

# О СТРУКТУРЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЫКНОВЕННОЙ И НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛН В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*А. Г. Шалашов\**, *Е. Д. Господчиков*, *Е. В. Суворов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 2 мая 2006 г.

Рассмотрены особенности линейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме в электронном циклотронном диапазоне частот. Получены точные решения укороченного волнового уравнения, описывающие волновые поля в области линейного взаимодействия. Определена процедура пересчета полей, проходящих и отражающихся от области трансформации. Аналитически исследованы распределения полей в трансформированном и отраженном пучках для различных падающих пучков. Полученные результаты могут рассматриваться как решение новой эталонной задачи, имеющей широкую область применения в астрофизических и лабораторных приложениях.

PACS: 52.35.Hr, 41.20.Jb, 52.50.Sw, 52.70.Gw

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема линейного взаимодействия нормальных волн, распространяющихся в плавно неоднородной магнитоактивной плазме в электронном циклотронном (ЭЦ) диапазоне частот, имеет давнюю историю. Начало исследований было положено в работах Гинзбурга, связанных с изучением эффекта «утраивания» радиосигналов в ионосфере [1–3]. В астрофизических условиях линейное взаимодействие волн имеет существенное значение для описания механизма выхода излучения из плотной плазмы, например из солнечной короны [4]. В последние годы интерес к этой проблеме заметно усилился в связи с задачами высокочастотного нагрева и диагностики плазмы в тороидальных магнитных ловушках, используемых в исследованиях УТС. Это связано с достижением режимов с улучшенным удержанием в современных токамаках и с развитием альтернативных систем типа сферических токамаков и оптимизированных стеллараторов, для которых характерны сравнительно низкие магнитные поля при высокой

плотности плазмы. Все чаще стали реализовываться режимы удержания, в которых плотность в центральных областях плазменного шнура превышает критическое значение для распространения электромагнитных мод, используемых в традиционных схемах ЭЦ-нагрева и диагностики плазмы (таких как обыкновенная волна на первой ЭЦ-гармонике или необыкновенная волна на второй гармонике). Резонансное поглощение электромагнитных волн в сферических токамаках может также оказаться неэффективным, поскольку из-за низкого значения магнитного поля поглощение удается реализовать только на достаточно высоких циклотронных гармониках. Одна из возможностей по преодолению указанных трудностей связана с линейной трансформацией электромагнитных волн в электростатические бернштейновские волны, которые свободно распространяются в закритической плазме и эффективно взаимодействуют с плазмой в широком диапазоне циклотронных гармоник. В тороидальной плазме электронные бернштейновские волны могут эффективно возбуждаться в процессе так называемой  $O-X-V$ -трансформации, предсказанной теоретически в работах [5–7] и экспериментально реализо-

\*E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru

ванной на целом ряде установок [8–14]. В этом процессе введенная со стороны слабого магнитного поля обыкновенная (О) волна вблизи поверхности критической плотности трансформируется в необыкновенную (Х) волну, которая, в свою очередь, в окрестности верхнего гибридного резонанса трансформируется в электронную бернштейновскую волну. Эффективность всего процесса в основном определяется эффективностью трансформации О-волны в Х-волну (О–Х-трансформации).

Большинство теоретических результатов, относящихся к процессам линейной трансформации волн в ЭЦ-диапазоне, было получено в рамках одномерного приближения, в котором предполагалось, что плотность плазмы изменяется вдоль одного выделенного направления [6, 7, 15–18]. В указанных работах были найдены коэффициенты О–Х-трансформации и законы преобразования проходящих через область трансформации волновых полей. Обзор современных результатов одномерной теории был дан в работе [19]. Важность неодномерных эффектов для трансформации электромагнитных волн в электронные бернштейновские волны вблизи верхнего гибридного резонанса была отмечена довольно давно [20], однако их роль в процессах О–Х-трансформации долгое время оставалась неисследованной. В последнее время возникло понимание, что в реальных установках одномерное приближение может оказаться недостаточным и для описания О–Х-трансформации [21–27]. Например, в работе [27] было показано, что для сферического токамака MAST ширина области непрозрачности (основной параметр, характеризующий одномерную трансформацию) может варьироваться в пределах размера вводимого в плазму волнового пучка на величину порядка нескольких длин волн вследствие изменения магнитного поля на магнитной поверхности, что приводит к необходимости более точного анализа с учетом эффектов, связанных с неодномерной геометрией области трансформации. Насколько известно авторам, впервые попытка такого анализа была предпринята в работе [21], где было показано, что в двумерно-неоднородной геометрии токамака эффективная О–Х-трансформация возможна для существенно более широкого класса падающих пучков по сравнению с одномерным случаем, в котором эффективная трансформация возможна лишь в узком диапазоне продольных волновых чисел. Более того, все полученные в работе [21] решения соответствуют волновым структурам, испытывающим полную трансформацию, на основании чего авторы высказывают довольно сомнительное предположение о

возможном полном отсутствии отраженных от критической поверхности волн в рассмотренной ситуации. В наших предыдущих работах была предложена альтернативная схема исследования процесса О–Х-трансформации в двумерно-неоднородной геометрии токамака. В работе [22] путем ряда физически понятных упрощений было получено новое, отличное от исследовавшегося в [21], укороченное эталонное волновое уравнение, описывающее распределение волнового поля в области трансформации. Был определен достаточно широкий класс частных решений эталонного уравнения, соответствующих пучкам, испытывающим полную трансформацию, а также проанализированы некоторые особенности частично отражающихся волновых структур [22–24]. И наконец, в работах [25, 26] было получено полное решение эталонного волнового уравнения, включающее как прошедшую, так и отраженную волну, с помощью этого решения были найдены выражения для коэффициентов трансформации и отражения волновых пучков, переходящие в предельном случае одномерной геометрии в известные выражения для коэффициентов в одномерном приближении. Похожие результаты для коэффициентов трансформации были представлены и в работе [27].

В предыдущих работах рассматривались в основном характеристики интенсивности прошедшего и отраженного излучений. В настоящей работе проведен анализ распределений амплитуд полей с учетом фазовых соотношений. В результате сформулированы правила пересчета волновых полей, проходящих и отражающихся от области трансформации. В частности, для падающего, прошедшего и отраженного пучков определена процедура сшивки геометро- или квазиоптических решений вдали от области трансформации, что позволяет использовать стандартные (без учета взаимодействия) коды для моделирования процесса О–Х-трансформации. Рассмотрено несколько конкретных примеров, в которых связь волновых полей до и после области линейного взаимодействия удастся записать в достаточно компактном аналитическом виде.

Структура работы следующая. В разд. 2 на качественном уровне обсуждаются новые физические эффекты, возникающие вследствие учета двумерного характера неоднородности среды. В разд. 3 определяется модельная геометрия, для которой формулируется эталонное волновое уравнение, приводятся его точные решения, описывающие волновые поля в области линейного взаимодействия. В разд. 4 рассматривается асимптотическое поведение полученных решений вдали от области взаимодействия, на-

ходится связь волновых полей в областях применимости геометрической оптики до и после области линейного взаимодействия. В разд. 5 приведены примеры распределения полей в трансформированном и отраженном пучках для различных падающих пучков. В Заключение подводятся итоги работы. В Приложении приводятся детали опубликованного нами ранее [26] решения эталонного уравнения.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ О- И Х-ВОЛН В ДВУМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Известно, что основные свойства процесса О–Х-трансформации могут быть качественно описаны в рамках приближения геометрической оптики [3–7, 15–18]. Дисперсионное соотношение для холодной магнитоактивной плазмы [28] может быть записано в следующем виде:

$$N_{\perp}^2 [(\varepsilon_+ - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_- - N^2) + (\varepsilon_- - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_+ - N^2)] = 2\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_+ - N^2)(\varepsilon_- - N^2). \quad (1)$$

Здесь  $N_{\perp}$  и  $N_{\parallel}$  — волновые числа, отвечающие соответственно перпендикулярной и параллельной компонентам волнового вектора по отношению к внешнему магнитному полю;  $N^2 = N_{\perp}^2 + N_{\parallel}^2$ ;  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы в стиковом представлении [28]:

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (2)$$

$\omega_{ce}$  и  $\omega_{pe}$  — соответственно электронная циклотронная и ленгмюровская частоты. О–Х-трансформация происходит в окрестности поверхностей отсечки для О-волн и медленных Х-волн (поверхностей  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$ ). При этом можно считать, что выполняются следующие неравенства:

$$N_{\perp} \ll N_{\parallel}, \quad |\varepsilon_{\parallel}| \ll 1, \quad |\varepsilon_{\pm}| \gtrsim 1. \quad (3)$$

С учетом этих неравенств приближенное решение дисперсионного уравнения (1) в окрестности области трансформации может быть получено в виде [18]

$$N_{\perp}^2 \approx 2\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2)/\varepsilon_+. \quad (4)$$

В областях, где  $N_{\perp}^2 > 0$ , это решение отвечает левополяризованным электромагнитным волнам. В традиционной терминологии это О-волна при  $\varepsilon_{\parallel} > 0$  и

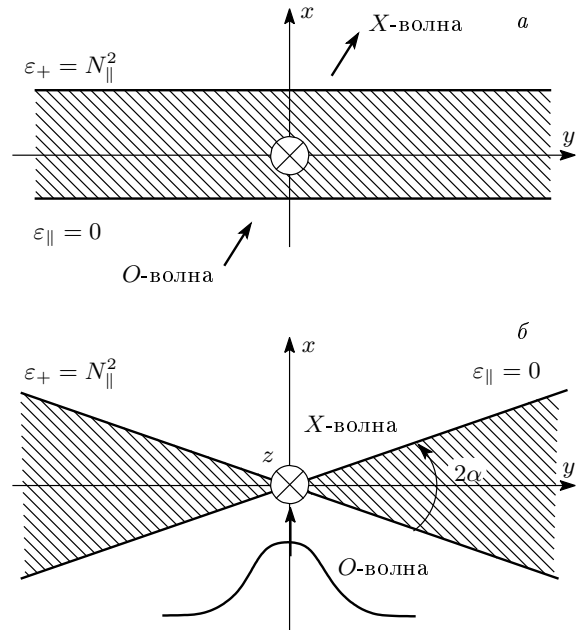


Рис. 1. Поверхности отсечки  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$  в одномерной геометрии (а), когда плотность плазмы (и, вообще говоря, напряженность магнитного поля) изменяются вдоль оси  $x$ , магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , и в двумерной геометрии (б), когда плотность плазмы и напряженность магнитного поля изменяются в плоскости  $xy$ , магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Область непропускания левополяризованных волн заштрихована

$\varepsilon_+ > N_{\parallel}^2$  (когда плотность плазмы меньше критической) и Х-волна при  $\varepsilon_{\parallel} < 0$  и  $\varepsilon_+ < N_{\parallel}^2$  (когда плотность плазмы выше критической) [3]. Неравенство  $\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2) < 0$  определяет область непрозрачности для левополяризованных волн.

Структура области трансформации в приближении плоскостойкой плазмы приведена на рис. 1а. Области распространения О- и Х-волн с фиксированным продольным волновым числом разделены областью непрозрачности, границами которой служат плоскопараллельные поверхности отсечки  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$ . Ширина области непрозрачности зависит от значения волнового числа. При некотором оптимальном значении продольного волнового числа  $N_{\parallel}$  плоскости отсечки могут совпадать (при падении волны с  $N_y = 0$ ), тогда область непрозрачности отсутствует, что соответствует случаю полной трансформации. Когда ширина области непрозрачности не равна нулю, трансформацию можно рассматривать как туннелирование электромагнитного излучения через область непрозрачности [15–18].

