

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИНАМИКЕ АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧЕК СПИНОВ $s = 1/2$ С ХУ-ГАМИЛЬТониАНОМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ МНОГОКВАНТОВОЙ ДИНАМИКИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

*Е. И. Кузнецова, Э. Б. Фельдман\**

*Институт проблем химической физики Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 20 декабря 2005 г.

Предложен метод точной диагонализации ХУ-гамильтониана альтернированной открытой цепочки спинов  $s = 1/2$  на основе преобразования Йордана–Вигнера и анализа динамики бесспиновых фермионов. Изучена многоквантовая спиновая динамика альтернированных цепочек при высоких температурах и вычислены интенсивности многоквантовых когерентностей. Исследована задача о переносе квантового состояния с одного конца альтернированной цепочки на другой. Показано, что идеальный перенос кубитов возможен в альтернированных цепочках с большим числом спинов, чем в однородных цепочках.

PACS: 05.30.-d, 76.20.+q

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование многоспиновой динамики взаимодействующих ядерных спинов позволяет продвинуться в решении фундаментальных вопросов статистической физики. Простые спектры спиновых операторов, точно известные (без каких-либо подгоночных параметров) диполь-дипольные взаимодействия ядерных спинов, высокая степень изолированности ядерной спиновой системы от других степеней свободы создают уникальные возможности изучения квантовой многочастичной динамики из «первых принципов». Одномерные системы взаимодействующих спинов (цепочки, кольца) занимают особое место в исследованиях многоспиновой динамики. Это связано с развитием точно решаемых методов одномерных систем в приближении взаимодействия ближайших соседей [1, 2] и возможностями проведения компьютерных расчетов квантовой

динамики систем, состоящих из 15-16 спинов [3]. Численный анализ [4, 5] и аналитические исследования [6] процессов переноса поляризации по спиновой цепочке показали, что спиновая динамика в таких системах является неэргодической, что вообще характерно для одномерных спиновых систем [7].

Аналитические решения для одномерных спиновых систем основаны на методах точной диагонализации соответствующих гамильтонианов. В классической работе [1] был развит метод точной диагонализации ХУ-гамильтониана бесконечной однородной спиновой цепочки в приближении взаимодействия ближайших соседей, когда константы взаимодействия всех пар спинов были одинаковы. В работе [8] этот метод обобщен на случай конечных незамкнутых цепочек, которые в дальнейшем будут называться открытыми. Оказалось, что гамильтониан, описывающий многоквантовый ЯМР однородных систем в твердых телах, принадлежит к ХУ-моделям, и точные решения были получены [9, 10] для интенсивностей многоквантовых когерентностей в квазиодномерных цепочках

\*E-mail: efeldman@icp.ac.ru

гидроксильных протонов гидроксиапатита кальция  $\text{Ca}_5(\text{OH})(\text{PO}_4)_3$ .

Интерес к спиновой динамике неоднородных одномерных систем, когда в рамках приближения взаимодействия ближайших соседей различны константы взаимодействия разных пар ядерных спинов и внешнее магнитное поле неоднородно, связан как с традиционными задачами спиновой динамики и магнитно-резонансной спектроскопии [11], так и с модельными задачами квантового компьютеринга и квантовой теории информации [12]. В последнем случае неоднородное магнитное поле (градиент магнитного поля) может быть использовано для адресации кубитов, а цепочки с разными константами взаимодействия оказываются более эффективными для передачи кубитов с одного конца открытой цепочки на другой.

Простейшей неоднородной одномерной системой является альтернированная цепочка, в которой чередуются различные константы взаимодействия и две ларморовские частоты. Диагонализация гамильтониана циклической альтернированной системы [13] проводится аналогично классическим работам [1, 8] и не представляет особых проблем. Проблемы возникают при диагонализации гамильтониана альтернированных открытых цепочек из-за особых условий на ее концах.

В недавней работе [14] был разработан метод диагонализации гамильтониана альтернированной открытой цепочки, содержащей нечетное число спинов. Метод [14] основан на наблюдении, что динамика фермионов, заменяющих спины после преобразования Йордана – Вигнера [15], на подсистеме узлов с четными номерами по существу совпадает с фермионной динамикой в однородных цепочках.

В настоящей работе предложен метод точной диагонализации XY-гамильтониана альтернированной открытой цепочки спинов  $s = 1/2$  при любом числе спинов. Изучена многоквантовая спиновая динамика альтернированных открытых цепочек при высоких температурах и вычислены интенсивности многоквантовых когерентностей. При исследовании задачи о переносе квантового состояния с одного конца альтернированной цепочки на другой установлено, что при определенных условиях такой перенос со 100 %-й вероятностью возможен в N-спиновых цепочках при  $N = 3, 4$ . Аналогичный перенос квантового состояния в однородных цепочках возможен только при  $N = 2, 3$ .

## 2. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ XY-ГАМИЛЬТониАНА В АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧКАХ СПИНОВ $s = 1/2$ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы найдем спектр и собственные состояния гамильтониана  $\mathcal{H}$  альтернированной открытой цепочки спинов  $s = 1/2$  с произвольным (конечным) числом спинов  $N$  в неоднородном магнитном поле. Гамильтониан этой системы в приближении взаимодействий ближайших соседей может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \omega_n I_{nz} + \sum_{n=1}^{N-1} D_{n,n+1} (I_{n,x} I_{n+1,x} + I_{n,y} I_{n+1,y}), \quad (1)$$

где  $I_{n,\alpha}$  — оператор проекции полного спина  $n$  на ось  $\alpha$  ( $n = 1, 2, \dots, N; \alpha = x, y, z$ ),  $\omega_n$  — ларморова частота спина на узле  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) равна

$$\omega_n = \begin{cases} \omega_1, & n - \text{нечетно}, \\ \omega_2, & n - \text{четно}, \end{cases} \quad (2)$$

и константы спин-спинового взаимодействия  $D_{n,n+1}$  спинов  $n$  и  $n+1$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{2k-1,2k} &= D_1, & k &= 1, 2, \dots, [N/2], \\ D_{2k,2k+1} &= D_2, & k &= 1, 2, \dots, [(N-1)/2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразования Йордана – Вигнера [15]

$$\begin{aligned} I_n^- &= I_{n,x} - iI_{n,y} = (-2)^{n-1} \left( \prod_{l=1}^{l=n-1} I_{l,z} \right) c_n, \\ I_n^+ &= I_{n,x} + iI_{n,y} = (-2)^{n-1} \left( \prod_{l=1}^{l=n-1} I_{l,z} \right) c_n^+, \\ I_{n,z} &= c_n^+ c_n - 1/2 \end{aligned} \quad (4)$$

