

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

*И. Е. Проценко**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 декабря 2005 г.

Предложен метод расчета мощности спонтанного излучения нескольких неподвижных дипольно взаимодействующих двухуровневых атомов, находящихся в объеме размерами порядка длины волны резонансного излучения. Используется шредингеровское представление. В качестве примеров показано, что два атома не могут, а четыре могут излучать импульс сверхизлучения в условиях, соответствующих экспериментам с холодными атомами в дипольных ловушках. Обсуждаются различные способы определения квазистационарных смешанных состояний атомов, обобщения данного метода на другие резонансные излучающие системы.

PACS: 42.50.Fx, 32.80.Pj, 31.70.Nq

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхизлучения, или коллективного спонтанного излучения, в системе из N двухуровневых атомов известно почти 50 лет — начиная с работы Дике [1]. С тех пор опубликовано большое число экспериментальных и теоретических работ, которые суммированы в обзорах, например [2–4], и книгах [5]. Сверхизлучение — одно из интересных, сложных и фундаментальных физических явлений, выходящее за рамки задач квантовой электроники [6], поэтому, несмотря на длительное время исследований, оно до сих пор привлекает внимание. В настоящее время интерес к сверхизлучению связан с новыми экспериментальными возможностями и новыми приложениями теоретических методов его анализа. В частности, ведутся теоретические исследования, предлагаются и выполняются различные эксперименты по изучению сверхизлучения и связанных с ним явлений в системах квантовых точек [7–9], в гетероструктурах [10, 11], в полупроводниковых лазерах [12], группах молекул (агрегатов) [13], холодных атомов в дипольных ловушках [14, 15], бозе-конденсатов атомов [16], атомов вблизи поверхностей [17]. Интерес к системам, состоящим из частиц с несколькими квантовыми состояниями («конечноуровневым» системам: двухуровневым атомам, квантовым точкам и т. д.),

взаимодействующих друг с другом и с окружением через резонансное электромагнитное поле (ЭМП), связан с планами создания на их основе элементарных логических ячеек для квантовых компьютеров [18, 19] и других сверхминиатюрных квантовых наноустройств, например, источников отдельных фотонов для неприслушиваемых линий оптической связи (квантовая криптография) [20], усилителей «сжатых» ЭМП [21], нанолазеров [22], сенсоров [23]. Управление квантовыми наноустройствами, осуществление взаимодействия между их компонентами и получение информации об их состоянии удобно осуществлять с помощью квазимонохроматических ЭМП, испускаемых и поглощаемых квантовыми частицами. Теоретическое описание процессов взаимодействия квантовых частиц через резонансное ЭМП очень близко связано с теорией, развитой на основе идеи Дике, — особенно когда взаимодействие может быть описано в дипольном приближении и частицы находятся в объеме с характерными размерами порядка длины волны резонансного излучения. Последнее имеет место во многих практических ситуациях, например, для холодных атомов в дипольных ловушках [14] или ионов в линейных ловушках [24].

Продолжение исследований сверхизлучения необходимо для решения ряда фундаментальных проблем квантовой механики. Одна из них — создание и использование заданных смешанных [25]

*E-mail: protsen@sci.lebedev.ru

(«запутанных» [26], или entangled [27]) состояний квантовых объектов, взаимодействующих друг с другом и имеющих конечное число базисных квантовых состояний. Проблема получения квантовых состояний с той или иной «степенью перемешивания» (entanglement) тесно связана с задачами квантовой обработки информации [26], но она рассматривается и независимо, начиная с работ [28], появления неравенств Белла [29], которые сейчас заменяются другими критериями (например, concurrence [30]), характеризующими «степень перемешивания» состояний и «уровень квантовости» шума в системе. В реальных условиях не существует конечноуровневых квантовых систем, так как любой квантовый объект (атом, квантовая точка и т. д.) взаимодействует с окружением («термостатом»), имеющим бесконечное число степеней свободы, как, например, взаимодействие двухуровневого атома с модами ЭМП при спонтанном излучении [31]. Термостат влияет на конечноуровневые системы, не только вызывая в них спонтанные переходы, но и изменяя энергии и матричные элементы переходов между их состояниями. Важный пример (см. ниже) — смешанные состояния дипольно взаимодействующих атомов, для которых критерий степени перемешивания [30] определялся в работе [32]. Спонтанное излучение и резонансное диполь-дипольное взаимодействие двухуровневых атомов — явления одной природы, они вызываются излучением и поглощением фотона электромагнитного поля, и поэтому должны рассматриваться совместно.

Целью настоящей работы является описание спонтанного излучения N двухуровневых дипольно взаимодействующих атомов в шредингеровском представлении с использованием подхода [31]. Атомы первоначально возбуждены в верхние состояния, остаются неподвижными в течение характерного времени спонтанного излучения и могут находиться на произвольном расстоянии друг от друга. Будет рассмотрен случай нескольких ($N \sim 10$) атомов, когда среднее межатомное расстояние приблизительно равно $\lambda/2\pi$, где λ — длина волны излучения, резонансного атомному переходу. Это соответствует условиям экспериментов с атомами в дипольных ловушках [14]. Одна из задач работы — выяснить, возможно ли наблюдение импульса сверхизлучения в условиях, описанных в работе [14]. Кроме того, будет предложена новая методика расчета скоростей спонтанного распада состояний системы дипольно взаимодействующих двухуровневых атомов. Будут обсуждаться применения данной мето-

дики для получения новых и уточнения имеющихся результатов теории дипольно взаимодействующих квантовых резонансных излучателей (не только атомов, но и, например, наночастиц), в том числе — для описания их квазистационарных состояний.

Метод, описанный в работе [31], является одним из основных в квантовой теории спонтанного излучения, он применялся для систем двух двухуровневых атомов [33], в том числе в случае, когда первоначально только один атом возбужден [34, 35]. Элементарная задача теории Дике о коллективном спонтанном излучении двух атомов чрезвычайно важна для понимания физического механизма диполь-дипольного взаимодействия и сверхизлучения в квантовых системах, она привлекает внимание исследователей очень давно [33] и до настоящего времени [36, 37]. Экспериментальная проверка теории сверхизлучения двух дипольно взаимодействующих двухуровневых атомов выполнена в работе [38]. Предлагаемый ниже метод расчета сверхизлучения N атомов удобнее всего изложить как обобщение подхода [33] для двух атомов. Последний излагается в разд. 3, 4, детали расчета помещены в Приложение А. В разд. 5 обсуждается возможное обобщение подхода [33] на основе континуума квазиравновесных состояний атомов. Интересный вопрос о том, почему квантовая задача о сверхизлучении двух атомов не может быть решена с применением принципа соответствия, рассмотрен в Приложении В. Анализ, представленный в разд. 3 и 4, обобщается в разд. 6, где излагается методика расчета скоростей спонтанного излучения N атомов в шредингеровском представлении. Данная методика используется в разд. 7 для получения полной мощности спонтанного излучения четырех атомов при произвольных расстояниях между ними, эта мощность сравнивается с результатами модели Дике (т. е. когда расстояния между атомами много меньше длины волны излучения), получающимися при квантовом и полуклассическом подходах. Результаты работы обсуждаются в заключении.

В работах [39, 40] использовано гейзенберговское представление и получено операторное кинетическое уравнение (master equation), учитывающее спонтанное излучение N атомов. Оно применено к случаю двух атомов в работе [41] с использованием таких базисных состояний как состояния из работ [1, 33]. Гейзенберговское представление для анализа спонтанного излучения двух атомов использовалось во многих работах, например [42, 43]. В работе [44] с использованием кинетического уравнения [39, 40] рассматривалось спонтанное излуче-

ние N атомов. При этом для успешного применения квантового кинетического уравнения [39, 40] следует выбрать определенный базис состояний, которым оказывается базис неэрмитового гамильтониана.

Шредингеровское представление, на основании которого сформулирована методика разд. 3, 4, 6, является, как известно, альтернативным гейзенберговскому представлению, в рамках которого получено кинетическое уравнение [39, 40]. Оба представления должны, в принципе, приводить к одинаковым результатам (если используются одинаковые приближения), и вопрос о применении того или иного представления — вопрос удобства и наглядности. На наш взгляд, в данном случае, когда при решении задачи о взаимодействии конечноуровневых систем (атомов) с термостатом (модами ЭМП) используются приближения (в том числе марковское), шредингеровское представление позволяет лучше понять физику процессов и поэтому упрощает анализ. При этом можно естественным образом перейти к новым задачам (в том числе требующим возможно более точного описания квантовых состояний дипольно взаимодействующих атомов) и при необходимости принять во внимание следующие приближения. Подход, основанный на приведенном в работе [31], не распадается на два независимых этапа, как в работах [39, 40], из которых первый — вывод операторных уравнений, а второй — поиск подходящего базиса состояний, используемого при решении этих уравнений¹⁾. Таким образом, изменение приближений или переход к высшим приближениям в случае, рассмотренном в работах [39, 40], должно выполняться для обоих этапов, что может затруднить расчет. Ниже выбор состояний атомов является естественной частью приближенного решения динамических уравнений для амплитуд вероятностей, при этом не требуется обращения к неэрмитовым гамильтонианам, как в работе [44]. Из предлагаемого подхода хорошо видно, как то или иное приближение отвечает разным базисным состояниям (разд. 5). Квантовый анализ [31] наглядно и без использования классических аналогов показывает, что физическим механизмом сверхизлучения является диполь-дипольное взаимодействие. Представляется, что и формальный численный расчет скоростей спонтанной релаксации согласно методи-

ке разд. 6 более удобен, чем с использованием квантового кинетического уравнения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим два двухуровневых атома 1 и 2, находящихся в точках пространства, характеризуемых векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ оба атома быстро возбуждаются на верхние уровни импульсом резонансного электромагнитного поля, поляризованного вдоль оси z . Далее, при $t > 0$ атомы спонтанно излучают два фотона. Найдем зависимость от времени населенностей состояний атомов и мощность $P_2(t)$ их спонтанного излучения. После этого обобщим результаты, полученные для двух атомов, на случай N атомов. Допустим, что атомы достаточно «холодные», т. е. их смещение из положений при $t = 0$ за характерное время спонтанного излучения ($\sim \gamma_{sp}^{-1}$) оказывается много меньшим характерных расстояний между атомами, и этим смещением можно пренебречь. Будем считать, что температура T атомов в ловушке все еще достаточно высока, $kT \gg \hbar\omega_{trap}$, где ω_{trap} — характерная частота колебаний атомов в ловушке, так что бозе-конденсат атомов не образуется. Эти условия реализуются, например, для атомов в дипольных ловушках [14].

