

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ «ПАМЯТЬ» БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ

*М. В. Калашник, Л. Х. Ингель**

*Научно-производственное объединение «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия*

Поступила в редакцию 13 февраля 2006 г.

Теоретически исследована задача о гидростатическом приспособлении (установлении механического равновесия в поле силы тяжести) в двухкомпонентной среде, например, в стратифицированной по температуре и солености морской воде. Помимо линейного приближения, аналитически исследована и нелинейная задача. Обнаружено, что процесс установления механического равновесия в бинарных смесях может происходить существенно иначе, чем в обычных жидкостях, стратифицированных только по температуре. В частности, двухкомпонентные идеальные среды имеют «память»: начальные горизонтальные неоднородности температуры или концентрации примеси (солености) не исчезают и на финальной стадии этого процесса, формируя долгоживущий термохалинный «след». Несмотря на устойчивую стратификацию плотности и конвективную устойчивость среды по всем известным критериям, начальные температурные возмущения могут не затухать и даже усиливаться, а также менять знак (в зависимости от относительного вклада двух субстанций в фоновую устойчивую стратификацию плотности). В процессе установления равновесия возможно формирование разрывных распределений из гладких начальных возмущений температуры или концентрации примеси. Такие свойства двухкомпонентных сред позволяют, в частности, объяснить некоторые распространенные особенности распределений температуры и солености в океане (наличие «долгоживущих» горизонтальных и вертикальных неоднородностей, в том числе с резко выраженными скачками).

PACS: 44.25.+f, 47.27.Te, 47.55.Nd

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые парадоксальные, на первый взгляд, гидротермодинамические свойства двухкомпонентных жидкостей (бинарных смесей) известны достаточно давно. Сюда относится, прежде всего, неустойчивость, обусловленная так называемой двойной (дифференциальной) диффузией, double-diffusive convection: в устойчиво стратифицированной по плотности среде может, тем не менее, возникать конвективная неустойчивость, связанная с различием значений коэффициентов переноса для двух субстанций [1]. В последние годы обнаружен еще ряд нетривиальных особенностей подобных сред (см., например, [2–4]). В частности, обращено внимание на возможность эффективной «отрицательной теплоемкости» — притоки тепла могут приводить не к повышению, а к понижению температуры среды. Усиление устойчивости плотностной

стратификации может приводить не к уменьшению, а к увеличению амплитуды отклика среды на тепловыделение, и к увеличению глубины проникновения термических возмущений в устойчиво стратифицированную среду. Обнаружены неизвестные ранее механизмы конвективной неустойчивости.

Но неожиданные свойства двухкомпонентных сред этим не ограничиваются. В настоящей работе показано, что процесс установления механического равновесия в идеальных стратифицированных двухкомпонентных средах может происходить иначе, чем в обычных жидкостях, стратифицированных только по температуре. В последних, как хорошо известно, начальные горизонтальные температурные неоднородности со временем затухают благодаря возникающим при наличии таких неоднородностей волновым движениям, которые «выравнивают» неоднородности и рассеиваются в пространстве. Это обстоятельство играет очень важную роль, в частности, в динамике геофизических сред (атмосфера, океан, жидкие недра планет). Оно весьма

*E-mail: lingel@obninsk.com

затрудняет, например, объяснение существования и распространенности некоторых типов «долгоживущих» термических неоднородностей в верхних слоях морской воды (см., например, [5, 6]). Из приведенного в настоящей работе анализа следует, что в двухкомпонентных средах (например, в морской воде, стратифицированной по температуре и солености) начальные горизонтальные неоднородности распределений температуры и концентрации примеси не исчезают и на финальной стадии процесса установления механического равновесия. Другими словами, двухкомпонентные среды хранят «память» о начальных возмущениях, допуская возникновение и продолжительное существование горизонтально неоднородных «следов» в распределениях температуры и концентрации примеси. Универсальная особенность структуры «следов» состоит в формировании разрывных распределений (скачков) из гладких начальных распределений. Подобные структуры (особенно скачки в вертикальных распределениях) распространены в верхнем слое океана [7, 8] и объяснение их происхождения — весьма актуальная задача.

Обнаруженное в настоящей работе свойство «памяти» двухкомпонентных сред с гидродинамической точки зрения связано с тем, что для адиабатических движений температура и концентрация примеси являются лагранжевыми инвариантами, т. е. величинами, сохраняющимися в каждой жидкой частице. С этим связан ряд специфических интегральных и лагранжевых законов сохранения, которые обсуждаются в заключительном разделе статьи.

Считается очевидным, что в устойчиво стратифицированной по плотности среде гидротермодинамические возмущения должны затухать, поскольку вертикальные смещения приводят к появлению возвращающей силы. Тем более нетривиален еще один полученный ниже результат: возмущения температуры и концентрации примеси в бинарных смесях могут многократно усиливаться и при сколь угодно устойчивой стратификации плотности (помимо известных эффектов двойной диффузии). В этом смысле подобные «дважды неравновесные» (стратифицированные по обеим субстанциям) жидкости являются активными средами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследуется поведение возмущений в покоящейся идеальной безграничной двухкомпонентной среде в поле силы тяжести. Для

определенности будем говорить о соленой воде, стратифицированной по температуре и концентрации примеси (соли) таким образом, что гидростатическое равновесие устойчиво. При этом по отдельности температурная и соленостная стратификации могут быть и неустойчивыми, но устойчива суммарная стратификация плотности.

