

АВТОВОЛНЫ В АКТИВНОЙ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В. М. Журавлев^{*}

*Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 31 марта 2005 г.

Исследуются нелинейные волновые процессы в двухпроводных линиях с активным элементом, имеющим экспоненциальную вольт-амперную характеристику, подобную вольт-амперной характеристике p - n -перехода. Такие линии являются моделями систем, которые встречаются в различных физических и биологических приложениях, таких как биологические мембраны и полупроводниковые приборы. Показано, что такие системы могут находиться в различных режимах, каждый из которых имеет различные дисперсионные и диссипативные свойства и, как следствие, описывается различного типа автоволновыми процессами. Проанализировано поведение системы во всех основных режимах. Для каждого из режимов найдены точные решения соответствующих уравнений и исследованы их дифференциальные законы сохранения и внутренние симметрии. Одним из общих свойств таких уравнений является наличие специального принципа суперпозиции, который описывает дискретную структуру возбуждений в линии, состоящих из отдельных простых возбуждений. Показано, что в таких системах возможны процессы генерации автоимпульсов.

PACS: 05.45.-a, 11.30.Na, 84.40.Az, 87.19.La

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели распределенных активных систем, в которых происходят генерация и распространение электромагнитных импульсов, представляют интерес как с точки зрения физических приложений, например, в системах генерации электромагнитных импульсов, так и с точки зрения описания на их основе таких биофизических объектов, как биологические мембраны и, в том числе, нервное волокно [1–4]. Одним из подходов к описанию таких систем является использование упрощенной их математической модели в форме двухпроводных линий. Такой подход представляет собой переход от локального описания распространения электромагнитных волноводных мод в форме напряженностей полей и плотностей токов (см. например, [3, 4]) к описанию с помощью интегральных параметров электромагнитного поля в форме напряжения и силы тока [2, 5]. Такой переход, несмотря на определенное огрубле-

ние описания, оправдан в особенности для нелинейных волноводных систем, когда приходится сталкиваться с существенными трудностями их анализа. В зависимости от типа системы используется та или иная модель ее интегрального описания. Примерами могут служить система Витта [1] и джозефсоновская линия [6], с одной стороны, и генератор Ганна [1], с другой, при описании которых переход к интегральным параметрам происходит по-разному. Аналогичный пример представляет собой подход, изложенный в работах [3, 4], где используется модель планарного или цилиндрического волновода для описания локального потенциала на мембране. Вместе с тем использование именно модели двухпроводных линий можно считать вполне универсальным средством для описания активных нелинейных систем, которое позволяет наиболее наглядно представить происходящие в таких системах процессы, хотя и с потерей некоторой информации об их пространственной и временной структуре.

В качестве одной из простых и универсальных моделей ряда активных систем достаточно давно

^{*}E-mail: zhuravl@sv.ulsu.ru

рассматриваются модели двухпроводных линий с активным элементом, подобным p - n -переходу (см. книгу [2] и библиографию там). Основой для использования одних и тех же моделей для описания как биологических мембран, так и распределенных полупроводниковых систем является общий вид их вольт-амперной характеристики (ВАХ). Биологические мембраны и распределенные физические системы с p - n -переходом имеют ВАХ, близкую к ВАХ экспоненциального типа,

$$i(u) = r(e^{eu/kT} - 1)$$

[2, 7]. Именно это обстоятельство приводит к достаточно универсальной математической формулировке всех таких моделей. Исследованию свойств одной из таких моделей и посвящена данная работа.

Основная цель исследования — анализ режимов работы таких систем с точки зрения общих нелинейных механизмов динамики электромагнитных процессов в них. Проблему можно сформулировать следующим образом: установить, насколько сам вид ВАХ определяет возможные свойства процессов в линии безотносительно к конкретному устройству волноводной линии. В первую очередь нас будет интересовать возможность автогенерации импульсов в таких линиях. Это представляет интерес с точки зрения как технического воплощения таких систем, так и понимания электромагнитной активности биологических мембран и, в частности, нервного волокна.

Процесс генерации всегда является нелинейным процессом. Этот факт важен, поскольку биологические мембраны и нервное волокно являются элементами информационной системы, в которой происходит генерация импульсов, свидетельствующих об изменении состояния элементов системы или внешней среды. Большинство нелинейных систем обладают тем свойством, что их динамические параметры в процессе эволюции ведут себя сложным образом, порождая динамический хаос в системе. Переход к таким режимам в информационной системе чаще всего сопряжен с потерей ею своих функциональных свойств передачи и хранения информации. Поэтому, предположительно, биологические мембраны, работая в нелинейных режимах, не должны переходить в состояние динамического хаоса. Следовательно, в таких системах нелинейность должна обладать такими свойствами, которые допускали бы устойчивые и сравнительно «простые» нелинейные динамические режимы. Такое свойство обычно можно связать с некоторыми симметриями в динамической эволюции системы. В большинстве исследований в этой области (см., например, [2–4]) авторы пытаются

найти описание только одиночных импульсов в мембране, что несомненно является важным шагом в понимании процессов в них. Однако в этом случае нет никаких гарантий, что избранное приближение динамики процессов описывает и ситуацию с несколькими импульсами. В последнем случае в подавляющем большинстве нелинейных систем происходит переход к хаотическому режиму. Поэтому для понимания работы всей нервной системы в целом важно найти принципы работы таких мембранных волноводов в многоимпульсных режимах.

В работе [8] была рассмотрена одна из возможных нелинейных моделей автоволн в двухпроводной линии с экспоненциальным активным элементом. Было показано, что динамика такой системы обладает специальным принципом суперпозиции. Этот принцип суперпозиции можно рассматривать как проявление имеющегося в системе механизма поддержания устойчивой динамической эволюции. В данной работе модель, рассмотренная ранее [8], подвергнута более детальному и расширенному анализу.

На первом этапе проанализированы некоторые различные возможные реализации математической модели, рассматриваемой в данной работе. Затем с общих позиций изучаются режимы работы линии в рамках предлагаемой модели. Далее каждый из возможных режимов рассмотрен более детально.

2. СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С МОДЕЛЯМИ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Исследуемая модель представляется уравнениями активной двухпроводной линии, соответствующей эквивалентной схеме, представленной на рис. 1.

Биологическим мембранам (нервному волокну) и распределенным p - n -переходам соответствует выбор ВАХ активного элемента в следующем виде (см. [2] и библиографию там):

$$J(u) = j_1 \exp \left[\frac{g(u + U_0)}{u_0} \right] - j_0 + \frac{u}{R_1(u)}. \quad (1)$$

В эту формулу явным образом включено значение постоянной ЭДС U_0 смещения и $R_1 = R_1(u)$ — сопротивление утечки. Смещение представляет собой дополнительную постоянную ЭДС, включенную в схему активного элемента. Величины j_1 и j_0 в этих соотношениях обычно таковы, что $j_0 = j_1$. Параметр $g = \pm 1$ определяет «направление», в котором включен активный элемент по аналогии с диодом: прямое или обратное. Этот фактор оказывается существенным при анализе работы линии. Величина

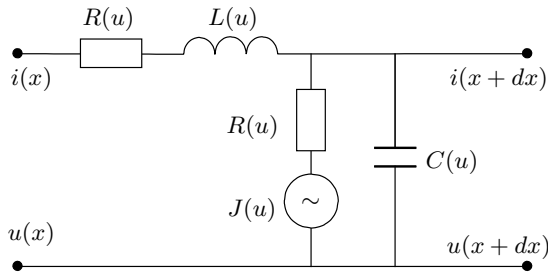


Рис. 1. Эквивалентная схема двухпроводной линии с активным элементом: $i = i(x, t)$ — ток в точке линии с координатой x в момент времени t ; $u = u(x, t)$ — напряжение на том же участке линии; C, L, R — погонные емкость, индуктивность, сопротивление участка линии, не зависящие в рассматриваемой модели от напряжения на этом участке, и $J = J(u)$ — ВАХ активного элемента линии

u_0 , входящая в формулу (1), для распределенных p - n -переходов и биологических мембран [2] имеет вид $u_0 = e/kT$, где e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура среды. При комнатных температурах $u_0 \sim 20$ мВ. Заметим также, что для биологических мембран уравнение в такой форме, учитывающей наличие ненулевой погонной индуктивности в линии, впервые использовались в работах [7, 9–11]. Заметим, что несколько иная интерпретация наличия индуктивности предложена в работе [3].

Уравнение линии, соответствующее схеме на рис. 1 при условии $R_1 = \text{const}$ и при подстановке $j(u)$ из (1), можно представить в виде

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u + Rj_1 \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{gu}{u_0}\right) + Rj_0 + \frac{R}{R_1} u + \left[RC + \frac{L}{R_1} + L \frac{j_1}{u_0} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{gu}{u_0}\right)\right] \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Величина $V_0 = 1/\sqrt{LC}$ здесь представляет собой скорость распространения волн в линейном приближении, а $\varepsilon = \exp(-gU_0/u_0)$ — безразмерный параметр, связанный с рабочей точкой активного элемента по напряжению.

3. СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОДНЫХ ЛИНИЙ

Представленные модели относятся к классу нелинейных телеграфных уравнений. Эти модели, отвечающие различным типам линий и их режимов работы, тем не менее оказываются сходными по внутрен-

ним свойствам. Это обусловлено тем, что уравнения обеих моделей могут быть приведены к общему виду простыми заменами переменных.

Преобразуем уравнение модели (2), вводя безразмерные координаты

$$r = x/x_0, \quad s = t/t_0 = V_0 t/x_0,$$

где $V_0 = 1/\sqrt{LC}$ — скорость волн в линейном приближении, а x_0 — характерный масштаб длины в линии, $t_0 = x_0/V_0$ — характерный масштаб времени. Кроме того, введем новую переменную v по формуле $v = u/u_0$. Подставляя эти соотношения в уравнение (2), приведем его к следующему безразмерному виду:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v + (\Lambda \varepsilon^{-1} e^{g v} - \Lambda_0) + \kappa v + (\varepsilon^{-1} e^{g v} + \Lambda_1) \frac{\partial}{\partial s} v = 0. \quad (3)$$

При вычислении коэффициентов этого уравнения параметр x_0 был выбран таким образом, что $Lj_1 V_0 x_0/u_0 = 1$. Отсюда

$$x_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{u_0}{j_1}.$$

Видно, что x_0 не зависит от активного сопротивления R в линии и при $L \rightarrow 0$ увеличивается при сохранении неизменными других параметров линии. При таком выборе характерного пространственного масштаба линии безразмерные параметры равны

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{Rj_1 x_0^2}{u_0} = \frac{u_0 RC}{Lj_1}, & \Lambda_0 &= \frac{Rj_0 x_0^2}{u_0} = \Lambda \frac{j_0}{j_1}, \\ \kappa &= \frac{RCu_0^2}{Lj_1^2 R_1} = \Lambda \delta, & \Lambda_1 &= \delta + \Lambda, \\ \delta &= \frac{u_0}{R_1 j_1}, & \varepsilon &= \exp\left(-\frac{gU_0}{u_0}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда видно, что данная модель зависит по сути от одного безразмерного параметра Λ , поскольку для большинства задач динамики двухпроводной линии $j_0 = j_1$ и, следовательно, $\Lambda_0 = \Lambda$. В конусных переменных $z_+ = r + s$, $z_- = r - s$ это уравнение имеет вид

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} v + (\Lambda \varepsilon^{-1} e^{g v} - \Lambda_0) + \kappa v + (\varepsilon^{-1} e^{g v} + \Lambda_1) \times \left(\frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-}\right) v = 0. \quad (5)$$

4. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛИНИЙ И УРАВНЕНИЯ ИХ ДИНАМИКИ

Поскольку рассматриваемые системы являются существенно нелинейными, важно для дальнейшего анализа рассмотреть основные возможные режимы работы таких линий с целью упростить уравнения, их описывающие. На качественном уровне такой анализ для диодной модели был проведен в работе [8]. Согласно этому анализу, линия может находиться продолжительное время в двух основных состояниях. Первое, которое можно условно назвать активным режимом, соответствует достаточно большим положительным напряжениям в линии, когда экспоненциальные слагаемые достаточно велики. Второй режим соответствует достаточно большим отрицательным напряжениям, когда экспоненциальные слагаемые в линии малы. Наиболее корректный способ выявления различных режимов работы линии можно получить, основываясь на анализе возможных форм уравнения в нулевом порядке при введении быстрых и медленных координат. Естественным малым параметром для этого будет параметр $\varepsilon = \exp(-gU_0/u_0)$, величина которого определяется выбором рабочей точки U_0 по напряжению. Поскольку отношение U_0/u_0 входит в показатель экспоненты, величина ε будет малой даже при сравнительно небольшом превышении U_0 над u_0 .

4.1. Приближение активного режима

Введем «быстрые» координаты $\xi = \varepsilon^{-1}z_+$ и $\eta = \varepsilon^{-1}z_-$. Исходные переменные r и s , а также z_+ и z_- будем называть «медленными» переменными. В общем случае решение исходного уравнения зависит как от медленных, так и от быстрых переменных. В простейшем случае можно рассматривать зависимость решения только от быстрых переменных. Обозначим $w = u(\xi, \eta)/u_0$. Тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} w + (\Lambda \varepsilon e^{g w} - \varepsilon^2 \Lambda_0) + \kappa \varepsilon^2 w + (e^{g w} + \varepsilon \Lambda_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w = 0.$$

Решение этого уравнения можно искать в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$w(\xi, \eta, \varepsilon) = w_0(\xi, \eta) + \varepsilon w_1(\xi, \eta) + \dots$$

В нулевом и первом порядках по параметру ε эти уравнения, описывающие активный режим, принимают вид

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} w_0 + e^{g w_0} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w_0 = 0, \quad (6)$$

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} w_1 + e^{g w_0} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w_1 + (w_1 e^{g w_0} + \Lambda_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w_0 + \Lambda e^{g w_0} = 0. \quad (7)$$

Уравнение относительно функции w_0 является существенно нелинейным уравнением и обладает важными свойствами — специальным принципом суперпозиции (см. Приложение к данной статье и работе [8]). Для удобства исследования этого уравнения полезно ввести функцию $\Phi = \exp(-g w_0)$. Тогда уравнение (6) примет следующий вид:

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \Phi - \frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Phi = 0. \quad (8)$$

Заметим, что введение быстрых переменных не изменяет порядок старших производных в нулевом порядке по сравнению с исходным уравнением. Это означает, что полученные укороченные уравнения связаны с теми же граничными и начальными условиями, что и исходное. Поэтому именно этот режим можно рассматривать как основной для описания переходных процессов после включения, а также для описания процессов генерации импульсов в системе при быстром изменении напряжения. Однако в дальнейшем мы рассмотрим вариант активного режима, который был изучен ранее в работе [8]. Различать эти варианты мы будем по следующему основному признаку. Уравнение (6), как нетрудно видеть, имеет форму дифференциального закона сохранения. Поэтому соответствующий ему режим будем называть активным бездиссипативным. Режим, рассмотренный в работе [8], содержит диссипативное слагаемое, что меняет характер решений по отношению к решениям уравнений (6). Название «диссипативное» условно, поскольку в нелинейных системах оно может приводить к обратному эффекту — притоку энергии в систему извне. Именно поэтому характерным свойством решений этого уравнения является возможность генерации импульсов при определенных условиях. Такой режим будем называть активным диссипативным режимом.

4.2. Приближение неактивного режима

Предположим теперь, что напряжение в линии меняется сравнительно медленно, так что от быстрых переменных ξ, η решение не зависит. В этом

случае решение зависит только от медленных переменных z_+ и z_- :

$$v = v(z_+, z_-, \varepsilon) = v_0(z_+, z_-) + \varepsilon v_1(z_+, z_-) + \dots$$

При этом

$$\exp(v) = \exp(v_0 + \varepsilon v_1 + \dots) = \exp(v_0)(1 + \varepsilon v_1/v_0 + \dots).$$

В нулевом и первом порядках по малому параметру ε уравнения имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-}\right)v_0 = -\Lambda,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-}\right)v_1 = e^{-gv_0} \left(4\frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-}v_0 + \Lambda^2 + \Lambda_0\right).$$

Этот режим имеет пониженный порядок старших производных как по времени, так и по пространству. Поэтому он может использоваться для описания некоторых медленных процессов, связанных, например, с восстановлением состояния линии после скачкообразных процессов в других режимах.

Кроме того, как указывалось выше, в качестве неактивного режима можно рассматривать режим, реализующийся при таких напряжениях, когда ток через активный элемент практически равен нулю. В этом режиме нелинейность отсутствует и уравнение имеет вид телеграфного уравнения. При малой диссипации в линии в этом режиме отсутствует дисперсия и все возмущения распространяются с постоянной скоростью. Поэтому такой режим можно было бы назвать баллистическим. В дальнейшем мы сосредоточимся на других режимах работы линии, так как анализ динамики в неактивном режиме представляет меньше трудностей.

4.3. Приближение режима переключения

Наряду с этими двумя предельными режимами существует и промежуточный тип процессов, который представляет собой обобщенный вид процессов переключения линии из активного режима в неактивный. В дальнейшем будем называть этот режим режимом переключения. Может оказаться, что вариации напряжений в пространстве меняются более быстро, чем во времени. В этом случае следует ввести быструю пространственную переменную $\zeta = \varepsilon^{-1}r$, а безразмерное время s оставить неизменным. В этом случае уравнение для

$w = w(\zeta, s, \varepsilon) = w_0(\zeta, s) + \varepsilon w_1(\zeta, s) + \dots$ запишется в виде

$$-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}w + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial s^2}w + (\Lambda e^{gw} - \varepsilon \Lambda_0) + (\varepsilon e^{gw} + \varepsilon \Lambda_1) \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (9)$$

Уравнения в первых двух порядках теории возмущений примут вид

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \Lambda e^{gw_0} + e^{gw_0} \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} + \Lambda e^{gw_0} w_1 + e^{gw_0} \frac{\partial w_1}{\partial s} + e^{gw_0} w_1 \frac{\partial w_0}{\partial s} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + k_0 - \Lambda_1 \frac{\partial w_0}{\partial s}. \quad (11)$$

Для уравнения (10) удобно опять ввести переменную $\Phi = \exp(-gw_0)$. При этом уравнение в нулевом порядке приобретает форму

$$g \frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{\Lambda}{\Phi} - \frac{g}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0. \quad (12)$$

Полученные укороченные уравнения имеют первый порядок производных по времени и второй по пространству. Поэтому данный режим позволяет решать граничную задачу при неполном решении начальной. Фактически этот режим может адаптировать возмущение, которое появилось в активном режиме. Свойства этого режима позволяют его рассматривать как режим переключения. Это будет показано далее.

5. РЕЖИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Исследование режимов начнем с изучения динамики линии в режиме переключения. Уравнение, описывающее этот режим в нулевом порядке по ε , имеет вид (12). Одним из наиболее важных аспектов общего анализа системы является проверка наличия в ней законов сохранения. В данном приближении уравнение (12) содержит закон сохранения неявно. Для того чтобы показать это, воспользуемся преобразованием

$$\Phi(\zeta, s) = e^{g\Lambda s} \Psi(\zeta, \tau(s)), \quad \tau(s) = \frac{1}{\Lambda} e^{g\Lambda s} + \tau_0, \quad (13)$$

которое сводит уравнение (12) с $\Lambda \neq 0$ к этому же уравнению, но с $\Lambda = 0$, т. е. функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \ln \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{g}{\Psi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0. \quad (14)$$

Отсюда видно, что уравнение для Ψ представляет собой обобщенный дифференциальный закон сохранения. Смысл этого закона сохранения легко высказать, если заметить, что величина

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \ln \Psi}{\partial \zeta}$$

представляет собой напряженность поля в линии. Отсюда следует, что уравнение (14) можно интерпретировать как уравнение Максвелла

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = \rho, \tag{15}$$

где

$$\rho = -\frac{g}{\Psi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$$

— погонная плотность заряда вдоль линии. Таким образом, в данной ситуации сохраняется величина

$$G = \iint \rho d\zeta d\tau = \int g \Psi^{-1} d\zeta.$$

В исходных размерных единицах эта сохраняющаяся величина выглядит следующим образом:

$$G = \frac{g\varepsilon}{x_0} \exp\left(\frac{g\Lambda V_0 t}{x_0}\right) \int \exp\left(\frac{gu}{u_0}\right) dx.$$

Здесь важно подчеркнуть, что закон сохранения возникает в результате некоторого функционального преобразования независимых переменных. Такой закон сохранения можно назвать законом сохранения с весовым множителем. Это означает, что диссипативные процессы в системе подчиняются некоторому универсальному закону поведения. В дальнейшем обобщим этот результат.

Обратим также внимание еще на одно обстоятельство. Заметим, что знак параметра g , эквивалентный направлению включения активного элемента, определяет направление течения времени в системе, поскольку стоит в уравнении для Ψ перед производной по времени. Уравнение (14) представляет собой нелинейное диффузионное уравнение, которое, как известно, описывает необратимый во времени процесс. Таким образом, можно констатировать, что в рассматриваемой системе изменение направления включения активного элемента (смена знака g) влечет за собой смену направления течения времени в системе. Это проявляется и в функциональной зависимости параметра τ от s . Заметим, что параметр Λ при любых значениях погонных параметров линии положителен. Отсюда следует, что в зависимости от знака параметра g параметр τ либо монотонно убывает до некоторого постоянного значения τ_0 , либо

монотонно возрастает. Следовательно, при $g = -1$ все решения системы при $s \rightarrow \infty$ стремятся к некоторому стационарному состоянию, которое определяется предельным нулевым значением τ . В случае $g = +1$ требуется дополнительный анализ задачи. Покажем это более точно на примере решения задачи с начальным условием $\Phi(\zeta, 0) = \phi_0(\zeta)$ на всей бесконечной оси (задача Коши).

5.1. Задача с начальными условиями

Для решения задачи относительно функции Φ вначале решим аналогичную задачу для функции Ψ с начальным условием

$$\Psi(\zeta, 0) = \psi_0(\zeta). \tag{16}$$

Уравнение (14) удобно переписать следующим образом:

$$\Psi \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\zeta}\right)^2 = g \frac{d\Psi}{d\tau}.$$

Соответствующее решение может быть представлено в виде степенного ряда:

$$\Psi(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta) \tau^n. \tag{17}$$

Действительно, при $\tau = 0$ условие (16) выполняется. Подставляя данный ряд в уравнение для Ψ , находим для функций $\psi_n(\zeta)$ рекуррентную систему уравнений

$$\psi_{n+1} = \frac{g}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\psi_k \frac{d^2 \psi_{n-k}}{d\zeta^2} - \frac{d\psi_k}{d\zeta} \frac{d\psi_{n-k}}{d\zeta} \right), \tag{18}$$

$n = 0, \dots, \infty.$

Для первых двух функций разложения имеем

$$\psi_1 = g [\psi_0 \psi_0'' - (\psi_0')^2],$$

$$\psi_2 = \frac{g}{2} (\psi_0 \psi_1'' + \psi_1 \psi_0'' - 2\psi_0' \psi_1')$$

и т. д. Таким образом, все члены ряда, начиная с первого, определяются однозначно функцией $\psi_0(\zeta)$, что решает полностью задачу Коши при условии сходимости данного ряда.

Задача Коши для функции Φ теперь решается следующим образом. Заметим, что в формулу преобразования (13) входит произвольная постоянная τ_0 . Выберем эту постоянную таким образом, чтобы при $s = 0$ параметр $\tau = \tau(s)$ также обращался в нуль. Для этого достаточно положить $\tau_0 = -\Lambda^{-1}$. В этом случае

$$\tau(s) = \frac{1}{\Lambda} (e^{g\Lambda s} - 1).$$

Таким образом, используя преобразование (13), получаем решение для функции Φ :

$$\Phi(\zeta, s) = e^{g\Lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta) \left[\frac{1}{\Lambda} (e^{g\Lambda s} - 1) \right]^n. \quad (19)$$

Как нетрудно видеть, полученное решение в случае $g = -1$ действительно описывает переключение линии из состояния $\Phi(\zeta, 0) = \psi_0(\zeta)$ при $s = 0$ в состояние с функцией Ψ следующего вида:

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, \infty) &= \lim_{s \rightarrow \infty} [e^{-g\Lambda s} \Phi(\zeta, s)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta) \frac{(-1)^n}{\Lambda^n}. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае $g = +1$ при достаточно больших значениях s параметр $\tau \approx \exp(\Lambda s)$ становится значительно большим единицы и ряд (20) будет расходиться для почти всех начальных условий $\psi_0(\zeta)$. Вообще говоря, это не свидетельствует об обязательной потере устойчивости системой. Приведем другое решение задачи Коши, для которой указанная асимптотическая проблема отсутствует. Вместо (17) рассмотрим ряд

$$\Psi(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\zeta) [\theta(\tau)]^n, \quad (21)$$

где $\theta(\tau) = e^{-\omega\tau} - 1$. Легко видеть, что функция $\theta(\tau)$ обладает следующими свойствами:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta} = -\omega(\theta + 1).$$

Подставляя разложение (21) в уравнение (14), приходим к системе рекуррентных соотношений для вычисления функций $\phi_n(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= -\frac{n}{n+1} \phi_n - \frac{g}{\omega(n+1)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^n \left(\phi_k \frac{d^2 \phi_{n-k}}{d\zeta^2} - \frac{d\phi_k}{d\zeta} \frac{d\phi_{n-k}}{d\zeta} \right), \quad n = 0, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Решение для $\Phi(\zeta, s)$ теперь будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta, s) &= \\ &= e^{g\Lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\zeta) \left\{ \exp \left[-\frac{\omega}{\Lambda} (e^{g\Lambda s} - 1) \right] - 1 \right\}^n. \end{aligned} \quad (22)$$

При $\omega > 0$ функция

$$\Theta(s) = \exp \left[-\frac{\omega}{\Lambda} (e^{g\Lambda s} - 1) \right] - 1$$

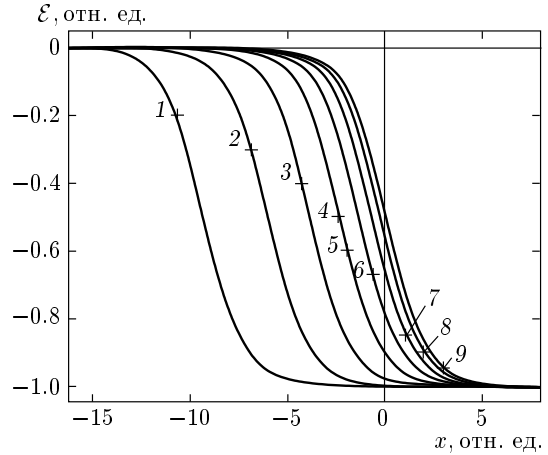


Рис. 2. Однокинковое решение для режима переключения при $A = 1, \alpha = 0.5, \Lambda = 0.1, k = 1, g = -1$ и $s = 0$ (1), 2 (2), 4 (3), 8 (4), 12 (5), 16 (6), 20 (7), 24 (8), 28 (9)

всюду ограничена при любых значениях g . В случае $g = +1$ предельным состоянием для Ψ является функция

$$\Psi_{\infty}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\zeta) (-1)^n, \quad (23)$$

а в случае $g = -1$ предельной функцией является

$$\Psi_{\infty}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\zeta) \left(e^{\omega/\Lambda} - 1 \right)^n. \quad (24)$$

Теперь предельные ряды не содержат растущих экспонент и сходимость рядов определяется исключительно начальной функцией $\psi_0(\zeta)$. В то же время Φ_{∞} как в случае $g = +1$, так и в случае $g = -1$ имеет экспоненциальный множитель, поэтому в первом случае решение для Φ неограниченно растет, а во втором стремится к нулю. При этом напряжение на концах линии линейно растет со временем, а во втором убывает, хотя в обоих случаях напряженность в линии остается ограниченной. Этот факт определяет особенности реализации режима переключения на практике. Эти особенности демонстрируются примерами точных решений.