позволяют перейти от спиновых операторов  $I_{n,\alpha}$  к операторам рождения (уничтожения)  $c_n^+ (c_n)$  бесспиновых фермионов. В фермионном представлении гамильтониан (1) принимает вид

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \omega_n \left( c_n^+ c_n - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} D_{n,n+1} \{ c_n^+ c_{n+1} + c_{n+1}^+ c_n \}, \quad (5)$$

или в матричных обозначениях

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^+ (D + 2\Omega) \mathbf{c} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n. \quad (6)$$

В (6) под  $\mathbf{c}^+$  мы подразумеваем вектор-строку

$$\mathbf{c}^+ = (c_1^+, \dots, c_N^+),$$

а

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^t$$

(здесь верхний индекс  $t$  обозначает операцию транспонирования). Трехдиагональная матрица  $D + 2\Omega$ , например, для четного числа спинов  $N$  имеет следующий вид:

$$D + 2\Omega = \begin{pmatrix} 2\omega_1 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_1 & 2\omega_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 2\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\omega_1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_1 & 2\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Диагонализация симметричной матрицы  $D + 2\Omega$  может быть проведена с помощью унитарного преобразования  $U$ :

$$D + 2\Omega = U \Lambda U^+, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}. \quad (8)$$

При этом в новом базисе, состоящем из фермионных операторов  $\gamma_k^+$  и  $\gamma_k$ , которые связаны с операторами  $c_n^+$  и  $c_n$  соотношениями

$$c_n^+ = \sum_{k=1}^N u_{n,k}^* \gamma_k^+, \quad c_n = \sum_{k=1}^N u_{n,k} \gamma_k, \quad (9)$$

гамильтониан (6) имеет диагональный вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda_k \gamma_k^+ \gamma_k - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n, \quad (10)$$

где  $(1/2)\lambda_k$  — однофермионные энергии ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Ниже описан метод точного решения задачи об определении собственных чисел  $\lambda_\nu$  и собственных векторов  $|u_\nu\rangle = (u_{1,\nu}, u_{2,\nu}, \dots, u_{N,\nu})^t$  трехдиагональной симметричной матрицы  $D + 2\Omega$ , удовлетворяющих уравнению

$$(D + 2\Omega)|u_\nu\rangle = \lambda_\nu |u_\nu\rangle, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Этот метод существенно разный для случаев нечетного и четного числа спинов  $N$ .

### 2.1. Альтернированная открытая цепочка с нечетным числом спинов $N$

Этот случай описан в недавней работе [14]. Из системы уравнений (11) нетрудно получить [14] подсистему для четных компонент собственных векторов  $|u_\nu\rangle$ :

$$g u_{2k-2,\nu} + g u_{2k+2,\nu} = u_{2k,\nu}, \quad (12)$$

$$k = 1, 2, \dots, (N-1)/2,$$

где не зависящая от номеров узлов цепочки функция  $g$  определена следующим образом:

$$g = \frac{D_1 D_2}{(\lambda_\nu - 2\omega_1)(\lambda_\nu - 2\omega_2) - D_1^2 - D_2^2}. \quad (13)$$

По существу, уравнения (12) требуют дополнения рассматриваемой цепочки узлами 0 и  $N+1$ . Мы потребуем, чтобы фермионы не могли покидать пределы цепочки, т. е.

$$u_{0,\nu} = 0, \quad u_{N+1,\nu} = 0. \quad (14)$$

Задача, определяемая уравнениями (12), ничем не отличается от классической задачи диагонализации  $XY$ -гамильтониана однородной цепочки [1, 8], когда  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N$  и  $D_1 = D_2$ . Ее решение находится с помощью классического анзаца [1, 8]

$$u_{2k,\nu} = A_\nu \sin\left(\frac{2\pi k\nu}{N+1}\right), \quad (15)$$

$$k = 1, 2, \dots, (N-1)/2,$$

что дает

$$2[(N-1)/2] = N-1$$

собственных значений

$$\lambda_\nu^{(\pm)} = \omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \Delta_\nu}, \quad (16)$$

$$\nu = 1, 2, \dots, (N-1)/2,$$

где

$$\Delta_\nu = 1 + 2\delta \cos\left(\frac{2\pi\nu}{N+1}\right) + \delta^2, \quad \delta = D_2/D_1. \quad (17)$$

Соотношение

$$\lambda_\nu^{(\pm)} = \lambda_{N+1-\nu}^{(\pm)}$$

позволяет следующим образом упорядочить собственные значения:

$$\lambda_\nu = \begin{cases} \lambda_\nu^{(+)}, & \nu = 1, 2, \dots, (N-1)/2, \\ \lambda_\nu^{(-)}, & \nu = (N+3)/2, (N+5)/2, \dots, N. \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку из выражения (15) следует, что

$$u_{2k,(N+1)/2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, (N+1)/2,$$

пропущенное в (18) собственное значение  $\lambda_{(N+1)/2}$  находится непосредственно из  $N$ -го уравнения системы (11):

$$\lambda_{(N+1)/2} = 2\omega_1. \quad (19)$$

Компоненты  $u_{k,(N+1)/2}$  при нечетных  $k$  получаются теперь из вытекающих из системы (11) уравнений

$$\begin{aligned} D_1 u_{2k-1,(N+1)/2} + D_2 u_{2k+1,(N+1)/2} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, (N-1)/2, \end{aligned} \quad (20)$$

и равны

$$\begin{aligned} u_{k,(N+1)/2} &= B(-\delta)^{(N-k)/2}, \\ k &= 1, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, собственные значения трехдиагональной симметричной матрицы  $D + 2\Omega$  при нечетном  $N$ , с которыми непосредственно связан спектр  $XY$ -гамильтониана альтернированной открытой цепочки, равны

$$\lambda_\nu = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \Delta_\nu}, & \nu = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \\ 2\omega_1, & \nu = \frac{N+1}{2}, \\ \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \Delta_\nu}, & \nu = \frac{N+3}{2}, \frac{N+5}{2}, \dots, N. \end{cases} \quad (22)$$