Как видно из рис. 1б, ситуация может оказаться топологически иной в двумерном или трехмерном случае, когда поверхности отсечки пересекаются в пространстве вдоль некоторой линии. Для луча, проходящего через эту линию, область непрозрачности отсутствует, что формально соответствует случаю полной трансформации. Причем, в отличие от одномерной модели, такой луч существует не для одного оптимального значения  $N_{\parallel}$ , а для некоторого непрерывного диапазона значений  $N_{\parallel}$ , при которых существует линия пересечения поверхностей отсечки. Изменение  $N_{\parallel}$  в этом диапазоне приводит только к смещению области трансформации вслед за линией пересечения поверхностей отсечки. Конечно, описание в рамках геометрической оптики становится некорректным в области трансформации, где  $N_{\perp} \rightarrow 0$ . Однако полное волновое исследование эффекта трансформации дает сходный результат: для каждого значения  $N_{\parallel}$ , при котором поверхности отсечки пересекаются, может быть найдено оптимальное распределение поля, при котором падающий волновой пучок проходит область взаимодействия без отражения, т. е. испытывает полную трансформацию [21–26]. Наряду с этим существуют и распределения волнового поля, приводящие к частичному отражению падающего пучка [23–27].

Необходимо отметить, что изображенная на рис. 1б область двумерной трансформации не обладает симметрией относительно перестановки поверхностей отсечки  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_{+} = N_{\parallel}^2$ , поскольку градиенты плотности плазмы и напряженности магнитного поля имеют конечные проекции на ось  $y$ . Решение волнового уравнения зависит от того, правую или левую тройку образуют векторы  $\nabla\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\nabla\varepsilon_{+}$  и направление внешнего магнитного поля. В частности, эта тройка изменяется при смене направления магнитного поля на противоположное, что, согласно теореме взаимности для гиротропных сред, эквивалентно смене направления распространения волн на противоположное [3]. Это приводит к тому, что коэффициенты трансформации для пучков, распространяющихся в сторону увеличения плотности плазмы (О–Х-трансформация) и в противоположном направлении (Х–О-трансформация) оказываются различными без нарушения теоремы взаимности [26].

Как уже отмечалось во Введении, авторы пришли к постановке неоднородной задачи, рассматривая особенности О–Х-трансформации в тороидальных магнитных ловушках. В этих установках поверхности  $\varepsilon_{\parallel} = 0$ , которые определяются только распределением плотности плазмы, совпадают с

магнитными поверхностями. Поверхности отсечки  $\varepsilon_{+} = N_{\parallel}^2$ , зависящие также и от внешнего магнитного поля, из-за вариации напряженности магнитного поля на магнитной поверхности не совпадают с поверхностями  $\varepsilon_{\parallel} = 0$ . Исключение составляют области, близкие к экваториальной плоскости, где обе поверхности отсечки почти параллельны, как это изображено на рис. 1а. Вне экваториальной плоскости эффективной трансформации соответствует схема, изображенная на рис. 1б, когда поверхности отсечки пересекаются. Это означает, что даже в пренебрежении эффектами кривизны этих поверхностей трансформация может носить принципиально двумерный характер. Для получения упрощенного волнового уравнения, рассмотренного в следующем разделе, мы вынуждены допустить два упрощающих обстоятельства. Во-первых, мы пренебрегаем кривизной поверхностей отсечки в некоторой окрестности области трансформации, считая, что все явления, связанные с О–Х-трансформацией, происходят в локализованной области, размеры которой много меньше характерных масштабов неоднородности плотности плазмы и магнитного поля в токамаке. Во-вторых, мы предполагаем, что магнитное поле в токамаке представлено только тороидальной компонентой (полоидальное магнитное поле пренебрежимо мало), а следовательно, эффектами, связанными с неоднородностью направления (широм) внешнего магнитного поля, можно пренебречь. Это основное отличие нашей модели от ситуации, рассмотренной в пионерской работе [21]. Оба отброшенных нами неоднородных эффекта топологически не изменяют ситуацию, изображенную на рис. 1б, хотя, возможно, они могут оказаться существенными при точном количественном анализе процесса О–Х-трансформации в токамаках.

Более подробно вопросы применимости нашей модели в тороидальных установках рассмотрены в работе [26]. Здесь же хотелось бы отметить, что предложенная ниже модель достаточно проста, а потому универсальна. Полученные результаты могут рассматриваться как решение новой эталонной задачи, которое, как нам кажется, может найти применение за пределами чисто термоядерных приложений.

### 3. ЭТАЛОННОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

С учетом предположений относительно структуры магнитного поля, определенных в предыдущем разделе, мы приходим к упрощенной модели двумерной области трансформации, в которой направление

магнитного поля постоянно, модуль магнитного поля и плотность плазмы меняются в плоскости, ортогональной этому направлению. Выберем систему координат в соответствии с рис. 1б: ось  $z$  направим вдоль магнитного поля, ось  $y$  расположим в области непрозрачности, а ось  $x$  расположим в области распространения левополяризованных волн и направим в сторону увеличения плотности плазмы по биссектрисе угла между поверхностями отсечки. Формально единичный вектор вдоль оси  $x$  можно определить как

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{e}_{+}}{|\mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{e}_{+}|},$$

где

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \frac{\nabla \varepsilon_{\parallel}}{|\nabla \varepsilon_{\parallel}|}, \quad \mathbf{e}_{+} = \frac{\nabla \varepsilon_{+}}{|\nabla \varepsilon_{+}|}.$$

Распространение волнового пучка в положительную сторону вдоль оси  $x$  соответствует случаю О-Х-трансформации, в отрицательную — случаю Х-О-трансформации. Начало координат  $(x, y)$  выберем на линии пересечения поверхностей отсечки, т. е. в точке, где линии  $\varepsilon_{\parallel}(x, y) = 0$  и  $\varepsilon_{+}(x, y) = N_{\parallel}^2$  пересекаются. Поверхности отсечки в окрестности области трансформации будем считать плоскими.

Пространственное распределение монохроматического электромагнитного поля определяется волновым уравнением

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k_0^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

где  $k_0 = \omega/c$ , а  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Будем работать в стиковом представлении для компонент электрического поля

$$E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}, \quad E_{\parallel} = E_z$$

(направление вращения компонент  $E_{+}$  и  $E_{-}$  совпадает с циклотронным вращением соответственно ионов и электронов). Тогда векторы напряженности и индукции электрического поля примут следующий вид [28]:  $\mathbf{E} = (E_{+}, E_{-}, E_{\parallel})$  и  $\hat{\varepsilon} \mathbf{E} = (\varepsilon_{+} E_{+}, \varepsilon_{-} E_{-}, \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel})$ , компоненты тензора диэлектрической проницаемости определены выражением (2). Рассматриваемая модель однородна вдоль оси  $z$ , поэтому продольное волновое число  $N_{\parallel}$  сохраняется, как и в одномерном приближении. Соответственно, решение волнового уравнения можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, N_{\parallel}) \exp(ik_0 N_{\parallel} z). \quad (6)$$

Заметим, что здесь расположение начала координат  $(x, y)$  зависит от продольного волнового числа  $N_{\parallel}$ . В

общем случае электрическое поле с произвольным распределением по координате  $z$  может быть найдено как свертка частных решений (6) с некоторой весовой функцией  $G(N_{\parallel})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X, Y, z) &= \\ &= \int G(N_{\parallel}) \mathbf{F}(X - \Delta X(N_{\parallel}), Y - \Delta Y(N_{\parallel}), N_{\parallel}) \times \\ &\quad \times \exp(ik_0 N_{\parallel} z) dN_{\parallel}. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь  $(X, Y)$  — некоторая лабораторная система координат, не зависящая от  $N_{\parallel}$ , а  $\Delta X(N_{\parallel})$  и  $\Delta Y(N_{\parallel})$  определяют сдвиг начала локальной системы координат  $(x, y)$  в зависимости от  $N_{\parallel}$ .

Как обычно, дальнейшее упрощение волнового уравнения возможно, если предположить, что среда является плавно неоднородной, т. е. выполняется неравенство  $\lambda/L \ll 1$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения,  $L$  — характерный масштаб неоднородности компонент диэлектрического тензора. Подставляя поле в виде (6) в уравнение (5) и используя стандартную процедуру укорочения волнового уравнения по малому параметру  $\lambda/L$  (см., например, [3]), можно получить следующую систему уравнений для компонент электрического поля  $F_{+}$  и  $F_{\parallel}$ :

$$\begin{cases} \sqrt{2} k_0 (\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2) F_{+} = N_{\parallel} \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) F_{\parallel}, \\ \sqrt{2} k_0 \varepsilon_{\parallel} F_{\parallel} = N_{\parallel} \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F_{+}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь учтены только члены первого порядка по малым параметрам, определяемым следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{F_{+, \parallel}} \frac{\partial F_{+, \parallel}}{\partial x} \right| \ll k_0 N_{\parallel}, \quad \left| \frac{1}{F_{+, \parallel}} \frac{\partial F_{+, \parallel}}{\partial y} \right| \ll k_0 N_{\parallel}, \\ |\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2| \ll 1, \quad |\varepsilon_{\parallel}| \ll 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Первые два неравенства соответствуют слегка модифицированному критерию применимости геометрической оптики,  $\lambda/L \ll 1$ , а два оставшихся неравенства ограничивают рассматриваемую область малой окрестностью точки трансформации  $x = y = 0$ . Компонента поля  $F_{-}$  в этом приближении может считаться равной нулю и в дальнейшем не рассматривается.

Если оставить только линейные члены в разложении  $\varepsilon_{\parallel}(x, y)$  и  $\varepsilon_{+}(x, y)$  в окрестности начала координат,

$$\varepsilon_{\parallel} \approx \nabla \varepsilon_{\parallel} \cdot \mathbf{r}, \quad \varepsilon_{+} \approx N_{\parallel}^2 + \nabla \varepsilon_{+} \cdot \mathbf{r},$$

то система (8) может быть приведена к «каноническому» виду:

$$\begin{cases} (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) A_+ = - \left( i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'} \right) A_{\parallel}, \\ (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) A_{\parallel} = - \left( i \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \right) A_+. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь введены новые нормированные компоненты волнового поля и координаты:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{F_+}{|\nabla \varepsilon_+|^{1/2}}, & A_{\parallel} &= \frac{F_{\parallel}}{|\nabla \varepsilon_{\parallel}|^{1/2}}, \\ x' &= \frac{x}{L_{\nabla}}, & y' &= \frac{y}{L_{\nabla}}, \\ L_{\nabla} &= \left( \frac{\varepsilon_+}{2k_0^2 |\nabla \varepsilon_+| |\nabla \varepsilon_{\parallel}|} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Угол  $\alpha$  определяется как половина угла между направлениями  $\nabla \varepsilon_+$  и  $\nabla \varepsilon_{\parallel}$ , как это изображено на рис. 1б. Если учесть, что в окрестности области трансформации

$$|\nabla \varepsilon_{\parallel}| \approx L_N^{-1}, \quad \frac{|\nabla \varepsilon_+|}{\varepsilon_+} \approx \frac{\omega}{\omega_{ce}} \frac{1}{L_N} + \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{-1} \frac{1}{L_B},$$

где  $L_N$  и  $L_B$  — характерные масштабы неоднородности плотности плазмы и напряженности магнитного поля в окрестности начала координат, то выражение для нормирующей длины можно привести к более удобному виду:

$$\begin{aligned} L_{\nabla} &\approx L_N (k_0 L_N)^{-1/2} \left( \frac{\omega_{ce}}{2\omega} \right)^{1/4} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{L_N}{L_B} \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right)^{-1/4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для оценок в токамаке можно считать, что

$$L_N \ll L_B, \quad L \approx L_N,$$

$$L_{\nabla} \approx L_N (k_0 L_N)^{-1/2} (\omega_{ce}/2\omega)^{1/4}.$$

Члены в левой части системы (10), пропорциональные  $y' \sin \alpha$ , отвечают за двумерный характер трансформации. При  $\alpha \rightarrow 0$  система (10) переходит в эталонное волновое уравнение, описывающее трансформацию плоской волны с оптимальным значением  $N_{\parallel}$  в одномерном приближении [15, 16]. Заметим, что при  $\alpha \lesssim \lambda/L$  описываемые системой (10) двумерные эффекты могут оказаться сравнимыми с отброшенными нами эффектами, связанными с кривизной поверхностей отсечки.