5.2. Некоторые точные решения

Рассмотрим в качестве примеров точных решений уравнения (12) решения следующего вида:

$$\Psi = \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + e^{gk^2 \chi(\tau)} (\alpha e^{k\zeta} + \beta e^{-k\zeta}), \quad (25)$$

где функция $\chi(\tau)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} - 4gk^2 \alpha \beta e^{2gk^2 \chi} = 0, \quad (26)$$

а k, α, β — произвольные постоянные. В частном случае, когда либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$, уравнение для χ упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (27)$$

Отсюда без труда находим

$$\chi(\tau) = A\tau,$$

где A — произвольная постоянная. В этом случае решения имеют вид

$$\Psi = A + \alpha e^{gk^2 A \tau} e^{k\zeta}. \quad (28)$$

Для иллюстрации вида процесса, соответствующего решению (28), на рис. 2 изображены эпюры напряженности \mathcal{E} поля в линии:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{k\alpha \exp(k\zeta + k^2 A e^{-\Lambda s})}{A + \alpha \exp(k\zeta + k^2 A e^{-\Lambda s})}.$$

В случае отличных от нуля коэффициентов α и β и при $g = -1$ решения уравнения (26) для напряженности поля имеют вид

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \frac{k(\alpha e^{kx} - \beta e^{-kx})}{(\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}) - A Q \Lambda \operatorname{ch} [\sqrt{\Omega} k^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega > 0, \quad \alpha \beta > 0, & (29a) \\ \frac{k(\alpha e^{kx} - \beta e^{-kx})}{(\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}) - A Q \Lambda \operatorname{sh} [\sqrt{\Omega} k^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega > 0, \quad \alpha \beta < 0, & (29б) \\ \frac{k(\alpha e^{kx} - \beta e^{-kx})}{(\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}) + A Q \Lambda \sin [\sqrt{\Omega} k^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega < 0, \quad \alpha \beta > 0, & (29в) \\ \frac{k(\alpha e^{kx} - \beta e^{-kx})}{(\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}) + A Q}, & \Omega = 0, \quad \alpha \beta > 0, & (29г) \end{cases}$$

Здесь A, Ω, θ_0 — произвольные вещественные постоянные,

$$Q = \sqrt{\left| \frac{4\alpha\beta}{\Lambda^2 A^2} \right|}.$$

Обратим также внимание на существование периодических в пространстве решений. Для этого необходимо выбрать k чисто мнимым, $k = i\kappa$, и подобрать оставшиеся постоянные так, чтобы решение в окончательной форме было вещественным. В этом случае имеем

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \frac{\kappa \alpha_1 \sin(\kappa x + \varphi_0)}{\alpha_1 \cos(\kappa x + \varphi_0) - A Q \Lambda \operatorname{ch} [\sqrt{\Omega} \kappa^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega > 0, \quad \alpha \beta > 0, & (30a) \\ \frac{\kappa \alpha_1 \sin(\kappa x + \varphi_0)}{\alpha_1 \cos(\kappa x + \varphi_0) + A Q \Lambda \operatorname{sh} [\sqrt{\Omega} \kappa^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega > 0, \quad \alpha \beta < 0, & (30б) \\ \frac{\kappa \alpha_1 \sin(\kappa x + \varphi_0)}{\alpha_1 \cos(\kappa x + \varphi_0) - A Q \Lambda \sin [\sqrt{\Omega} \kappa^2 (A e^{-\Lambda \tau} + \theta_0)]}, & \Omega < 0, \quad \alpha \beta > 0, & (30в) \\ \frac{\kappa \alpha_1 \sin(\kappa x + \varphi_0)}{\alpha_1 \cos(\kappa x + \varphi_0) + A Q}, & \Omega = 0, \quad \alpha \beta > 0. & (30г) \end{cases}$$

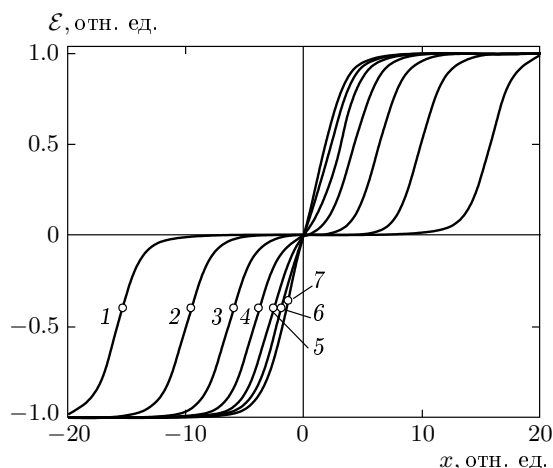


Рис. 3. Двухкинковое решение для режима переключения при $\Lambda = 1, \alpha = -12, \beta = -2, k = 1, Q = 1, \theta_0 = 1, A = 2$ и $s = -2$ (1), -1.5 (2), -1.0 (3), -0.5 (4), 0 (5), 0.5 (6), 1.0 (7)

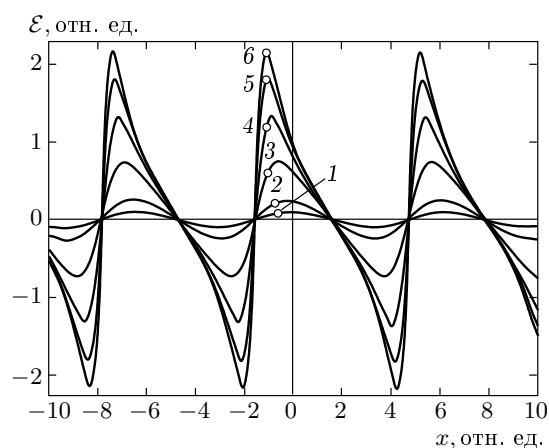


Рис. 4. Периодическое решение для режима переключения при $\Lambda = 1, \alpha = -2, \beta = -2, k = 1, Q = 1, \theta_0 = 1, A = 1.4$ и $s = -0.5$ (1), 0 (2), 1.0 (3), 2.0 (4), 3.0 (5), 4.0 (6)

Условие отсутствия сингулярностей для данных решений состоит в требовании необращения нигде в нуль знаменателя в соотношениях (29) и (30). Графики решений для последовательного изменения напряженности в линии представлены на рис. 3 для решения (29а) и на рис. 4 для решения (30б).

Еще одно свойство уравнений (12) и (14) состоит в том, что они допускают принцип суперпозиции, рассмотренный в Приложении к данной работе, с условием комплементарности следующего вида:

$$\sum_{k=1}^r \prod_{\substack{i=1, \\ k \neq i}}^r \Phi_i = F(s) e^{k(s)\xi},$$

где $F(s)$ и $k(s)$ — произвольные функции s . Однако, как показывает анализ, условие комплементарности для данного класса простых решений не приводит к каким-либо новым решениям. Все суперпозиционные решения эквивалентны некоторому преобразованию постоянных параметров решения.

6. АКТИВНЫЙ БЕЗДИССИПАТИВНЫЙ РЕЖИМ

После анализа динамики линии в режиме переключения рассмотрим активный режим, в котором динамика описывается уравнением (8). Обратим внимание на то, что данное уравнение с самого начала представляет собой дифференциальный закон сохранения, который можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(4 \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \Phi + \frac{1}{\Phi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\Phi} = 0. \quad (31)$$

В переменных x, t этот закон сохранения опять можно записать в виде уравнения Максвелла (15) с плотностью заряда

$$\rho = \frac{x_0}{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - x_0 \Phi_t / V_0}{\Phi} \right).$$

Из существования закона сохранения следует, что в этом приближении диссипативные процессы большой роли не играют и система представляет собой нелинейный волноводный канал. Существование закона сохранения позволяет найти целый класс точных решений достаточно сложного вида.