Компоненты собственных векторов  $|u_\nu\rangle$  ( $\nu = 1, 2, \dots, N, \nu \neq (N+1)/2$ ) определяются следующим образом:

$$u_{j,\nu} = \begin{cases} A_\nu \frac{D_1}{\lambda_\nu - 2\omega_1} \left[ \delta \sin\left(\frac{\pi\nu(j-1)}{N+1}\right) + \sin\left(\frac{\pi\nu(j+1)}{N+1}\right) \right], & j = 1, 3, 5, \dots, N, \\ A_\nu \sin\left(\frac{\pi\nu j}{N+1}\right), & j = 2, 4, \dots, N-1, \end{cases} \quad (23)$$

а нормировочные коэффициенты равны

$$A_\nu = \frac{2|\lambda_\nu - 2\omega_1|}{\sqrt{N+1}} \frac{1}{\sqrt{(\lambda_\nu - 2\omega_1)^2 + D_1^2 \Delta_\nu}}. \quad (24)$$

Компоненты собственного вектора  $|u_{(N+1)/2}\rangle$  определяются формулой

$$\begin{aligned} u_{j,(N+1)/2} &= \\ &= \begin{cases} B(-\delta)^{(N-j)/2}, & j = 1, 3, 5, \dots, N, \\ 0, & j = 2, 4, \dots, N-1, \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

а нормировочный множитель равен

$$B = \left( \frac{\delta^2 - 1}{\delta^{N+1} - 1} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

При нечетном числе спинов  $N$  задача определения собственных векторов трехдиагональной матрицы  $D + 2\Omega$  фактически разделяется на две независимые части. Сначала с помощью анзаца (15) были найдены  $(N-1)/2$  четных компонент. Для нечетных компонент из уравнения (11) вытекает  $(N-1)/2$  уравнений

$$\begin{aligned} D_1 u_{2k-1,\nu} + D_2 u_{2k+1,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_2) u_{2k,\nu}, \\ k &= 1, 2, \dots, (N-1)/2. \end{aligned} \quad (27)$$

Недостающее уравнение выбирается из граничных условий

$$\begin{aligned} D_1 u_{2,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_1) u_{1,\nu}, \\ D_2 u_{N-1,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_1) u_{N,\nu}. \end{aligned} \quad (28)$$

При этом, как следует из выражений (23), не имеет значения, какое из двух уравнений (28) выбрать. Ситуация становится сложнее, когда число спинов  $N$  четно.

## 2.2. Альтернированная цепочка с четным числом спинов $N$

При четном  $N$  подсистемы уравнений для четных и нечетных компонент собственных векторов матрицы  $D + 2\Omega$  связаны между собой из-за граничных условий, вытекающих из уравнения (11):

$$\begin{aligned} D_1 u_{2,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_1) u_{1,\nu}, \\ D_1 u_{N-1,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_2) u_{N,\nu}. \end{aligned} \quad (29)$$

Более сложная связь между четными и нечетными компонентами собственных векторов при четном  $N$  обусловлена тем, что в правые части выражений (29) (в отличие от (28)) входят разные ларморовы частоты, и четность компонент в левых и правых частях двух уравнений (29) противоположна, а в уравнениях (28) она совпадает.

Для четных и нечетных компонент собственных векторов матрицы  $D + 2\Omega$  опять получается  $N - 2$  уравнений, аналогичных (12) и (27):

$$\begin{aligned} g u_{2k-2,\nu} + g u_{2k+2,\nu} &= u_{2k,\nu}, \\ g u_{2k-1,\nu} + g u_{2k+3,\nu} &= u_{2k+1,\nu}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$k = 1, 2, \dots, N/2 - 1,$$

где не зависящая от номеров узлов функция  $g$  определяется формулой (13). Система (30) вновь дополняется граничными условиями (29) и условиями (14), ограничивающими движение фермионов внутри цепочки.

Решение системы (30) ищем с помощью анзацев

$$\begin{aligned} u_{2k,\nu} &= A_\nu \sin 2k p_\nu, \\ u_{2k+1,\nu} &= B_\nu \sin 2 \left( \frac{N}{2} - k \right) p_\nu, \end{aligned} \quad (31)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2,$$

где  $p_\nu$  — безразмерный волновой вектор, а нормировочные константы  $A_\nu$  и  $B_\nu$  будут найдены позже. Анзац (31) и уравнения (30) позволяют получить спектр матрицы  $D + 2\Omega$  в виде

$$\lambda_\nu^{(\pm)} = \omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \Delta_\nu}, \quad (32)$$

где

$$\Delta_\nu = 1 + \delta^2 + 2\delta \cos(2p_\nu). \quad (33)$$

Очевидно, что  $\Delta_\nu > 0$  и собственные числа (32) вещественны. Составим систему из второго уравнения (11) и первого граничного условия (29):

$$\begin{aligned} D_1 u_{1,\nu} + D_2 u_{3,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_2) u_{2,\nu}, \\ u_{2,\nu} &= (\lambda_\nu - 2\omega_1) u_{1,\nu} / D_1. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя непосредственно вытекающее из (32) соотношение

$$(\lambda_\nu - 2\omega_1)(\lambda_\nu - 2\omega_2) = D_1^2 + D_2^2 + 2D_1 D_2 \cos 2p_\nu \quad (35)$$

и анзац (31), получаем из уравнений (34) трансцендентное уравнение относительно удвоенного безразмерного волнового вектора  $x_\nu = 2p_\nu$ :

$$\delta \sin \frac{N}{2} x_\nu + \sin \left( \frac{N}{2} + 1 \right) x_\nu = 0. \quad (36)$$

Заметим, что если вместо (34) составить систему из предпоследнего уравнения (11) и второго уравнения (29), мы вновь получим относительно  $x_\nu$  уравнение (36). Это означает, что каждое найденное указанным выше способом собственное значение матрицы  $D + 2\Omega$  действительно удовлетворяет системе (11), если соответствующие волновые векторы удовлетворяют уравнению (36). Анализ числа решений уравнения (36), проведенный в Приложении 1, показывает, что в интервале  $(0, \pi)$  при  $\delta < (N+2)/N$  оно имеет  $N/2$  решений, а при  $\delta \geq (N+2)/N$  имеет  $N/2 - 1$ . Поскольку каждому корню уравнения (36) соответствуют два собственных значения и два собственных вектора матрицы  $D + 2\Omega$ , при  $\delta < (N+2)/N$  мы имеем полное решение задачи. При  $\delta \geq (N+2)/N$  получается только  $N - 2$  собственных значений и собственных векторов матрицы  $D + 2\Omega$ .