Согласно обычно используемому приближению [1, 9], предполагаем, что плотность среды ρ линейно зависит от возмущений температуры T и концентрации примеси s :

$$\rho = \rho_* (1 - \alpha T + \beta s). \quad (1)$$

Здесь ρ_* — значение ρ при постоянных средних значениях температуры T_* и солености s_* ; T, s — соответствующие отклонения от средних, α — коэффициент термического расширения, β — аналогичный коэффициент для примеси («коэффициент соленостного сжатия»). С учетом соотношения (1) адиабатические движения среды описываются замкнутой системой уравнений гидродинамики и переноса примеси:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости с компонентами u, v, w в системе координат xyz (ось z вертикально вверх), p — давление, g — ускорение свободного падения, \mathbf{k} — вертикальный орт, $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$ — оператор полной производной.

Начальные условия для системы (1)–(3) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{0}, \\ T|_{t=0} &= \gamma_T z + T_i(\mathbf{x}), \quad s|_{t=0} = \gamma_s z + s_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, T_i, s_i — заданные начальные возмущения. Постоянные значения фоновых вертикальных градиентов каждой из субстанций, γ_T и γ_s , как упоминалось, предполагаются такими, что фоновое состояние конвективно устойчиво, чему отвечает убывание фоновой плотности $\bar{\rho}(z) = \rho_*(1 - \gamma z)$ с увеличением высоты. В устойчивом состоянии $\gamma = \alpha\gamma_T - \beta\gamma_s > 0$.

Относительный вклад температуры и концентрации примеси в фоновую стратификацию плотности удобно характеризовать безразмерным параметром

$$\eta = \frac{\beta\gamma_s}{\alpha\gamma_T}. \quad (5)$$

Обычно рассматриваемой однокомпонентной температурно-стратифицированной среде соответствует

$\eta = 0$. Очевидно, что $\gamma = \alpha\gamma_T(1 - \eta)$. В некоторых случаях более удобно использование параметра

$$\xi = \frac{\eta}{\eta - 1} = \frac{\beta\gamma_s}{\beta\gamma_s - \alpha\gamma_T} = \frac{d\bar{\rho}_s/dz}{d(\bar{\rho}_s + \bar{\rho}_T)/dz}. \quad (5a)$$

Здесь $d\bar{\rho}_T/dz$ и $d\bar{\rho}_s/dz$ — фоновые вертикальные градиенты плотности, обусловленные стратификациями соответственно температуры и концентрации примеси. Таким образом, параметр ξ имеет смысл относительного вклада примеси в фоновую стратификацию плотности.

В безграничной устойчиво стратифицированной среде начальные горизонтальные неоднородности поля плотности, $\rho_i = -\rho_*(\alpha T_i - \beta s_i)$, приводят к возникновению волновых движений, которые сглаживают плотностные неоднородности и на больших временах затухают. Соответствующий волновой процесс гидростатического приспособления наиболее просто исследуется в случае возмущений малой амплитуды.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Обозначая малые возмущения термодинамических переменных штрихами и используя приближение Буссинеска, вместо (1)–(3) получим линейную систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*} \nabla p' + g(\alpha T' - \beta s') \mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \gamma_T w = 0, \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \gamma_s w = 0 \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad T'|_{t=0} = T_i(\mathbf{x}), \quad s'|_{t=0} = s_i(\mathbf{x}).$$

Для безразмерной плавучести

$$\sigma = -\frac{\rho'}{\rho_*} = \alpha T' - \beta s'$$

система (6), (7) сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 \sigma + N^2 \Delta_2 \sigma = 0, \quad (8)$$

где $N = \sqrt{g\gamma}$ — частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести), Δ_3 , Δ_2 — соответственно трехмерный и двумерный (по горизонтальным координатам) операторы Лапласа. Уравнение (8) является основным уравнением линейной теории внутренних гравитационных волн [10] (обычно его формулируют для вертикальной компоненты скорости). Общее решение

задачи Коши для этого уравнения построено в работе [11]. Из соответствующего решения, описывающего процесс рассеяния волн в пространстве, следует, что с течением времени возмущение плотности затухает: $\sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В однокомпонентной среде (плотность которой зависит только от температуры) вместе с σ , очевидно, затухает также возмущение температуры T' . Совершенно иначе ведет себя величина T' в двухкомпонентной среде. Обозначим финальные (при $t \rightarrow \infty$) возмущения температуры и концентрации примеси через T'_f , s'_f . Для нахождения этих возмущений используем простой локальный закон сохранения, представляющий собой линейризованную форму специфического для двухкомпонентных сред уравнения вмороженности (разд. 5). Этот закон получается исключением w из уравнений (7):

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0, \quad r = \gamma_s T' - \gamma_T s'. \quad (9)$$

Согласно формуле (9), поле величины $r(\mathbf{x})$ не меняется со временем:

$$\gamma_s T'_f - \gamma_T s'_f = \gamma_s T_i - \gamma_T s_i. \quad (10)$$

В финальном состоянии также $\sigma = 0$, т.е. $\alpha T'_f = \beta s'_f$. Из последнего соотношения и (10) получаем выражения

$$T'_f = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i}{\alpha(\eta - 1)}, \quad s'_f = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i}{\beta(\eta - 1)}, \quad (11)$$

которые показывают, что в двухкомпонентной среде возмущения T' , s' не исчезают и на финальной стадии процесса гидростатического приспособления. Эти возмущения компенсируют друг друга в поле плотности ($\sigma_f = 0$), формируя стационарный «след», который в случае соленой воды можно назвать «термохалинным». Отметим, что в реальной двухкомпонентной среде «след», разумеется, будет разрушаться за характерное время диссипации, но это время для возмущений не слишком малых пространственных масштабов существенно превосходит временной масштаб процесса гидростатического приспособления.