Решение системы (10) удобно искать в виде суммы двух компонент, соответствующих волнам, распространяющимся в противоположных направлениях вдоль оси  $x'$ . Можно показать, что в зоне геометрической оптики для плоских волн, распространяю-

щихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $x'$ , выполняется соотношение

$$\frac{E_+}{E_{\parallel}} = \pm \frac{N_{\perp}}{\sqrt{2} N_{\parallel}} \frac{\varepsilon_{\parallel} - N^2}{\varepsilon_+ - N^2} \approx \mp \sqrt{\frac{|\nabla \varepsilon_{\parallel}|}{|\nabla \varepsilon_+|}},$$

что в наших переменных означает  $A_+ = -A_{\parallel}$  для положительного направления и  $A_+ = +A_{\parallel}$  для отрицательного направления. Таким образом, произвольное волновое поле можно представить в виде

$$A_+ = A^t + A^r, \quad A_{\parallel} = A^r - A^t, \quad (13)$$

где компоненты  $A^t$  и  $A^r$  соответствуют волновым пучкам, распространяющимся соответственно в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $x'$  в области геометрической оптики, а точнее, в области применимости ВКБ-приближения для уравнения (10). Для определенности будем рассматривать случай О-Х-трансформации: пучок вводится в область трансформации со стороны меньшей плотности плазмы и распространяется в положительном направлении вдоль оси  $x'$  в направлении увеличения плотности плазмы. В этом случае в ВКБ-области слагаемое  $A^t$  описывает падающую (обыкновенную) волну при  $x' < 0$  и прошедшую (трансформированную) волну при  $x' > 0$ , а слагаемое  $A^r$  описывает отраженную (обыкновенную) волну, распространяющуюся только при  $x' < 0$ . Это позволяет простым и естественным образом сформулировать необходимые для решения системы (10) граничные условия при  $x' \rightarrow \pm\infty$ :  $A^t(-\infty)$  задается падающим пучком и  $A^r(+\infty) = 0$ . Принимая во внимание, что укороченное волновое уравнение справедливо только в некоторой области в окрестности точки трансформации, предел  $x' \rightarrow \pm\infty$  надо понимать как сшивку асимптотик решений эталонного волнового уравнения с соответствующими ВКБ-решениями полного волнового уравнения вне области трансформации. Заметим, что приведенное разделение волн на падающую, прошедшую и отраженную, вообще говоря, неприменимо в области линейного взаимодействия,  $|x'| \lesssim 1$ .

После перехода к компонентам  $A^t$  и  $A^r$  система эталонных уравнений (10) может быть решена методом разделения переменных. Полное решение системы было найдено в нашей работе [26], основные детали этого решения приведены также в Приложении. Полученное решение, локализованное вдоль оси  $y'$ , соответствующее фиксированному значению  $N_{\parallel}$

и выраженное через компоненты  $A^t$  и  $A^r$ , можно представить в следующем виде:

$$A^t(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n \tilde{D}_{iv_n}, \quad (14)$$

$$A^r(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_{n+1} h_n, \quad \alpha > 0 \\ -A_n h_{n+1}, \quad \alpha < 0 \end{array} \right\} \sqrt{iv_n^+} \tilde{D}_{iv_n^+ - 1}. \quad (15)$$

Здесь  $A_n$  — произвольные постоянные,

$$h_n(y') = \frac{\sin^{1/4} |\alpha|}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\sin |\alpha| \frac{y'^2}{2}\right) \times H_n\left(y' \sqrt{\sin |\alpha|}\right), \quad (16)$$

$$\tilde{D}_{iv}(x') = D_{iv}\left(x' \sqrt{2 \cos \alpha} \exp \frac{i\pi}{4}\right),$$

$H_n$  — полином Эрмита,  $D_{iv}$  — одна из так называемых функций параболического цилиндра [29–31] с мнимым индексом, определяемым следующими выражениями:

$$\nu_n = \begin{cases} n \operatorname{tg} \alpha, & \alpha > 0, \\ (n+1) \operatorname{tg} |\alpha|, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\nu_n^+ = \begin{cases} \nu_{n+1}, & \alpha > 0 \\ \nu_n, & \alpha < 0 \end{cases} = (n+1) \operatorname{tg} |\alpha|.$$

Отметим, что полученное решение имеет разную структуру в зависимости от знака  $\alpha$ . Это связано с присутствующей в исходной геометрии задачи и упоминавшейся во втором разделе асимметрией относительно перестановки поверхностей  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$  (это эквивалентно смене знака  $\alpha$ ).

Продольная, т. е. вдоль основного направления распространения  $x'$ , структура волнового поля определяется функциями параболического цилиндра  $\tilde{D}_{iv}(x')$  от сложного аргумента. Поперечная структура волнового поля определяется функциями  $h_n(y')$ . Эти функции образуют полный ортогональный базис в смысле скалярного произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n h_m dy' = \delta_{nm}.$$

Данное обстоятельство позволяет связать коэффициенты  $A_n$  с распределением компоненты поля  $A^t = (A_+ - A_{\parallel})/2$  в произвольном сечении  $x'_1$ . Действительно, умножив правую и левую части соотно-

шения (14) на  $h_n(y'_1)$  и проинтегрировав по  $y'_1$ , можно получить, что

$$A_n = \frac{1}{\tilde{D}_{iv_n}(x'_1)} \int_{-\infty}^{\infty} A^t(x'_1, y'_1) h_n(y'_1) dy'_1. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что интеграл по  $y'_1$  пропорционален  $\tilde{D}_{iv_n}(x'_1)$ ; поэтому, как и следовало ожидать, константы  $A_n$  не зависят от продольной координаты  $x'_1$ . Теперь решения (14) и (15) можно представить в виде отображения волнового поля с одного сечения ( $x'_1$ ) на другое сечение ( $x'_2$ ):

$$A^{t,r}(x'_2, y'_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A^t(x'_1, y'_1) G^{t,r}(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) dy'_1, \quad (19)$$

где

$$G^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(y'_1) h_n(y'_2) \frac{\tilde{D}_{iv_n}(x'_2)}{\tilde{D}_{iv_n}(x'_1)}, \quad (20)$$

$$G^r(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} h_{n+1}(y'_1) h_n(y'_2), \quad \alpha > 0 \\ -h_n(y'_1) h_{n+1}(y'_2), \quad \alpha < 0 \end{array} \right\} \times \sqrt{iv_n^+} \frac{\tilde{D}_{iv_n^+ - 1}(x'_2)}{\tilde{D}_{iv_n^+ - 1}(x'_1)}. \quad (21)$$

Функции  $G^t$  и  $G^r$  по сути являются функциями Грина для поля проходящего и отраженного излучения, которое полностью определяется распределением компоненты  $A^t$  в некотором сечении. Напомним, что в ВКБ-области эта компонента соответствует падающей волне при  $x' \rightarrow -\infty$ . Как и в выражении (18), зависимость от продольной координаты  $x'_1$  в правой части (19) пропадает после взятия интеграла по  $y'_1$ .

При пересчете произвольных волновых полей необходимо учитывать смещение локальной системы координат  $(x', y')$  при разных значениях продольного показателя преломления  $N_{\parallel}$ . Пусть  $(X, Y)$  — лабораторная система координат, соответствующая некоторому определенному значению  $N_{\parallel}^0$ . Тогда точка пересечения поверхностей  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$  в безразмерных координатах будет определяться как

$$\Delta X = -\frac{\Delta N_{\parallel} (2N_{\parallel}^0 + \Delta N_{\parallel})}{2L_{\nabla} |\nabla \varepsilon_+| \cos \alpha}, \quad (22)$$

$$\Delta Y = -\frac{\Delta N_{\parallel} (2N_{\parallel}^0 + \Delta N_{\parallel})}{2L_{\nabla} |\nabla \varepsilon_+| \sin \alpha},$$

где  $\Delta N_{\parallel} = N_{\parallel} - N_{\parallel}^0$ . Связь локальной и лабораторной систем координат дается соотношениями

$$x' = X - \Delta X, \quad y' = Y - \Delta Y. \quad (23)$$

Учитывая это обстоятельство и соотношение (7), поля в сечениях  $X_1$  и  $X_2$  соответственно связаны следующим образом:

$$E_2^{t,r}(Y_2, Z_2) = \frac{k_0 L_{\nabla}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1^t(Y_1, Z_1) \times \\ \times G^{t,r}(X_1 - \Delta X, X_2 - \Delta X, Y_1 - \Delta Y, Y_2 - \Delta Y) \times \\ \times \exp[ik_0 L_{\nabla} N_{\parallel}(Z_2 - Z_1)] dY_1 dZ_1 dN_{\parallel}. \quad (24)$$

Это выражение можно преобразовать к чуть более удобной для практических вычислений форме, если переставить местами  $Y_1$  и  $Y_1 + \Delta Y$  в подынтегральном выражении:

$$E_2^{t,r}(Y_2, Z_2) = \frac{k_0 L_{\nabla}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1^t(Y_1 + \Delta Y, Z_1) \times \\ \times G^{t,r}(X_1 - \Delta X, X_2 - \Delta X, Y_1, Y_2 - \Delta Y) \times \\ \times \exp[ik_0 L_{\nabla} N_{\parallel}(Z_2 - Z_1)] dY_1 dZ_1 dN_{\parallel}. \quad (25)$$

Зависимость от  $X_1$  в правых частях приведенных выше выражений пропадает по тем же причинам, что и в выражениях (18) и (19).

В итоге мы определили структуру волнового поля во всей области применимости системы эталонных уравнений (10). Отметим, что аналогично может быть рассмотрен и случай X-O-трансформации, когда падающая волна распространяется в отрицательном направлении оси  $x$  в сторону уменьшения плотности плазмы. Более того, из симметрии уравнений (10) следует, что смена направления распространения вдоль оси  $x$  эквивалентна одновременной смене знака угла  $\alpha$  и направления оси  $y$ , т.е. O-X-трансформация при  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ) с позиций нашего описания есть тоже самое, что и X-O-трансформация при  $\alpha < 0$  ( $\alpha > 0$ ).