Выполним анализ, следуя работам [31, 33]. Каждый излученный фотон характеризуется волновым вектором \mathbf{k} и одной из двух поляризаций $\lambda_{\mathbf{k}} = 1, 2$, которые будем обозначать одним индексом $\alpha = \{\mathbf{k}, \lambda_{\mathbf{k}}\}$. Если испущенные фотоны различны, то излучения первого и второго фотонов спонтанны (т. е. каждый фотон излучается в вакуумное состояние ЭМП). В этом случае в первом приближении излучения первого и второго фотонов можно рассматривать независимо. Если же фотоны одинаковы, то излучение второго фотона стимулируется первым, испускание двух фотонов происходит одновременно и должно рассматриваться как единый процесс. Для случая небольшого ($N \sim 10$) числа атомов испускание двух и более одинаковых фотонов маловероятно по сравнению с испусканием различных фотонов, поэтому испусканием одинаковых фотонов будем пренебрегать.

Все возможные состояния двух атомов есть $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$, где, например, состояние $|10\rangle$ соответствует первому атому в возбужденном состоянии, а второму — в основном и т. д. В пренебрежении стимулированным излучением испускание двух

¹⁾ При строгом решении задачи в гейзенберговском представлении базис состояний однозначно определен — это состояния системы в начальный момент времени. Поиск подходящих базисных состояний, на которые «проецируется» (по терминологии работы [44]) операторное кинетическое уравнение, есть следствие того, что задача решается приближенно.

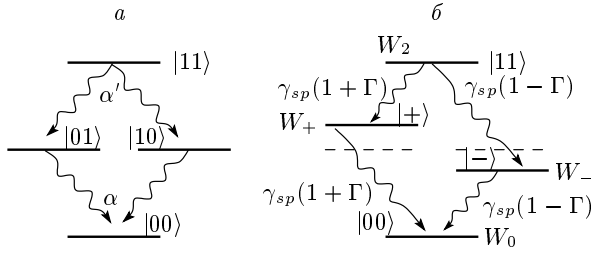


Рис. 1. Схемы состояний двух атомов (а), квази-стационарных состояний двух атомов (б)

фотонов рассматривается как каскадный процесс, см. рис. 1а. Сначала атомы переходят из состояния $|11\rangle$ в состояние $|10\rangle$ или $|01\rangle$ с испусканием фотона с параметрами α' , а затем — из состояний $|10\rangle$ или $|01\rangle$ в $|00\rangle$ с испусканием фотона с $\alpha \neq \alpha'$. Удобнее рассмотреть сначала излучение второго, а затем — первого фотонов.

3. ЕДИНСТВЕННЫЙ ВОЗБУЖДЕННЫЙ АТОМ

3.1. Уравнения движения для амплитуд вероятностей

Допустим, что атомы изначально находятся в суперпозиции состояний $|10\rangle$ и $|01\rangle$ и излучают фотон α , переходя в состояние $|00\rangle$. Представим волновую функцию $|\psi\rangle_1$ системы, состоящей из двух атомов и спонтанно излученного фотона ЭМП, в виде

$$|\psi\rangle_1 = \left[(C_{10}|10\rangle + C_{01}|01\rangle) |0\rangle_f + \sum_{\alpha} C_{00}^{(\alpha)} |00\rangle |\alpha\rangle_f \right] e^{-i\omega_0 t}, \quad (1)$$

где $|0\rangle_f$, $|\alpha\rangle_f$ — состояния поля соответственно без фотонов и с одним фотоном α , C_{10} , C_{01} , $C_{00}^{(\alpha)}$ — амплитуды вероятностей соответствующих состояний (с точностью до несущественного фазового множителя $\exp(-i\omega_0 t)$), ω_0 — частота перехода двухуровневого атома. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^2 H_i + \sum_{\alpha} H_{\alpha} + \sum_{i,\alpha} V_{i\alpha}, \quad (2)$$

где H_i — гамильтониан i -го атома в отсутствие поля, H_{α} — гамильтониан моды ЭМП с индексами α (ниже — мода α), $V_{i\alpha}$ — гамильтониан взаимодействия i -го атома с модой ЭМП. Частоты ω мод ЭМП,

испускаемых атомами, близки к ω_0 , поэтому можно использовать резонансное приближение, пренебречь в гамильтониане слагаемыми $\sim \exp(\pm i2\omega_0 t)$ и записать

$$V_{i\alpha} = -\hbar\Omega_{\alpha}(a_{\alpha}^{+}\sigma_i e^{-i\varphi_i(\mathbf{k})} + \sigma_i^{+}a_{\alpha} e^{i\varphi_i(\mathbf{k})}). \quad (3)$$

Здесь a_{α}^{+} — оператор рождения фотона α : $a_{\alpha}^{+}|0\rangle_f = |1\rangle_f$, $a_{\alpha}|1\rangle_f = \delta_{\alpha\alpha'}|0\rangle_f$, σ_i — оператор перехода i -го атома из возбужденного в основное состояние, например $\sigma_1|10\rangle = |00\rangle$,

$$\varphi_i(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad \Omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi d^2 \omega}{V\hbar}} \cos \theta_{\lambda_{\mathbf{k}}},$$

d — матричный элемент оператора дипольного момента атомного перехода, V — объем квантования поля, $\theta_{\lambda_{\mathbf{k}}}$ — угол между направлением поляризации атома в момент $t = 0$, которое принимаем за ось z , и вектором поляризации фотона с индексом $\lambda_{\mathbf{k}}$.

Подставляя волновую функцию (1) в уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle,$$

используя ортогональность базисных состояний и равенства

$$H_i|10\rangle = H_i|01\rangle = \hbar\omega_0, \quad H_i|00\rangle = 0,$$

$$H_{\alpha'}|\alpha\rangle_f = \delta_{\alpha\alpha'}\hbar\omega|\alpha\rangle_f, \quad H_{\alpha}|0\rangle_f = 0,$$

получаем уравнения движения для амплитуд вероятностей:

$$\dot{C}_{10} = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} C_{00}^{(\alpha)} e^{i\varphi_1(\mathbf{k})}, \quad (4)$$

$$\dot{C}_{01} = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} C_{00}^{(\alpha)} e^{i\varphi_2(\mathbf{k})}, \quad (5)$$

$$\dot{C}_{00}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{00}^{(\alpha)} + i\Omega_{\alpha} \left(C_{10} e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} + C_{01} e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right), \quad (6)$$

где $\delta_k = \omega - \omega_0$. Действуя так же, как в работах [31, 34, 35], т.е. адиабатически исключая²⁾ из (6) $C_{00}^{(\alpha)}$, и выполняя суммирование по α (см. Приложение А), приходим к системе уравнений для C_{10} , C_{01} :

$$\dot{C}_{10} = -C_{10} - D_{12}C_{01}, \quad (7)$$

²⁾ Электромагнитное поле исключается адиабатически в предположении, что процесс испускания фотона занимает время порядка ω_0^{-1} , что много меньше γ_{sp}^{-1} — среднего времени спонтанного распада возбужденного состояния атома.

$$\dot{C}_{01} = -C_{01} - D_{12}C_{10}. \quad (8)$$

Здесь время нормировано на $(\gamma_{sp}/2)^{-1}$,

$$\gamma_{sp} = \frac{4}{3} \frac{d^2\omega^3}{\hbar c^3}$$

— скорость спонтанного излучения из возбужденного состояния изолированного двухуровневого атома,

$$D_{12} = -\frac{3i}{2} [P(\xi_{12}) + \cos^2 \theta_{12} Q(\xi_{12})] e^{i\xi_{12}}, \quad (9)$$

где

$$P(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{i}{\xi^2}, \quad Q(\xi) = -\frac{1}{\xi} + \frac{3}{\xi^3} - \frac{3i}{\xi^2}, \quad (10)$$

$\xi_{12} = r_{12}\omega_0/c$, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и θ_{12} — угол между направлением начальной поляризации атомов и $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Величина D_{12} выражается через классическую энергию диполь-дипольного взаимодействия, см. Приложение В. Заметим, что D_{12} — комплексная величина, т. е. слагаемые, пропорциональные D_{12} , в уравнениях (7), (8) невозможно получить с помощью какого-либо эффективного гамильтониана H_{eff} , включающего эрмитов оператор \hat{D} соответствующего взаимодействия (например, диполь-дипольного взаимодействия между атомами). Действительно, если бы существовали H_{eff} и \hat{D} , то вместо D_{12} в формуле (8) присутствовала бы величина D_{21} , для которой в силу эрмитовости \hat{D} должно было бы выполняться условие³⁾ $D_{12} = -D_{21}^*$. Таким образом, только слагаемые, содержащие $\text{Im } D_{12}$ в уравнениях (В.5), (В.6) могут быть получены из некоторого гамильтониана, и эти слагаемые описывают сдвиг энергетических состояний атомов из-за их взаимодействия. Слагаемые, пропорциональные $\text{Re } D_{12}$, не могут быть получены из гамильтониана, они описывают диссипацию. Последняя оказывается «перекрестной», т. е. часть, пропорциональная $\text{Re } D_{12}$, диссипационного слагаемого в уравнении (7) для C_{10} зависит от C_{01} ; соответствующее перекрестное диссипационное слагаемое есть и в уравнении (8) для C_{01} . Наличие диссипационных слагаемых в уравнениях (7), (8) является следствием адиабатического исключения мод ЭМП с бесконечным числом степеней свободы, представляющего собой «термостат» для двух атомов. Тот факт, что диссипационные слагаемые оказываются перекрестными, связан с дипольным взаимодействием атомов через «термостат» мод ЭМП.