Исследуем особенности финальных распределений в случае $s_i = 0$ (без начального возмущения концентрации примеси):

$$T'_f = \frac{\eta}{\eta - 1} T_i, \quad s'_f = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{\eta - 1} T_i. \quad (12)$$

При $\eta = 0$ (однокомпонентная среда) «след» начального возмущения отсутствует: $T'_f = s'_f = 0$. При

$\eta \neq 0$ с учетом ограничения $\gamma > 0$ возможны три качественно различные ситуации, отвечающие различным значениям параметра $\xi = \eta/(\eta - 1)$.

1) *Фоновые стратификации температуры и концентрации примеси устойчивы:* $\gamma_T > 0$, $\gamma_s < 0$, $\eta < 0$. В этом случае $0 < \xi < 1$, т. е. финальное температурное возмущение сохраняет знак начального и меньше его по амплитуде. Уменьшение амплитуды возмущения в устойчиво стратифицированной среде выглядит вполне естественным, хотя нетривиально то, что это возмущение не затухает полностью.

2) *Температурная стратификация неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация примеси:* $\beta\gamma_s < \alpha\gamma_T < 0$, $\eta > 1$. В этом случае $\xi > 1$, т. е. амплитуда возмущения в финальном состоянии всегда больше начальной амплитуды, причем при $\eta \rightarrow 1 + 0$ (приближение к нейтральной плотностной стратификации) $T'_f \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow \infty$). Эффект усиления возмущений в устойчиво стратифицированной двухкомпонентной среде можно понять из следующих соображений. Начальное положительное возмущение температуры приводит к возникновению в среде восходящих движений, которые при $\gamma_T < 0$ приносят снизу более теплые объемы среды. Если стратификация плотности близка к нейтральной, она не препятствует интенсивному развитию этих движений. Такая положительная обратная связь и приводит к формированию интенсивного «следа». Безразмерный параметр ξ имеет смысл коэффициента усиления начального возмущения. Отметим, что это усиление в принципе возможно и при сколь угодно устойчивой стратификации плотности. Последнее легко видеть из выражения (5а), знаменатель которого $d(\bar{\rho}_s + \bar{\rho}_T)/dz$ может быть сколь угодно большим по абсолютной величине, но в рассматриваемом случае всегда уступает абсолютной величине числителя $d\bar{\rho}_s/dz$.

3) *Стратификация примеси неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация температуры:* $\alpha\gamma_T > \beta\gamma_s > 0$, $0 < \eta < 1$. В этом, наиболее интересном, случае $\xi < 0$, причем $|\xi| \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 1 - 0$. Таким образом, финальное и начальное возмущения имеют противоположные знаки, т. е., например, в ответ на первоначальный нагрев в среде формируется холодный «след», который может быть гораздо интенсивнее первоначального нагрева. Этот, на первый взгляд, неожиданный эффект «отрицательной теплоемкости» стратифицированных двухкомпонентных сред [2] также имеет простое объяснение: при $\gamma_T > 0$ и стратификации плотности, близкой к нейтральной, развиваются интенсивные вертикальные движения, приносящие снизу

более холодные объемы среды.

Отметим еще одну особенность финальных возмущений. Из выражений (11) следует, что разрывы (скачки) в начальных распределениях T_i , s_i сохраняются также и на финальной стадии. Если в начальный момент разрыв существует лишь в поле одной из субстанций (например, температуры), то, согласно (11), в процессе гидростатического приспособления он возникает и в поле другой (концентрации примеси). Как показано ниже, универсальное свойство нелинейной динамики состоит в формировании разрывов из гладких начальных возмущений.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Исследуем теперь структуру финальных возмущений в нелинейной задаче. Для простоты рассматриваем двумерные движения, происходящие в плоскости xz . Считаем также, что в начальный момент $s_i = 0$, а возмущение температуры $T_i(x, z)$ локализовано по горизонтали: $T_i \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующее начальное распределение плотности записывается в виде

$$\rho_0(x, z) = \bar{\rho}(z) + \rho_i(x, z),$$

где $\bar{\rho} = \rho_*(1 - \gamma z)$, $\rho_i = -\alpha\rho_*T_i$.

В нелинейной задаче переменные ρ , T , s являются лагранжевыми инвариантами, т. е. величинами, сохраняющимися в каждой жидкой частице. Используя этот факт, можно однозначно найти распределения этих переменных в финальном состоянии. Покажем сначала, что если в процессе гидростатического приспособления в среде устанавливается состояние механического равновесия, то в этом состоянии $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$, т. е. финальное распределение совпадает с фоновым (возмущение плотности исчезает). Действительно, из определения лагранжевых инвариантов следует, что для любого $t > 0$ величина $\rho = \rho_0(x_0, z_0)$, где x_0 , z_0 — начальные (лагранжевы) координаты жидкой частицы. Отсюда $\rho_f(z) = \rho_0(x_0, z_0)$, т. е.

$$\rho_f(z) = \bar{\rho}(z_0) + \rho_i(x_0, z_0). \quad (13)$$

Переходя в (13) к пределу $|x_0| \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом $\rho_i \rightarrow 0$, $z_0 \rightarrow z$, получим $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$.

