид зависимостей энергии и импульса солитона от его скорости при произвольных V/c и J/K удается записать только через эллиптические интегралы, и проще найти эти зависимости численно, см. ниже. Однако вблизи точки перехода в ферромагнитную фазу, при $(K - J) \ll K$, выражение для энергии и импульса можно записать в явном виде:

$$E = \frac{\hbar c}{a} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad P = \frac{\hbar}{a} \arccos \left(\frac{V}{c} \right), \quad (27)$$

откуда можно найти зависимость энергии от импульса, см. рис. 5:

$$E = \frac{\hbar c}{a} \sin \left(\frac{Pa}{\hbar} \right). \quad (28)$$

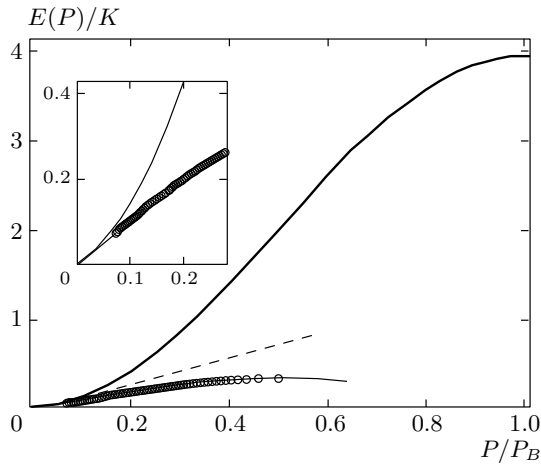


Рис. 5. Зависимости энергии солитона (линия с символами, линия проведена в соответствии с аналитическими формулами (28), символы представляют численные данные) и магнов (сплошная линия) для предельного случая $J \rightarrow K$ (для численного счета выбрано $J/K = 0.97$). Штриховая линия изображает линейную асимптотику $E, \varepsilon = cr$, на вставке изображена область вблизи начала координат

Здесь, прежде всего, интересно появление периодической зависимости энергии от импульса с периодом $2P_0$, где $P_0 = \pi\hbar/2a$. Величина $2P_0$ совпадает со значением размера половины зоны Бриллюэна, т. е. зависимость $E(P)$ для солитонов имеет период в два раза меньший, чем та же зависимость для блоховских квазичастиц. Периодический закон дисперсии возникает во многих задачах о магнитных солитонах в приближении сплошной среды и приводит к многим закономерностям, известным для блоховских электронов см. [8, 43]. В ферромагнетике, описываемом уравнением Ландау – Лифшица, закон дисперсии солитонов типа доменных стенок имеет период $2P_{0;FM}, P_{0;FM} = \pi\hbar S/a$, который при $S = 1$ в два раза больше, чем для солитона в спиновом немагнетике (27), и совпадает с размером зоны Бриллюэна. Для солитонов типа кинков в гейзенберговском ферромагнетике такое же значение периода $2P_{0;FM}$ имеет место для спина $S = 1/2$. Таким образом, имеет место как сходство (периодичность зависимости $E(P)$), так и различие (значение P_0) в поведении законов дисперсии солитонов в ферромагнетиках и спиновых немагнетиках.

С уменьшением величины J , т. е. при удалении от точки перехода в ферромагнитную фазу, зависимость энергии и импульса от скорости V более слож-

ная, но при скоростях, близких к критической, сохраняется корневое поведение $E(V)$ и $P(V)$. Вблизи линии исчезновения солитонов $K = 2J$ также возможно аналитическое вычисление этих зависимостей, в результате при $J = K/2$ получается

$$E = \frac{\pi K}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right), \quad P = V \frac{\pi\hbar}{2a} \frac{c - |V|}{c|V|}, \quad (29)$$

в итоге зависимость $E(P)$ в пределах одного периода $(-P_0 < P < P_0)$ аппроксимируется выражением

$$E = \frac{\pi K}{2\sqrt{2}} \left[1 - \frac{(|P| - P_0)^2}{P_0^2} \right]. \quad (30)$$