³⁾ Матричным элементам операторов в гамильтониане соответствуют слагаемые в правых частях уравнений $i\dot{C}_{10} = \dots$ и $i\dot{C}_{01} = \dots$

3.2. Квазистационарные состояния

При наличии спонтанного излучения система двух атомов не имеет стационарных состояний, кроме основного. Но можно предположить, что имеются квазистационарные (КС) состояния атомов, населенность которых изменяется во времени только из-за спонтанных переходов, в то время как диполь-дипольное взаимодействие между КС-состояниями отсутствует. Определим КС-состояния атомов из условия, что система уравнений для их амплитуд вероятностей, учитывающая спонтанное излучение одного фотона, распадается на независимые уравнения (диагонализуются). Состояния с единственным первым (вторым) возбужденным атомом, которым соответствуют амплитуды вероятностей C_{10} (C_{01}), не являются квазистационарными, так как в уравнения (7), (8) входят перекрестные слагаемые. Уравнения для амплитуд вероятностей КС-состояний получаются из (7), (8) заменой переменных,

$$C_{\pm} = C_{10} \pm C_{01}. \quad (11)$$

Эти уравнения

$$\dot{C}_{\pm} = -\frac{\gamma_{sp}}{2}(1 \pm D_{12})C_{\pm} \quad (12)$$

не содержат перекрестных слагаемых, и $D_{12} \equiv \Gamma_{12} + i\Delta_{12}$. Выполняя замену переменных (11) в выражении (1) для волновой функции, можно убедиться, что амплитуды вероятностей $\tilde{C}_{\pm} = 2^{-1/2}C_{\pm}$ соответствуют состояниям атомов

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle \pm |01\rangle). \quad (13)$$

Таким образом, требование диагонализации системы уравнений (7), (8) приводит к замене атомных состояний $|10\rangle$ и $|01\rangle$ на симметричное $|+\rangle$ и антисимметричное $|-\rangle$ относительно перестановок атомов состояния (состояния Дике). Множитель $2^{-1/2}$ в выражении для \tilde{C}_{\pm} не определяется из уравнений (12), а должен быть введен, исходя из нормировки квазистационарных состояний (13) на 1. Аналогичная ситуация возникает в теории «квантовых скачков» (quantum jumps) [45]. Состояния $|\pm\rangle$ являются квазистационарными, так как имеется спонтанное излучение, но между ними нет диполь-дипольного взаимодействия. Заметим, что данный способ определения КС-состояний является приближенным и не является единственным возможным (см. разд. 5). Энергии E_{\pm} атомов в КС-состояниях $|\pm\rangle$ и скорости $\gamma_{\pm}^{(1)}$ изменения их населенностей из-за спонтанного излучения есть

$$E_{\pm} = \hbar\omega_0(1 \pm \Delta_{12}), \quad \gamma_{\pm}^{(1)} = \gamma_{sp}(1 \pm \Gamma_{12}). \quad (14)$$

В Приложении В показано, что если определять стационарные состояния двух дипольно взаимодействующих атомов, используя принцип соответствия, т. е. воспользоваться известным классическим выражением для энергии диполь-дипольного взаимодействия, заменить в нем классические величины на соответствующие квантовые операторы и подставить полученный оператор в гамильтониан для двух изолированных атомов, то стационарные состояния такого гамильтониана будут отличны от состояний (13). Таким образом, не только дипольное взаимодействие атомов влияет на скорости спонтанного распада их состояний, обеспечивая добавку $\pm\gamma_{sp}\Gamma_{12}$ в формуле (14), но и спонтанное излучение приводит к изменению квазистационарных состояний системы и их энергий по сравнению с получающимися на основе принципа соответствия.

Состояния (13) являются смешанными состояниями двух атомов. Изложенное выше и результаты Приложения В показывают, что учет спонтанного излучения оказывается принципиальным при определении смешанных состояний дипольно взаимодействующих атомов.

4. ДВА ВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМА

Теперь предположим, что оба атома изначально находятся в возбужденных состояниях и испускают фотон⁴⁾ α , переходя из состояния $|11\rangle$ в состояние $|10\rangle$ или $|01\rangle$. Волновая функция системы атомов и поля в этом случае имеет вид

$$|\psi\rangle_2 = \left\{ \sum_{\alpha} \left(C_{10}^{(\alpha)} |10\rangle + C_{01}^{(\alpha)} |01\rangle \right) |\alpha\rangle_f + C_{11} |11\rangle |0\rangle_f \right\} \times e^{-2i\omega_0 t}. \quad (15)$$

Подставляя волновую функцию (15) в уравнение Шредингера с гамильтонианом, определяемым формулами (2), (3), приходим к системе уравнений для амплитуд вероятностей:

$$\dot{C}_{11} = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} \left(C_{10}^{(\alpha)} e^{i\varphi_1(\mathbf{k})} + C_{01}^{(\alpha)} e^{i\varphi_2(\mathbf{k})} \right), \quad (16)$$

$$\dot{C}_{10}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{10}^{(\alpha)} + i\Omega_{\alpha} e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} C_{11}, \quad (17)$$

$$\dot{C}_{01}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{01}^{(\alpha)} + i\Omega_{\alpha} e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} C_{11}. \quad (18)$$

⁴⁾ Этот фотон отличен от того, который испускается при переходе атомов в основное состояние, но для упрощения записи мы используем тот же индекс фотона α , что и в предыдущем разделе.

Процедура, аналогичная изложенной в Приложении А, т. е. интегрирование (17), (18), марковское приближение и подстановка результата в (16), приводят к уравнению

$$\dot{C}_{11} = -2 \left(\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 f_k \right) C_{11}$$

или, что то же самое, (ср. с первым из выражений (А.5))

$$\dot{C}_{11} = -\gamma_{sp} C_{11}. \quad (19)$$

Таким образом, определена γ_{sp} — полная скорость спонтанного излучения из состояния $|11\rangle$ во все состояния, имеющие на один возбужденный атом меньше. Эта скорость, как и следовало ожидать, оказывается вдвое большей, чем для изолированного атома и не зависит от расстояния между атомами и, следовательно, от взаимодействия между ними⁵⁾. Но нам нужно найти не только полную скорость спонтанного распада состояния $|11\rangle$, но и скорости $\gamma_{\pm}^{(2)}$ его распада в каждое из КС-состояний $|+\rangle$ и $|-\rangle$, найденных в предыдущем разделе. После этого мы сможем записать уравнения баланса населенностей W_{11} , W_{00} и W_{\pm} состояний двух атомов в соответствии со схемой, изображенной на рис. 1б. Для того чтобы определить $\gamma_{\pm}^{(2)}$, сделаем в системе (16)–(18) замену переменных, аналогичную (11):

$$C_{\pm}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{10}^{(\alpha)} \pm C_{01}^{(\alpha)} \right), \quad (20)$$

в результате чего получим

$$\dot{C}_{11} = i \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}}{\sqrt{2}} \left[\left(e^{i\varphi_1(\mathbf{k})} + e^{i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{+}^{(\alpha)} - \left(e^{i\varphi_1(\mathbf{k})} - e^{i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{-}^{(\alpha)} \right], \quad (21)$$

$$\dot{C}_{+}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{+}^{(\alpha)} + i \frac{\Omega_{\alpha}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} + e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{11}, \quad (22)$$

$$\dot{C}_{-}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{-}^{(\alpha)} - i \frac{\Omega_{\alpha}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} - e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{11}. \quad (23)$$

⁵⁾ Действительно, как следует из анализа, приведенного в Приложении А, диполь-дипольное взаимодействие — это испускание фотона одним атомом и поглощение его другим, после чего возбужденный атом спонтанно испускает фотон в свободное пространство. Если оба атома возбуждены в начальном состоянии и только один из атомов возбужден в конечном, то взаимодействия между атомами при поглощении спонтанно испущенного фотона произойти не может.

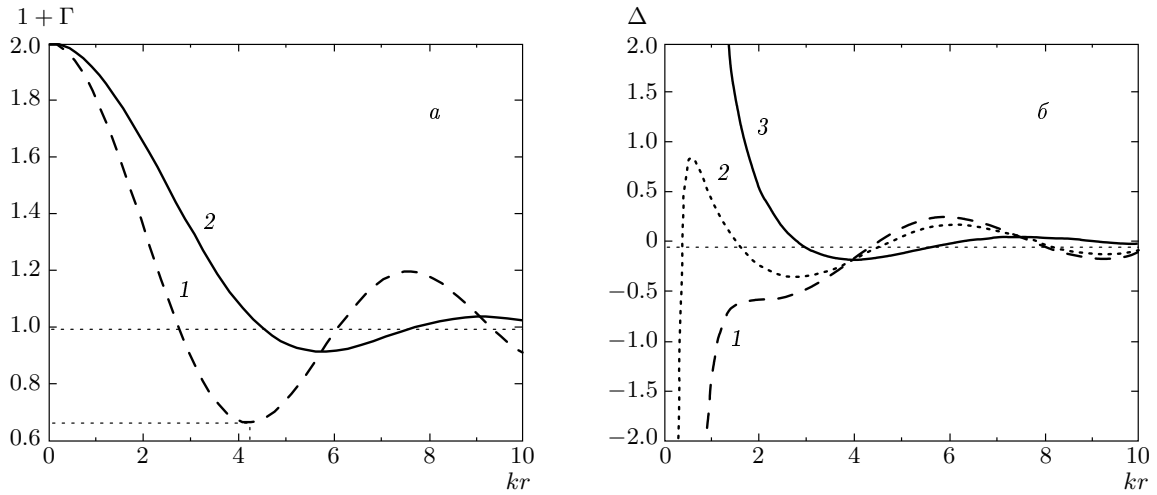


Рис. 2. *a* — Зависимости Γ от безразмерного расстояния между атомами для $\theta = \pi/2$ (1), 0 (2). *б* — Изменение Δ энергии состояний атомов в результате их диполь-дипольного взаимодействия для $\theta = \pi/2$ (1), $\pi/3.2$ (2), 0 (3)

Подставляя (20) в (15), можно убедиться в том, что $C_{\pm}^{(\alpha)}$ — амплитуды вероятностей состояний $|\pm\rangle|\alpha\rangle_f$, где $|\pm\rangle$ определяется формулой (13). Первое (второе) слагаемое под знаком суммы в уравнении (21) отвечает спонтанному распаду состояния $|11\rangle$ в состояние $|+\rangle$ ($|-\rangle$). Скорости $\gamma_{\pm}^{(2)}$ спонтанных переходов из $|11\rangle$ в $|\pm\rangle$ можно найти независимо, сохраняя в уравнениях (21)–(23) только слагаемые, соответствующие рассматриваемым переходам. Например, $\gamma_{-}^{(2)}$ определяется из уравнений

$$\dot{C}_{11} = i \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}}{\sqrt{2}} \left[- \left(e^{i\varphi_1(\mathbf{k})} - e^{i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{-}^{(\alpha)} \right], \quad (24)$$

$$\dot{C}_{-}^{(\alpha)} = -i\delta_k C_{-}^{(\alpha)} - i \frac{\Omega_{\alpha}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} - e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right) C_{11}. \quad (25)$$

Исключение $C_{-}^{(\alpha)}$ способом, изложенным в Приложении А (т. е. интегрирование (25), марковское приближение и подстановка результата в (24)), приводит к уравнению

$$\dot{C}_{11} = -\frac{\gamma_{-}^{(2)}}{2} C_{11},$$

где

$$\frac{\gamma_{-}^{(2)}}{2} = \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{2} |1 - e^{i\varphi_{12}(\mathbf{k})}|^2 f_k, \quad (26)$$

$\varphi_{12}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{12}$, а f_k определяется формулой (А.7). Используя выражения (А.5) и тот факт, что суммы слагаемых в (26), содержащих $\exp(i\varphi_{12}(\mathbf{k}))$ и