Недостающий корень (36) при  $\delta > (N+2)/N$  можно найти, полагая в анзаце (31) волновой вектор комплексным. Перепишем анзац (31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{2k,\nu} &= \tilde{A}_\nu \sin 2k \tilde{p}, \\ u_{2k+1,\nu} &= \tilde{B}_\nu \sin 2 \left( N/2 - k \right) \tilde{p}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2,$$

где  $\tilde{A}_\nu$  и  $\tilde{B}_\nu$  — комплексные амплитуды, а

$$\tilde{p} = \frac{\pi}{2} + ip, \quad (38)$$

$p$  — действительное число. Учитывая, что

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x,$$

после простых преобразований (37), получаем

$$\begin{aligned} u_{2k,\nu} &= (-1)^k A_\nu \operatorname{sh}(2kp), \\ u_{2k+1,\nu} &= (-1)^{N/2-k} B_\nu \operatorname{sh}[2(N/2 - k)p], \end{aligned} \quad (39)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2,$$

где

$$B_\nu = i\tilde{B}_\nu, \quad A_\nu = i\tilde{A}_\nu.$$

Выбором нормировочных множителей анзаца (37) можно сделать действительным выражением.

Подстановка анзаца (39) в уравнение (30) приводит к соотношению

$$2g \operatorname{ch}(2p) = -1. \quad (40)$$

Вводя  $y = 2p$ , получим из уравнения (30)

$$\begin{aligned} \lambda_\nu^\pm &= \omega_1 + \omega_2 \pm \\ &\pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \operatorname{ch} y}. \end{aligned} \quad (41)$$

В Приложении 2 показано, что в рассматриваемой задаче подкоренное выражение в (41) неотрицательно и  $\lambda_\nu^\pm$  действительны. Соображения, совершенно аналогичные использованным при выводе уравнения (36), позволяют установить, что

$$\delta \operatorname{sh} \frac{N}{2} y = \operatorname{sh} \left( \frac{N}{2} + 1 \right) y. \quad (42)$$

Уравнение (42) имеет ненулевое решение при  $\delta > (N + 2)/N$ . Это следует из того, что в окрестности 0 левая часть (42) растет быстрее правой, а при больших значениях  $y$  правая часть (42) заведомо больше левой. Поскольку после точки пересечения функций в левой и правой частях (42) правая часть растет быстрее левой, указанное решение является единственным. Это решение позволяет найти два недостающих собственных значения матрицы  $D + 2\Omega$  при  $\delta > (N + 2)/N$ .

Случай  $\delta = (N + 2)/N$  заслуживает отдельного рассмотрения. При этом анзац

$$\begin{aligned} u_{2k,\nu} &= Ak(-1)^k, \\ u_{2k+1,\nu} &= B \left( \frac{N}{2} - k \right) (-1)^{N/2-k}, \\ k &= 0, 1, \dots, N/2, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $A_\nu$  и  $B_\nu$  — нормировочные множители, обеспечивает выполнение уравнений (30), граничных условий (29) и ограничений (14). Простые вычисления дают следующие выражения для двух недостающих собственных значений:

$$\lambda_\nu^\pm = \omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + \frac{4D_1^2}{N^2}}. \quad (44)$$

Константы  $A_\nu$ ,  $B_\nu$  для любого  $\delta$  определяются из граничных условий (29) и из условий ортонормированности собственных векторов. Окончательные результаты для собственных значений и собственных векторов матрицы  $D + 2\Omega$  при четном числе спинов  $N$  могут быть представлены следующим образом. При  $\delta < (N + 2)/N$  спектр матрицы  $D + 2\Omega$  определяется формулами

$$\lambda_\nu = \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2 \cos x_\nu}, & \nu = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, \\ \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2 \cos x_\nu}, & \nu = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (45)$$

где  $x_\nu (\nu = 1, 2, \dots, N/2)$  — решения уравнения (36), а  $x_{N+1-\nu} = x_\nu (\nu = 1, 2, \dots, N/2)$ . Компоненты собственных векторов равны

$$u_{k,\nu} = \begin{cases} A_\nu \sin \frac{kx_\nu}{2}, & k = 2, 4, \dots, N, \\ B_\nu \sin (N - k + 1) \frac{x_\nu}{2}, & k = 1, 3, \dots, N - 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (46)$$

Нормировочные константы равны

$$\begin{aligned} A_\nu &= 2 \left\{ \left( N + 1 - \frac{\sin(N + 1)x_\nu}{\sin x_\nu} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{\lambda_\nu - 2\omega_2}{\lambda_\nu - 2\omega_1} \right) \right\}^{-1/2}, \quad (47) \end{aligned}$$

$$B_\nu = A_\nu (-1)^{\nu+1} \sqrt{\frac{\lambda_\nu - 2\omega_2}{\lambda_\nu - 2\omega_1}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

В том случае, когда  $\delta \geq (N + 2)/N$  и уравнение (36) имеет недостаточное количество действи-

тельных корней, два собственных значения с номерами  $N/2$  и  $N/2 + 1$  будут выглядеть по-другому. Для  $\delta > (N + 2)/N$  собственные значения с номерами  $N/2$  и  $N/2 + 1$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{N/2} &= \omega_1 + \omega_2 + \\ &\quad + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 - 2D_1D_2 \operatorname{ch} y}, \\ \lambda_{N/2+1} &= \omega_1 + \omega_2 - \\ &\quad - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 - 2D_1D_2 \operatorname{ch} y}, \end{aligned} \quad (49)$$

а компоненты собственных векторов имеют вид

$$u_{k,\nu} = \begin{cases} A_\nu (-1)^{k/2} \operatorname{sh} \frac{ky}{2}, & k = 2, 4, \dots, N, \\ B_\nu (-1)^{(N-k+1)/2} \operatorname{sh} (N-k+1) \frac{y}{2}, & \\ k = 1, 3, \dots, N-1, & \\ \nu = N/2, N/2 + 1, & \end{cases} \quad (50)$$

$$A_\nu = 2 \left\{ \left( \frac{\operatorname{sh} (N+1)y_\nu}{\operatorname{sh} y_\nu} - N - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\lambda_\nu - 2\omega_2}{\lambda_\nu - 2\omega_1} \right) \right\}^{-1/2}. \quad (51)$$