Отметим, что максимальное значение импульса, т. е. величина периода в зависимости $E(P)$ для солитона имеет то же самое значение P_0 для любого допустимого соотношения параметров J, K . Это свойство легко получить из прямого анализа интегралов (24), (25) с использованием асимптотического вида решения (28), однако удобнее использовать топологические свойства пространства параметра порядка для лагранжиана (8). Похожий метод использовался для анализа закона дисперсии солитона типа доменной стенки в гейзенберговском ферромагнетике [44] и изинговском ферромагнетике в поперечном поле [42].

Действительно, импульс солитона в соответствии с формулой (17) содержит сингулярности, связанные с недифференцируемостью азимутального угла γ в точках $\mu = \pi n/2$, где n — целое число (это свойство переменной γ играет существенную роль при описании динамики магнитных вихрей [45]). Происхождение этой сингулярности становится понятным при параметризации спиновых переменных планарного решения через трехмерный вектор $\mathbf{R}, \mathbf{R} = (X, Y, Z)$, компоненты которого представляют собой нетривиальные переменные для планарного решения: намагниченность $Z = \sin 2\mu$ и две квадрупольные переменные:

$$X = \langle S_x^2 - S_y^2 \rangle = \cos 2\mu \cos 2\gamma,$$

$$Y = \langle S_x S_y + S_y S_x \rangle = \cos 2\mu \sin 2\gamma.$$

Эти переменные по сравнению с компонентами \mathbf{u}, \mathbf{v} имеют то преимущество, что они однозначно определяются по заданному физическому состоянию системы. Отметим появление удвоенных значений угловых переменных μ, γ . Легко убедиться, что $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, т. е. вектор \mathbf{R} является единичным.

С использованием векторной переменной \mathbf{R} выражение для импульса (27) можно привести к виду

$$P = \int \mathbf{A}(\mathbf{R}) d\mathbf{R},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\hbar}{2a} \frac{Z(Y\mathbf{e}_x - X\mathbf{e}_y)}{R(X^2 + Y^2)}, \quad R = |\mathbf{R}|, \quad (31)$$

вектор \mathbf{A} имеет особенность на оси Z .

Формально, если не рассматривать условие $\mathbf{R}^2 = 1$, динамическая часть лагранжиана (1), представленная через \mathbf{R} , $d\mathbf{R}/dt$ (или формула для импульса (4) при замене $\partial\mathbf{R}/\partial t \rightarrow -\partial\mathbf{R}/\partial\xi$) совпадает с лагранжианом заряженной частицы с координатой \mathbf{R} в магнитном поле с вектор-потенциалом \mathbf{A} . Такое представление справедливо и для ферромагнетика в рамках уравнения Ландау – Лифшица, но выражения для \mathbf{A} в этих двух случаях различаются. Для ферромагнетика вектор-потенциал \mathbf{A}_{FM} имеет форму потенциала магнитного монополя в канонической форме, с сингулярностью на полуоси (струне Дирака) $x, y = 0; z < 0$ [46]. Нетрудно показать, что хотя выражения для $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{R})$ в случаях спинового нематика и ферромагнетика различны, для выражения (31) вектор $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A} = \hbar\mathbf{R}/2aR^3$. Таким образом, выражение (31), так же как и для случая ферромагнетика, описывает вектор-потенциал магнитного монополя, расположенного в начале координат, однако величина «заряда монополя» для нематика в два раза меньше, чем для ферромагнетика при том же значении спина $S = 1$. Следовательно, выражения для удвоенного импульса солитона в спиновом нематике и импульса в ферромагнетике сводятся друг к другу калибровочным преобразованием. Далее можно использовать те же рассуждения, что и в работе [44].