#### 4. ФУНКЦИИ ГРИНА ПОЛЕЙ В ВКБ-ОБЛАСТИ

В этом разделе проанализирован важный для практических применений случай, когда оба сечения  $x'_1$  и  $x'_2$  (или  $X_1$  и  $X_2$ ) лежат в ВКБ-области. Это означает, что функции параболического цилиндра, определяющие распределение полей по координате

$x'$ , можно заменить следующими асимптотическими разложениями при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\nu = \text{const}$ :

$$\tilde{D}_{i\nu} \approx z^{i\nu} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{\Gamma(-i\nu)} z^{-i\nu-1} \times \\ \times \exp\left(\pi\nu + \frac{z^2}{4}\right), \quad (26) \\ z = x' \sqrt{2 \cos \alpha} \exp \frac{i\pi}{4},$$

где  $\sigma = 1$  при  $x' < 0$ ,  $\sigma = 0$  при  $x' > 0$  [30, 31]. Ниже будет показано, что для проходящей компоненты поля  $A^t$  наибольший вклад дается первым слагаемым асимптотики (26), а для отраженной компоненты  $A^r$  — вторым слагаемым. Аналогичная ситуация наблюдается и в одномерной теории [16, 18].

Рассмотрим наиболее естественную постановку задачи, в которой по заданному в области  $x'_1 < 0$  падающему излучению восстанавливаются распределения полей в трансформированном пучке после прохождения области линейного взаимодействия ( $x'_2 > 0$ ) и в отраженном от области взаимодействия пучке ( $x'_2 < 0$ ). Для проходящей волны при  $|x'_{1,2}| \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула:

$$\frac{\tilde{D}_{i\nu_n}(x'_2)}{\tilde{D}_{i\nu_n}(x'_1)} \approx \exp\left[i\nu_n \ln \frac{x'_2}{x'_1} + i \frac{x'^2_1 - x'^2_2}{2} \cos \alpha\right]. \quad (27)$$

Воспользовавшись этим представлением и формулой Мелера [30]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n H_n(x) H_n(y) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp \frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1-z^2} \quad (28)$$

для случая, когда

$$z = \exp\left[i \ln \frac{x'_2}{x'_1} \text{tg} |\alpha|\right],$$

можно просуммировать ряд (20) для функции Грина проходящей волны:

$$G^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\pi [1 - \exp(-2\tilde{\pi} \text{tg} \alpha)]}} \times \\ \times \exp\left[i \frac{x'^2_1 - x'^2_2}{2} \cos \alpha - \right. \\ \left. - \frac{(y'^2_1 + y'^2_2) \text{ch}(\tilde{\pi} \text{tg} |\alpha|) - 2y'_1 y'_2 \sin |\alpha|}{2 \text{sh}(\tilde{\pi} \text{tg} |\alpha|)}\right]. \quad (29)$$

Здесь  $\tilde{\pi} = i \ln(x'_1/x'_2)$ . Явное выражение для ядра интегрального оператора (19) позволяет эффективно



пересчитывать распределения полей в области применимости ВКБ-приближения. При этом  $x'_1$  и  $x'_2$  могут быть разделены областью линейного взаимодействия, где ВКБ-приближение нарушается. Так, при сшивке волновых полей до и после области трансформации

$$\tilde{\pi} = \pi + i \ln |x'_1/x'_2| \quad (\text{если } x'_1 < 0 \text{ и } x'_2 > 0). \quad (30)$$

Можно убедиться, что при  $x'_2 \rightarrow +\infty$  отраженная волна спадает в соответствии с асимптотическим законом  $|\tilde{D}_{i\nu_n-1}| \propto 1/x'_2$ , поэтому в дальнейшем при анализе структуры отраженного излучения область  $x'_2 > 0$  рассматриваться не будет. При  $x'_1 < 0$  и  $x'_2 < 0$  для отраженной волны выполняется следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{\tilde{D}_{i\nu_n^+-1}(x'_2)}{\tilde{D}_{i\nu_n^+}(x'_1)} \approx -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1-i\nu_n^+)} \times \exp \left[ -\nu_n^+ \left( \frac{\pi}{2} + i \ln |2x'_1 x'_2 \cos \alpha| \right) + i \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2} \cos \alpha \right]. \quad (31)$$

Из-за гамма-функции в знаменателе правой части (31) нам не удалось получить компактное выражение для суммы по  $n$  в выражении (21), поэтому наиболее удобное выражение для функции Грина отраженной волны в ВКБ-области по-прежнему представляется в виде бесконечной суммы:

$$G^r(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi i\nu_n^+}}{\Gamma(1-i\nu_n^+)} \left\{ \begin{array}{l} -h_{n+1}(y'_1)h_n(y'_2), \quad \alpha > 0 \\ h_n(y'_1)h_{n+1}(y'_2), \quad \alpha < 0 \end{array} \right\} \times \exp \left[ -\nu_n^+ \left( \frac{\pi}{2} + i \ln |2x'_1 x'_2 \cos \alpha| \right) + i \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2} \cos \alpha - \frac{y_1'^2 + y_2'^2}{2} \sin |\alpha| \right]. \quad (32)$$

Эту сумму можно преобразовать к интегралу, воспользовавшись подходящим интегральным представлением гамма-функции и формулой (28), однако получающееся в результате выражение нам представляется менее удобным.

Рассмотрим основные свойства функций Грина (29) и (32). Прежде всего, можно убедиться, что  $G^t \rightarrow \delta(y'_1 - y'_2)$  при  $x'_2 \rightarrow x'_1$ , как этого и следовало ожидать из формы соотношения (19). Простого выражения для  $G^r$  при  $x'_2 \rightarrow x'_1$  нам обнаружить не удалось. Волновой пучок с поперечной структурой, пропорциональной одной из базовых функций  $h_n$ , трансформируется сам в себя,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(y'_1)G^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) dy'_1 = \exp \left( -\tilde{\pi}\nu_n + i \frac{x_1'^2 - x_2'^2}{2} \cos \alpha \right) h_n(y'_2), \quad (33)$$

и отражается в виде «соседней» базовой функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(y'_1)G^r(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) dy'_1 = \frac{\sqrt{2\pi i\nu_n}}{\Gamma(1-i\nu_n)} \times \exp \left[ -\nu_n \left( \frac{\pi}{2} + i \ln |2x'_1 x'_2 \cos \alpha| \right) + i \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2} \cos \alpha \right] \times \begin{cases} -h_{n-1}(y'_2), & \alpha > 0, \\ h_{n+1}(y'_2), & \alpha < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Правая часть выражения (34) равна нулю при  $n = 0$  и  $\alpha > 0$ . Отвечающие базисным функциям коэффициенты трансформации  $T_n$  и отражения  $R_n$  по интенсивности поля могут быть определены как квадраты модулей соответственно коэффициентов перед  $h_n$  и  $h_{n\pm 1}$  [26]:

$$T_n = \exp(-2\pi\nu_n), \quad \text{если } x'_1 < 0, \quad x'_2 > 0, \quad (35)$$

$$R_n = \frac{2\pi\nu_n}{|\Gamma(1-i\nu_n)|^2} \exp(-\pi\nu_n) = 1 - \exp(-2\pi\nu_n), \quad \text{если } x'_1 < 0, \quad x'_2 < 0. \quad (36)$$

В последнем соотношении мы воспользовались тождеством  $\pi\nu_n|\Gamma(1-i\nu_n)|^{-2} = \text{sh}(\pi\nu_n)$  [29]. Из приведенных формул видно, что  $T_n + R_n = 1$ , т. е. полученные решения удовлетворяют правилу сохранения потока энергии<sup>1</sup>. Отметим, что  $\nu_0 = 0$  при  $\alpha > 0$  в случае О-Х-трансформации (и при  $\alpha < 0$  в случае Х-О-трансформации). Это означает существование оптимального пучка с профилем  $h_0(y')$ , который испытывает полную трансформацию при прохождении области линейного взаимодействия. Более детально структура оптимальных пучков, в том числе и с конечным разбросом по  $N_{\parallel}$ , исследована в наших предыдущих работах [23–26].

При  $\alpha \rightarrow 0$  функцию Грина для проходящего пучка можно представить в виде

$$G^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\pi}}} \exp \left[ i \frac{x_1'^2 - x_2'^2}{2} \cos \alpha - \frac{(y'_1 - y'_2)^2}{2\tilde{\pi}} \right]. \quad (37)$$

<sup>1</sup> Закон сохранения энергии здесь имеет тот же вид, что и в одномерном случае для волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ , поскольку рассматриваются ограниченные по  $y$  моды, а среда однородна в направлении  $z$  (поток энергии в направлении  $y$  становится равным нулю при  $y \rightarrow \infty$ , поток энергии в направлении  $z$  сохраняется).

Можно показать, что это выражение в точности соответствует результату одномерной теории (аналогичные выкладки были проделаны для коэффициента трансформации в работе [26]). Напротив, если  $\operatorname{tg} |\alpha|$  в выражении (17) не слишком мал, то коэффициент трансформации (35) быстро убывает, по мере того как  $\pi\nu_n$  возрастает с ростом  $n$ . В этом случае можно построить приближенное выражение для  $G^t$ , отбросив в сумме (20) все члены с  $n > 0$ :

$$G^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) \approx \sqrt{\frac{\sin |\alpha|}{\pi}} \times \exp \left[ -\tilde{\pi}\nu_0 + i \frac{x_1'^2 - x_2'^2}{2} \cos \alpha - \frac{y_1'^2 + y_2'^2}{2} \sin |\alpha| \right]. \quad (38)$$

Это приближение также выполняется, если структура пучка близка к оптимальному профилю.

Заметим, что в выражении (29), справедливым для любого знака  $\alpha$ , от знака  $\alpha$  зависит только предэкспоненциальный множитель. Отсюда, в частности, следует, что

$$G^t(\alpha) = G^t(-\alpha) \exp(\tilde{\pi} \operatorname{tg} \alpha).$$

Если вспомнить, что смена знака  $\alpha$  эквивалентна смене направления трансформации, последнее соотношение можно переписать как

$$G_{OX}^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = G_{XO}^t(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) \exp(\tilde{\pi} \operatorname{tg} \alpha), \quad (39)$$

что является обобщением установленного ранее подобия коэффициентов трансформаций О–Х и Х–О [26]. Поскольку множитель  $\exp(\tilde{\pi} \operatorname{tg} \alpha)$  не зависит от координаты  $y'$ , такое же соотношение должно выполняться в ВКБ-зоне и для распределений полей при условии, что распределения падающего поля при трансформациях О–Х и Х–О одинаковы. Для отраженной волны связь между случаями О–Х- и Х–О-трансформации выглядит иначе. Из определения (21) видно, что смена знака  $\alpha$  эквивалентна перестановке  $y'_1$  и  $y'_2$  и смене знака соответствующей функции Грина:

$$G_{OX}^r(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) = -G_{XO}^r(x'_1, x'_2, y'_2, y'_1). \quad (40)$$

Отсюда следует, при переходе от О–Х- к Х–О-трансформации сохраняется модуль «скалярного» произведения распределений падающего и отраженного волновых пучков:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_{OX}^r(x'_1, y') A^t(x'_2, y') dy' = - \int_{-\infty}^{\infty} A_{XO}^r(x'_1, y') A^t(x'_2, y') dy'. \quad (41)$$

Применимость этого соотношения не ограничена ВКБ-областью; в ВКБ-области появляется дополнительная симметрия — переменные  $x'_1$  и  $x'_2$  внутри каждого интеграла можно переставлять.