6.1. Точные решения

Для того чтобы продемонстрировать отличие режимов переключения от активного режима, рассмотрим частное решение типа кинка для уравнения (8). Представим данное уравнение в виде

$$\Phi \Phi_{\xi \eta} - \Phi_{\xi} \Phi_{\eta} + \Phi_{\xi} - \Phi_{\eta} = 0. \quad (32)$$

Простейшее несингулярное решение имеет вид

$$\Phi = A + B e^{k\xi + l\eta}, \quad (33)$$

где

$$A = \frac{l - k}{4lk}.$$

Напряженность поля для этого решения имеет форму кинка,

$$\mathcal{E} = -\frac{B(k+l)e^{k\xi+l\eta}}{A+Be^{k\xi+l\eta}},$$

перемещающегося с постоянной скоростью

$$V = \frac{l-k}{k+l} V_0.$$

Это решение аналогично кинковому решению в режиме переключения, но отличается от него именно постоянством скорости перемещения кинка. Последнее как раз и можно рассматривать как следствие наличия дифференциального закона сохранения и отсутствия диссипации. По всей видимости, это одно из немногих несингулярных решений уравнения (32).

Более сложное точное решение в этом режиме можно найти в рамках анзаца

$$\Phi = A(\xi)e^{k\eta} + B(\xi)e^{-k\eta} + C(\xi). \quad (34)$$

Подставляя это выражение в уравнение (32), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} A' - kA + k(CA' - C'A) &= 0, \\ B' + kB - k(CB' - C'B) &= 0, \\ C' + 2k(BA' - B'A) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Решения для A и B имеют вид

$$\begin{aligned} A &= A_0(kC+1) \exp\left(k \int \frac{d\xi}{kC+1}\right), \\ B &= B_0(kC-1) \exp\left(k \int \frac{d\xi}{kC-1}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

где A_0 и B_0 — произвольные постоянные интегрирования. Умножая первое уравнение системы (35) на B , второе — на A , складывая их и затем используя третье уравнение, получаем следующий интеграл:

$$4AB = C^2 - C_0^2,$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Подставляя последнее соотношение в (36) находим для C простое уравнение

$$C' = \frac{k^2}{k^2C_0^2 - 1} (C^2 - C_0^2).$$

Это уравнение для $C(\xi)$ легко интегрируется, что дает

$$C(\xi) = C_0 \operatorname{th}(\nu\xi + \theta_0), \quad (37)$$

где $\nu = k^2C_0/(1 - k^2C_0^2)$, а θ_0 — произвольная постоянная. Решения для $A(\xi)$ и $B(\xi)$ выглядят в результате следующим образом:

$$A(\xi) = A_0 [kC(\xi) + 1] (e^{2\nu\xi} + p)^\alpha (e^{-2\nu\xi} + 1/p)^\beta,$$

$$B(\xi) = B_0 [kC(\xi) - 1] (e^{-2\nu\xi} + p)^\alpha (e^{2\nu\xi} + 1/p)^\beta,$$

где

$$\alpha = \frac{1 - kC_0}{2kC_0}, \quad \beta = -\frac{1 + kC_0}{2kC_0}, \quad p = \frac{1 - kC_0}{1 + kC_0}.$$

Решения для $A(\xi)$ и $B(\xi)$ несингулярны, если $p > 0$. Последнее возможно, если $|kC_0| < 1$. Однако в решении (34) при всех значениях параметров за конечное время формируется сингулярность.

Кроме этих решений существует достаточно широкий класс решений, выражающихся через полиномиальные функции ξ и η и несингулярных лишь в ограниченных интервалах времени и пространства. Исходным точным решением этого класса является решение для Φ следующего вида:

$$\Phi = B\eta + \frac{B}{1 + 4B}\xi + C. \quad (38)$$

Решения (34) и (38) образуют коммутативные группы ранга r (см. Приложение), что позволяет вычислять суперпозиционные решения произвольного ранга r . Однако в силу сингулярности этих решений мы их здесь не рассматриваем. Заметим лишь, что эти решения (в особенности (38)) могут представлять интерес с точки зрения математического исследования динамики особых точек.

6.2. Использование закона сохранения

Еще один класс точных решений в квадратурах может быть получен за счет явного использования свойств уравнения (8) как дифференциального закона сохранения (31). Действительно, уравнение (31) эквивалентно следующей паре уравнений:

$$4\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta} + \frac{1}{\Phi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad \frac{g}{\Phi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

Интегрируя первое уравнение относительно Φ , находим

$$\Phi = e^\Psi \left[P(\xi) + \int e^{-\Psi} d\eta \right],$$

где $P(\xi)$ — произвольная функция. Подставляя это решение во второе уравнение, исключая Φ и делая замену $G = \exp(\Psi)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{G\xi} = -\frac{1}{G}. \quad (39)$$

Один из классов решений данного уравнения параметризуется в форме анзаца

$$G = G(\chi), \quad \chi = f(\xi) + h(\eta).$$

Подставляя это соотношение в (39), приходим к уравнению для $G(\chi)$,

$$GG_{\chi\chi}e^{\alpha\chi} = C_0(G_\chi)^2 \tag{40}$$

и уравнениям для $f = f(\xi)$ и $h = h(\eta)$,

$$f' = C_1 e^{-\alpha f(\xi)}, \quad h' = C_2 e^{\alpha h(\eta)}, \quad C_0 = C_1 C_2,$$

где $C_1, C_2, \alpha \neq 0$ — произвольные постоянные. Уравнение (40) интегрируется в квадратурах:

$$G(\chi) = G_0 e^F, \quad F(\chi) = \int \frac{d\chi}{\chi + \chi_0 + K e^{-\alpha\chi}}.$$

При этом

$$\chi = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{C_1(\xi - \xi_0)}{C_2(\eta - \eta_0)} \right).$$

Особый случай $\alpha = 0$ приводит к решениям в явном виде:

$$\begin{aligned} \chi &= C_1 \xi + C_2 \eta, \\ G(\chi) &= G_0 (\beta\chi + \chi_0)^{1/\beta}, \quad \beta \neq 0, \\ G(\chi) &= G_0 e^{\gamma\chi}, \quad \beta = 0. \end{aligned}$$

Здесь β, γ — постоянные интегрирования. Нетрудно видеть, что решения этого класса сингулярны. Покажем, что это является существенным свойством данной системы.

Уравнение (39) можно записать в виде следующей эквивалентной ему системы уравнений:

$$GH_\eta = -1, \quad HG_\xi = 1. \tag{41}$$

Эта система обладает интересной функциональной симметрией, состоящей в том, что функционально-координатное преобразование вида

$$G'(\xi', \eta') = H(\xi, \eta), \quad H'(\xi', \eta') = G(\xi, \eta), \tag{42}$$

$$\xi' = -\eta, \quad \eta' = -\xi, \tag{43}$$

переводит систему (41) в себя. Это позволяет размножить полученные решения.

Среди решений этой системы рассмотрим решения, получаемые с помощью еще одного анзаца:

$$G = G(\Theta), \quad H = H(\Theta), \quad \Theta = \Theta(\xi, \eta).$$

Подставляя эти соотношения в (41), приходим к следующей системе:

$$\Theta_\eta = -(GH_\Theta)^{-1}, \quad \Theta_\xi = (GH_\Theta)^{-1}.$$

Условием ее совместности является соотношение

$$H_\Theta HG_\Theta G = -C_0^{-1},$$

где C_0 — произвольная постоянная. При выполнении этого условия уравнение для Θ принимает следующий вид

$$\Theta_\xi \Theta_\eta = C_0.$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение эйконала:

$$(\Theta_r)^2 - (\Theta_s)^2 = C_0.$$

Последнее сводится заменой переменных

$$\begin{aligned} \Theta_r &= \sqrt{|C_0|} \operatorname{ch} U(\xi, \eta), \\ \Theta_s &= \sqrt{|C_0|} \operatorname{sh} U(\xi, \eta), \quad C_0 > 0 \\ \Theta_r &= \sqrt{|C_0|} \operatorname{sh} U(\xi, \eta), \\ \Theta_s &= \sqrt{|C_0|} \operatorname{ch} U(\xi, \eta), \quad C_0 < 0 \end{aligned}$$

к квазилинейному уравнению опрокидывающихся волн следующего вида:

$$U_s - \operatorname{th} U U_r = 0,$$

которое имеет известное решение в виде неявной функции (см., например, [12])

$$\Pi(U, r \operatorname{th} U + s) = P_0 = \operatorname{const},$$

где Π — произвольная функция двух аргументов, а P_0 — произвольная постоянная.

Мы проанализировали динамику системы на примере нескольких классов точных решений уравнения (8). Среди решений этого уравнения почти все являются многозначными. Таким образом, в системе в рассматриваемом режиме могут наблюдаться неустойчивости типа обрушения волн. Этот режим в силу эффектов обрушения может существовать лишь сравнительно короткое время, после чего в системе нельзя не учитывать диссипативные эффекты. Это указывает на то, что в уравнении (8) диссипативные эффекты играют незначительную роль. В результате возникает задача описания диссипативных эффектов в данной системе. Исследовать динамику системы аналитическими методами в этом случае становится проблематично. Однако существует определенный тип линий, для которых можно указать некоторые важные результаты, которые относятся к активному режиму, в котором обрушения нет. Такой вариант линии был рассмотрен автором ранее [8].