В формулах (49), (50) и (51)  $y$  является решением уравнения (42). И, наконец, в случае  $\delta = (N+2)/N$  собственные значения с номерами  $N/2$  и  $N/2+1$  и соответствующие им собственные векторы имеют вид

$$\lambda_{N/2} = \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \frac{4}{N^2}}, \quad (52)$$

$$\lambda_{N/2+1} = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 \frac{4}{N^2}},$$

$$u_{k,\nu} = \begin{cases} A_\nu (-1)^{k/2} \frac{k}{2}, & k = 2, 4, \dots, N, \\ B_\nu (-1)^{(N-k+1)/2} \frac{N-k+1}{2}, & \\ k = 1, 3, \dots, N-1, & \\ \nu = N/2, N/2 + 1, & \end{cases} \quad (53)$$

$$A_\nu = 2 \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda_\nu - 2\omega_2}{\lambda_\nu - 2\omega_1} \right) \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \right\}^{-1/2}. \quad (54)$$

Связь между  $A_\nu$  и  $B_\nu$  снова определяется формулой (48).

### 3. МНОГОКВАНТОВАЯ ДИНАМИКА АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧЕК ЯДЕРНЫХ СПИНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Многоквантовый ЯМР в твердых телах [16] позволяет получать информацию о числе ядерных спинов в примесных кластерах [17], расширяет возможности релаксационных методов [18] и ведет к упрощению обычных спектров ЯМР дипольно-связанных ядерных спинов [18]. Экспериментальные спектры многоквантового ЯМР в основном интерпретируются на основе феноменологической гипотезы [16], согласно которой все возможные переходы

между зеемановскими уровнями спиновой системы во внешнем магнитном поле возбуждаются при достаточно больших временах с одинаковой вероятностью. В результате интенсивность  $J_n$  многоквантовой когерентности порядка  $n$  оказывается пропорциональной числу многоспиновых переходов, при которых проекция оператора спинового углового момента на направление внешнего магнитного поля изменяется на  $n$  единиц. В системе с числом спинов  $n > 6$  простой анализ [16] дает

$$J_n = 2^{2N} (N\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{n^2}{N}\right), \quad (55)$$

а распределение многоквантовых интенсивностей описывается гауссовой кривой с дисперсией

$$\sigma^2 = N(\tau)/2,$$

где  $N(\tau)$  — число спинов, связанных диполь-дипольным взаимодействием, к концу временного интервала  $\tau$ . Хотя распределение (55) чрезвычайно полезно в многоквантовой ЯМР-спектроскопии, оно не является результатом систематического квантовомеханического анализа и ведет в ряде случаев к неконтролируемым погрешностям при извлечении информации из ЯМР-спектров [17]. Точный квантовомеханический анализ многоквантовой динамики ЯМР удалось развить в [9, 10] для одномерных однородных спиновых систем в твердых телах, когда константы диполь-дипольного взаимодействия всех пар ближайших соседей одинаковы. Разработанный в предыдущем разделе метод диагонализации ХУ-гамильтониана альтернированной открытой цепочки позволяет развить аналитические подходы к многоквантовой динамике ЯМР для простейших неоднородных спиновых систем.

Спиновая система в одномерном многоквантовом ЯМР-эксперименте описывается двухспиновым/двухквантовым гамильтонианом [9, 16]

$$\mathcal{H}_{MQ} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} D_{n,n+1} (I_n^+ I_{n+1}^+ + I_n^- I_{n+1}^-), \quad (56)$$

где  $I_n^\pm = I_{n,x} \pm iI_{n,y}$  — повышающий и понижающий спиновые операторы. Начальная матрица плотности  $\rho(0)$  системы в сильном магнитном поле в высокотемпературном приближении может быть записана в виде

$$\rho(0) = I_z = \sum_{n=1}^N I_{nz}. \quad (57)$$

Чтобы связать многоквантовый гамильтониан (56) с гамильтонианом (1), удобно выполнить унитарное преобразование [10] (для четного  $N$ )

$$Y = \exp(-i\pi I_{2,x}) \times \exp(-i\pi I_{4,x}) \dots \exp(-i\pi I_{N,x}), \quad (58)$$

которое является композицией  $\pi$ -импульсов вокруг оси  $x$  вращающейся системы координат для всех спинов, занимающих четные узлы цепочки. Нетрудно проверить, что

$$Y \mathcal{H}_{MQ} Y^+ = \mathcal{H}(\text{Eq. (1)}; \omega_n = 0, n = 1, 2, \dots, N). \quad (59)$$

Многоквантовая динамика альтернированной цепочки может быть теперь описана уравнением для матрицы плотности ( $\hbar = 1$ )

$$i \frac{d\bar{\rho}(t)}{dt} = [\mathcal{H}, \bar{\rho}(t)] \quad (60)$$

и начальным условием

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(0) &= Y I_z Y^+ = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} I_{n,z} = \\ &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \left( c_n^+ c_n - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Решение этой задачи, выполняемой аналогично [10], приводит, как и в однородных цепочках, к ненулевым интенсивностям многоквантовых когерентностей нулевого  $G_0(\tau)$  и плюс/минус второго порядков  $G_{\pm 2}(\tau)$ . Другие многоквантовые когерентности в этой системе не возникают. Причина этого состоит в том [20], что в приближении взаимодействий ближайших соседей в неоднородной линейной, как и в однородной, цепочке не возникают многоспиновые корреляции, ведущие к появлению многоквантовых когерентностей высших порядков. В рассматриваемой системе имеет место [21] закон сохранения суммы интенсивностей многоквантовых когерентностей

$$G_0(\tau) + G_2(\tau) + G_{-2}(\tau) = 1. \quad (62)$$

Расчет, аналогичный проведенному в работе [10], дает для четного числа спинов  $N$  такие же выражения для интенсивностей многоквантовых когерентностей, как и полученные в работе [14] для нечетных  $N$ :

$$\begin{aligned} G_0(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \cos^2(\lambda_\nu t), \\ G_{\pm 2}(\tau) &= \frac{1}{2N} \sum_{\nu=1}^N \sin^2(\lambda_\nu t), \end{aligned} \quad (63)$$

где собственные числа  $\lambda_\nu$  трехдиагональной матрицы  $D$  вычислены в предыдущем разделе. В недавней работе [22] показано, что формулы (63) справедливы для произвольной неоднородной открытой цепочки в приближении взаимодействия ближайших соседей.