Положим в (13) $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$. При этом формула (13) запишется в виде

$$\rho_*(1 - \gamma z) = \rho_*(1 - \gamma z_0) - \alpha\rho_*T_i(x_0, z_0),$$

откуда

$$z = z_0 + \frac{\alpha}{\gamma}T_i(x_0, z_0). \quad (14)$$

Физический смысл формулы (14) достаточно прозрачен — она определяет зависимость конечной (эйлеровой) вертикальной координаты z жидкой частицы от ее начальных (лагранжевых) координат. Если эта зависимость известна, аналогичная зависимость $x = x(x_0, z_0)$ для горизонтальной координаты может быть найдена из уравнения неразрывности в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(x_0, z_0)} = 1. \quad (15)$$

Отыскивая решение (15) в виде $x = x(x_0, z)$, получим $\partial x / \partial x_0 = (\partial z / \partial z_0)^{-1}$, откуда x находится простым интегрированием. Уравнения (14), (15), таким образом, образуют замкнутую систему уравнений для нахождения поля лагранжевых смещений жидких частиц.

Найдем теперь финальные распределения температуры и концентрации примеси. Из определения лагранжевых инвариантов и начальных условий (4) следуют выражения

$$T_f = \gamma_T z_0 + T_i(x_0, z_0), \quad s_f = \gamma_s z_0, \quad (16)$$

которые вместе с зависимостями $x = x(x_0, z_0)$, $z = z(x_0, z_0)$ дают параметрическое (x_0, z_0 — параметры) представление функций $T_f = T_f(x, z)$, $s_f = s_f(x, z)$. Выражения (16) можно преобразовать, учитывая, что согласно (14) $z_0 = z - (\alpha/\gamma)T_i$. Подставляя последнее выражение в (16), с учетом соотношения $\alpha\gamma_T/\gamma = 1/(1-\eta)$ получим

$$T_f = \gamma_T z + \frac{\eta}{\eta-1} T_i(x_0, z_0), \quad (17)$$

$$s_f = \gamma_s z + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{\eta-1} T_i(x_0, z_0).$$

Сопоставим формулы (17) с результатами линейной теории. Легко видеть, что для отклонений от фоновых линейных распределений из (17) следуют формулы (12) с той разницей, что левые и правые части (12) теперь выражены соответственно в эйлеровых и лагранжевых координатах. В рамках линейной теории $x_0 \sim x$, $z_0 \sim z$ и формулы (12), (17) эквивалентны. В нелинейной задаче определяемая из (14), (15) зависимость между координатами приводит к весьма сложной деформации начальных распределений. Наиболее яркая особенность при этом связана с формированием разрывов (скачков) по вертикали.

Далее будем рассматривать начальные распределения вида

$$T_i = \Delta T h\left(\frac{x}{L}\right) \tau\left(\frac{z}{H}\right),$$

где ΔT , L , H — соответственно амплитуда, горизонтальный и вертикальный масштаб T_i . Убывающую на бесконечности функцию $h(x)$ считаем четной, неотрицательной, удовлетворяющей условию $h(0) = 1$. Для зависимостей между безразмерными (нормированными соответственно на L и H) эйлеровыми и лагранжевыми координатами из (14), (15) получим

$$z = z_0 + ah(x_0)\tau(z_0),$$

$$x = x_0 - a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0)\tau'(z_0)}{1 + ah(x_0)\tau'(z_0)} dx_0, \quad (18)$$

где введен безразмерный амплитудный параметр $a = \alpha\Delta T/\gamma H$ и штрихом обозначена производная. Отметим, что выражение для x в (18) получено интегрированием уравнения $\partial x / \partial x_0 = (\partial z / \partial z_0)^{-1}$ с условием симметрии: $x = 0$ при $x_0 = 0$. Под знаком интеграла в (18) полагается $z_0 = z_0(x_0, z)$ (выражение для z разрешено относительно z_0).

Рассмотрим вначале простой пример, для которого зависимости между координатами находятся в явном виде. Пусть рассматривается задача в слое $0 < z < 1$ (далее координаты безразмерны) и $\tau(z_0)$ является кусочно-линейной функцией:

$$\tau(z_0) = \begin{cases} z_0, & 0 < z_0 < 0.5, \\ 1 - z_0, & 0.5 < z_0 < 1 \end{cases}$$

(максимум температурного возмущения находится в центре слоя, на границах возмущение отсутствует). Из соотношений (18) получим

$$z = z_0 (1 + ah(x_0)),$$

$$x = x_0 - a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0)}{1 + ah(x_0)} dx_0, \quad 0 < z_0 < 0.5, \quad (19)$$

$$z = z_0 + ah(x_0)(1 - z_0),$$

$$x = x_0 + a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0)}{1 - ah(x_0)} dx_0, \quad 0.5 < z_0 < 1.$$

При $a > 0$ формулы (19) определяют перемещения жидких частиц, связанные с процессом конвективного подъема жидкости и растекания вблизи верхней границы. Выражая из (19) координату z_0 через z и подставляя в (17), для отклонения от фо-

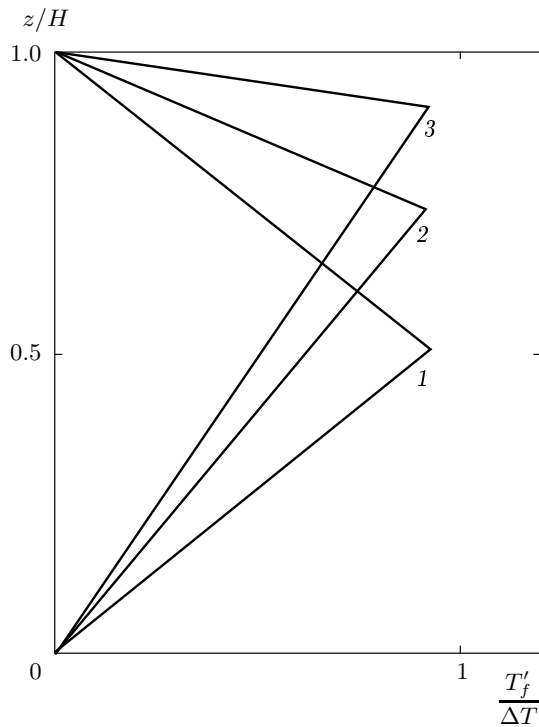


Рис. 1. Отклонения температуры от фонового линейного распределения для различных значений параметра a в случае кусочно-линейной зависимости $\tau(z_0)$ при $\eta = 2$: $a \ll 1$ (1), $a = 0.5$ (2), 0.8 (3)