Формула для импульса одномерного солитона содержит сингулярность и не инвариантна относительно калибровочных преобразований вектор-потенциала \mathbf{A} . Однако важно, что вектор \mathbf{V} не содержит сингулярностей на сфере $\mathbf{R}^2 = 1$ (см. рис. 6). Отсюда следует, что разность импульсов для двух различных состояний солитона является калибровочно-инвариантной величиной. Действительно, каждому солитону (например, солитонам с разными скоростями) можно поставить в соответствие траекторию, соединяющую некоторые точки $\mathbf{R}^{(-)}$ и $\mathbf{R}^{(+)}$, лежащие на экваторе сферы $\mathbf{R}^2 = 1$ (окружности $\sin 2\mu = 0$, или $z = 0$). При этом импульс данного солитона определяется интегралом вида $\int \mathbf{A} d\mathbf{R}$ по этой траектории, которая выходит из точки $\mathbf{R}^{(-)}$ и идет в точку $\mathbf{R}^{(+)}$. Хо-

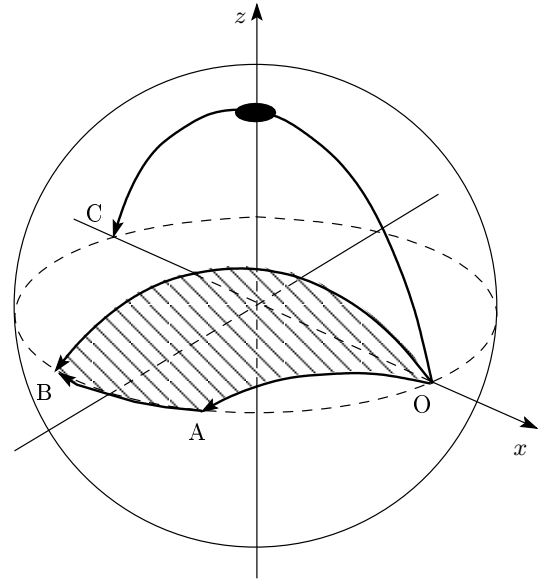


Рис. 6. Траектории, определяющие форму солитонных решений при различных значениях скорости (схематически). Среди изображенных кривых скорость солитона максимальна для кривой OA, уменьшается к OB и близка к нулю для солитона, которому соответствует предельная кривая OC. Криволинейный отрезок AB указывает путь замыкания траекторий при различной скорости солитонов в случае, когда у них различаются величины $\Delta\gamma$. Площадь на сфере, ограниченная замкнутым контуром OABO, определяет разность импульсов солитонов, описываемых контурами OA и OB

тя различные солитоны (например, солитоны с разными скоростями) имеют различные значения переменной γ на бесконечности, они все имеют на бесконечности $\sin 2\mu = 0$, т.е. заканчиваются на экваторе сферы $\mathbf{R}^2 = 1$. На этой линии значение подынтегрального выражения строго равно нулю, поэтому концы изображающих траекторий для двух солитонов, заканчивающиеся в разных точках большого круга $z = 0$, можно соединить отрезком, лежащим на этом круге, и считать замкнутыми. Ясно, что разность импульсов для двух солитонов определяется интегралом по замкнутому контуру $\oint \mathbf{A} d\mathbf{R}$, ограниченному траекториями, описываемыми эти солитоны. По теореме Стокса этот интеграл может быть записан как поток вектора $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ через поверхность, охватываемую этим контуром, $\int \mathbf{V} d\mathbf{S}$. Поэтому разность импульсов двух состояний солитона можно представить в калибровочно-инвариантном виде,