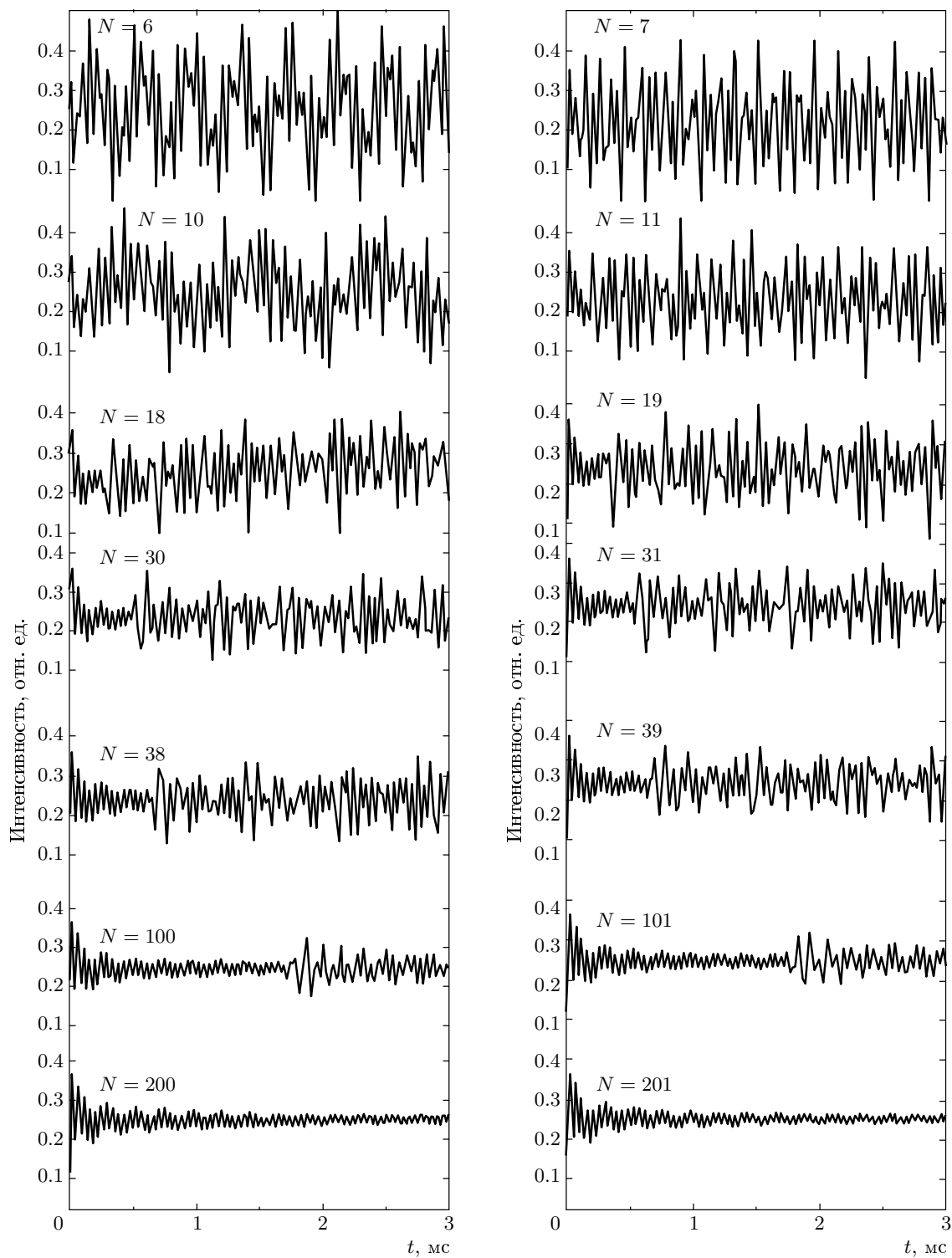
Эволюция многоквантовых когерентностей в альтернированной открытой цепочке изучена при следующих константах диполь-дипольного взаимодействия  $D_1 = 2\pi 4444 \text{ с}^{-1}$ ,  $D_2 = 2\pi 6666 \text{ с}^{-1}$  (см. формулу (3)) при различных числах спинов  $N$ . Интенсивности многоквантовых когерентностей сильно зависят от  $N$  в малоспиновых системах. Представленные на рисунке зависимости от времени интенсивностей многоквантовой когерентности второго порядка  $G_2(\tau)$  зависят от числа спинов, когда  $N < 100$ . Из формул (22), (45), (49), (52), и (63) (при  $\omega_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ) нетрудно установить, что частотный спектр осцилляций многоквантовых когерентностей простирается от  $2|D_1 - D_2|$  до  $2(D_1 + D_2)$  при  $N \gg 1$ . Следовательно, изучая спектр частотных осцилляций многоквантовых когерентностей нулевого и второго порядков, можно найти константы диполь-дипольного взаимодействия и извлечь содержащуюся в них структурную информацию.

При  $N > 200$  осцилляции интенсивностей многоквантовых когерентностей нулевого и второго порядков затухают при достаточно больших временах эволюции системы. При этом устанавливаются квазистационарные значения интенсивностей многоквантовых когерентностей. Этих трех квазистационарных значений интенсивностей многоквантовых когерентностей недостаточно для сравнения распределения этих когерентностей, полученного на основе точного квантовомеханического решения задачи, с гауссовым распределением, установленным в рамках феноменологического подхода [16].

#### 4. ПЕРЕНОС КВАНТОВОГО СОСТОЯНИЯ ПО АЛЬТЕРНИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКЕ

Перенос квантовых состояний по многокубитной (многоспиновой) системе является важнейшей задачей квантовой теории информации и квантового компьютеринга [12]. Реализация квантовых коммуникаций с помощью однородных цепочек спинов подробно изучалась в работах [23, 24]. В частности, показано [24], что при определенной периодической последовательности времен можно со 100 %-й надежностью передать квантовые состояния с одного конца однородной цепочки на другой при  $N = 2, 3$ . При





Зависимость от времени интенсивности многоквантовой когерентности второго порядка в альтернированных открытых цепочках с разным числом спинов  $N$ . Константы диполь-дипольного взаимодействия:  $D_1 = 2\pi 4444 \text{ с}^{-1}$ ,  $D_2 = 2\pi 6666 \text{ с}^{-1}$  ( $\delta = D_2/D_1 = 1.5$ )

$N > 3$  такая надежная передача квантового состояния по однородной цепочке невозможна [24].