Проанализированные в этом разделе асимптотические представления функций Грина для проходящей и отраженной волн могут оказаться весьма полезными при расчетах процессов линейной трансформации волн в системах со сложным неоднородным распределением параметров плазмы (таких как токамаки и стеллараторы). Найденные решения позволяют полностью исключить область линейного взаимодействия волн из рассмотрения, поэтому для расчета полей можно использовать стандартные геометрикооптические или квазиоптические коды. С помощью этих средств сначала определяется структура падающего излучения в некотором сечении  $x'_1$ , отвечающем ВКБ-области эталонной системы (10), затем с помощью функции Грина осуществляется пересчет поля трансформированной волны в сечении  $x'_2$ , лежащем в ВКБ-зоне за областью трансформации; дальнейшая эволюция пучка снова рассматривается в рамках стандартных геометрико- или квазиоптических моделей. Сечения  $x'_1$  и  $x'_2$  необходимо выбирать достаточно близкими к области трансформации, чтобы можно было пренебречь неоднородностями, не учитываемыми в системе эталонных уравнений (10). При необходимости в эту схему можно включить и расчет отраженной волны. В следующем разделе будут рассмотрены несколько примеров, в которых связь волновых полей в ВКБ-областях до и после области линейного взаимодействия удастся записать в достаточно компактном аналитическом виде. Эти результаты также можно использовать для построения и тестирования процедуры сшивки геометрико- или квазиоптических решений на границах области линейной трансформации.

## 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ВКБ-ОБЛАСТИ

В данном разделе наряду с безразмерными координатами мы будем использовать и размерные величины  $y$  и  $z$  (обозначаются, соответственно, без штрихов). В ряде случаев это позволяет сформулировать

результаты в более наглядной форме. Для упрощения нотации перейдем к традиционным обозначениям  $E_i$ ,  $E_r$  и  $E_t$  для электрических полей соответственно в падающем, отраженном и прошедшем пучках.

Изучим сначала особенности поперечного распределения полей. Пусть в некотором сечении  $x_1 = -b$ , лежащем в ВКБ-области, задано распределение поля  $E_i = E_1^i(y, z)$  по апертуре падающего пучка. Рассмотрим распределение поля  $E_r = E_2^r(y, z)$  в отраженном пучке в том же сечении  $x_2 = -b$  и распределение поля  $E_t = E_2^t(y, z)$  в трансформированном пучке в симметричном сечении  $x_2 = b$ . Напомним, что в нашем приближении предполагается линейная зависимость компонент диэлектрического тензора  $\epsilon_+$  и  $\epsilon_{||}$  от координат; в этих условиях выбор симметричного сечения  $x_2 = -x_1$  упрощает сравнение структур полей падающего и трансформированного пучков. Начнем с распределения поля в трансформированном пучке. Пусть падающее излучение задано в виде плоской волны с единичной амплитудой,

$$E_i = \exp \left[ ik_0 N_y y + ik_0 N_{||}^0 z \right]$$

(в неоднородной среде это соответствует выделенной фурье-компоненте пространственного спектра излучения в плоскости, ортогональной направлению  $x$ ). Тогда поле за область трансформации можно определить из соотношений (19) и (29) как

$$E_t = \sqrt{1 + \text{th}(\pi \text{tg} \alpha)} \exp \left[ \phi_0 + ik_0 N_{||}^0 z \right], \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \phi_0 = ik_0 N_y y \text{sch}(\pi \text{tg} |\alpha|) - \\ - \left( \frac{y^2 \sin |\alpha|}{2L_{\nabla}^2} + \frac{k_0^2 N_y^2 L_{\nabla}^2}{2 \sin |\alpha|} \right) \text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|). \end{aligned} \quad (43)$$

Основной двумерный эффект заключается в том, что область трансформации выступает в роли своеобразного пространственного фильтра — за областью трансформации формируется структура, с точностью до множителя  $\text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  повторяющая профиль оптимального пучка с максимальным коэффициентом трансформации, соответствующего  $n = 0$  в разложении (14). Заметим, что этой структуре отвечает конечный поток энергии. Таким образом, в двумерном случае (при  $\alpha \neq 0$ ) коэффициент трансформации плоской волны всегда равен нулю! Однако при переходе к одномерному случаю коэффициент трансформации скачком принимает ненулевое значение при  $\alpha = 0$ . Это видно из того, что при  $\alpha \rightarrow 0$  пропорциональное

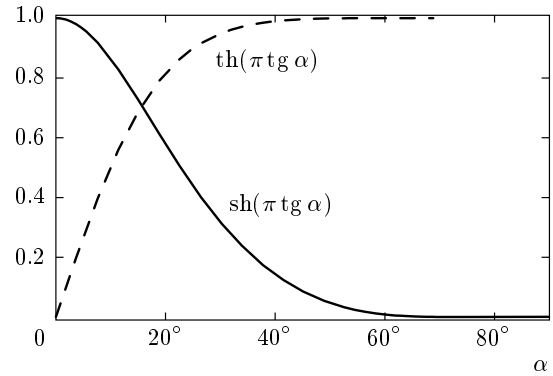


Рис. 2. Функции  $\text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  и  $\text{sch}(\pi \text{tg} |\alpha|)$ , определяющие вклад пространственных гармоник с  $n > 0$  в трансформацию плоской волны

$y^2$  слагаемое в выражении (43), которое приводит к ограничению полного потока энергии в пучке, исчезает; при этом оставшееся слагаемое в точности соответствует коэффициенту трансформации в одномерной теории  $T = \exp(-\pi k_0^2 N_y^2 L_{\nabla}^2 / 2)$  (см., например, [15, 16, 18, 26]). Множители  $\text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  и  $\text{sch}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  в выражении (43) отвечают за вклад пространственных гармоник, пропорциональных  $h_n$ , с  $n > 0$  в сумме (14). Действительно, если пренебречь гармониками с  $n > 0$ , т. е. использовать функцию Грина (38) вместо (29), то можно получить выражение для поля за областью трансформации

$$E_t = \sqrt{2} \exp \left[ -\pi \nu_0 - \left( \frac{y^2 \sin |\alpha|}{2L_{\nabla}^2} + \frac{k_0^2 N_y^2 L_{\nabla}^2}{\sin |\alpha|} \right) + ik_0 N_{||} z \right], \quad (44)$$

соответствующее выражениям (42), (43) при  $\text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|) \rightarrow 1$  и  $\text{sch}(\pi \text{tg} |\alpha|) \rightarrow 0$ . Графики функций  $\text{th}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  и  $\text{sch}(\pi \text{tg} |\alpha|)$  приведены на рис. 2. Из рисунка видно, что гармоники с  $n > 0$  можно не учитывать лишь при достаточно больших углах между поверхностями отсечки,  $\alpha \geq \pi/4$ . При уменьшении  $\alpha$  вклад высоких гармоник возрастает. Отметим, в частности, что формула (44) не дает правильного предельного перехода к одномерному случаю.

Допустим теперь, что падающее поле задано гауссовым пучком общего вида:

$$E_i = \exp \left[ ik_0 N_y y + ik_0 N_{||}^0 z - \frac{(y-y_0)^2}{2a_y^2} - \frac{z^2}{2a_z^2} \right]. \quad (45)$$

Напомним, что система координат введена таким

образом, что ее начало совпадает с точкой пересечения поверхностей  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  и  $\varepsilon_{+} = (N_{\parallel}^0)^2$ . Поле в пучке после прохождения области трансформации можно определить с помощью соотношения (25), в котором примем  $X_1 = -b/L_{\nabla}$ ,  $X_2 = b/L_{\nabla}$ , где  $b$  характеризует ширину области линейного взаимодействия, выраженную в размерных единицах. Будем считать, что размер области взаимодействия достаточно большой,  $b/L_{\nabla} \gg |\Delta X|$ , в этом случае функция Грина (29), определяющая ядро интегрального преобразования (25), упрощается:

$$G^t(\dots) \approx \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\pi [1 - \exp(-2\pi \operatorname{tg} \alpha)]}} \times \exp \left[ i \frac{2b}{L_{\nabla}} \Delta X \cos \alpha - \frac{(Y_1^2 + (Y_2 - \Delta Y)^2) \operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|) - 2Y_1(Y_2 - \Delta Y)}{2 \operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)} \sin |\alpha| \right]. \quad (46)$$

Это выражение получено с учетом того, что можно пренебречь мнимым слагаемым  $i \ln |x'_1/x'_2| \approx 2i \Delta X L_{\nabla} / b \ll 1$  в выражении (30) и считать  $\tilde{\pi} \approx \pi$ . Подставляя (45) и (46) в тройной интеграл (25), можно получить следующие выражения для поля в точке  $x_2 = b$  за областью трансформации:

$$E_t = \delta_y \delta_z \sqrt{1 + \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg} \alpha)} \times \exp \left[ \delta_y^2 \phi_0 + \phi_y + \phi_z + i k_0 N_{\parallel}^0 z \right], \quad (47)$$

$$\phi_y = i(1 - \delta_y^2) k_0 N_y y_0 - \frac{\delta_y^2}{2a_y^2} (y^2 - 2yy_0 \operatorname{sch}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|) + y_0^2), \quad (48)$$

$$\phi_z = -\frac{\delta_z^2}{2a_z^2} (z - \Delta z + i\psi)^2, \quad (49)$$

$$\delta_y = (1 + L_{\nabla}^2 a_y^{-2} \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|) \sin^{-1} |\alpha|)^{-1/2}, \quad (50)$$

$$\delta_z = \left( 1 + (k_0 L_{\nabla} a_z)^{-2} |\nabla \varepsilon_{+}|^{-1} \times \left( 2ib + (1 - \delta_y^2) (N_{\parallel}^0)^2 |\nabla \varepsilon_{+}|^{-1} \times \left( L_{\nabla}^{-2} a_y^2 + 2 \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \pi \operatorname{tg} |\alpha| \right) \sin^{-1} |\alpha| \right) \right) \right)^{-1/2}, \quad (51)$$

$$\Delta z = N_{\parallel}^0 L_{\nabla}^{-2} |\nabla \varepsilon_{+}|^{-1} \times \left( 2bk_0^{-1} + (1 - \delta_y^2) N_y a_y^2 \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \pi \operatorname{tg} \alpha \right) \right), \quad (52)$$

$$\psi = (1 - \delta_y^2) N_{\parallel}^0 k_0^{-1} L_{\nabla}^{-2} |\nabla \varepsilon_{+}|^{-1} \times \left[ L_{\nabla}^{-2} a_y^2 y \sin \alpha + (y + y_0) \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \pi \operatorname{tg} \alpha \right) \right]. \quad (53)$$

Здесь  $\phi_0$ ,  $\phi_y$  и  $\phi_z$  — слагаемые, отвечающие соответственно за вклад плоской волны и гауссовой структуры поля в  $y$ - и  $z$ -направлениях. Вклад плоской волны  $\phi_0$  определяется соотношением (43). Для пучков, неограниченных в  $y$ -направлении, справедливы равенства  $a_y = \infty$ ,  $\phi_y = 0$ ,  $\delta_y = 1$ ; для пучков, неограниченных в  $z$ -направлении,  $a_z = \infty$ ,  $\phi_z = 0$ ,  $\delta_z = 1$ . Вообще говоря, параметры  $a_y$  и  $a_z$  могут быть комплексными, что позволяет применять полученные соотношения для гауссовых пучков с произвольными фокусировкой, астигматизмом и направлением распространения, однако ниже мы ограничимся анализом случая, когда  $a_y$  и  $a_z$  принимают действительные значения. При выводе соотношений (47)–(53) мы пренебрегли членами, пропорциональными  $(\Delta N_{\parallel})^4$  в аргументе экспоненты при интегрировании по  $N_{\parallel}$ , что накладывает довольно слабые ограничения на область допустимых параметров:

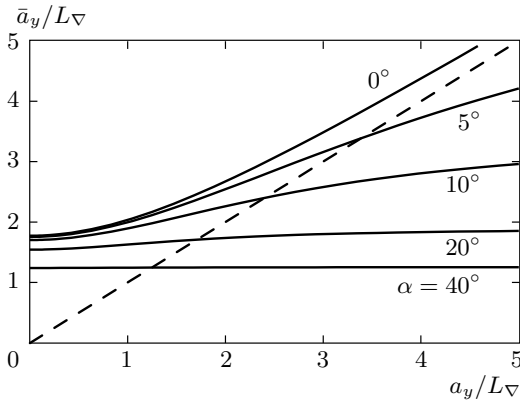
$$\Delta N_{\parallel} \approx (k_0 a_z)^{-1} \ll \ll \max \left( 2N_{\parallel}^0, \sqrt{2a_y |\nabla \varepsilon_{+}| \sin |\alpha|} \right). \quad (54)$$

В этом приближении гауссова структура пучка сохраняется при трансформации, хотя, конечно, параметры пучка меняются.