7. ДИССИПАТИВНЫЙ АКТИВНЫЙ РЕЖИМ

Уравнение для системы в активном режиме (см. рис. 1) может быть несколько модифицировано, если предположить, что безразмерные параметры можно представить в виде

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad \Lambda_1 = \Lambda + \delta = \frac{\lambda + \delta}{\varepsilon}, \quad \kappa = \Lambda\delta = \frac{gld}{\varepsilon^2}.$$

В этом случае уравнение для системы приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(4 \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \Phi + \frac{1}{\Phi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\Phi} + \frac{\lambda}{\Phi} + (\lambda + d) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \ln \Phi + d \ln \Phi = 0.$$

Это уравнение содержит два диссипативных слагаемых в отличие от уравнения (8). Анализ этого уравнения представляет сложность, аналогичную сложности самого исходного уравнения. Поэтому рассмотрим частный случай этого уравнения при $d = -\lambda$. Этот вариант уравнения в исследуемой системе возможен, если погонное сопротивление R_1 будет отрицательным. Реализоваться такой элемент в биологической системе, например нервном волокне, может в форме, аналогичной биологической мембране с экспоненциальным активным элементом, включенным в обратном направлении, и подходящим выбором его рабочей точки с дополнительным источником ЭДС. Если теперь предположить, что параметр λ мал, и оставить в уравнении только члены до первого порядка по λ включительно, то в этом случае уравнение приобретает вид

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \ln \Phi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{1}{\Phi} + \frac{\lambda}{\Phi} = 0. \quad (44)$$

Это уравнение исследовалось в работе [8]. Оно переходит в уравнение (8) в пределе $\lambda \rightarrow 0$, однако динамика волн, описываемых этим уравнением, уже другая.

7.1. Комплементарные точные решения

Как было отмечено ранее [8], интерес представляет особый класс решений в гиперболических функциях. Важность этих решений состоит в том, что они образуют множества комплементарных решений. Среди других рассмотренных ранее редукций исходного уравнения модели двухпроводной линии данное уравнение выделяется гораздо более широким классом суперпозиционных решений. Это указывает на некоторую выделенность этого уравнения среди других редукций исходного уравнения.

Простейшее решение, образующее комплементарные группы, имеет следующую форму:

$$\phi = 4\lambda BC e^{\lambda(\xi-\eta)} + B e^{-\lambda\eta} + C e^{\lambda\xi}, \quad (45)$$

где B и C — произвольные вещественные постоянные. Решение (45), пересчитанное для напряжения u в линии, несингулярно, если ϕ не имеет нулей во всей области определения. Условием этого является одновременное выполнение неравенств

$$B > 0, \quad C > 0, \quad \lambda < 0.$$

Это решение аналогично двухкинковому решению в режиме переключения.

Другой важный класс комплементарных решений имеет вид

$$\phi = 4BC\lambda e^{-2\lambda\eta+\lambda\xi} + \frac{B}{16C\lambda} e^{-2\lambda\eta-\lambda\xi} + B e^{-2\lambda\eta} + C e^{\lambda\xi}. \quad (46)$$

Это решение также будет несингулярным в случае $\lambda < 0, B > 0, C > 0$. Еще одну область значений параметров, при которых решение для напряжения несингулярно, можно легко установить, если представить его в следующем виде:

$$\phi = B e^{-2\lambda\eta} \left[1 + \text{sign}(C\lambda) \text{ch}(\lambda\xi + \chi) \right] + C e^{-\lambda\xi}, \quad (47)$$

где $\chi = \ln(8|C\lambda|)$. Отсюда видно, что это решение также положительно, если $B < 0$ и $C > B$ при условии $C\lambda > 0$. Графики решения для первого случая представлены на рис. 5. Поскольку в системе в рассматриваемом случае генерируется острый импульс, удобнее на графике изображать напряжение, а не напряженность.

Анализ решений данного типа показывает, что как и для (45), напряжение в линии распределено таким образом, что существуют два или три участка с постоянной продольной напряженностью поля, т. е. линия представляет собой несколько последовательно соединенных конденсаторов, расстояние между обкладками которых растет или уменьшается при постоянной напряженности поля между ними. Роль обкладок играет перемещающаяся область с переменной плотностью заряда. Эти области перезарядки на рис. 5 соответствуют областям смены знака напряженности поля. При достижении некоторого определенного уровня напряжения в линии может генерироваться импульс напряжения. Например, для решения, представленного на рис. 5, когда напряжение в некоторой точке линии достигает значения, равного некоторому критическому значению,

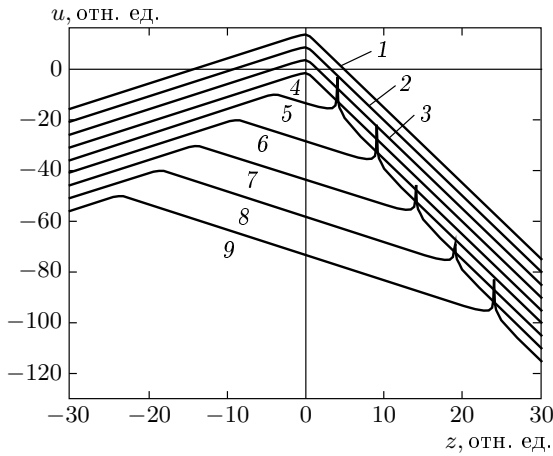


Рис. 5. Распределение напряжения вдоль линии в случае $B = -1, C = 2, \lambda = 1, V = 0.5, \chi = 0.1$ в моменты времени $t = -30$ (1), -20 (2), -10 (3), 0 (4), 10 (5), 20 (6), 30 (7), 40 (8), 50 (9)

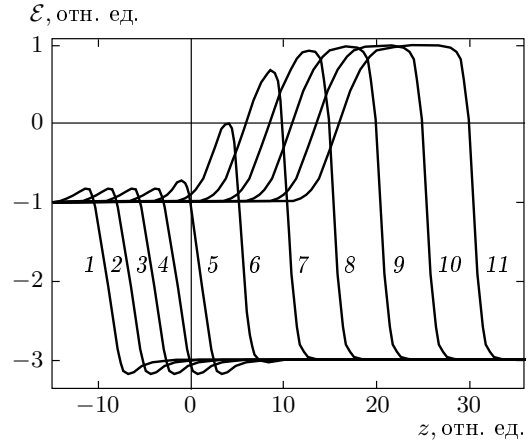


Рис. 6. Распределение напряженности вдоль линии в случае $B = -1, A = 2, C = 1, \lambda = -1, V = -0.5, \chi = 1$ для последовательных моментов времени $t = -20$ (1), -15 (2), -10 (3), -5 (4), 0 (5), 5 (6), 10 (7), 15 (8), 20 (9), 25 (10), 30 (11)

в этой точке формируется острый импульс, распространяющийся с постоянной скоростью. При этом между точкой рождения импульса и текущим его положением формируется новая область с постоянной напряженностью поля, отличной от напряженности в уже имеющихся областях, т.е. появляется новый продольный конденсатор, а остальные перезаряжаются. Самому импульсу соответствует очень узкая область перезарядки среды в линии. Заметим, что кинковые решения и в режиме переключения, и в активном бездиссипативном режиме также можно интерпретировать с точки зрения аналогичной модели продольных конденсаторов. Это общее наблюдение качественно совпадает с общим описанием процессов распространения возбуждения в нервном волокне согласно калий-натриевому механизму Ходжкина – Хаксли [2, 3, 13, 14].

Решение (47) демонстрирует типичное для автоволновых систем возникновение импульса возбуждения при достижении некоторого критического среднего уровня возбудимости среды. Подобная по сути ситуация приведена на эпюрах напряжения в книге [13, стр. 364], где демонстрируется появление острого импульса в нервном волокне при достижении вершины почти треугольного импульса напряжения некоторого порогового значения. Единственное различие состоит в том, что на эпюрах в [13] начальный треугольный импульс растет, а в нашем случае убывает. Этот факт качественного совпадения поведения решения с реальной динамикой импульсов в нервном волокне говорит о том, что

именно в таком варианте рассматриваемая активная двухпроводная линия наиболее интересна с точки зрения приложения ее в качестве модели для описания работы нервного волокна. Этот факт позволяет надеяться, что такая модель может рассматриваться и в качестве математической модели полупроводникового генератора коротких импульсов.

7.2. Суперпозиционные решения

Наличие суперпозиционных решений, получаемых из комплементарных решений (45) и (46), было отмечено в работе [8]. Здесь мы построим обобщенный класс суперпозиционных решений уравнения (44) и покажем, что этот класс оказывается весьма широким для того, чтобы данное уравнение могло рассматриваться в качестве перспективной модели многоимпульсной динамики в нервном волокне (или полупроводниковых генераторах импульсов). Последнее важно с точки зрения применения данной модельной линии к описанию нервного волокна как элемента информационной системы.