$\exp(-i\varphi_{12}(\mathbf{k}))$, одинаковы (см. (А.12) и предшествующее обсуждение), находим

$$\frac{\gamma_{-}^{(2)}}{2} = \frac{\gamma_{sp}}{2} (1 - D_{12}). \quad (27)$$

Тем же способом можно получить

$$\frac{\gamma_{+}^{(2)}}{2} = \frac{\gamma_{sp}}{2} (1 + D_{12}), \quad (28)$$

так что

$$\frac{\gamma_{+}^{(2)}}{2} + \frac{\gamma_{-}^{(2)}}{2} = \gamma_{sp}$$

в соответствии с уравнением (19). В выражениях (27), (28) следует опустить слагаемые, пропорциональные $\text{Im} D_{12}$, так как они не дадут вклада ни в уравнение для C_{11} , ни в динамические уравнения для населенностей. Окончательно получаем

$$\frac{\gamma_{\pm}^{(2)}}{2} = \frac{\gamma_{sp}}{2} \text{Re}(1 \pm D_{12}) = \frac{\gamma_{sp}}{2} (1 \pm \Gamma_{12}), \quad (29)$$

т. е. в данном случае $\gamma_{\pm}^{(2)}$ совпадает с $\gamma_{\pm}^{(1)}$. В соответствии с рис. 1б уравнения баланса для населенностей состояний двух атомов имеют вид

$$\dot{W}_{11} = -2W_{11}, \quad (30)$$

$$\dot{W}_{\pm} = (1 \pm \Gamma_{12})W_{11} - (1 \pm \Gamma_{12})W_{\pm}, \quad (31)$$

а полная мощность P спонтанного излучения двух атомов есть

$$P = 2W_{11} + (1 + \Gamma_{12})W_{+} + (1 - \Gamma_{12})W_{-}. \quad (32)$$

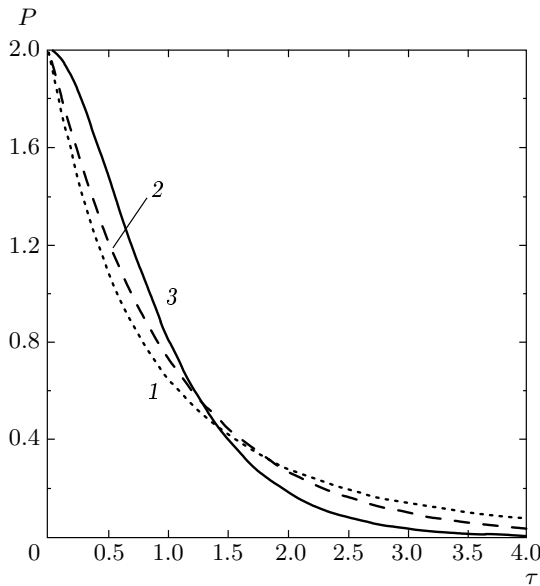


Рис. 3. Зависимости полной мощности $P(\tau)$ спонтанного излучения двух атомов (в фотонах за интервал времени γ_{sp}^{-1}) для $\xi_{12} = 4.3$, $\theta_{12} = \pi/2$ (1), $\xi_{12} \gg 1$ (2), $\xi_{12} \ll 1$ (3); P_1 (1), P_2 (2), P_3 (3)

На рис. 2 показаны зависимости $1 + \Gamma_{12}(\xi)$ и $\Delta_{12}(\xi)$ при различных значениях θ_{12} . Как видно, $1 + \Gamma_{12}$ является осциллирующей функцией ξ , т. е. возможно как ускорение спонтанного излучения двух атомов для $\xi \ll 1$, когда $\Gamma_{12} \rightarrow 1$, так и при некоторых значениях ξ и θ_{12} замедление, например, при $\theta_{12} = \pi/2$ и $\xi \approx 4.3$ (кривая 1 на рис. 2а). Этот эффект известен, он был проверен экспериментально [38] для случая, когда только один из двух атомов первоначально возбужден. Согласно рис. 2б сдвиг Δ_{12} энергий атомов, обусловленный их диполь-дипольным взаимодействием, меняет знак в зависимости от θ_{12} и расходится при $\xi \rightarrow 0$. Вместе с тем при $\xi = 0.3$ имеем $|\Delta_{12}| = 116$ и $\Gamma_{12} = 0.99$, т. е. все еще $|\Delta_{12}| \ll \omega_0/\gamma_{sp}$ и, следовательно, анализ по методу работы [31] все еще справедлив, при том что функция $\Gamma_{12}(\xi)$ практически достигла максимально возможного значения.

На рис. 3 представлены зависимости $P(\tau)$ для $\xi \ll 1$, $\xi \gg 1$ и $\xi = 4.3$, $\theta = \pi/2$, в последнем случае имеет место «замедление» спонтанного излучения по сравнению с изолированным атомом. Как видно, кривые очень близки друг к другу, поэтому эти три случая может быть трудно различить в эксперименте (это легче сделать в условиях, когда первоначально возбужден только один атом [38]). Импульс сверхизлучения от двух атомов отсутствует. Таким образом, эксперименты по обнаружению им-

пульса сверхизлучения от нескольких атомов должны проводиться как минимум с тремя атомами, для их описания потребуется соответствующая теория. Перед тем как обобщать данный подход на случай $N > 2$ дипольно взаимодействующих атомов, обсудим иные возможности выбора КС-состояний двух дипольно взаимодействующих атомов.

5. О КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДВУХ АТОМОВ

Заметим, что замена переменных (11) и соответствующий переход к симметричному и антисимметричному состояниям (13) выполнены, исходя из того, что диагонализуются приближенные уравнения, полученные после адиабатического исключения $C_{00}^{(\alpha)}$ из точных уравнений (4)–(6). Поэтому предположение о том, что атомы после излучения первого фотона переходят из состояния $|11\rangle$ в состояние $|+\rangle$ или $|-\rangle$ тоже является приближением. При более строгом подходе следует использовать квантовомеханические состояния «атомы + поле», диагонализующие систему уравнений (16), (17) для соответствующих амплитуд вероятностей до адиабатического исключения мод поля. Эти состояния следуют из очевидной замены переменных, которую можно сделать в (16), чтобы уменьшить число уравнений, описывающих излучение первого фотона. Действительно, вместо $C_{10}^{(\alpha)}$ и $C_{01}^{(\alpha)}$ можно использовать

$$C_{\pm}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{10}^{(\alpha)} e^{i\varphi_1(\mathbf{k})} \pm C_{01}^{(\alpha)} e^{i\varphi_2(\mathbf{k})} \right), \quad (33a)$$

которые есть амплитуды вероятностей состояний

$$|\pm\rangle_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} |10\rangle \pm e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} |01\rangle \right) |\alpha\rangle_f, \quad (33б)$$

в чем легко убедиться, выразив $C_{10}^{(\alpha)}$ и $C_{01}^{(\alpha)}$ через $C_{\pm}^{(\alpha)}$ и подставив результат в волновую функцию (15). Состояния (33б) взаимно ортогональны и именно в них переходит система атомы + поле при излучении фотона α из состояния $|11\rangle|0\rangle_f$. Только в случае $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ll 1$ состояния (33б) переходят в состояния $|\pm\rangle_{\alpha} |\alpha\rangle_f \exp(-i\varphi_1(\mathbf{k}))$, где симметричное и антисимметричное состояния $|\pm\rangle$ двух атомов определяются формулой (13). Переход от смешанных состояний $|\pm\rangle$ двух атомов к смешанным состояниям $|\pm\rangle_{\alpha}$ системы атомы + ЭМП может оказаться существенным для выяснения степени перемешивания дипольно взаимодействующих атомов [32]. Исследование спонтанного излучения двух атомов в случае, когда базисными состояниями выбраны $|\pm\rangle_{\alpha}$ и $|11\rangle|0\rangle_f$ (и

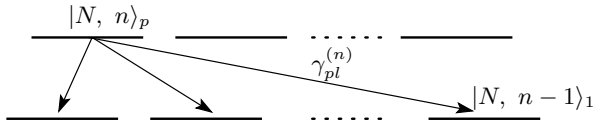


Рис. 4. Переходы из квазистационарных состояний N атомов

соответствующие состояния для излучения второго фотона) — предмет отдельного рассмотрения.

6. СКОРОСТИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ N АТОМОВ

Анализ, проведенный выше для двух атомов, подсказывает метод расчета спонтанного излучения системы из $N > 2$ дипольно взаимодействующих атомов. Достаточно рассмотреть спонтанные переходы из состояний N атомов, среди которых имеется n возбужденных (будем для краткости называть это состояние «с n возбуждениями» или « n -подсистемой») в состояние N атомов с $n - 1$ возбуждениями и одним спонтанно излученным фотоном. Будем считать, что N достаточно мало, так что вынужденным излучением (т. е. излучением нескольких одинаковых фотонов) можно пренебречь.

Всего имеется C_N^n квазистационарных состояний n -подсистемы. Цель расчета — получить выражение для скорости $\gamma_{pl}^{(n)}$ спонтанного излучения из КС-состояния $|N, n\rangle_p$, $p = 1, \dots, C_N^n$, в КС-состояние $|N, n - 1\rangle_l$, $l = 1, \dots, C_N^{n-1}$. После этого можно легко записать кинетические уравнения баланса для населенностей КС-состояний, см. рис. 4.

Составим векторы $\mathbf{C}(N, n)$ и $\mathbf{C}_\alpha(N, n - 1)$ из амплитуд вероятностей n - и $n - 1$ -подсистем, которые имеют соответственно по C_N^n и C_N^{n-1} состояний атомов. Здесь и далее вектор есть вектор-столбец, а соответствующий транспонированный вектор — вектор-строка. Элементы $\mathbf{C}(N, n)$ и $\mathbf{C}_\alpha(N, n - 1)$ можно расположить в произвольной последовательности, например, для четырех атомов

$$\mathbf{C}(4, 3) = \{C_{0111}, C_{1011}, C_{1101}, C_{1110}\} \quad (34a)$$

и

$$\mathbf{C}_\alpha(4, 2) = \{C_{0011}^{(\alpha)}, C_{0101}^{(\alpha)}, C_{0110}^{(\alpha)}, C_{1001}^{(\alpha)}, C_{1010}^{(\alpha)}, C_{1100}^{(\alpha)}\}. \quad (34б)$$

Здесь порядок индексов соответствует нумерации атомов, «0» означает атом в основном состоянии,

«1» — в возбужденном. Например, C_{0111} — амплитуда вероятности того, что 1-й атом находится в основном состоянии, а все остальные (2-й, 3-й и 4-й) — в возбужденном и фотоны отсутствуют. Индекс α обозначает присутствие спонтанно излученного фотона.