нового линейного распределения $T'_f = T_f - \gamma_T z$ найдем

$$T'_f = \Delta T \frac{\eta}{\eta - 1} h(x_0) \times \begin{cases} z/(1+a), & 0 < z < 0.5(1+a), \\ (1-z)/(1-a), & 0.5(1+a) < z < 1. \end{cases} \quad (20)$$

Зависимость (20) при $x_0 = x = 0$ и различных значениях параметра a представлена на рис. 1. Этот рисунок отражает тенденцию к образованию разрывов в финальных вертикальных распределениях — с ростом a происходит «опрокидывание» начального треугольного распределения в верхней половине слоя.

Исследуем теперь структуру вертикальных распределений температуры в случае произвольных гладких зависимостей $\tau(z_0)$. Согласно (16), (18), распределение $T_f = T_f(z)$ на оси симметрии $x_0 = 0$ температурного возмущения описывается параметрическими (z_0 — безразмерный параметр) выражениями

$$z = z_0 + a\tau(z_0), \quad T_f = \gamma_T H [z_0 + a(1-\eta)\tau(z_0)]. \quad (21)$$

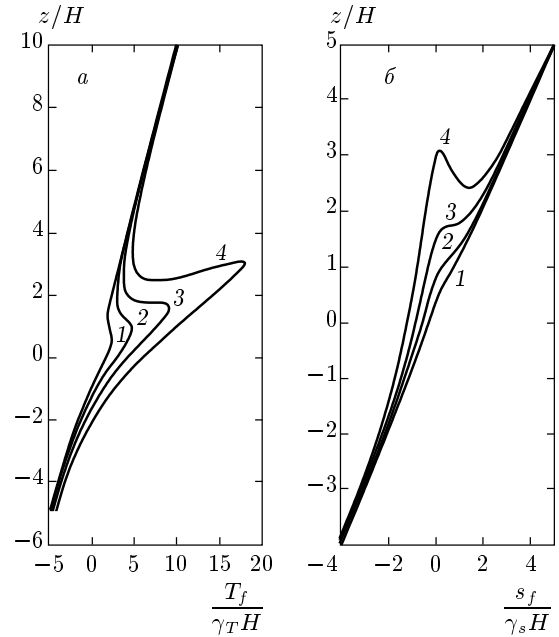


Рис. 2. Вертикальное распределение температуры (а) и концентрации примеси (б) на оси симметрии возмущения при $\tau(z_0) = 1/(1+z_0^2)$, $\eta = -5$ и различных значениях параметра $a = 0.4$ (1), 0.8 (2), 3 (4), $a = a_{cr} = 8\sqrt{3}/9 \approx 1.53$ (3)

Здесь учтено, что $\Delta T / \gamma_T H = a(1-\eta)$. На рис. 2а представлена зависимость (21) для различных значений параметра a в случае гладкого локализованного распределения $\tau(z_0) > 0$ и $\eta < 0$ (рассматривается неограниченная по вертикали среда). Как видно из рисунка, с ростом a при некотором значении $a = a_{cr}$ на вертикальном профиле T_f формируется разрыв в точке $z = z_{cr}$. Аналогичный разрыв формируется и на вертикальном профиле концентрации примеси (рис. 2б). Эти разрывы компенсируют друг друга, так что вертикальное распределение плотности остается гладким (линейным).

Определим значения критических параметров, следуя работе [12]. Как и в [12], можно показать, что возникновению разрыва отвечает появление точки перегиба z_* на графике зависимости $z = z(z_0)$. Эта точка находится из уравнения $\tau''(z_0) = 0$. Поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T / \partial z_0}{1 + a\tau'(z_0)},$$

для критических параметров найдем:

$$a_{cr} = -\frac{1}{\tau'(z_*)}, \quad z_{cr} = z_* + a_{cr}\tau(z_*).$$

В частности, при $\tau(z_0) = 1/(1+z_0^2)$ элемен-

тарные вычисления дают $a_{cr} = 8\sqrt{3}/9 \approx 1.54$, $z_{cr} = \sqrt{3}$. Для профиля $\tau(z_0) = \exp(-z_0^2)$ имеем $a_{cr} = \exp(0.5)/\sqrt{2} \approx 1.17$, $z_{cr} = \sqrt{2}$. Вертикальные распределения температуры и концентрации являются гладкими при $a < a_{cr}$ и многозначными (разрывными) при $a > a_{cr}$. Используя приведенные значения, можно оценить критическое значение ΔT , при превышении которого возникает разрыв: $\Delta T = a_{cr}\gamma H/\alpha$ (это значение линейно зависит от масштаба возмущения H). Для профиля $\tau(z_0) = 1/(1+z_0^2)$ и характерных для океана значений $H = 10$ м, $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ К $^{-1}$, $\gamma = 9 \cdot 10^{-7}$ м $^{-1}$ ($N = 3 \cdot 10^{-3}$ с $^{-1}$) получим $\Delta T = 7 \cdot 10^{-2}$ К, т. е. начальное возмущение с амплитудой порядка десятой доли градуса уже приводит к формированию разрыва.