$$P = \frac{\hbar}{2a} \int \sin \theta \, d\theta \, d\gamma. \quad (32)$$

Здесь обозначено $\sin \theta = \cos 2\mu$, переменные θ и γ можно рассматривать как стандартные сферические координаты, интеграл берется по области на сфере, ограниченной траекториями, отвечающими двум солитонам. В качестве линии, отвечающей значению $P = 0$, естественно выбрать линию экватора $\sin 2\mu = 0$, к которой солитонные траектории асимптотически стремятся при уменьшении амплитуды солитона, чему отвечает $E \rightarrow 0$ и $V \rightarrow c$. Максимальной энергии солитона соответствует траектория, проходящая через «северный» полюс сферы, соответственно для него $P = P_0$. Далее, зависимости $V(P)$ или $E(P)$ однозначно восстанавливаются. Действительно, даже если уравнения феноменологической теории в силу пренебрежения старшими производными дают приближенный результат, можно сказать точно, что все траектории, отвечающие скорости солитона в интервале от c до нуля, или импульсу от нуля до P_0 заполняют промежутки между этими траекториями. Значит, импульс непрерывно растет при переходе между этими траекториями и подходе к предельной траектории с $P = P_0$. В силу симметрии задачи относительно замены $X \rightarrow -X$ или $Y \rightarrow -Y$, второй половине верхней полусферы также отвечают солитонные решения, имеющие ту же энергию, но противоположный знак скорости. Если рассмотреть траектории, которые отклоняются от этой предельной «вправо» или «влево», см. рис. 6, легко убедиться, что им отвечают одинаковые значения энергии, но различные значения импульса, соответственно $P_0 - \Delta P$ и $P_0 + \Delta P$. При дальнейшем движении изображающей траектории во второй половине верхней полусферы энергия уменьшается, а величина импульса растет, пока не достигает экватора. При этом значение энергии $E = 0$, но величина импульса, с учетом выбора его начала отсчета, определяется интегралом (32) по всей верхней полусфере и $P = 2P_0$.

Таким образом, как и в ферромагнетике, в спиновом нематике в силу топологических свойств лагранжиана возникает истинная периодическая зависимость $E(P)$. Это должно приводить к особенностям вынужденного движения солитона, например, при наличии периодического потенциала решеточно-го пиннинга, обусловленного эффектами дискретности, см. [42], а также к осциллирующему движению солитона под действием постоянной силы, (блоховские осцилляции, см. [43, 47]).

Конкретные зависимости энергии как функции импульса представлены на рис. 7 и 8. Отметим неко-