Векторы $\mathbf{C}(N, n)$ и $\mathbf{C}_\alpha(N, n - 1)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\mathbf{C}}(N, n) = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} [\Phi(\mathbf{k}, N, n)] \mathbf{C}_{\alpha}(N, n - 1), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{\alpha}(N, n - 1) = & -i\delta_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_{\alpha}(N, n - 1) + \\ & + i\Omega_{\alpha} [\Phi(\mathbf{k}, N, n)]^{\dagger} \mathbf{C}(N, n). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $[\Phi(\mathbf{k}, N, n)]$ — эрмитова матрица с C_N^n строками и C_N^{n-1} столбцами, элементы которой равны либо нулю, либо $\exp(i\varphi_p(\mathbf{k}))$, $\varphi_p(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_p$, \mathbf{r}_p — радиус-вектор p -го атома. Номера строк матрицы $[\Phi(\mathbf{k}, N, n)]$ соответствуют номерам компонент $\mathbf{C}(N, n)$, а номера столбцов — номерам компонент $\mathbf{C}(N, n - 1)$. Матричный элемент $[\Phi(\mathbf{k}, N, n)]$, находящийся на пересечении данной строки и столбца, равен $x_p \equiv \exp(i\varphi_p(\mathbf{k}))$, если p -й индекс элемента $\mathbf{C}(N, n - 1)$, соответствующего данному столбцу, равен 0, а при замене этого индекса на 1 получается индекс элемента $\mathbf{C}(N, n)$, соответствующего данной строке. В противном случае матричный элемент $[\Phi(\mathbf{k}, N, n)]$ равен 0. Например, матрица 4×6 для четырех атомов, из которых имеется три возбужденных, имеет вид

$$\begin{aligned} [\Phi(\mathbf{k}, 4, 3)] = & \\ & \begin{matrix} 0011 & 0101 & 0110 & 1001 & 1010 & 1100 \\ x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0111 \\ = x_1 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 1011 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_4 & 1101 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 1110 \end{matrix} \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь напротив соответствующих строк (столбцов) $[\Phi(\mathbf{k}, 4, 3)]$ указаны индексы компонент $\mathbf{C}(4, 3)$, ($\mathbf{C}(4.2)$).

Как и для случая двух атомов, с помощью процедуры, описанной в работе [31], из уравнений (35), (36) исключаются компоненты $\mathbf{C}_{\alpha}(N, n - 1)$ и получается система уравнений для $\mathbf{C}(N, n)$:

$$\dot{\mathbf{C}}(N, n) = -\frac{\gamma_{sp}}{2} [D(N, n)] \mathbf{C}(N, n), \quad (38)$$

где

$$[D(N, n)] = \frac{2}{\gamma_{sp}} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 [\Phi(\mathbf{k}, N, n)] [\Phi(\mathbf{k}, N, n)]^+ \quad (39)$$

— симметричная матрица размера $C_N^n \times C_N^n$. Диагональные элементы $[D(N, n)]$ равны n , а ее ненулевые недиагональные элементы

$$D_{ij} \equiv \langle e^{i\varphi_{ij}} \rangle = -\frac{3i}{2} [P(\xi_{ij}) + \cos^2 \theta_{ij} Q(\xi_{ij})] e^{i\xi_{ij}} \quad (40)$$

(в соответствии с обозначениями (А.5)), где $\exp(i\varphi_{ij})$ — элемент

$$\left([\Phi(\mathbf{k}, N, n)] [\Phi(\mathbf{k}, N, n)]^+ \right)_{ij},$$

$\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, $\xi_{ij} = kr_{ij}$, $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ и $P(\xi_{ij})$, $Q(\xi_{ij})$ определяются соотношениями (10). Приведем в качестве примера явный вид матрицы $[D(4, 3)]$, которую можно получить, используя формулу (37):

$$[D(4, 3)] = \begin{bmatrix} 3 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{12} & 3 & D_{23} & D_{24} \\ D_{13} & D_{23} & 3 & D_{34} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & 3 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Матрицу $[D(N, n)]$ можно получить и другим способом. Поставим в соответствие ее строкам и столбцам компоненты $\mathbf{C}(N, n)$. Тогда недиагональные компоненты будут равны $D_{ij}(N, n)$, если индекс компоненты $\mathbf{C}(N, n)$, соответствующей данному столбцу, получается из индекса компоненты $\mathbf{C}(N, n)$, соответствующей данной строке, перестановкой цифр на i -м и на j -м местах. Приведем в качестве примера явный вид матрицы $[D(4, 2)]$:

$$[D(4, 2)] = \begin{array}{cccccc} 0011 & 0101 & 0110 & 1001 & 1010 & 1100 \\ 2 & D_{23} & D_{24} & D_{13} & D_{14} & 0 & 0011 \\ D_{23} & 2 & D_{34} & D_{12} & 0 & D_{14} & 0101 \\ = D_{24} & D_{34} & 2 & 0 & D_{12} & D_{13} & 0110 \\ D_{13} & D_{12} & 0 & 2 & D_{34} & D_{24} & 1001 \\ D_{14} & 0 & D_{12} & D_{34} & 2 & D_{23} & 1010 \\ 0 & D_{14} & D_{13} & D_{24} & D_{23} & 2 & 1100 \end{array} \quad (42)$$

Определим матрицы $[D(N, n)]$ и $[D(N, n - 1)]$, найдем их собственные значения $\beta_p(N, n)$,

$\beta_l(N, n - 1)$, $p = 1, \dots, C_N^n$, $l = 1, \dots, C_N^{n-1}$, собственные векторы $\mathbf{A}_p(N, n)$, $\mathbf{A}_l(N, n - 1)$ и нормируем компоненты собственных векторов так, чтобы сумма квадратов их модулей равнялась 1. Из собственных векторов составим матрицы $[A(N, n)]$, $[A(N, n - 1)]$ так, что компоненты собственного вектора, соответствующего данному собственному значению, составят строки этих матриц. После этого определяются векторы $\mathbf{a}(N, n)$ и $\mathbf{a}_{\alpha}(N, n - 1)$, компоненты которых есть коэффициенты разложения состояния N атомов с n и $n - 1$ возбуждениями (соответственно, без фотонов и с одним спонтанно испущенным фотоном) по квазистационарным состояниям

$$\mathbf{a}(N, n) = [A(N, n)] \mathbf{C}(N, n), \quad (43)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha}(N, n) = [A(N, n - 1)] \mathbf{C}_{\alpha}(N, n - 1). \quad (44)$$

Пользуясь формулами (43), (44), обратными им соотношениями

$$\mathbf{C}(N, n) = [A(N, n)]^+ \mathbf{a}(N, n), \quad (45)$$

$$\mathbf{C}_{\alpha}(N, n - 1) = [A(N, n - 1)]^+ \mathbf{a}_{\alpha}(N, n - 1), \quad (46)$$

а также (35), (36), запишем уравнения для $\mathbf{a}(N, n)$ и $\mathbf{a}_{\alpha}(N, n - 1)$:

$$\dot{\mathbf{a}}(N, n) = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} [\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)] \mathbf{a}_{\alpha}(N, n - 1), \quad (47)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{\alpha}(N, n - 1) = -i\delta_k \mathbf{a}_{\alpha}(N, n - 1) + i\Omega_{\alpha} [\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)]^+ \mathbf{a}(N, n), \quad (48)$$

где

$$[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)] = [A(N, n)] [\Phi(\mathbf{k}, N, n)] [A(N, n - 1)]^+. \quad (49)$$

Нас интересует спонтанное излучение из некоторого состояния p с n возбуждениями в состояние l с $n - 1$ возбуждениями. Оставим в уравнениях (47), (48) только эти состояния и получим

$$\dot{a}_p(N, n) = i \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} [\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)]_{pl} a_l^{(\alpha)}(N, n - 1), \quad (50)$$

$$\dot{a}_l^{(\alpha)}(N, n - 1) = -i\delta_k a_l^{(\alpha)}(N, n - 1) + i\Omega_{\alpha} [\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)]_{lp}^+ a_p(N, n). \quad (51)$$

После обычной процедуры исключения $a_l^{(\alpha)}(N, n-1)$ находим

$$\dot{a}_p(N, n) = - \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 \left| \left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n) \right]_{pl} \right|^2 a_p(N, n), \quad (52)$$

где использовано равенство

$$\left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n) \right]_{lp}^+ = \left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n) \right]_{lp}^*.$$

Таким образом,

$$\frac{\gamma_{pl}^{(n)}}{2} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 \left| \left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n) \right]_{pl} \right|^2 \right\}, \quad (53)$$

где взята действительная часть по той же самой причине, что и для случая двух атомов.

Выражение (53) содержит в явном виде сумму по α , которую можно исключить следующим образом. Согласно (49), матричный элемент $[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n)]_{pl}$ можно записать как

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, N, n) \right]_{pl} &= \\ &= \mathbf{A}_p^T(N, n) [\Phi(\mathbf{k}, N, n)] \mathbf{A}_l^*(N, n-1), \end{aligned} \quad (54)$$

где $\mathbf{A}_p^T(N, n)$ — собственный вектор-строка, соответствующий собственному значению $\beta_p(N, n)$ матрицы $[D(N, n)]$, а $\mathbf{A}_l^*(N, n-1)$ — вектор-столбец, составленный из комплексно-сопряженных элементов собственного вектора $\mathbf{A}_l(N, n-1)$ матрицы $[D(N, n-1)]$, соответствующего собственному значению $\beta_l(N, n-1)$. Решая уравнение

$$[\Phi(\mathbf{k}, N, n)] \mathbf{A}_l^*(N, n-1) = [R_l(N, n)] \Phi(\mathbf{k}, N), \quad (55)$$

где $[R_l(N, n)]$ — матрица размером $C_N^n \times N$, а $\Phi(\mathbf{k}, N)$ — вектор-столбец с N компонентами $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N$, находим матрицу $[R_l(N, n)]$, элементами которой являются компоненты $\mathbf{A}_l^*(N, n-1)$. После этого подставим правую часть (55) в (54) и (53) и приходим к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{pl}^{(n)}}{2} &= \frac{\gamma_{sp}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_p^T(N, n) [R_l(N, n)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\tilde{D}(N)] [R_l(N, n)]^+ \mathbf{A}_p^*(N, n) \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$[\tilde{D}(N)] \equiv \frac{2}{\gamma_{sp}} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 \Phi(\mathbf{k}, N) \Phi^+(\mathbf{k}, N) \quad (57)$$

— симметричная матрица $N \times N$ с недиагональными элементами D_{ij} , определяемыми (40), (индекс i совпадает с индексом строки $[\tilde{D}(N)]$, индекс j — с индексом ее столбца), а диагональные элементы $[\tilde{D}(N)]$ равны 1. Таким образом, получено выражение (56) для $\gamma_{pl}^{(n)}$, которое не содержит суммы по α .