Рассмотрим простейший случай, когда  $n$ -й спин в альтернированной цепочке направлен против направления внешнего поля, а остальные направлены по направлению поля. Обозначим это квантовое состояние как

$$|n\rangle = |00 \dots \underbrace{1 \dots 0}_n \dots 0\rangle. \quad (64)$$

Вероятность  $P(t)$  того, что система первоначально была в состоянии  $|1\rangle$ , а в момент времени  $t$  оказалась в состоянии  $|N\rangle$ , определяется по формуле

$$P(t) = |\langle N | \exp(-i\mathcal{H}t) | 1 \rangle|^2, \quad (65)$$

где гамильтониан  $\mathcal{H}$  определяется уравнением (1). Здесь и далее будем считать, что  $\omega_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Очевидно, что  $P(t)$  определяет вероятность переноса квантового состояния  $|1\rangle$  с одного конца цепочки на другой. Учитывая, что

$$[I_z, \mathcal{H}] = 0$$

и матрицы преобразования  $U$  (см. уравнение (8)) действительны, формулу (65) можно переписать в следующем виде:

$$P(t) = \left| \sum_{j=1}^N u_{Nj} u_{1j} \exp(-it\lambda_j) \right|^2, \quad (66)$$

где матричные элементы  $u_{1j}$ ,  $u_{Nj}$  и собственные значения  $\lambda_j$  вычислены в разд. 2.

Ограничимся далее исследованием идеального переноса квантового состояния (со 100 %-й вероятностью) по четырехспиновой альтернированной цепочке. Используя формулы (48)–(51), для вероятности такого переноса найдем, что

$$P_4(t) = \left| \frac{4 \operatorname{sh}^2 2y}{\operatorname{sh} 5y - 5} \sin \left[ D_1 t \sqrt{1 + \delta^2 - 2\delta \operatorname{ch} y} \right] - \frac{4 \sin^2 2x}{5 - \frac{\sin 5x}{\sin x}} \sin \left[ D_1 t \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta \cos x} \right] \right|^2, \quad (67)$$

где  $x, y$  — решения уравнений (36) и (42) при  $N = 4$ :

$$\delta \sin 2x + \sin 3x = 0, \quad \delta \operatorname{sh} 2y = \operatorname{sh} 3y. \quad (68)$$

Заметим, что если  $y = i(\pi - \bar{x})$ , где  $\bar{x}$  — действительное число, то второе уравнение (68) при подстановке  $y$  в таком виде перейдет в первое. Аналогично, если  $x = \pi + i\bar{y}$ , где  $\bar{y}$  — действительное число, первое уравнение (68) перейдет во второе. Это значит, что результат, который мы получим, будет верен как для  $\delta > (N+2)/N$ , так и для  $\delta < (N+2)/N$  ( $N = 4$ ). Ненулевые решения уравнений (36) и (42) при  $\delta \neq (N+2)/N$  имеют вид

$$\cos x = \frac{\sqrt{\delta^2 + 4} - \delta}{4}, \quad \operatorname{ch} y = \frac{\sqrt{\delta^2 + 4} + \delta}{4}. \quad (69)$$

Максимальное значение  $P_4(t)$  получается при временах  $\bar{t}$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} D_1 \bar{t} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta}{2} \sqrt{\delta^2 + 4}} &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \\ D_1 \bar{t} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta}{2} \sqrt{\delta^2 + 4}} &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \\ k, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (70)$$

При выполнении условий (70) нетрудно проверить, что

$$P_4(t) = 1, \quad (71)$$

т. е. при временах эволюции системы  $\bar{t}$  происходит идеальный перенос кубита с одного конца альтернированной цепочки на другой. Из соотношений (70) можно найти величины  $\delta$ , при которых такой идеальный перенос квантового состояния возможен:

$$\delta = \sqrt{\frac{3+4k}{1+4n}} - \sqrt{\frac{1+4n}{3+4k}}, \quad (72)$$

$k, n$  — целые неотрицательные числа,  $k \geq n$ .

Неоднородные цепочки спинов, динамика которых описывается  $XU$ -гамильтонианом, открывают новые возможности для исследования процессов переноса квантовых состояний. Эффективный вариант реализации такого процесса в неоднородных цепочках предложен в работе [24].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точное решение для спектра гамильтониана однородной одномерной  $XU$ -модели [1] сыграло важную роль в теории магнитных явлений [25], магнитно-резонансной спектроскопии [26] и квантовой теории информации [12]. Представленное в работе полное решение задачи о диагонализации  $XU$ -гамильтониана альтернированной открытой цепочки спинов  $s = 1/2$  расширяет возможности применения

точных решений к различным задачам спиновой динамики и квантовой теории информации. В частности, в рамках развитого подхода полностью исследована в приближении взаимодействия ближайших соседей многоквантовая динамика ЯМР альтернированных открытых цепочек и получены интенсивности возникающих многоквантовых когерентностей.

Неоднородные спиновые цепочки открывают новые возможности для решения задач квантовой теории информации [12]. Здесь появляются методы адресации кубитов, передачи квантовых состояний. Возникают возможности вычисления зависимости энтропии любой части альтернированной цепочки от количества спинов и количественного исследования меры запутанных состояний. Ряд таких вопросов для открытых XY-цепочек недавно был исследован в работе [27].

Получение точных решений для динамики неоднородных одномерных систем является еще одним шагом на пути сопоставления динамических и термодинамических методов решения многочастичных задач, выяснения границ применения термодинамических методов при исследовании небольших систем спинов. Тонкие ЯМР-эксперименты [28] на девятнадцатиспиновых кластерах еще ждут своего объяснения.

Авторы благодарны М. Г. Рудаvcу за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-03-32528).

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

Покажем, что при четном числе спинов  $N$  уравнение (36) имеет на интервале  $(0, \pi)$   $N/2$  решений при  $\delta < (N+2)/N$  и  $N/2 - 1$  решений при  $\delta \geq (N+2)/N$ .