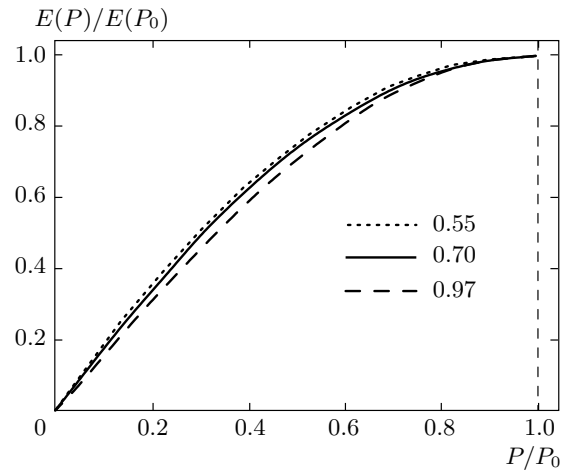


Рис. 7. Нормированные законы дисперсии солитонов $E(P)$ для различных J/K

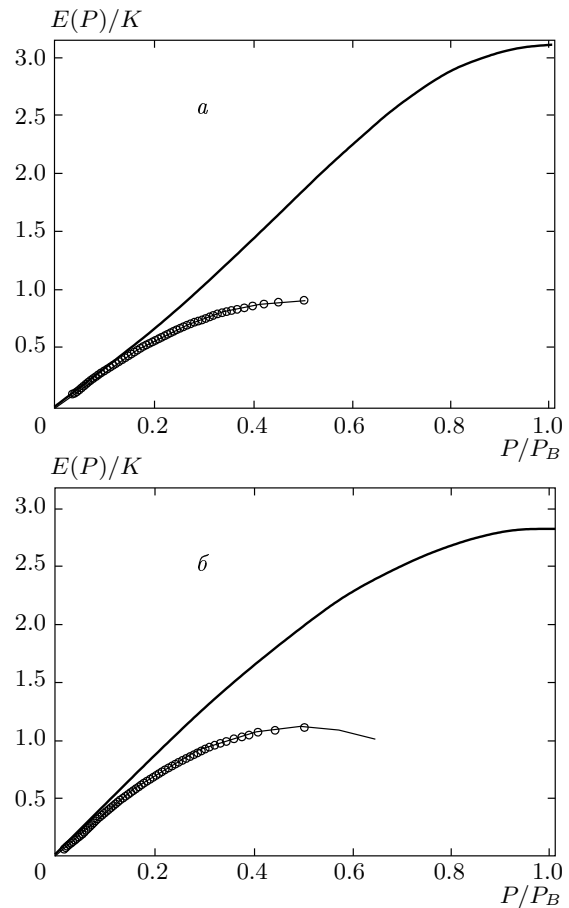


Рис. 8. Законы дисперсии $E(P)$ солитонов (линия с символами) и магновов линейной теории (сплошная линия) для различных J/K ; а) $J/K = 0.7$, б) $J/K = 0.53$

торые общие закономерности. Кривые зависимости энергии, нормированной на ее максимальное значение $E(P_0)$, практически совпадают для всех допустимых значений $1/2 < J/K < 1$, см. рис. 7. Иными словами, закон дисперсии солитонов значительно менее чувствителен к значению параметра J/K , чем спектр магнонов. В частности, зависимость $E(P)$ загибается вниз от предельного вида $E \rightarrow cP$ для всех допустимых J/K . Для всех значений этого параметра зависимость $E(P)$ лежит ниже, чем соответствующий закон дисперсии магнонов, см. рис. 8. Различие максимально для рассмотренного выше случая $J - K \ll K$, но имеет место для всех допустимых значений этого параметра.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Состояние спинового нематика в рамках макроскопической модели, соответствующей спиновому гамильтониану (1), обладает достаточно интересными солитонными состояниями, которые возникают только при выходе за рамки σ -модели. Эти состояния имеют много общих черт с либовскими состояниями, известными для слабонеидеального бозе-газа, которые были исследованы как для точно решаемой квантовой модели [28], так и феноменологически, в рамках уравнения Гросса–Питаевского [8]. Эти существенно нелинейные возбуждения в пределе малых импульсов имеют линейный закон дисперсии с той же характерной скоростью, что и квазичастицы боголюбовского спектра $\varepsilon = \varepsilon_B(p)$ слабонеидеального бозе-газа, но при всех конечных импульсах энергия либовских состояний ниже, чем $\varepsilon_B(p)$. Как мы показали, именно это свойство характерно для солитонов в спиновом нематике при всех допустимых значениях параметра J/K .

В отличие от оригинальной модели бозе-газа, а также модели легкоплоскостного ферромагнетика, которая так же содержит нелинейные возбуждения (солитоны) со свойствами либовских состояний, в квантовом нематике с $S = 1$ характер зависимостей $E(P)$ и $\hbar\omega(p)$ существенно зависит от некоторого параметра J/K . При изменении этого параметра в допустимых пределах $K/2 < J < K$ существенно меняется соотношение между энергиями магнонов и солитонов с немалым значением импульса. Вблизи перехода в ферромагнитную фазу, при $J \rightarrow K$, максимальная энергия солитона стремится к нулю, а магнона — остается конечной, поэтому энергия солитона много меньше, чем энергия магнона при том же значении импульса. В другом предельном слу-

чае, $J \rightarrow K/2$, энергия солитонов наиболее близка к энергии магнонов с тем же значением импульса.