В частности, если пренебречь ограниченностью падающего пучка в  $z$ -направлении, эффективную ширину трансформированного пучка в  $y$ -направлении можно определить из соотношения  $\delta_y^2 \phi_0 + \phi_y = -y^2 / 2\bar{a}_y^2 + \dots$  как

$$\bar{a}_y^2 = a_0^2 \frac{a_y^2 + a_0^2 \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)}{a_0^2 + a_y^2 \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)}. \quad (55)$$

Здесь  $a_0 = L_{\nabla} / \sin^{1/2} |\alpha|$  соответствует ширине оптимального гауссова пучка, испытывающего полную трансформацию при прохождении области взаимодействия. Зависимость  $\bar{a}_y(a_y)$  для различных значений угла  $\alpha$  приведена на рис. 3. Независимо от значения  $\alpha$  ширина трансформированного пучка не может быть меньше  $L_{\nabla}$ . Величина  $\bar{a}_y$  монотонно возрастает с увеличением ширины исходного пучка  $a_y$ , изменяясь при этом в ограниченном интервале от  $a_0 \operatorname{th}^{1/2}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)$  при  $a_y = 0$  до  $a_0 \operatorname{th}^{-1/2}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)$  при  $a_y = \infty$ . Заметим, что величина  $a_0 \operatorname{th}^{-1/2}(\pi \operatorname{tg} |\alpha|)$  соответствует ширине пучка,



**Рис. 3.** Зависимости ширины трансформированного пучка  $\bar{a}_y$  от ширины падающего гауссова пучка  $a_y$  при различных значениях угла  $\alpha$ . Размеры пучков нормированы на характерный масштаб  $L_{\nabla}$ , определенный соотношением (12). Размер оптимального пучка определяется точкой пересечения кривых с линией  $\bar{a}_y = a_y$  (штриховая)

получающегося в результате трансформации плоской волны и определенных выражениями (42) и (43). Если ширина падающего пучка  $a_y < a_0$ , то при прохождении области трансформации пучок расширяется, если  $a_y > a_0$  — сжимается; оптимальный пучок с  $a_y = a_0$  проходит без изменений. Таким образом, «пространственный фильтр», формирующийся в двумерно-неоднородной области линейного взаимодействия, навязывает определенный пространственный масштаб по  $y$ , слабо зависящий от исходной ширины падающего пучка при условии, что угол  $\alpha$  не слишком мал. Можно также показать, что ширина трансформированного пучка не может быть меньше  $\bar{a}_y$  и с учетом ограниченности пучка в  $z$ -направлении.

При прохождении области трансформации ограниченный вдоль оси  $z$  гауссов пучок сдвигается на величину  $\Delta z$  (52). Первое слагаемое в выражении для  $\Delta z$  возникает вследствие фазовой модуляции, пропорциональной  $\Delta X$ , в (46) и в точности соответствует известному геометрикооптическому решению для трассы «оптимального» пучка [18], второе слагаемое связано с фазовой модуляцией вдоль оси  $y$  падающего пучка и возникает вследствие зависимости  $\Delta Y$  от  $N_{\parallel}$  в (25). Заметим, что мнимое слагаемое  $i\psi$  (53) описывает в том числе и дополнительную фазовую модуляцию вида  $\exp(-iyz/a_{yz}^2)$ , возникающую для ограниченных в  $z$ -направлении пучков.

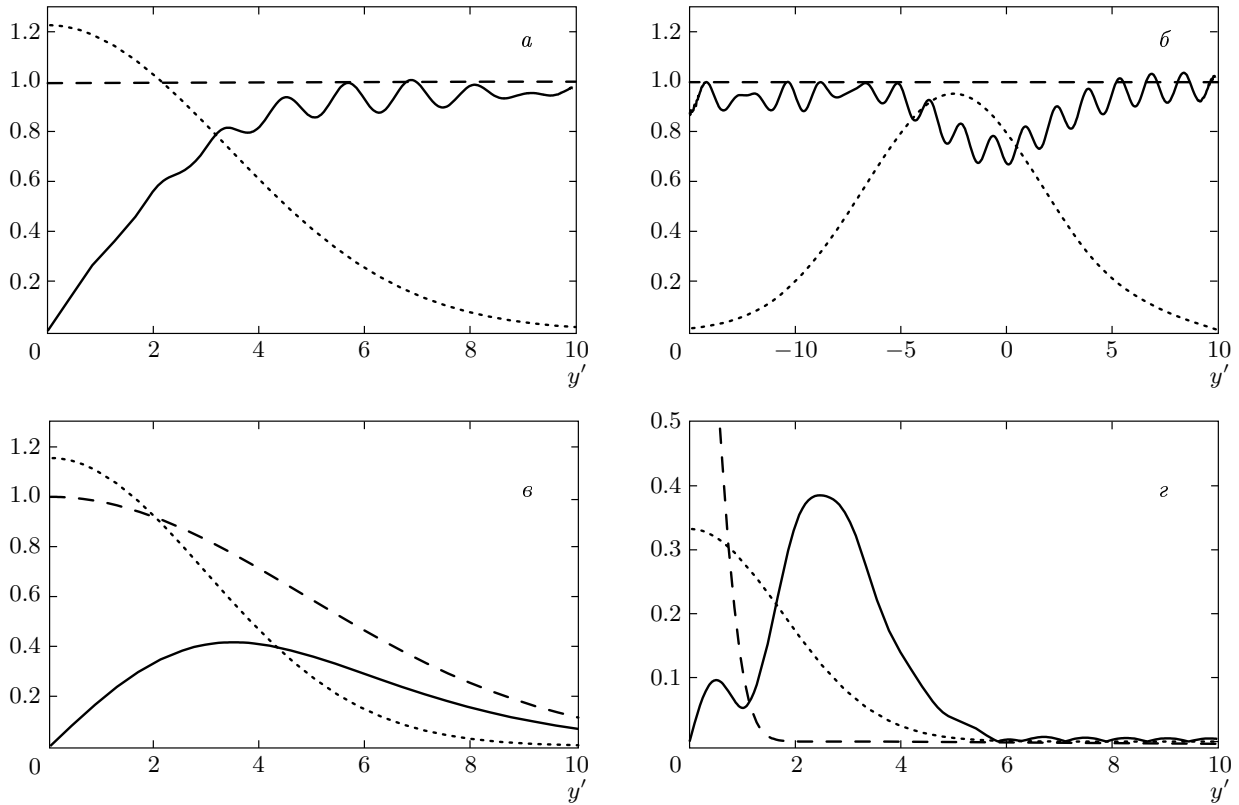
Рассмотрим теперь распределение поля в отраженном пучке. Для плоской волны,  $E_i =$

$= \exp[ik_0 N_y y + ik_0 N_{\parallel}^0 z]$ , из соотношений (19) и (32) это распределение можно определить как

$$E_r = \sqrt{i \operatorname{tg} \alpha} \exp\left(-\frac{y^2 \sin \alpha}{2L_{\nabla}^2} + ik_0 N_{\parallel}^0 z\right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} H_{n+1}\left(\frac{k_0 L_{\nabla} N_y}{\sqrt{\sin \alpha}}\right) \times H_n\left(\sqrt{\sin \alpha} \frac{y}{L_{\nabla}}\right) \varphi_n, \quad (56)$$

где через  $\varphi_n$  обозначена правая часть выражения (31). Это соотношение верно при  $\alpha > 0$ . При  $\alpha < 0$  необходимо поменять местами индексы  $n$  и  $n + 1$  полиномов Эрмита, заменить  $\alpha$  на  $|\alpha|$  и сменить знак перед всем выражением. Несмотря на громоздкий вид, структура поля отраженного излучения легко угадывается. Поскольку через область трансформации проникает лишь локализованная в  $y$ -направлении структура с конечным потоком энергии, запасенный в падающей волне бесконечный поток энергии перейдет в отраженную волну. Можно ожидать, что отраженная волна будет представлять собой почти плоскую волну, возмущенную лишь в области взаимодействия с проходящим пучком ( $y \sqrt{\sin |\alpha|} \lesssim L_{\nabla}$ ). Это проиллюстрировано на рис. 4а,б, где построены распределения модулей полей падающего, прошедшего и отраженного излучений для нулевого (а) и ненулевого (б) значений  $N_y$ . Из соотношения (43) следует, что трансформация излучения наиболее эффективна при  $N_y = 0$ . Соответственно, в этом случае следует ожидать и наибольших возмущений в отраженном пучке, см. рис. 4а. При отклонении  $N_y$  от нуля доля «просачивающегося» через область трансформации излучения уменьшается, а структура отраженного излучения приближается к плоской волне. Расчеты показали, что в широком диапазоне параметров отклонения поля отраженного излучения от плоской волны становятся незначительными при  $k_0 L_{\nabla} |N_y| \geq \sqrt{\sin \alpha}$ ; в качестве примера на рис. 4б показан пограничный случай, соответствующий  $k_0 L_{\nabla} N_y = \sqrt{\sin |\alpha|}$ .