Подчеркнем, что эффект формирования разрывов имеет универсальный характер, не связанный с деталями структуры $\tau(z_0)$. Его физическое объяснение несложно. Действительно, согласно (14) вертикальное смещение жидкой частицы $l = z - z_0$ определяется интенсивностью ΔT начального возмущения T_i . При $\Delta T > 0$ более теплые частицы, всплывая, догоняют относительно холодные, что и приводит к формированию разрывного профиля, напоминающего известную N -волну в газовой динамике [13]. Подобные профили достаточно часто фиксируются при измерениях в океане; они характерны для так называемых температурных инверсий [7, 8].

Зависимость (21) при $\tau(z_0) = \cos(\lambda z_0)$ для двух значений параметра a представлена на рис. 3. Этот рисунок показывает, что в случае периодического по вертикали начального возмущения, вызванного, например, внутренней волной, может сформироваться стационарный «пилообразный» профиль температуры, в котором слои с постоянными градиентами разделены резкими скачками (инверсиями). Условие формирования разрывов для периодического возмущения имеет вид $a > a_{cr} = 1/\lambda$; соответствующее критическое значение ΔT при $\lambda = 1$ и приведенных выше значениях параметров составляет $4.5 \cdot 10^{-2}$ К. Если начальное распределение аperiodично (имеет положительные и отрицательные фазы), то, очевидно, сформируется профиль с нерегулярным распределением скачков. Подобные профили характерны для тонкой структуры океана, которая, согласно данному в работе [7] (с. 119) определению, «представляет собой неупорядоченное или систематическое чередование по глубине участков с низкими и высокими вертикальными градиентами того или иного свойства». Отметим, что для тонкой структуры характерные значения скачков температуры со-

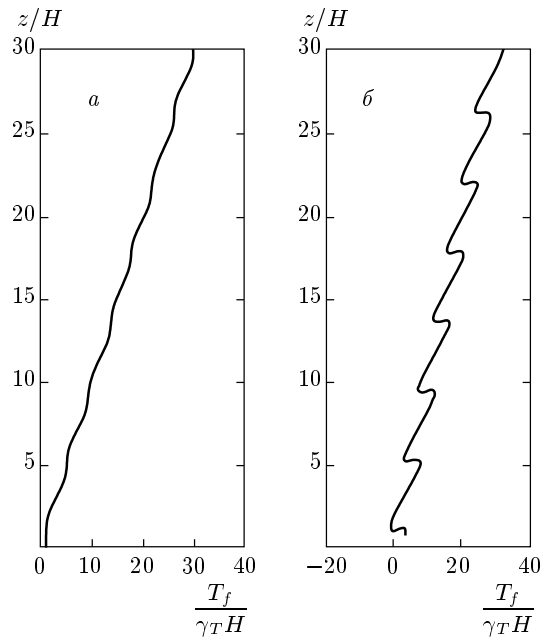


Рис. 3. Вертикальное распределение температуры на оси симметрии возмущения при $\tau(z_0) = \cos(\lambda z_0)$, $\lambda = 1.5$, $\eta = -2$ и значениях параметра $a = 0.2$ (а), $a = 0.95 > a_{cr}$ (б)

ставляют десятые доли градуса, что соответствует закритическим режимам.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ЛАГРАНЖЕВЫ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Гидродинамическая «память» стратифицированных двухкомпонентных сред тесно связана с существованием ряда специфических интегральных и лагранжевых законов сохранения. В данном разделе рассматриваются некоторые из этих законов.

Разъясним вначале гидродинамический смысл локального закона сохранения (9), ответственного за формирование «следа» в линейной теории. Как указано ранее, в нелинейном случае переменные T , s являются лагранжевыми инвариантами — величинами, сохраняющимися в жидкой частице. Отсюда сразу следует, что линии пересечения поверхностей $T = \text{const}$, $s = \text{const}$ все время состоят из одних и тех же частиц, т. е. являются жидкими линиями. Введем в рассмотрение векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, касательное к линиям пересечения указанных поверхностей:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \nabla T \times \nabla s. \tag{22}$$

Из уравнений (3) следует, что поле $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению $\partial\mathbf{R}/\partial t = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{R}]$, которое с использованием известного векторного тождества можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (23)$$

Уравнение (23) в гидродинамике известно как уравнение вмороженности векторного поля в жидкость [14]. При выполнении (23) векторные линии поля \mathbf{R} всегда состоят из одних и тех же частиц и сохраняются интенсивности векторных трубок.

Покажем, что закон сохранения (9) представляет собой линеаризованную форму уравнения вмороженности (23). Действительно, полагая в (22) $T = \bar{T} + T'$, $s = \bar{s} + s'$, для малых отклонений получим

$$\mathbf{R} = (\gamma_T \mathbf{k} + \nabla T') \times (\gamma_s \mathbf{k} + \nabla s') \sim \mathbf{R}' = \nabla r \times \mathbf{k}.$$

В линейном приближении (23) запишется как $\partial\mathbf{R}'/\partial t = 0$. Для ограниченных на бесконечности возмущений последнее (векторное) уравнение эквивалентно (9).

Отметим, что наряду с T , s еще одним лагранжевым инвариантом системы уравнений адиабатической динамики (1)–(3) является потенциальный вихрь Эртеля [14]

$$dq/dt = 0, \quad q = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \nabla \rho.$$

Уравнению вмороженности (23), очевидно, удовлетворяет поле \mathbf{R} , образованное произвольной парой инвариантов из набора T , s , q , например, $\mathbf{R} = \nabla \rho \times \nabla q$.