Интересно отметить еще одно нетривиальное свойство солитонов в спиновом нематике, а именно, наличие периодической зависимости энергии от импульса со значением периода, равным половине того, что следует из теоремы Блоха для квазичастиц в кристалле. Насколько нам известно, подобное поведение раньше в литературе не обсуждалось. Наличие периодической зависимости напрямую связано с топологическими свойствами пространства параметра порядка системы и ее лагранжиана. Эти особенности ранее были известны только для ферромагнетиков, т. е. для материалов со спонтанной намагниченностью.

Мы благодарны В. Г. Барьяхтару и А. К. Колезуку за полезные обсуждения результатов работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 1000008-8112).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Коршунов, УФН **176**, 233 (2006).
2. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam (1982).
3. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
4. F. D. M. Haldane, Phys. Lett. A **93**, 464 (1983); Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
5. Ian Affleck, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 3047 (1989).
6. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
7. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
8. А. К. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); А. М. Kosevich, В. А. Ivanov, and А. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
9. Н.-J. Mikeska and M. Steiner, Adv. Phys. **40**, 191 (1991).
10. V. G. Bar'yakhtar and В. А. Ivanov, Sov. Sci. Rev. Sec. A **16**, 3 (1993).
11. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).

12. А. М. Переломов, УФН **123**, 23 (1977); А. М. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
13. Б. А. Иванов, ФНТ **31**, 841 (2005).
14. Т. Moriya, Phys. Rev. **117**, 635 (1960).
15. Э. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
16. В. М. Локтев, В. С. Островский, ФНТ **20**, 983 (1994).
17. В. А. Ivanov and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003).
18. K. Buchta, G. Fáth, Ö. Legeza, and J. Sólyom, Phys. Rev. B **72**, 054433 (2005).
19. Zhou Fei, E-print archives, cond-mat/0108473.
20. В. Г. Барьяхтар, ЖЭТФ **87**, 4 (1984).
21. Н. Н. Chen and P. M. Levy, Phys. Rev. B **7**, 4267 (1973).
22. В. М. Калита, В. М. Локтев, ФТТ **45**, 1450 (2003).
23. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, J. Magn. Magn. Mat. **236**, 272 (2001).
24. В. П. Дьяконов, Э. Е. Зубов, Ф. П. Онуфриева, А. В. Сайко, И. М. Фита, ЖЭТФ **93**, 1775 (1987).
25. V. S. Ostrovskiy, ЖЭТФ **91**, 1690 (1986).
26. Б. А. Иванов, А. Н. Кичижиев, Ю. Н. Мицай, ЖЭТФ **102**, 618 (1992).
27. В. М. Калита, В. М. Локтев, ФНТ **28**, 1244 (2002).
28. E. H. Lieb, Commun. Math. Phys. **67**, 69 (1979).
29. S. Komineas and N. Papanicolaou, Phys. Rev. Lett. **89**, 070402 (2002).
30. N. A. Mikushina and A. S. Moskvina, Phys. Lett. A **302**, 8 (2002).
31. Г. Е. Воловик, В. П. Минеев, ЖЭТФ **72**, 2256 (1977).
32. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).
33. Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **84**, 90 (2006).
34. N. Papanicolaou, Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).
35. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1964).
36. А. К. Косевич, В. П. Воронов, И. В. Манжос, ЖЭТФ **84**, 148 (1993).
37. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).
38. E. P. Gross, Nuovo Chimento **20**, 454 (1961).
39. А. В. Никифоров, Э. Б. Сонин, ЖЭТФ **85**, 642 (1983).
40. Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davids, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
41. И. А. Ахиезер, А. Е. Боровик, ЖЭТФ **52**, 1332 (1967).
42. В. А. Ivanov and H.-J. Mikeska, Phys. Rev. B **70**, 174409 (2004).
43. А. К. Косевич, ФНТ **27**, 699 (2001).
44. Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **71**, 372 (2000).
45. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B **360**, 425 (1991).
46. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, in: *Frontiers in Physics* **82**, Addison Wesley, New York (1991).
47. J. Kyriakidis and D. Loss, Phys. Rev. B **58**, 5568 (1998).