Интересно проследить поведение поля отраженного излучения в случае, когда структура падающего излучения приближается к оптимальному пучку, соответствующему минимуму коэффициента отражения. Для этого рассмотрим локализованное по  $y$  распределение, являющееся частным случаем гауссова распределения (45) при  $N_y = 0, y_0 = 0, a_z = \infty$ . В этом случае отраженную волну (19), (32) можно определить следующим образом:



**Рис. 4.** Распределение амплитуд полей падающего  $|E_i|$  (штриховые кривые), прошедшего  $|E_t|$  (пунктирные) и отраженного  $|E_r|$  (сплошные) излучения вдоль координаты  $y'$  в ВКБ-области. Падающее излучение задано в виде плоской волны с  $N_y = 0$  (а),  $\sqrt{\sin \alpha}/k_0 L_{\nabla}$  (б) или гауссова распределения (45) с  $N_y = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a_z = \infty$ ,  $\xi_y = 2$  (в), 0.2 (г). В случаях а, в, г графики четны по  $y'$ , поэтому изображена только область  $y' > 0$ . Угол  $\alpha = 10^\circ$ , поле падающего и отраженного излучений соответствует точке  $x'_1 = -5$ , поле прошедшего излучения — точке  $x'_2 = 5$

$$E_r = \sqrt{i \operatorname{tg} |\alpha|} \exp \left( -\frac{y^2 \sin \alpha}{2L_{\nabla}^2} + ik_0 N_{\parallel}^0 z \right) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k k!} \theta_k H_{2k+1} \left( \sqrt{\sin \alpha} \frac{y}{L_{\nabla}} \right) \varphi_n, \quad (57)$$

где

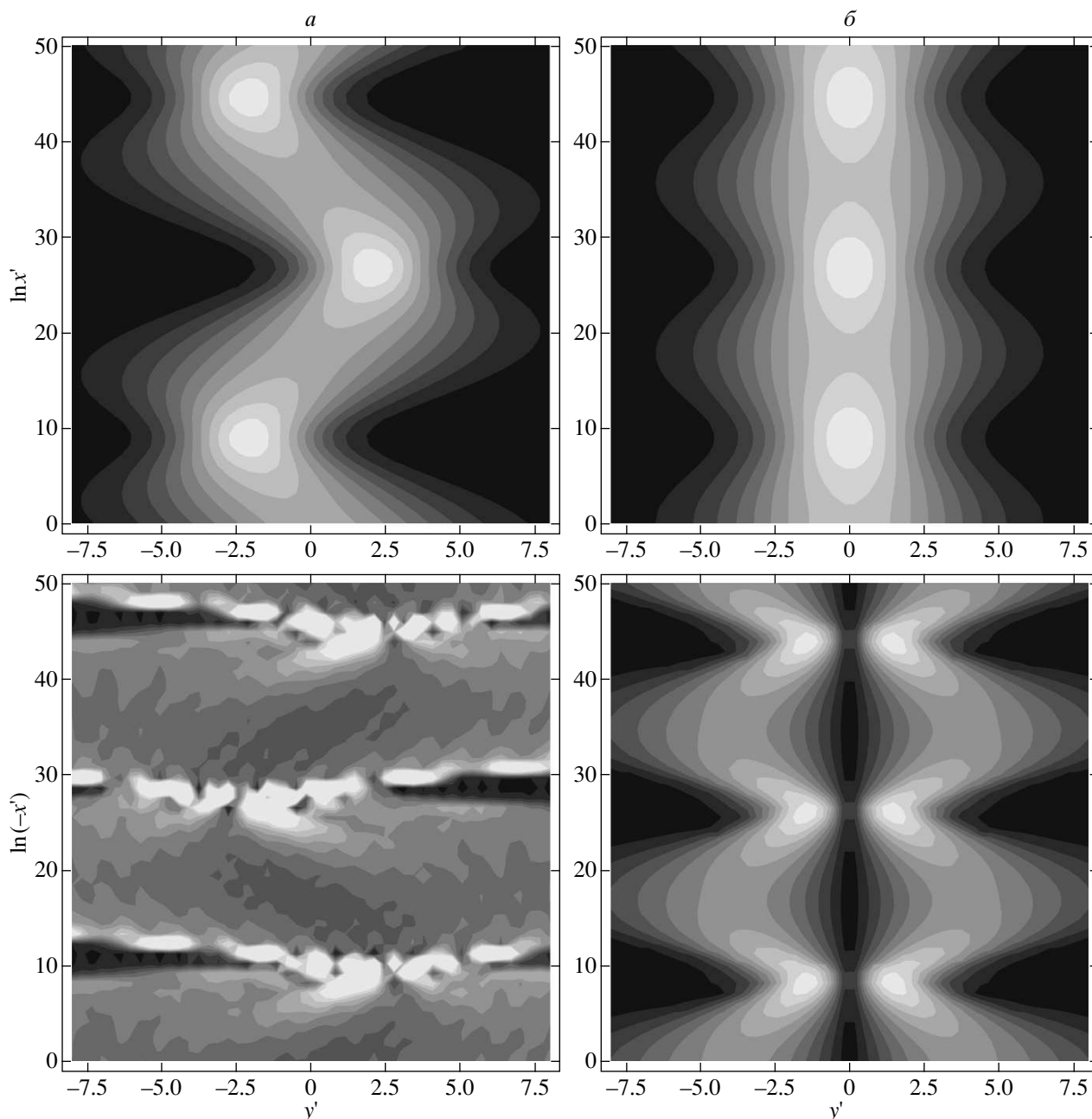
$$\theta_k = \begin{cases} \frac{(\xi_y^2 - 1)^{k+1} \xi_y}{(\xi_y^2 + 1)^{k+3/2}} \varphi_{2k+1}, & \alpha > 0, \\ -\frac{(\xi_y^2 - 1)^k \xi_y}{(\xi_y^2 + 1)^{k+1/2}} \varphi_{2k}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (58)$$

$$\xi_y = \sqrt{\sin |\alpha|} \frac{a_y}{L_{\nabla}}.$$

Величина  $\xi_y$  характеризует отклонение ширины падающего пучка от оптимального значения. Видно, что при стремлении ширины пучка к оптимальному значению,  $\xi_y \rightarrow 1$ , основной вклад в отраженное поле дают младшие члены ряда по  $k$ . Это означает, что отраженное поле локализуется в направлении  $y$  на том же масштабе, что и трансформирующийся пу-

чок. Это видно на рис. 4в, построенном для случая  $\xi_y = 2$  (при меньших значениях  $|\xi_y - 1|$  амплитуда отраженного поля становится слишком малой на фоне амплитуд падающего и проходящего полей). При отклонении  $\xi_y$  от единицы (как в большую, так и в меньшую сторону) число значащих членов ряда (57) растет, что соответствует все более широким распределениям отраженного поля. На рис. 4г приведен пример для узкого падающего пучка,  $\xi_y = 0.2$ . Видно, что поле отраженной волны имеет более широкое распределение, чем поле прошедшей волны, которое, в свою очередь, имеет более широкое распределение, чем поле падающей волны. Для широких пучков ( $\xi_y \gg 1$ ) картина полей приближается к показанному на рис. 4а случаю падения плоской волны с  $N_y = 0$ .

Для полноты изложения рассмотрим, как изменяются волновые поля вдоль координаты  $x$ , определяющей основное направление распространения в двумерном случае. Прежде всего, в ВКБ-области



**Рис. 5.** Амплитуда поля прошедшего  $|E_i|$  (сверху) и отраженного  $|E_r|$  (снизу) излучения в плоскости  $(y', \ln|x'|)$ . Падающее излучение задано в виде плоской волны с ненулевым  $N_y$  (а) и в виде гауссова распределения по  $y'$ , centered относительно точки трансформации  $y' = 0$  (б). Прошедшее излучение построено в ВКБ-области при  $x' > 0$ , отраженное излучение — в ВКБ-области при  $x' < 0$ . Расчет проведен для параметров рис. 4б,в

можно выделить квадратичную фазовую зависимость  $\pm x'^2 \cos \alpha/2$  поля в отраженной и проходящей волнах, которая соответствует линейной зависимости  $\epsilon_+$  и  $\epsilon_{||}$  от координаты  $x'$ . Это очевидный эффект, который присутствует и в одномерном приближении [15, 16, 18]. Кроме того, в двумерной гео-

метрии появляется новый эффект, связанный с тем, что поверхности отсечки, изображенные на рис. 1б, формируют неоднородный волноводный канал, в котором возможен захват излучения. Формально этот эффект можно получить следующим образом. В асимптотиках функций параболического цилиндра

(27), (31) присутствует дополнительный фазовый набег вида  $i\nu_n \ln|x'|$ , зависящий от номера гармоники  $h_n$ . В результате после суммирования по всем  $n$  зависимость от  $\ln|x'|$  появляется и в выражении для амплитуды поля. Например, все соотношения, полученные в этом разделе для проходящего излучения, могут быть легко модифицированы для учета логарифмической зависимости от координаты  $x'$  — для этого достаточно во всех гиперболических функциях заменить число  $\pi$  на функцию  $\tilde{\pi}(x')$  согласно формуле (30). Каналирование волновых пучков хорошо видно на рис. 5, на котором представлены амплитуды прошедшего и отраженного полей в плоскости  $(y', \ln|x'|)$  в ВКБ-области в случае падения плоской волны с ненулевым  $N_y (a)^2$  и центрированного относительно  $y = 0$  гауссова пучка (б). Две приведенные ситуации качественно отражают и общий случай — для симметричных относительно  $y = 0$  распределений возникает последовательность фокусов, лежащая на прямой  $y = \text{const}$ , для несимметричных распределений последовательность фокусов лежит на «извивающихся» траекториях.

Приведенные осциллирующие структуры хорошо воспроизводятся и набором геометрооптических лучей, распространяющихся по фиксированным траекториям вида

$$\begin{aligned} x &= a_x \text{sh}(\tau \cos \alpha + \varphi_x), \\ y &= a_y \sin(\tau \sin \alpha + \varphi_y). \end{aligned} \quad (59)$$

Эти лучевые траектории соответствуют геометрооптическому гамильтониану

$$H = N_x^2 + N_y^2 - c^2(x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \sin^2 \alpha),$$

вид которого следует из дисперсионного соотношения в окрестности области трансформации (4). Из формул (59) видно, что период колебаний по  $\ln|x'|$  равен  $2\pi \text{ctg}|\alpha|$ , а характерный масштаб первой пульсации может быть оценен как  $\delta x \approx L_{\nabla} \exp(2\pi \text{ctg}|\alpha|)$ . В реальных системах вряд ли может наблюдаться больше одного колебания из-за экспоненциального убывания координаты  $x$ . Период колебаний быстро растет при уменьшении угла  $\alpha$ , т. е. при переходе к одномерной ситуации. Колебания амплитуды поля также пропадают, если вклад в поле дается всего одной гармоникой  $h_n$ .

<sup>2)</sup> Как уже отмечалось, в случае падения плоской волны отраженное поле также представляет собой почти плоскую волну, в которой вариации амплитуды поля незначительны, см. рис. 4б. С учетом этого обстоятельства нижний график на рис. 5а слишком контрастен, на самом деле амплитуде отраженной волны соответствует почти плоское распределение; некоторые детали на приведенной картинке могут быть связаны с погрешностями численного расчета.

Поэтому можно ожидать, что для пучков, близких к оптимальному, амплитуда осцилляций, связанных с  $\ln|x'|$ , будет невелика.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найденные ранее точные решения укороченного волнового уравнения, описывающие волновые поля в области линейного взаимодействия О- и Х-волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме, были детально проанализированы с точки зрения определения амплитудно-фазовых распределений полей в трансформированном и отраженном пучках. Основным результатом работы является определение процедуры пересчета полей (25), (29) и (32) в областях применимости геометрической оптики, разделенных зоной линейного взаимодействия, в которой приближение геометрической оптики неприменимо. Вдали от области трансформации найдена связь распределений полей в прошедшем и отраженном пучках с распределением поля в падающем пучке, что позволяет использовать стандартные, разработанные без учета линейного взаимодействия геометро- или квазиоптические коды для моделирования процесса О-Х-трансформации в различных системах. В настоящее время авторы начали проводить подобные расчеты для тороидальных магнитных систем.

Кроме того, в настоящей работе достаточно подробно рассмотрен ряд характерных примеров, в которых удается в явном виде записать связь волновых полей до и после области линейного взаимодействия. Данные примеры позволяют составить качественное представление о структуре полей и могут быть использованы при тестировании численных методов расчета волновых полей, основанных на результатах работы.