С уравнением вмороженности (23) связаны интересные интегральные законы сохранения. Нетрудно проверить, что для векторных полей \mathbf{u} , \mathbf{R} , удовлетворяющих соответственно системе (1)–(3) и уравнению (23), справедлива формула

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) = \text{div}(L\mathbf{R}) + p\mathbf{R} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (24)$$

где

$$L = \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \frac{p}{\rho} - gz.$$

Положим в (24) $\mathbf{R} = \nabla \rho \times \nabla q$. При этом второе слагаемое в правой части (24) обратится в нуль и после интегрирования по объему V получим закон сохранения:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0, \quad I_1 = \int_V [\nabla \rho \times \nabla q] \cdot \mathbf{u} \, dx. \quad (25)$$

Здесь предполагается, что граница области интегрирования составлена из кусков, касательных к \mathbf{R} .

Аналогично, полагая в (24) $\mathbf{R} = \nabla T \times \nabla s$, после интегрирования получим еще один закон:

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = 0, \quad I_2 = \int_V [\nabla T \times \nabla s] \cdot \mathbf{u} \, dx. \quad (26)$$

Под знаки интегралов в (25), (26) можно внести произвольную функцию $\mu(T, s, q)$ (поле $\mu\mathbf{R}$ удовлетворяет (23), если \mathbf{R} удовлетворяет этому уравнению).

Для общего случая движений сжимаемой однокомпонентной среды аналог закона сохранения (25) получен в работе [15]. Специфический для двухкомпонентных сред закон сохранения (26) был получен в работе [16] в рамках гамильтоновского описания динамики (казимир C_3). Законы сохранения (25), (26) аналогичны законам сохранения Моффата и Вольтерра в обычной и магнитной гидродинамике [14, 15] и независимы от закона сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad E = \int_V \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gz \right] \rho \, dx.$$

Отметим еще одну важную особенность адиабатической динамики двухкомпонентных сред, связанную с задачей Коши для системы (1)–(3). При решении этой задачи удобно свести уравнения (3) к одному уравнению для плотности. Поля \mathbf{u} , p , ρ при этом могут быть найдены из решения «укороченной» системы:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (27)$$

совпадающей с обычной системой уравнений динамики несжимаемой однокомпонентной среды. После нахождения этих полей возникает вопрос о нахождении полей температуры и концентрации примеси. Как показано в Приложении, в произвольный момент времени поля T , s однозначно восстанавливаются по известным полям плотности, скорости и начальным данным. Описание динамики двухкомпонентной среды, таким образом, можно проводить в рамках системы уравнений (27), восстанавливая поля температуры и концентрации примеси на каждом временном шаге.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, процесс установления механического равновесия (процесс гидростатического приспособления) в стратифицированной двухкомпонентной среде происходит существенно иначе, чем в

обычно рассматриваемых моделях жидкостей, стратифицированных только по температуре. Бинарные смеси обладают «памятью»: начальные горизонтальные неоднородности температуры и концентрации примеси в двухкомпонентной среде не исчезают и на финальной стадии этого процесса, формируя долгоживущий «след». Нетривиальными оказываются и закономерности, относящиеся к амplitудам и структурам таких «следов». В зависимости от относительного вклада двух субстанций в фоновую стратификацию плотности возможны, например, ситуации, когда отклонение от фона температуры в финальном состоянии значительно превышает амплитуду начального отклонения и имеет противоположный знак. Возможность усиления амплитуды возмущений при сколь угодно устойчивой стратификации плотности выглядит достаточно неожиданной. Рассматриваемые «дважды неравновесные» жидкости в известном смысле можно рассматривать как активные среды.

Универсальная особенность структуры «следа» состоит в формировании вертикальных разрывных (ступенчатых) распределений из гладких начальных возмущений. Подобные распределения характерны для наблюдаемой тонкой структуры океана. Для финальных состояний рассмотренного процесса гидростатического приспособления характерны ситуации с взаимной компенсацией распределений температуры и концентрации примеси в поле плотности. Например, в стратифицированном океане в состоянии гидростатического равновесия и при гладком распределении плотности могут существовать резко выраженные горизонтальные и вертикальные неоднородности полей температуры и солёности. Такие особенности неоднократно отмечались при анализе данных океанологических наблюдений [5–8]. Представляются весьма целесообразными специальные экспериментальные исследования обнаруженных в настоящей работе закономерностей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-05-64027) и МНТЦ (грант № G-1217).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определение полей температуры и концентрации примеси по известным полям плотности, скорости и начальным распределениям

Рассмотрим задачу Коши для системы (1)–(3) в слое $0 \leq z \leq H$ с условием непротекания $w = 0$ на го-

ризонгальных границах $z = 0, H$. Ниже будет показано, что в произвольный момент времени поля T, s однозначно восстанавливаются по заданным начальным распределениям и известным полям плотности и скорости (эти поля находятся из решения системы (27)). В случае трехмерных пространственных движений распределение температуры может быть найдено из решения квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка,

$$\frac{\partial(T, \rho, q)}{\partial(x, y, z)} = F(T, \rho, q), \quad (\text{П.1})$$

с краевыми условиями

$$T|_{z=0} = \varphi_0(\rho, q), \quad T|_{z=H} = \varphi_H(\rho, q). \quad (\text{П.2})$$

Здесь конкретный вид зависимостей F, φ_0, φ_H определяется из начальных данных, q — потенциальная завихренность.