7. ПОЛНАЯ МОЩНОСТЬ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ АТОМОВ

В качестве примера используем данный метод расчета скоростей спонтанного излучения для определения полной мощности спонтанного излучения четырех двухуровневых атомов, находящихся при $t_0 = 0$ в возбужденных состояниях, в условиях, когда расстояния между атомами порядка $\lambda/2\pi$, где λ — длина волны, соответствующая переходу изолированного атома. Экспериментальная проверка результатов может быть выполнена с использованием атомов в дипольных ловушках [14]. Выясним, насколько сильно отличается полная мощность спонтанного излучения в данном случае от случая четырех изолированных атомов, т. е. находящихся друг от друга на расстоянии, много большем $\lambda/2\pi$.

Запишем кинетические уравнения для населенностей W_{ni} возбужденных состояний системы из четырех атомов, из которых $n = 1, \dots, 4$ находятся в возбужденном, а остальные — в основном состоянии; индекс $i = 1, \dots, C_4^n$ нумерует различные состояния с одним и тем же числом возбужденных атомов. Имеем

$$\dot{W}_{41} = -\gamma_1^{(4)} W_{41}, \quad (58)$$

$$\dot{W}_{3i} = \gamma_{1i}^{(4)} W_{41} - \gamma_i^{(3)} W_{3i}, \quad (59)$$

$$\dot{W}_{2i} = \sum_{j=1}^4 \gamma_{ji}^{(3)} W_{3j} - \gamma_i^{(2)} W_{2i}, \quad (60)$$

$$\dot{W}_{1i} = \sum_{j=1}^6 \gamma_{ji}^{(2)} W_{2j} - \gamma_{i1}^{(1)} W_{1i}, \quad (61)$$

где

$$\gamma_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{C_4^{n-1}} \gamma_{ij}^{(n)}.$$

Начальными условиями для уравнений (58)–(60) являются $W_{41}(0) = 1$, $W_{ni}(0) = 0$, $n \neq 4$. Система уравнений (58)–(61) легко интегрируется, ее решение может быть получено аналитически, но это решение достаточно громоздко, поэтому мы его не приводим. Скорости $\gamma_{ji}^{(n)}$ изменения населенностей состояний из-за спонтанного излучения определяются формулой (56) согласно методике, изложенной в предыдущем разделе. Полная мощность $P(t)$ спонтанного излучения четырех атомов равна полной скорости убывания населенностей их возбужденных состояний, т. е. сумме слагаемых правых частей (58)–(61), имеющих знак минус:

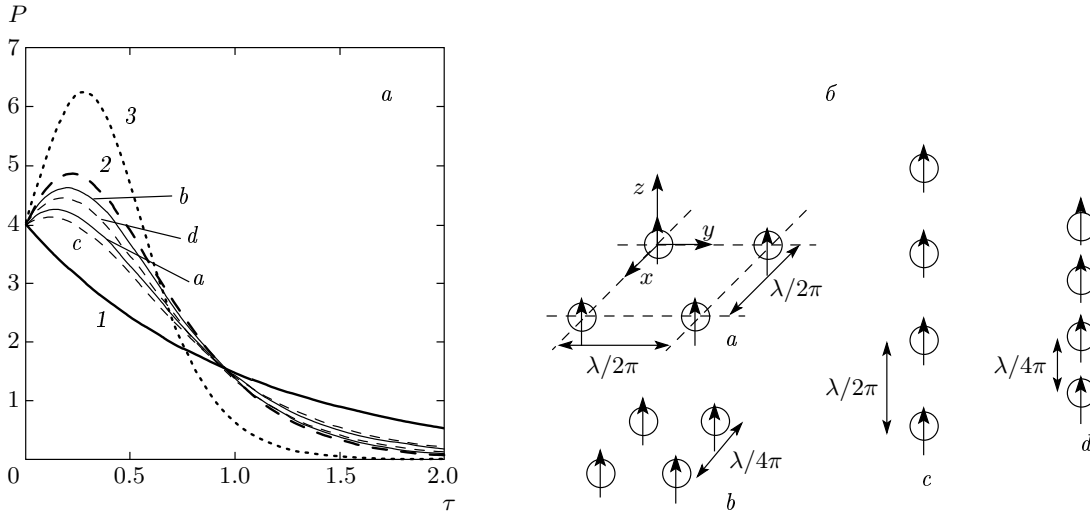


Рис. 5. *a* — Зависимости полной мощности $P(\tau)$ спонтанного излучения четырех атомов (в фотонах за интервал времени γ_{sp}^{-1} , $\tau = \gamma_{sp}t$); P_1 (1), P_2 (2), P_3 (3). Кривые *a*–*d* соответствуют пространственным конфигурациям атомов, изображенным на рис. 5б

$$P(t) = \gamma_1^{(4)} W_{41} + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^{(3)} W_{3i} + \sum_{i=1}^6 \gamma_i^{(2)} W_{2i} + \sum_{i=1}^4 \gamma_{i1}^{(1)} W_{1i}. \quad (62)$$

Зависимости $P(\tau)$ представлены на рис. 5а для различных положений атомов в пространстве, изображенных на рис. 5б. На рис. 5а приведены для сравнения полные мощности спонтанного излучения:

$$P_1(\tau) = 4e^{-\tau}$$

— для четырех изолированных атомов,

$$P_2(\tau) = 4e^{-4\tau} [7 - 6e^{-2\tau}(1 + 2\tau) + 6\tau]$$

— для четырех атомов в объеме размерами, много меньшими $\lambda/2\pi$, (модель Дике) и результат полуклассического анализа коллективного излучения четырех атомов в условиях модели Дике

$$P_3(\tau) = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \operatorname{sch} \left[\frac{N+1}{2} \left(\tau - \frac{\ln N}{N+1} \right) \right],$$

$$N = 4.$$

$P_1(\tau)$ можно определить, если в уравнениях (58)–(61) положить $\gamma_{1i}^{(n)} = n\gamma_{sp}\delta_{i1}$ (здесь и далее δ_{i1} — символ Кронекера). Уравнения для $W_n \equiv W_{ni}\delta_{i1}$ получаются сложением скоростей спонтанного излучения каждого из n возбужденных независимых атомов. Результат для $P_2(\tau)$ следует

из уравнений (58)–(61), в которых $W_n \equiv W_{ni}\delta_{i1}$ и $\gamma_{1i}^{(n)} = n(N - n + 1)\gamma_{sp}\delta_{i1}$, $N = 4$. Это соответствует случаю Дике, когда при спонтанном излучении возбуждаются только полностью симметричные состояния атомов. Например, для четырех атомов, из которых три возбуждены, полностью симметричным является состояние

$$\frac{1}{2} (|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle).$$

Наконец,

$$P_3(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \langle n \rangle,$$

где $\langle n \rangle$ — среднее число возбужденных атомов,

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^4 nW_n.$$

Из уравнений модели Дике можно записать:

$$\frac{d}{d\tau} \langle n \rangle = \sum_{n=1}^4 n(N - n + 1)W_n \equiv \langle n \rangle(N + 1) - \langle n^2 \rangle,$$

затем в последнем уравнении перейти к классическому пределу, заменив $\langle n^2 \rangle$ на $\langle n \rangle^2$, проинтегрировать его при начальном условии $\langle n \rangle = N$ и получить выражение для $P_3(\tau)$.

Как видно из рис. 5а, спонтанное излучение четырех атомов, находящихся на расстоянии друг от друга порядка $\lambda/2\pi$ или менее (кривые *a*–*d*), существенно отличается от спонтанного излучения четырех не взаимодействующих атомов (кривая 1). В

первом случае возникает импульс сверхизлучения, в отличие от экспоненциального затухания мощности спонтанного излучения со временем для изолированных атомов. Хотя импульсы сверхизлучения на кривых *a-d* (рис. 5*a*) имеют меньшую амплитуду, чем на кривой 2, соответствующей расстоянию между атомами, много меньшему $\lambda/2\pi$ (случай Дике), эти импульсы вполне различимы и характеризуются определенными временами задержки τ_{delay} и длительностями τ_{imp} . В рамках анализа квантовомеханической задачи, представленного выше, трудно определить τ_{delay} и τ_{imp} аналитически даже для случая Дике и тем более для случая произвольного расстояния между атомами. Но

$$\tau_{delay} = \frac{\ln N}{N+1}, \quad \tau_{imp} = \frac{1}{N+1}$$

определяются при использовании полуклассического подхода (кривая 3 на рис. 5*a*) — в этом состоит одно из его преимуществ. Как следует из сравнения кривых *a-d* и 3 на рис. 5*a*, величины τ_{delay} и τ_{imp} при произвольном расстоянии между атомами зависят не только от расстояния между атомами, но и от их взаимного расположения. При этом задержки и длительности импульсов могут существенно отличаться от величин τ_{delay} и τ_{imp} , определенных из классической модели (ср., например, кривые 3 и *c* на рис. 5*a*). Ширина импульсов на кривых *a-d* и 2 больше, чем на кривой 3, что вызвано квантовыми флуктуациями.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы является новая методика расчета скоростей спонтанной релаксации в системе из N дипольно взаимодействующих двухуровневых систем (атомов). В рамках этой методики базис, соответствующий квазистационарным состояниям атомов, получается естественным образом — диагонализацией соответствующей системы уравнений. Затраты времени на расчет полной мощности спонтанного излучения нескольких атомов из квазистационарных состояний сравнительно невелики, поэтому данная методика может быть применена непосредственно для описания экспериментов по исследованию спонтанного излучения нескольких атомов в дипольных ловушках [14]. Из рис. 5*a* можно заключить, что импульс сверхизлучения в системе четырех атомов хорошо различим при любой их ориентации друг относительно друга, если среднее расстояние между атомами оказывается порядка $\lambda/2\pi$ или менее. С другой стороны, импульс сверхизлучения в

системе двух атомов отсутствует при любом расстоянии между атомами. Для атомов ^{86}Rb , используемых в экспериментах [14], $\lambda/2\pi \approx 130$ нм, т. е. можно ожидать, что в этих условиях импульс сверхизлучения будет наблюдаться для $N \sim 10$ атомов в объеме порядка нескольких мкм³ — это более-менее соответствует объему используемой дипольной ловушки. Несложно рассчитать мощность спонтанного излучения в данный телесный угол, суммируя излучения отдельных диполей, как это сделано, например, в работе [44]. В принципе, регистрируя спонтанное излучение от атомов в ловушке, можно определять их плотность, температуру и другие характеристики распределения атомов в пространстве (например, флуктуации межатомного расстояния), но соответствующие оценки требуют отдельной работы.

Развивая подход, предложенный выше, можно рассмотреть спонтанное излучение двух и более атомов детальнее — используя базисные состояния, предложенные в разд. 5. Такой анализ может дать новые результаты и позволит выяснить, насколько хорошим оказывается приближение квазистационарных состояний, использованных в данной и в других, более ранних работах.