Представим решения (45) и (47) в следующем общем виде:

$$\Phi(\xi, \eta) = B e^{-a\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi}. \quad (48)$$

При этом решениям (45) и (47) соответствуют

$$q = 1, \quad F_1(\xi, C) = 4C e^{\lambda\xi} + 1,$$

и

$$q = 2, \quad F_2(\xi, C) = 1 + \text{sign}(C\lambda) \text{ch}(\lambda\xi + \chi).$$

Вначале рассмотрим суперпозиционные решения рангов $r = 2$ и $r = 3$, которые могут быть построены из решений (48),

$$\Phi_i(\xi, \eta) = B_i e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C_i) + C_i e^{\lambda\xi}, \quad i = 1, 2, 3,$$

при условии $C_i = C, i = 1, 2, 3$. При $r = 2$ из условия комплементарности $\Phi_1 + \Phi_2 = f(\xi)g(\eta)$ (см. Приложение) следует

$$B_1 + B_2 = 0.$$

Соответствующее суперпозиционное решение имеет вид

$$\Phi = e^{2\lambda\eta} \frac{e^{-4\lambda\eta} [A - B \operatorname{ch}\{\lambda\xi + \chi\}]^2 + \{C e^{-\lambda\xi} + e^{-2\lambda\eta} [B + A \operatorname{ch}(\lambda\xi + \chi)]\}^2}{2[A - B \operatorname{ch}(\lambda\xi + \chi)]},$$

где $C > 0$. Эти решения несингулярны, если $B \leq 0, A \geq -B$. Пример суперпозиционного решения ранга 2 такого типа для напряженности поля представлен на рис. 6. График для напряжения будет содержать два импульса, но менее заметных, чем на рис. 5. Рисунок 6 демонстрирует распад одного кинка на два кинка, движущихся с разными скоростями в том же направлении. При $A + B \rightarrow 0$ кинк до распада и кинки после распада приобретают более сложную форму. Областям смены знака напряженности соответствуют области перезарядки линии.

В случае $r = 3$ условия комплементарности решений (48) при условии $C_i = C$ имеют вид

$$B_1 + B_2 + B_3 = 0, \quad B_1 B_2 + B_3 B_2 + B_1 B_3 = 0.$$

Решение этих уравнений удобно представить в следующем виде

$$B_1 = \beta, \quad B_2 = \frac{\beta}{2} (-1 + i\sqrt{3}),$$

$$B_3 = \frac{\beta}{2} (-1 - i\sqrt{3}),$$

или

$$B_k = \beta e^{2i\pi(k-1)/3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

В результате имеем следующие суперпозиционные

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} = \frac{1}{2C} e^{-\lambda\xi} [B_1 e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi}] \times \\ &\quad \times [-B_1 e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi}] = \\ &= \frac{1}{2C} e^{-\lambda\xi} [-B_1^2 e^{-2q\lambda\eta} F_q^2(\xi, C) + C^2 e^{2\lambda\xi}]. \end{aligned}$$

Последнее решение несингулярно, если $B_1 = i\beta$, где β — произвольное вещественное число и $C > 0$.

Обратим внимание на то, что затравочные решения могут быть комплексными, а суперпозиционное решение — вещественным. Примером такого класса суперпозиционных решений ранга $r = 2$ служит решение с $C_1 = -C_2 = iC$ ($C_1 + C_2 = 0$) и $B_1 = A + iB, B_2 = A - iB$ для случая $q = 2$, которое в этом случае будет иметь вид

решения:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3}{\Phi_1 \Phi_2 + \Phi_3 \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_3} = \\ &= \frac{1}{3C^2} e^{-2\lambda\xi} [\beta e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi}] \times \\ &\quad \times \left\{ \left[-\frac{\beta}{2} e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\beta^2}{4} e^{-2q\lambda\eta} F_q^2(\xi, C) \right\} = \\ &= \frac{1}{3C^2} e^{-2\lambda\xi} [\beta^3 e^{-3q\lambda\eta} F_q^3(\xi, C) + C^3 e^{3\lambda\xi}]. \end{aligned}$$

Эти решения несингулярны при $\beta > 0, C > 0$.

Решение произвольного ранга получается следующим образом. Заметим, что условие комплементарности r решений (48) при условии $C_i = C, i = 1, 2, \dots, r$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= B_1 + B_2 + \dots + B_r = 0, \\ a_2 &= \sum_{\substack{j=1, \\ k < j}} B_k B_j = 0, \\ &\vdots \\ a_{r-1} &= \sum_{k=1}^r \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^r B_j = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Совокупность этих соотношений эквивалентна требованию, что алгебраическое уравнение порядка r ,

$$B^r + a_1 B^{r-1} + \dots + a_{r-1} B + a_r = 0,$$

относительно неизвестной B , имеющее корни B_1, B_2, \dots, B_r , удовлетворяющие условиям (49), эквивалентно уравнению

$$\prod_{k=1}^r (B - B_k) \equiv B^r + (-1)^r B_1 B_2 \dots B_r = 0. \quad (50)$$

Следовательно, все решения (49) можно записать в следующем виде:

$$B_k = \beta e^{2i\pi(k-1)/r},$$

где β — произвольное комплексное число. В силу (50) имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^r \Phi_k &= (-1)^r e^{-rq\lambda\eta} F_q^r(\xi, C) \prod_{k=1}^r [G(\xi, \eta) - B_k] = \\ &= \beta^r e^{-rq\lambda\eta} F_q^r(\xi, C) + C^r e^{r\lambda\xi}, \end{aligned}$$

где

$$G(\xi, \eta) = C e^{\lambda(\xi+q\eta)} F_q^{-1}(\xi, C).$$

Отсюда получаем вид суперпозиционных решений произвольного ранга r :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{rC^{r-1}} e^{-(r-1)\xi} \times \\ &\times \prod_{k=1}^r \left[\beta e^{2i\pi(k-1)/r} e^{-q\lambda\eta} F_q(\xi, C) + C e^{\lambda\xi} \right] = \\ &= \frac{1}{rC^{r-1}} e^{-(r-1)\xi} \left[\beta^r e^{-rq\lambda\eta} F_q^r(\xi, C) + C^r e^{r\lambda\xi} \right]. \quad (51) \end{aligned}$$

При $\beta > 0$ и $C > 0$ решения несингулярны. Эти решения при произвольном r представляют собой один кинк в напряженности поля, движущийся с постоянной скоростью, но при достижении точки $x = 0$ изменяющий направление движения на обратное и меняющий свою форму. От значения ранга зависят лишь крутизна фронта кинка и его амплитуда, которая меняется дискретно пропорционально произведению ранга на λ . Для удобства классификации

эти решения можно представить в виде, аналогичном (48):

$$\Phi = P e^{-rq\lambda\eta} F_{rq}(\xi, Q) + Q e^{\lambda\xi}, \quad (52)$$

где $Q = C/r, P = \beta^r$,

$$F_{rq} = \frac{1}{r^r C^{r-1}} e^{-(r-1)\xi} F_q^r(\xi, rC).$$

Следует отметить, что сами решения (52) образуют комплементарные пары, взятые как для одинаковых рангов $r_1 = r_2$ и чисел $q_1 = q_2$, так и для двух различных рангов r_1 и r_2 и, вообще говоря, различных $q = 1, 2$. В первом случае повторяются вычисления с произвольным рангом r , но уже с обобщенными решениями (48). Во втором случае условие комплементарности пары таких решений можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_1 e^{-r_1 q_1 \lambda \eta} F_{r_1 q_1}(\xi, Q_1) + Q_1 e^{\lambda \xi} + \\ + P_2 e^{-r_2 q_2 \lambda \eta} F_{r_2 q_2}(\xi, Q_2) + Q_2 e^{\lambda \xi} = f(\xi) g(\eta). \end{aligned}$$

Как видно, условие комплементарности выполняется при $r_1 \neq r_2$, если только $Q_1 + Q_2 = 0$ и $r_1 q_1 = r_2 q_2 = p$. В силу того, что $q = 1, 2$, имеем два основных варианта:

$$r_2 = r_1 = p$$

и

$$r_2 = 2r_1 = 2p.$$

Отсюда получаем

$$g(\eta) = e^{-p\lambda\eta},$$

$$f(\xi) = P_1 F_{r_1 q_1}(\xi, Q_1) + P_2 F_{r_2 q_2}(\xi, -Q_1).$$

Соответствующие суперпозиционные решения примут следующий вид:

$$\Phi = \frac{e^{p\lambda\eta} [P_1 e^{-p\lambda\eta} F_{r_1 q_1}(\xi, Q_1) + Q_1 e^{\lambda\xi}] [P_2 e^{-p\lambda\eta} F_{r_2 q_2}(\xi, -Q_1) - Q_1 e^{\lambda\xi}]}{P_1 F_{r_1 q_1}(\xi, Q_1) + P_2 F_{r_2 q_2}(\xi, -Q_1)}.$$

Эти решения, в свою очередь, опять могут образовывать комплементарные пары и, возможно, даже совокупности более высоких рангов. Среди них есть несингулярные решения, которые описывают опять появление острых импульсов. Полностью все возможные решения, получаемые таким образом, пока не исследованы.

8. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ В ЦЕЛОМ

В заключение обратим внимание на существование специального закона сохранения для исходной системы в общем случае. В конусных переменных $\xi = r + s, \eta = r - s$ после подходящего приведения к безразмерному виду уравнение (5) запишется как

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} v + \lambda \zeta(v) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) [v + \mu \zeta(v)] = 0. \quad (53)$$

Здесь $\zeta(v) = J(v_0 v) / j_1$ — безразмерный ток через активный элемент, $v = u / u_0$ — безразмерное напряжение. Данное уравнение допускает набор законов сохранения следующего общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ e^{\alpha \xi + \beta \eta} \left[4P \frac{\partial}{\partial \eta} v + Av + C \zeta(v) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{\alpha \xi + \beta \eta} \left[4Q \frac{\partial}{\partial \xi} v + Bv + D \zeta(v) \right] \right\} = 0, \quad (54)$$

где $\alpha, \beta, P, Q, A, B, C, D$ — постоянные. Раскрывая скобки, последнее уравнение можем привести к виду

$$4(P-Q) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} v + (A-4\beta Q) \frac{\partial}{\partial \xi} v - (B-4\alpha P) \frac{\partial}{\partial \eta} v + (\alpha A - \beta B)v + (\alpha C - \beta D)\zeta(v) + C \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(v) - D \frac{\partial}{\partial \eta} \zeta(v) = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (53), находим, что они совпадают в случае, если постоянные выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - \lambda / \mu, & A &= 4\beta Q - (P - Q), \\ B &= 4\alpha P - (P - Q), & C &= D = -\mu(P - Q), \end{aligned} \quad (55)$$

при условии, что параметр α удовлетворяет уравнению

$$2\alpha^2 - \lambda\alpha + \lambda = 0, \quad (56)$$

а постоянные P и Q произвольны. Имеются два решения уравнения (56):

$$\alpha_{1,2} = \lambda \pm \sigma, \quad (57)$$

где $\Lambda = \lambda / 2\mu$, $\sigma = \sqrt{\Lambda(\Lambda - 1/2)}$. Учитывая, что параметры P и Q произвольны, устанавливаем, что исходное уравнение обладает некоторым набором законов сохранения (54). Эти законы сохранения могут быть полезными, как и в случае анализа активного бездиссипативного режима, но в основном при проведении численных расчетов динамики данной системы в силу сложности вытекающих из него следствий для отыскания точных решений.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в работе система, описываемая с помощью модели двухпроводной нелинейной активной линии может находиться в трех основных режимах: переключения, неактивном и активном. Каждый из этих режимов отличается от другого скоростью изменения напряжения во времени и вдоль

координат, что в нулевом порядке по малому параметру $\varepsilon = \exp(-U_0/u_0)$ приводит к трем различным уравнениям, описывающим динамику в линии. В работе были в основном рассмотрены режим переключения и активный режим в двух вариантах, бездиссипативном и с диссипацией. Наиболее интересным с точки зрения приложений является активный диссипативный режим. В рассмотренных режимах упрощенная физическая модель процессов состоит в том, что вся линия распадается на совокупность продольных последовательно соединенных конденсаторов, обкладками которых служат перемещающиеся локализованные в пространстве области зарядов. Параллельно этим конденсаторам включается постоянное активное сопротивление, которое создает между обкладками постоянную напряженность продольного электрического поля. Расстояния между обкладками изменяются с постоянной скоростью, но при взаимодействии друг с другом могут порождать новые продольные конденсаторы такого же типа. В напряженности поля такие конденсаторы соответствуют кинковым решениям, которые прослеживаются во всех режимах. Такая картина может быть сопоставлена общей картине распространения возбуждений в нервном волокне [2, 3, 13, 14], связанных с калий-натриевым механизмом. Показано, что в зависимости от типа режима в линии могут наблюдаться различные автоволновые, диссипативные и дисперсионные эффекты, например, обрушение волн в активном бездиссипативном режиме. Одним из наиболее важных свойств рассматриваемой системы является то, что она во всех режимах обладает специальным принципом суперпозиции. Однако только в активном диссипативном режиме этот принцип приводит к большой совокупности нетривиальных комплементарных решений, которые могут рассматриваться как модель сложной информационной системы типа нервного волокна. В этом режиме система может генерировать импульсы и области перезарядки (кинковые решения). Такая же система, по-видимому, может быть реализована и в форме полупроводникового распределенного p - n -перехода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Принцип суперпозиции

Покажем на примере двух решений уравнения (8) наличие принципа суперпозиции для всех моделей. Аналогичный принцип суперпозиции был обнаружен ранее [15] для уравнения

$$u_t + \Delta \ln u + \lambda u = 0,$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — два линейно-независимых решения уравнения (44):

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \Phi_i + \frac{\lambda}{\Phi_i} - \frac{1}{\Phi_i^2} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Складывая уравнения для Φ_1 и Φ_2 , получаем

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln(\Phi_1 \Phi_2) + \lambda \left(\frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} \right) = 0.$$

Предположим теперь, что выполняется условие

$$\Phi_1 + \Phi_2 = f(\xi)g(\eta), \quad (\text{П.1})$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные дифференцируемые функции одного аргумента, соответственно ξ и η . Условия такого типа далее будем называть условиями комплементарности решений. Тогда в силу того, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln[f(\xi)g(\eta)] = 0,$$

находим, что функция

$$\Phi = \frac{\phi_1 \phi_2}{\phi_1 + \phi_2} \quad (\text{П.2})$$

удовлетворяет тому же уравнению (8):

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \Phi + \frac{\lambda}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Это наблюдение означает, что уравнение (8) обладает специфическим принципом суперпозиции решений, обладающих условием комплементарности:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2}. \quad (\text{П.3})$$

Как и в случае уравнения нелинейной диффузии [15, 16], принцип суперпозиции для уравнения (8) можно обобщить, рассматривая такие r линейно-независимых решений Φ_i , $i = 1, \dots, r$ исходного уравнения, для которых выполнено условие комплементарности следующего вида:

$$\sum_{k=1}^r \prod_{\substack{i=1, \\ k \neq i}}^r \Phi_i = f(\xi)g(\eta). \quad (\text{П.4})$$

Если это условие имеет место, то функция Φ , связанная с Φ_i соотношением

$$\frac{1}{\Phi} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\Phi_i}, \quad (\text{П.5})$$

вновь будет решением исходного уравнения. Число r будем называть рангом суперпозиционного решения или рангом комплементарности.

Вообще, можно сделать следующее обобщение. Пусть \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 — два дифференциальных оператора по координатным переменным x_α , $\alpha = 1, \dots, N$. Тогда уравнение

$$\mathbf{L}_1 \ln u + \mathbf{L}_2 u = 0$$

допускает рассмотренный выше принцип суперпозиции. Действительно, если

$$u_k = \phi_k^{-1}, \quad k = 1, \dots, r,$$

— решения исходного уравнения, удовлетворяющие условию комплементарности

$$\sum_{k=1}^r \prod_{\substack{i=1, \\ k \neq i}}^r \phi_i = F(x_1, \dots, x_N),$$

где $F(x_1, \dots, x_N)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{L}_1 \ln F = 0,$$

то функция

$$U = \frac{1}{\Phi} = u_1 + u_2 + \dots + u_r = \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} + \dots + \frac{1}{\phi_r}$$

также является решением исходного уравнения. Наиболее важным и сложным при практическом построении решений уравнений данного типа с помощью принципа суперпозиции является построение в явном виде решений, удовлетворяющих условию комплементарности. Отыскание таких простейших (затравочных) решений представляется центральной проблемой при использовании рассмотренного принципа суперпозиции.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, Москва (1997).
2. Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, Советское радио, Москва (1977).

3. А. Н. Волобуев, В. Н. Жуков, Е. Л. Овчинников, А. У. Бахито, Д. А. Труфанов, *Биофизика* **36**, 546 (1991).
4. А. Н. Волобуев, Е. Л. Овчинников, Д. А. Труфанов, *Биофизика* **45**, 89 (2000).
5. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны*, Наука, Москва, (1969).
6. А. В. Кулаков, А. А. Румянцев, *Введение в физику нелинейных процессов*, Наука, Москва (1988).
7. S. W. Brady, *Proc. Jap. Acad.* **39**, 721 (1963).
8. В. М. Журавлев, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 16 (2002).
9. Н. М. Leiberstein, *Math. Biosci.* **1**, 69, 211 (1967).
10. C. D. Isaacs, *Math. Biosci.* **7**, 305 (1970).
11. M. Elsenberg, J. E. Hall, and C. F. Mead, *J. Membrane Biol.* **11**, 34 (1973).
12. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1974).
13. М. В. Волькенштейн, *Биофизика*, Наука, Москва (1988).
14. А. Ходжкин, *Нервный импульс*, Мир, Москва (1965).
15. В. М. Журавлев, *ТМФ* **124**, 19 (2000).
16. В. М. Журавлев, *Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией*, Изд. УлГУ, Ульяновск (2001).