В случае двумерных движений (в плоскости xz) распределение температуры однозначно восстанавливается по полю плотности из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial(T, \rho)}{\partial(x, z)} = F(T, \rho), \quad (\text{П.3})$$

$$T|_{z=0} = \varphi_0(\rho), \quad T|_{z=H} = \varphi_H(\rho).$$

Обоснуем постановку задачи (П.1), (П.2). В пространственном случае из имеющихся инвариантов T, s, q (и функций от них) можно сконструировать бесконечную серию инвариантов, используя коммутационную формулу Эртеля [15]:

$$\frac{d}{dt}[f, g, h] = [f, g, h] + [f, \dot{g}, h] + [f, g, \dot{h}]. \quad (\text{П.4})$$

Здесь квадратными скобками обозначен якобиан по переменным x, y, z , точка сверху обозначает полную производную. Применяя формулу (П.4) к инвариантам T, ρ, q , получим лагранжев закон сохранения:

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \quad J = \frac{\partial(T, \rho, q)}{\partial(x, y, z)}, \quad (\text{П.5})$$

имеющий простой физический смысл — он отражает неизменность объема жидкой ячейки, ограниченной поверхностями равных значений T, ρ, q .

Покажем, что если начальные распределения T_0, ρ_0, q_0 функционально независимы, то в процессе эволюции инвариант J является однозначной функцией инвариантов T, ρ, q .

Действительно, из определения лагранжевых инвариантов следует, что для любого $t > 0$

$$T = T_0(\mathbf{x}_0), \quad \rho = \rho_0(\mathbf{x}_0), \quad q = q_0(\mathbf{x}_0), \quad J = J_0(\mathbf{x}_0),$$

где $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — набор лагранжевых координат. Выражая из первых трех соотношений \mathbf{x}_0 через T, ρ, q и подставляя в четвертое, получим функциональную связь $J = F(T, \rho, q)$, эквивалентную уравнению (П.1). Существование данной связи вытекает также из следующего общего математического утверждения [17]: «Произвольное векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в n -мерном пространстве $R_{\mathbf{x}}^n$ имеет ровно n функционально-независимых (базисных) лагранжевых инвариантов, через которые выражается любой другой инвариант».

Из приведенного утверждения следуют также краевые условия (П.2). Действительно, поскольку на границах $z = 0, H$ поле скорости двумерно ($w = 0$), на этих границах инвариант T выражается через «базисные» инварианты ρ, q . Конкретный вид входящих в (П.2) зависимостей при этом получается исключением координат x, y из начальных условий: при $z = 0$ имеем $T = T_0(x, y, 0)$, $\rho = \rho_0(x, y, 0)$, $q = q_0(x, y, 0)$ (то же при $z = H$).

После нахождения T распределение солёности может быть найдено из уравнения состояния $\rho = \rho(T, s)$ либо из решения краевой задачи, аналогичной (П.1), (П.2).

Аналогичным образом формулируется краевая задача (П.3). В двумерном случае из уравнений $d\rho/dt = 0, dT/dt = 0$ следует лагранжев закон сохранения [12]:

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \quad J = \frac{\partial(T, \rho)}{\partial(x, z)}. \quad (\text{П.6})$$

Как и ранее, легко показать, что в процессе эволюции $J = F(\rho, T)$ и на границах $z = 0, H$ инвариант T однозначно выражается через ρ из начальных данных. Отсюда получаем задачу (П.3). Отметим, что, полагая в (П.3) $\rho = \bar{\rho}(z)$, можно найти финальное распределение температуры, формирующееся в процессе гидростатического приспособления. Более конструктивным, однако, является лагранжев подход, использованный в разд. 3.

Отметим также, что в линейной задаче распределения T', s' в произвольный момент времени однозначно определяются по полю плавучести $\sigma = \alpha T' - \beta s'$ и начальным данным. Действительно, из закона сохранения (9) следует, что для любого t

$$\gamma_s T' - \gamma_T s' = \gamma_s T_i - \gamma_T s_i.$$

Последнее соотношение вместе с выражением для σ можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно T', s' . Решая эту систему, получим выражения

$$T' = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i - \sigma}{\alpha(\eta - 1)}, \quad s' = \frac{\alpha\eta T_i - \beta s_i - \eta\sigma}{\beta(\eta - 1)}. \quad (\text{П.7})$$

При $\sigma = 0$ из (П.7) следуют выражения (11) для финальных распределений. Распределение σ в произвольный момент времени находится из решения уравнения (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Тернер, *Эффекты плавучести в жидкостях*, Мир, Москва (1977). (J. S. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids*, University Press, Cambridge (1973).
2. Л. Х. Ингель, УФН **172**, 691 (2002).
3. Л. Х. Ингель, ЖТФ **71**, 128 (2001).
4. Л. Х. Ингель, ЖЭТФ **128**, 179 (2005).
5. А. С. Монин, К. Н. Федоров, В. П. Шевцов, ДАН **208**, 833 (1973).
6. А. С. Монин, Р. В. Озмидов, В. Т. Пака, ДАН **297**, 1469 (1987).
7. Океанология. *Физика океана*, т. 1, *Гидрофизика океана*, под ред. А. С. Монина, Наука, Москва (1978).
8. К. Н. Федоров, *Тонкая термозалинная структура вод океана*, Гидрометеиздат, Ленинград (1976).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
10. Ю. З. Миропольский, *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*, Гидрометеиздат, Ленинград (1981).
11. С. А. Габов, А. Г. Свешников, *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн*, Наука, Москва (1990).
12. М. V. Kalashnik, *Dynamics Atmosph. Oceans* **38**, 1 (2004).
13. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977). (G. V. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).)
14. А. С. Монин, *Теоретические основы геофизической гидродинамики*, Гидрометеиздат, Ленинград (1988).
15. М. В. Курганский, Изв. АН СССР, *Физика атмосферы и океана* **21**, 1315 (1985).
16. P. Vannoni, *J. Atmosph. Sci.* **60**, 2809 (2003).
17. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).