В заключение отметим еще раз, что, по мнению авторов, полученные результаты могут рассматриваться как решение новой эталонной задачи, имеющей достаточно широкую область применения в астрофизических и лабораторных приложениях. Некоторые характерные оценки и особенности приложения модели к тороидальным магнитным ловушкам можно найти в наших работах [23, 26].

Авторы признательны А. А. Балакину, внимательно ознакомившемуся с рукописью работы и сделавшему ряд ценных предложений. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 04-02-89005, 06-02-17081), NWO (грант № 047.016.016) и Фонда содействия отечественной науке.



**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Решение эталонного волнового уравнения**

Будем искать решение системы (10) в виде суммы двух волн (13), положив при этом, что

$$A^t = C_1 \exp\left(-i \frac{x'^2}{2} \cos \alpha - \frac{y'^2}{2} \sin \alpha\right), \tag{П.1}$$

$$A^r = C_2 \exp\left(i \frac{x'^2}{2} \cos \alpha + \frac{y'^2}{2} \sin \alpha\right),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — новые неизвестные функции координат  $x'$  и  $y'$ . Тогда исходная система может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} -i \exp(-ix'^2 \cos \alpha - y'^2 \sin \alpha) \frac{\partial C_1}{\partial x'} = \frac{\partial C_2}{\partial y'}, \\ i \exp(-ix'^2 \cos \alpha - y'^2 \sin \alpha) \frac{\partial C_1}{\partial y'} = \frac{\partial C_2}{\partial x'}. \end{cases} \tag{П.2}$$

Эта система уравнений эквивалентна системе (10), однако, поскольку мы зафиксировали поляризацию излучения, граничные условия для функций  $C_1$  и  $C_2$  формулируются проще, чем непосредственно для компонент  $A_+$  и  $A_{||}$ . Напомним, что функции  $C_1$  и  $C_2$  соответствуют волновым структурам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $x'$  вдали от области трансформации, где верно ВКБ-приближение для волнового уравнения (10). Например, если положить эти функции постоянными, то получим частное решение (10) в виде двух невзаимодействующих волновых пучков, один из которых неограничен при  $y' \rightarrow \pm\infty$ . Исключая  $C_2$  из системы (П.2) и разделяя переменные в получающемся уравнении для  $C_1(x', y') = C_{1x}(x')C_{1y}(y')$ , можно получить два обыкновенных дифференциальных уравнения, описывающих пучок, распространяющийся в положительном направлении вдоль оси  $x'$ :

$$\frac{d^2}{dx'^2} C_{1x} - 2ix' \cos \alpha \frac{d}{dx'} C_{1x} = \lambda C_{1x}, \tag{П.3}$$

$$\frac{d^2}{dy'^2} C_{1y} - 2y' \sin \alpha \frac{d}{dy'} C_{1y} = -\lambda C_{1y}. \tag{П.4}$$

Эти уравнения связаны через константу  $\lambda$ , появляющуюся после разделения переменных (не путать с обозначением  $\lambda$  для длины волны в разд. 3).

Поскольку за областью трансформации асимптотически существует только волна, распространяющаяся в положительном направлении вдоль оси  $x'$ , граничные условия для  $C_{1x}$  имеют следующий вид:

$C_{1x}(+\infty) \rightarrow \text{const}$ ,  $dC_{1x}/dx(+\infty) \rightarrow 0$ . Этим граничным условиям отвечает решение [10, 26]

$$C_{1x} = A \exp\left(i \frac{x'^2}{2} \cos \alpha\right) \times D_{iv} \left(x' \sqrt{2 \cos \alpha} \exp \frac{i\pi}{4}\right), \tag{П.5}$$

где  $A$  — произвольная постоянная,  $\nu = \lambda/2 \cos \alpha$ ,  $D_{iv}$  — функция параболического цилиндра [29–31]. Мы ищем локализованную по  $y'$  волновую структуру, следовательно, граничные условия для уравнения (П.4) имеют следующий вид:  $C_{1y} \exp(-y'^2 \sin \alpha/2) \rightarrow 0$  при  $y' \rightarrow \pm\infty$ . Уравнение (П.4) обладает асимметрией относительно смены знака  $\alpha$ . При  $\alpha > 0$  это уравнение вырождается в уравнение квантового гармонического осциллятора со стандартным решением (с учетом граничных условий), выражаемым через полиномы Эрмита  $H_n$ , соответствующие дискретному набору собственных значений  $\lambda(n)$ :

$$C_{1y} = H_n \left(y' \sqrt{\sin \alpha}\right), \tag{П.6}$$

$$\lambda = 2n \sin \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При  $\alpha < 0$  после замены

$$C_{1y} = \exp(-y'^2 \sin |\alpha|) \tilde{C}_{1y}$$

уравнение (П.4) опять может быть сведено к уравнению квантового осциллятора, в итоге решение выглядит следующим образом:

$$C_{1y} = \exp(-y'^2 \sin |\alpha|) H_n \left(y' \sqrt{\sin |\alpha|}\right), \tag{П.7}$$

$$\lambda = 2(n + 1) \sin |\alpha|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Суммируя произведения  $C_{1x}C_{1y}$  по всем  $n$  и учитывая определение (П.1), можно прийти к выражению (14) для распределения поля  $A^t$  в проходящей волне.

Функция  $C_2$ , соответствующая отраженной волне, может быть найдена из первого уравнения системы (П.2):

$$C_2 = -i \int_0^{y'} \exp(-ix'^2 \cos \alpha - y'^2 \sin \alpha) \frac{\partial C_1}{\partial x'} dy'. \tag{П.8}$$

Здесь нижний предел интегрирования выбирается исходя из условия

$$C_2 \exp \frac{y'^2 \sin \alpha}{2} \rightarrow 0$$

при  $y' \rightarrow \pm\infty$  и равен  $-\infty$  при  $\alpha > 0$  и любому нулю функции  $H_{n+1}(y'\sqrt{|\sin\alpha|})$  при  $\alpha < 0$ . Окончательное выражение для  $C_2$  получается после ряда формальных алгебраических преобразований с использованием хорошо известных свойств функций  $D_{iv}$  и  $H_n$ . Если определить  $C_1$  набором постоянных коэффициентов  $A_n$ , введенных в формуле (14), то поле отраженной волны может быть определено как

$$A^r(x', y') = \sqrt{\frac{i \operatorname{tg}|\alpha|}{2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n \tilde{D}_{iv_{n-1}} \begin{cases} +H'_n/H_n, & \alpha > 0, \\ -H_{n+1}/H_n, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (\text{П.9})$$

где

$$H_n = H_n(y'\sqrt{|\sin\alpha|}), \quad H'_n = H'_n(y'\sqrt{|\sin\alpha|})$$

— полиномы Эрмита и их производные. Решение в этом виде было получено в нашей работе [26]. В настоящей работе мы используем более симметричное выражение (15), которое получается из формулы (П.9), если при  $\alpha > 0$  воспользоваться соотношением  $H'_n = 2nH_{n-1}$  и сделать замену  $n \rightarrow n+1$  индекса, по которому происходит суммирование. Этой замене соответствует  $\nu_n \rightarrow \nu_{n+1}$ , поэтому в выражении (15) мы переходим к величине  $\nu_n^+$ , которая не зависит от знака угла  $\alpha$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. L. Ginzburg, J. Phys. USSR **7**, 289 (1943).
2. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **18**, 487 (1948).
3. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
4. В. В. Железняков, *Излучение в астрофизической плазме*, Янус-К, Москва (1997).
5. В. Е. Голант, А. Д. Пилия, УФН **104**, 413 (1971).
6. J. Preinhalter and V. Kopecky, J. Plasma Phys. **10**, 1 (1973).
7. Т. Маэкава, С. Танака, У. Терумичи et al., Phys. Rev. Lett. **40**, 1379 (1978).
8. Ю. Ф. Баранов, Д. Г. Булыгинский, В. Е. Голант и др., Физика плазмы **8**, 682 (1982).
9. H. P. Laqua, V. Erckmann, H. J. Hartfuß et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 3467 (1997).
10. H. P. Laqua, the W7-AS Team, and ECRH Group, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, A273 (1999).
11. R. I. Pinsker et al., in *Proc. 14th Topical Conf. on Radio Frequency Power in Plasmas*, Oxnard USA, AIP Conf. Proc. **595**, 350 (2001).
12. G. Taylor et al., in *Proc. 14th Topical Conf. on Radio Frequency Power in Plasmas*, Oxnard USA, AIP Conf. Proc. **595**, 282 (2001).
13. V. Shevchenko, Y. Baranov, M. O'Brien, and A. Saveliev, Phys. Rev. Lett. **89**, 265005 (2002).
14. A. Pochelon, S. Alberti, G. Arnoux et al., in *Strong Microwaves in Plasmas VI*, ed. by A. G. Litvak, Vol. 2, Inst. Appl. Phys., RAS, Nizhny Novgorod (2006), p. 421.
15. E. Mjølhus, J. Plasma Phys. **31**, 7 (1984).
16. М. Д. Токман, Физика плазмы **10**, 1205 (1985).
17. А. В. Тимофеев, Физика плазмы **26**, 874 (2000).
18. А. В. Тимофеев, УФН **174**, 609 (2004).
19. H. Igami, H. Tanaka, and T. Maekawa, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 573 (2006).
20. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, ЖЭТФ **60**, 389 (1971).
21. H. Weitzner, Phys. Plasmas **11**, 866 (2004).
22. Е. Д. Господчиков, Е. В. Суворов, в сб. *Тез. докл. XXXII Звенигородской конф. по физике плазмы и УТС*, Звенигород (2005), ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН», Москва (2005); <http://plasma.gpi.ru/Zvenigorod/XXXII/Mu/ru/DQ-Gospodchikov.doc>.
23. Е. Д. Господчиков and Е. В. Суворов, in *Strong Microwaves in Plasmas VI*, ed. by A. G. Litvak, Vol. 2, Inst. Appl. Phys., RAS, Nizhny Novgorod (2006), p. 478.
24. Е. Д. Господчиков, Е. В. Суворов, в сб. *Аннот. работ 3-й Курчатовской молодежной научной школы*, Москва (2005); РИЦ «Курчатовский институт» Москва (2005), с. 38.
25. Е. Д. Господчиков, Е. В. Суворов, в сб. *Тез. докл. XXXIII Звенигородской конф. по физике плазмы и УТС*, Звенигород (2006), ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН», Москва (2006), с. 323; <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XXXIII/Mu/ru/DA-Gospodchikov.doc>.

26. E. D. Gospodchikov, A. G. Shalashov, and E. V. Su-  
vov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 869 (2006).
27. А. Ю. Попов, А. Д. Пиля, в сб. *Тез. докл.  
XXXIII Звенигородской конф. по физике плаз-  
мы и УТС*, Звенигород (2006), ЗАО НТЦ  
«ПЛАЗМАИОФАН», Москва (2006), с. 71;  
[http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XXXIII/Mu/ru/  
VN-Porov.doc](http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XXXIII/Mu/ru/<br/>VN-Porov.doc); *Физика плазмы* (2006), в печати.
28. T. H. Stix, *The Theory of Plasma Waves*,  
McGraw-Hill, New York (1962).
29. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of  
Mathematical Functions*, Nat. Bureau of Standarts,  
New York (1964).
30. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental  
Functions*, Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, New  
York (1953).
31. Е. Т. Уиттакер, Г. Н. Ватсон, *Курс современного  
анализа*, ч. 2, Гостехиздат, Москва (1934).