Принципиальную роль при возникновении сверхизлучения играет дипольное взаимодействие между двухуровневыми системами. Именно оно приводит к коллективному (когерентному) характеру спонтанного излучения. При этом излучение остается спонтанным. Учет вынужденного излучения (излучения одинаковых фотонов), по-видимому, даст малый вклад в случае малого числа атомов по причине малой вероятности испускания одинаковых фотонов и сдвига энергетических состояний системы атомов из-за дипольного взаимодействия. Задача об анализе сверхизлучения вместе с вынужденным излучением достаточно сложна, она была рассмотрена, например, в работе [46] для большого числа атомов. Все еще нет исчерпывающего ответа на вопрос о том, как согласуется квантовое описание сверхизлучения, в том числе в модели Дике, где вынужденное излучение отсутствует, и классическое описание сверхизлучения в протяженных образцах (см., например, [47] и цитируемые там работы). В последнем случае используются уравнения для оптических безрезонаторных усилителей [12], описывающие вынужденное излучение (на важность процессов вынужденного излучения при сверхизлучении в протяженных образцах указывалось в работе [4]).

В настоящее время бурно развивается наноплазмоника [48] — новое направление физики резонансного взаимодействия излучения с веще-

ством. В наноплазмонике существенную роль играет взаимодействие (в частности, дипольное) металлических наночастиц с возбужденными плазмонными резонансами через ближнее поле [49] и резонансное взаимодействие двухуровневых систем с металлическими наночастицами и нанобъектами [50]. Возможно, что опыт, подходы и методы квантовой теории сверхизлучения окажутся полезными в тех задачах наноплазмоники, которые касаются квантовых объектов и устройств — как, например, задачи о спонтанном излучении атомов вблизи нанотел [51] и о нанолазерах [22].

Автор выражает благодарность Ph. Grangier, A. Browaeys, Y. Sortais за полезные дискуссии и комментарии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-16211).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Интегрируя уравнение (6) с начальным условием $C_{00}^{(\alpha)} = 0$, получаем

$$C_{00}^{(\alpha)}(t) = i\Omega_\alpha \int_0^t \left[C_{10}(t-\tau)e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} + C_{01}(t-\tau)e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right] e^{-i\delta_k \tau} d\tau. \quad (\text{A.1})$$

Введем в (A.1) марковское приближение $C_{ij}(t-\tau) \approx C_{ij}(t)$, после чего возьмем интеграл, так что

$$C_{00}^{(\alpha)}(t) = i\Omega_\alpha f_k(t) \left[C_{10}(t)e^{-i\varphi_1(\mathbf{k})} + C_{01}(t)e^{-i\varphi_2(\mathbf{k})} \right], \quad (\text{A.2})$$

где

$$f_k(t) = \frac{i}{\delta_k} (e^{-i\delta_k t} - 1).$$

Подставим (A.2) в уравнения (4), (5) и получим

$$\dot{C}_{10} = -\frac{\gamma_{sp}}{2}(C_{10} + D_{12}C_{01}), \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{C}_{01} = -\frac{\gamma_{sp}}{2}(C_{01} + D_{21}C_{10}), \quad (\text{A.4})$$

где

$$\frac{\gamma_{sp}}{2} = \sum_\alpha \Omega_\alpha^2 f_k(t), \quad (\text{A.5})$$

$$D_{ij} \equiv \langle e^{i\varphi_{ij}(\mathbf{k})} \rangle = \frac{2}{\gamma_{sp}} \sum_\alpha \Omega_\alpha^2 e^{i\varphi_{12}(\mathbf{k})} f_k(t),$$

$\varphi_{ij}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Вычислим суммы (A.5). Определим сначала $\gamma_{sp}/2$. Перейдем от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию:

$$\sum_\alpha \rightarrow V \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int d\Lambda_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda_{\mathbf{k}}} \approx V \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega_0^2 d\delta_k}{(2\pi c)^3} \int d\Lambda_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{A.6})$$

Здесь

$$\int d\Lambda_{\mathbf{k}} = \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}} \int_0^\pi \sin \theta_{\mathbf{k}} d\theta_{\mathbf{k}}$$

— телесный угол в пространстве волновых векторов \mathbf{k} .

При переходе от интегрирования по dk , $k = \omega/c$, к интегрированию по $d\delta_k$ нижний предел $-\omega_0$ заменен на $-\infty$ и положено $\omega \approx \omega_0$. Перейдем к пределу $t \rightarrow \infty$ в $f_k(t)$ в правых частях выражений (A.5). Чтобы обеспечить сходимость $f_k(t)$ при переходе к пределу, следует заменить δ_k на $\delta_k - i\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малая величина. Таким образом,

$$f_k(t \rightarrow \infty) \equiv f_k = -\frac{i}{\delta_k - i\varepsilon}. \quad (\text{A.7})$$

Теперь, учитывая, что

$$\Omega_\alpha^2 \approx \frac{d^2 2\pi\omega_0}{V\hbar} \cos^2 \theta_{\lambda_{\mathbf{k}}},$$

получаем из (A.5)

$$\frac{\gamma_{sp}}{2} = \sum_{\lambda_{\mathbf{k}}} \int d\Lambda_{\mathbf{k}} \frac{d^2 2\pi\omega_0}{\hbar} \cos^2 \theta_{\lambda_{\mathbf{k}}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega_0^2 d\delta_k}{(2\pi c)^3} f_k.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty f_k d\delta_k = \pi,$$

в чем можно убедиться, обходя полюс $\delta_k = 0$ на действительной оси. Вектор \mathbf{k} и векторы поляризаций фотона $\mathbf{1}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{2}_{\mathbf{k}}$ взаимно ортогональны, можно записать

$$\cos^2 \theta_{1_{\mathbf{k}}} + \cos^2 \theta_{2_{\mathbf{k}}} + \cos^2 \theta_{\mathbf{k}} = 1$$

и, следовательно,

$$\sum_{\lambda_{\mathbf{k}}} \int d\Lambda_{\mathbf{k}} \cos^2 \theta_{\lambda_{\mathbf{k}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}} \int_0^\pi d\theta_{\mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{k}} \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} = \frac{8\pi}{3}.$$

Таким образом

$$\frac{\gamma_{sp}}{2} = \frac{2}{3} \frac{d^2 \omega^3}{\hbar c^3}, \quad (\text{A.8})$$

т. е. мы воспроизвели известный результат [31].

Определим коэффициенты D_{12} и D_{21} . Величины сумм в выражениях для этих коэффициентов не зависят от выбора системы координат. В исходной системе координат xyz ось z совпадает с направлением поляризации возбуждающего импульса, а вектор \mathbf{r}_{12} , проведенный из атома 1, находящегося в начале координат, к атому 2, лежит в плоскости xz . Это позволяет рассматривать только одно возбужденное состояние атома — соответствующее дипольному моменту атомного перехода, параллельному оси z ⁶⁾. Для упрощения расчетов перейдем в систему координат $x'y'z'$, в которой ось z' направлена от атома 1 к атому 2, т. е. система координат $x'y'z'$ получается из системы xyz поворотом последней на угол θ_{12} против часовой стрелки вокруг оси y . Обозначив через θ' и φ' полярные углы в системе $x'y'z'$, получаем $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{12} = kr_{12} \cos \theta'$. Используя соотношения $z = z' \cos \theta_{12} - x' \sin \theta_{12}$, и $z = r \cos \theta$, $z' = r \cos \theta'$, $x' = r \sin \theta' \cos \varphi'$ в полярных координатах (r — расстояние от начала координат до точки), находим

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \theta_{12} - \sin \theta' \cos \varphi' \sin \theta_{12}, \quad (\text{A.9})$$

где величины без штриха и со штрихом относятся, соответственно, к точке в начальной и в повернутой системах координат. Таким образом,

$$D_{12} = \frac{3}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_k d\delta_k \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' (1 - \cos^2 \theta) \exp(-ikr_{12} \cos \theta'), \quad (\text{A.10})$$

где $\cos \theta$ определяется (A.9) и мы воспользовались (A.8) при записи коэффициента перед интегралом. При расчете (A.10) сначала берутся интегралы по $d\varphi'$ и $d\theta'$. Выполняя интегрирование по $d\varphi'$ и делая замену $\cos \theta' = x$, находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' (1 - \cos^2 \theta) \exp(-ikr_{12} \cos \theta') = \\ & = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta' \sin \theta' \times \\ & \times \left(1 - \cos^2 \theta' \cos^2 \theta_{12} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \sin^2 \theta_{12} \right) e^{-i\xi_{12}} = \\ & = \pi \int_{-1}^1 dx e^{-i\xi_{12}x} [1 + \cos^2 \theta_{12} + x^2(1 - 3\cos^2 \theta_{12})] = \\ & = 4\pi \left\{ \left(\frac{1}{\xi_{12}} - \frac{1}{\xi_{12}^3} \right) \sin \xi_{12} + \frac{\cos \xi_{12}}{\xi_{12}^2} + \right. \\ & \left. + \cos^2 \theta_{12} \left[\left(\frac{3}{\xi_{12}^3} - \frac{1}{\xi_{12}} \right) \sin \xi_{12} - \frac{3 \cos \xi_{12}}{\xi_{12}^2} \right] \right\}, \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

где $\xi_{12} = kr_{12}$. Заметим, что интеграл (A.11) действительный, т. е. он не изменяется при замене $\exp(-ikr_{12} \cos \theta')$ на $\exp(ikr_{12} \cos \theta')$. Таким образом, учитывая (A.5), можно заключить, что

$$D_{12} = D_{21}. \quad (\text{A.12})$$

Подставляя (A.11) в (A.10) и учитывая (A.12), получаем

$$D_{12} = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_k \frac{-i}{\delta_k - i\varepsilon} \times \left\{ \left(\frac{1}{\xi_{12}} - \frac{1}{\xi_{12}^3} \right) \sin \xi_{12} + \frac{\cos \xi_{12}}{\xi_{12}^2} + \right. \\ \left. + \cos^2 \theta_{12} \left[\left(\frac{3}{\xi_{12}^3} - \frac{1}{\xi_{12}} \right) \sin \xi_{12} - \frac{3 \cos \xi_{12}}{\xi_{12}^2} \right] \right\}, \quad (\text{A.13})$$

где $\xi_{12} \equiv kr_{12} = (\delta_k + \omega_0)/c$. В формуле (A.13) следует представить функции в виде

$$\sin \xi_{12} = \frac{1}{2i}(e^{i\xi_{12}} - e^{-i\xi_{12}}), \quad \cos \xi_{12} = \frac{1}{2}(e^{i\xi_{12}} + e^{-i\xi_{12}}).$$

Интегрирование в (A.13) выполняется в комплексной плоскости δ_k . Для слагаемых, пропорциональных $e^{i\xi_{12}}$, под интегралом в (A.13) следует замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости, где подынтегральное выражение имеет полюс⁷⁾ $\delta_k = i\varepsilon$. Для слагаемых, пропорциональных $e^{-i\xi_{12}}$, контур интегрирования следует замыкать в нижней полуплоскости, где подынтегральное выражение не имеет полюсов, поэтому такие слагаемые

⁷⁾ Здесь при обходе полюса в интеграле появляется множитель 2π , так как полюс рассматривается при малом, но конечном ξ , и он лежит в верхней полуплоскости, в отличие от случая (A.8), когда полюс рассматривается при $\varepsilon = 0$, т. е. он лежит на действительной оси, что соответствует множителю π в интеграле.