Нули функции  $\sin(Nx/2)$ ,

$$x = \frac{2\pi n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N/2 - 1,$$

перемежаются с нулями функции  $\sin(N/2 + 1)x$ ,

$$x = \frac{2\pi m}{N+2}, \quad m = 1, 2, \dots, N/2.$$

В самом деле, в каждом интервале

$$\left(\frac{2n\pi}{N}, \frac{2(n+1)\pi}{N}\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

существует одно и только одно  $m$ , такое что

$$\frac{2n\pi}{N} < \frac{2m\pi}{N+2} < \frac{2(n+1)\pi}{N}. \tag{П.1.1}$$

В качестве такого  $m$  можно выбрать

$$m = n + 1, \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Покажем, что между любыми двумя соседними нулями функций  $\sin Nx/2$  и  $\sin(N/2 + 1)x$ , т.е. в интервале  $(2n\pi/(N+2), 2n\pi/N)$  имеется хотя бы один корень уравнения (36). Действительно, в точке  $2n\pi/(N+2)$  функция

$$-\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x = 0,$$

а

$$\sin\frac{N}{2}x > 0,$$

если  $n$  — нечетное, и

$$\sin\frac{N}{2}x < 0,$$

если  $n$  — четное. В точке  $2n\pi/N$  функция

$$-\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x > 0,$$

а

$$\sin\frac{N}{2}x = 0,$$

если  $n$  — нечетное, и

$$\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x < 0,$$

если  $n$  — четное. Значит, в какой-то точке интервала  $(2n\pi/(N+2), 2n\pi/N)$  эти две функции пересекаются, и уравнение (36) имеет не менее  $(N/2 - 1)$  корней. Покажем, что в интервале  $(\pi N/(N+2), \pi)$  при  $\delta < (N+2)/N$  имеется еще один корень. Для определенности будем считать  $N/2$  четным. При нечетном  $N/2$  все приведенные ниже рассуждения можно провести, используя обратные неравенства.

В точке  $\pi N/(N+2)$  функция

$$-\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x = 0,$$

а

$$\sin\frac{N}{2}x < 0,$$

т.е.

$$\delta \sin\frac{N}{2}x < -\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x.$$

При  $\delta < (N+2)/N$  имеем

$$\left(\delta \sin\frac{N}{2}x\right)' \Big|_{x=\pi} < -\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x \Big|'_{x=\pi}, \tag{П.1.2}$$

$$\left(\delta \sin\frac{N}{2}x\right) \Big|_{x=\pi} = -\sin\left(\frac{N}{2} + 1\right)x \Big|_{x=\pi}.$$

Значит, в малой окрестности  $\pi$  существует такая точка  $x' < \pi$ , что

$$\left(\delta \sin \frac{N}{2} x\right) \Big|_{x=x'} > -\sin \left(\frac{N}{2} + 1\right) x \Big|_{x=x'}. \quad (\text{П.1.3})$$

Следовательно, существует точка  $x_0$  ( $\pi N/(N+2) < x_0 < x' < \pi$ ), в которой функции  $\sin Nx/2$  и  $-\sin(N/2+1)x$  пересекаются. В этом случае уравнение (36) имеет  $N/2$  корней.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, что собственные числа  $\lambda_\nu^\pm$ , определяемые уравнением (41), действительные. Для этого необходимо и достаточно выполнения условия

$$(\omega_1 - \omega_2)^2 + D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \operatorname{ch} y > 0. \quad (\text{П.2.1})$$

Для доказательства (П.2.1) используем уравнение (42)

$$\delta = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{N}{2} + 1\right) y}{\operatorname{sh} \frac{N}{2} y}. \quad (\text{П.2.2})$$

Подставляя (П.2.2) в (П.2.1) после простых преобразований получаем

$$D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \operatorname{ch} y = D_1^2 \frac{\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 \frac{N}{2} y}. \quad (\text{П.2.3})$$

Утверждение (П.2.1) следует из (П.2.3).

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Ann. Phys.* **16**, 407(1961).
2. М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, Москва (1987).
3. S. I. Doronin, E. B. Fel'dman, I. Ya. Guinzbourg, and I. I. Maximov, *Chem. Phys. Lett.* **341**, 144 (2001).
4. R. Brüsweiler and R. R. Ernst, *Chem. Phys. Lett.* **264**, 393 (1997).
5. J. S. Waugh, *Mol. Phys.* **95**, 731 (1998).
6. E. B. Fel'dman, R. Brüsweiler, and R. R. Ernst, *Chem. Phys. Lett.* **294**, 297 (1998).
7. E. B. Fel'dman, S. Lacelle, *J. Chem. Phys.* **108**, 4709 (1998).
8. H. B. Cruz and L. L. Gonsalves, *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* **14**, 2787 (1981).
9. E. B. Fel'dman and S. Lacelle, *J. Chem. Phys.* **107**, 7067 (1997).
10. С. И. Доронин, И. И. Максимов, Э. Б. Фельдман, *ЖЭТФ* **118**, 687 (2000).
11. E. P. Danieli, H. M. Pastawski, and G. A. Alvarez, *Chem. Phys. Lett.* **402**, 88 (2005).
12. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Communication*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
13. F. Ye, G.-H. Ding, and B.-W. Xu, E-print archives cond-mat/0105584.
14. E. B. Fel'dman and M. G. Rudavets, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 54 (2005).
15. P. Jordan and E. Wigner, *Z. Phys.* **47**, 631 (1928).
16. J. Baum, M. Munowitz, A. N. Garroway, and A. Pines, *J. Chem. Phys.* **83**, 2015 (1985).
17. C. E. Hughes, *Progr. in Nucl. Magn. Resonance Spectr.* **45**, 301 (2004).
18. Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун, *ЯМР в одном и двух измерениях*, Мир, Москва (1990).
19. А. Абрагам, *Ядерный магнетизм*, ИЛ, Москва (1963).
20. S. I. Doronin and E. B. Fel'dman, *Sol. St. Nucl. Magn. Resonance* **28**, 111 (2005).
21. D. A. Lathrop, E. S. Handy, and K. K. Gleason, *J. Magn. Reson. A* **111**, 161 (1994).
22. K. E. Feldman, *J. Phys. A* **39**, 1039 (2006); E-print archives quant-ph/0510070.
23. S. Bose, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 207901 (2003).
24. M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, and A. Landahl, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004).
25. Р. Уайт, *Квантовая теория магнетизма*, Мир, Москва (1985).
26. D. Greenbaum, *J. Magn. Res.* **179**, 1 (2005).
27. A. R. Its, B.-Q. Jin, and V. E. Korepin, *J. Phys. A* **38**, 2975 (2005).
28. A. K. Khitrin, V. L. Ermakov, and B. M. Fung, *Z. Naturforsch.* **59a**, 209 (2004).