⁶⁾ При произвольном выборе системы координат следует рассматривать три возбужденных состояния атома, соответствующих дипольным моментам переходов, параллельных каждой из осей x , y , z .

не дадут вклада в интеграл. Вычет подынтегрального выражения в (A.13) равен выражению в фигурных скобках при $\delta_k = \varepsilon$, малое ε полагаем равным 0 и приходим к выражениям (9), (10).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Классическое поле гармонического осциллятора (диполя) в точке пространства, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} из места расположения диполя, имеет вид [52]

$$\mathbf{E}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{-i\omega_0 t} + \tilde{\mathbf{E}}_1^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{B.1})$$

где ω_0 — частота колебания диполя,

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = [\mathbf{d}_1 k^3 P(\xi) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_1) k^3 Q(\xi)] e^{i\xi}, \quad (\text{B.2})$$

\mathbf{d}_1 — медленно изменяющаяся амплитуда дипольного момента осциллятора⁸⁾ $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $k = \omega_0/c$, $\xi = kr$, а $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ определяются формулами (10). Переходим в (B.1) к оператору $\hat{\mathbf{E}}_1$ поля от квантового диполя, используя принцип соответствия, т. е. заменяя в (B.2) \mathbf{d}_1 на оператор

$$\hat{\mathbf{d}}_1 = d\sigma_1 \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.3})$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении оси z , вдоль которой поляризован диполь. Таким образом, оператор энергии диполь-дипольного взаимодействия атомов 1 и 2 имеет вид

$$\hat{V}_{dd} = -\hat{\mathbf{d}}_2 \hat{\mathbf{E}}_1, \quad (\text{B.4})$$

где

$$\hat{\mathbf{d}}_2 = d\mathbf{e}_z(\sigma_2 e^{-i\omega_0 t} + \sigma_2^+ e^{i\omega_0 t}),$$

$\hat{\mathbf{E}}_1$ определяется формулами (B.1), (B.2), в которых вектор \mathbf{d}_1 заменен на $\hat{\mathbf{d}}_1$, а \mathbf{r} — на \mathbf{r}_{12} . Пренебрегая в (B.4) быстроосциллирующими слагаемыми, пропорциональными $\exp(\pm 2i\omega_0 t)$, можно записать

$$\hat{V}_{dd} = -i \frac{\hbar \gamma_{sp}}{2} (D_{12} \sigma_2^+ \sigma_1 - D_{12}^* \sigma_1^+ \sigma_2), \quad (\text{B.5})$$

где использованы соотношения (10), (A.8) и D_{12} определяется формулой (9). Среднее значение (диагональный матричный элемент) $\langle \pm | \hat{V}_{dd} | \pm \rangle$ по квазистационарным состояниям (13) есть

$$\langle \pm | \hat{V}_{dd} | \pm \rangle = \pm \frac{\hbar \gamma_{sp}}{2} \Delta_{12}, \quad (\text{B.6})$$

где $\Delta_{12} = \text{Im}(D_{12})$, а недиагональные матричные элементы

$$\langle \pm | \hat{V}_{dd} | \mp \rangle = \mp i \frac{\hbar \gamma_{sp}}{2} \Gamma_{12}.$$

⁸⁾ Дипольный момент гармонического осциллятора принимается равным $\mathbf{d}_1 e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{d}_1^+ e^{i\omega_0 t}$.

Таким образом, в рамках подхода, использующего оператор энергии диполь-дипольного взаимодействия, симметричное и антисимметричное состояния $\langle \pm |$ двух атомов не диагонализуют оператор энергии дипольного взаимодействия, т. е. состояния $\langle \pm |$ не являются стационарными в отсутствие спонтанного излучения. Заметим, что если \hat{V}_{dd} представить в виде

$$\hat{V}_{dd} = U_{12} \sigma_2^+ \sigma_1 + U_{12}^* \sigma_1^+ \sigma_2, \quad (\text{B.7})$$

где

$$U_{12} = -i \frac{\hbar \gamma_{sp}}{2} D_{12}, \quad (\text{B.8})$$

то величина сдвига энергии квазистационарных состояний $\langle \pm |$ относительно $\hbar\omega_0$ есть $\pm \text{Re}(U_{12})$, а поправка к скорости спонтанного распада $\langle \pm |$ есть $\gamma_{sp}/2 \mp \text{Im}(U_{12})/\hbar$. Таким образом, энергия и скорость спонтанного распада $\langle \pm |$ связаны как действительная и мнимая части U_{12} . Иначе говоря, величины D_{ij} для произвольной пары i, j из N атомов можно определить из соотношения

$$D_{ij} = D_{ji} = i \frac{U_{ij}}{\hbar} = i \frac{U_{ji}}{\hbar}, \quad (\text{B.9})$$

где U_{ij} входят в выражение для энергии V_{ij} взаимодействия классических диполей:

$$V_{ij} = U_{ij} + U_{ij}^*, \quad (\text{B.10})$$

замещающих атомы i и j .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. N. E. Rehler and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **3**, 1735 (1971).
3. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, УФН **131**, 653 (1980).
4. Л. И. Меньшиков, УФН **169**, 653 (1999).
5. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике: сверхизлучение, бистабильность, фазовые переходы*, Наука, Москва (1988).
6. C. Cherubini, F. Federici, S. Succi, and M. P. Tosi, Phys. Rev. D **72**, 084016 (2005).
7. J. J. Sanchez-Mondragon, A. Alejo-Molina, S. Sanchez-Sanchez et al., Proc. SPIE, **5734**, Quantum Dots, Nanoparticles, and Nanoclusters II, ed. by D. L. Huffaker and P. K. Bhattacharya, 152 (2005).

8. Y. N. Chen, D. S. Chuu, and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 166802 (2003).
9. G. Bacher, R. Weigand, J. Seufert et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4417 (1999).
10. A. I. Klimovskaya, Yu. A. Driga, E. G. Gule et al., *Semiconductors* **37**, 681 (2003).
11. B. Laikhtman and L. D. Shvartsman, *AIP Conference Proceedings* **772**, 981 (2005).
12. П. П. Васильев, *КЭ* **29**(10), 4 (1999).
13. F. Meinardi, M. Cerninara, A. Sassella et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 247401 (2003).
14. N. Schlosser, G. Reymond, I. Protsenko et al., *Nature* **411**, 1024 (2001).
15. S. Bergamini, B. Darquié, M. Jones et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **21**, 1889 (2004).
16. Е. Д. Трифонов, *ЖЭТФ* **120**, 1117 (2001).
17. J. Eschner, Ch. Raab, F. Schmidt-Kaler et al., *Nature* **413**, 495 (2001).
18. К. А. Валиев, *УФН* **175**, 3 (2005).
19. И. Е. Проценко, G. Reymond, N. Schlosser, and Ph. Grangier, *Изв. РАН, сер. физ.* **68**, 1235 (2004).
20. N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel et al., *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145 (2002).
21. А. А. Калачев, В. В. Самарцев, *КЭ* **32**, 707 (2002).
22. I. E. Protsenko, A. V. Uskov, O. A. Zaimidoroga et al., *Phys. Rev. A* **71**, 063812 (2005).
23. D. M. Willard, A. V. Orden, *Nature Mater.* **2**, 575 (2003).
24. A. Retzker, J. I. Cirac, and B. Reznik, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 050504 (2005).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3, Мир, Москва (1989), с. 59.
26. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, *УФН* **171**, 625 (2001).
27. S. J. D. Phoenix and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **44**, 6023 (1991).
28. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
29. J. S. Bell, *Physics (Long Island City, N. Y.)* **1**, 195 (1965); reprinted in J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1988).
30. S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
31. V. Weiskopf and E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930); *ibid*, **65**, 18 (1930); М. О. Скалли, М. С. Зубари, *Квантовая оптика*, под ред. В. В. Самарцева, Наука, Москва (2003), с. 169; А. Н. Ораевский, *УФН* **164**, 415 (1994).
32. Ö. Çakir, A. A. Klyachko, and A. S. Shumovsky, *Phys. Rev. A* **71**, 034303 (2005).
33. Th. Richter, *Ann. Phys. Leipz.* **36**, 266 (1979).
34. P. W. Milonni and P. L. Knight *Phys. Rev. A* **10**, 1096 (1974).
35. I. E. Protsenko, V. N. Samoilov, and O. A. Zaimidoroga, *J. Rus. Laser Res.* **22**, 23 (2001).
36. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **121**, 1249 (2002).
37. А. А. Макаров, В. С. Летохов, *ЖЭТФ* **124**, 766 (2003).
38. R. G. DeVoe and R. G. Brewer, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2049 (1996).
39. R. H. Lehmburg, *Phys. Rev. A* **2**, 883 (1970).
40. G. S. Agarwal, *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and Their Relation to Other Approaches*, Springer, Berlin (1974).
41. R. H. Lehmburg, *Phys. Rev. A* **2**, 889 (1970).
42. P. Grangier, A. Aspect, and J. Vigue, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 418 (1985).
43. P. Grangier and J. Vigue, *J. Phys.* **48**, 78 (1987).
44. H. Freedhoff, *Phys. Rev. A* **69**, 013814 (2004).
45. W. G. Teich and G. Mahler, *Phys. Rev. A* **45**, 3300 (1992).
46. R. Bonifacio and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **11**, 1507 (1975); *Phys. Rev. A* **12**, 587 (1975).
47. В. А. Зуйков, А. А. Калачев, В. В. Самарцев и др., *КЭ* **30**, 629 (2000).
48. W. L. Barnes, A. Dereux, and T. W. Ebbesen, *Nature* **424**, 824 (2003).
49. B. Lamprecht, G. Schider, R. T. Lechner et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4721 (2000).
50. D. J. Bergman and M. I. Stockmann, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027402 (2003).
51. В. В. Климов, М. Дюкляу, В. С. Летохов, *КЭ* **31**, 569 (2001).
52. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2, Наука, Москва (1988), с. 253.