

О ПРОВОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕД В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. Дыхне

Государственный научный центр РФ «Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований»
142092, Троицк, Московская обл., Россия

А. А. Снарский*

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
03056, Киев, Украина

Поступила в редакцию 19 апреля 2005 г.

Рассмотрена эффективная проводимость двумерных поликристаллических сред в магнитном поле. Построена модель токовой ловушки для сильноанизотропных поликристаллических сред, позволившая найти распределение джоулевого тепловыделения в таких средах.

PACS: 72.80.-г, 72.15.Gd

1. ВВЕДЕНИЕ

Как было показано в работах [1] и [2], существует класс двумерных неоднородных и анизотропных сред, для которых можно получить точное, годное для сколь угодно большой неоднородности или анизотропии, выражение для эффективной проводимости. В частности, в работе [1] было получено выражение для эффективной проводимости двумерного поликристалла

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}, \quad (1)$$

где σ_{\parallel} и σ_{\perp} — главные значения двумерного локального тензора проводимости монокристаллов. Под двумерным поликристаллом мы, как и в работе [1], будем понимать поликристалл, состоящий из одинаковых монокристаллов, одна из главных осей предполагается направленной по оси z , что обеспечивает двумерность полей и токов. При таком выборе осей эффективная проводимость (1) описывает свойства среды в плоскости xy . В работе [2] было найдено точное выражение для тензора эффективной проводимости двумерной неоднородной среды в магнитном поле.

В настоящей работе получено точное выражение для эффективной проводимости двумерного поликристалла в магнитном поле (см. также [3]) и постро-

ена модель токовой ловушки для сильноанизотропных поликристаллических сред, позволившая найти распределение джоулевого тепловыделения в таких средах.

2. КЛАСС СРЕД, ДОПУСКАЮЩИХ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В отсутствие магнитного поля тензор электропроводности в собственной (кристаллографической) системе координат имеет диагональный вид:

$$\hat{\sigma}(H=0) = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При включении внешнего магнитного поля (мы всюду предполагаем, что оно перпендикулярно градиенту неоднородности) структура тензора электропроводности становится более сложной. Его можно теперь представить как сумму двух тензоров — недиагонального симметричного и антисимметричного:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(H \neq 0) &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{\Lambda} \\ \sigma_{\Lambda} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}; \quad (3) \end{aligned}$$

*E-mail: asnar@phys.carrier.kiev.ua

в изначально изотропной среде $(\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp})\sigma_{\Lambda} = 0$. Как видно из формулы (3), вообще говоря, $\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$, однако легко найти однопараметрическое унитарное преобразование \hat{T} , переводящее тензор $\hat{\sigma}(H)$ (3) в тензор с равными по модулю и противоположными по знаку недиагональными компонентами:

$$\hat{\sigma} = \hat{T}^+ \hat{\sigma}(H) \hat{T} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{21} & \tilde{\sigma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_s + \hat{\sigma}_a, \quad (4)$$

где \hat{T} — матрица поворота на угол μ , а

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (5)$$

Рассмотрим поликристалл, состоящий из монокристаллов с хаотически разбросанными кристаллографическими осями, для каждого из которых в кристаллографической системе координат имеет место выражение (4). В лабораторной системе координат тензор электропроводности $\hat{\sigma}(r)$ выражается через $\hat{\sigma}$ (4) при помощи унитарного преобразования $\hat{U}(\alpha)$ (поворота на угол α), причем, как легко заметить, преобразованию поддается только диагональная часть тензора $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma}(r) = \hat{U}^+ \hat{\sigma} \hat{U} = \hat{U}^+ \hat{\sigma}_s \hat{U} + \hat{U}^+ \hat{\sigma}_a \hat{U} = \hat{\sigma}_s(r) + \hat{\sigma}_a. \quad (6)$$

Как можно видеть, в лабораторной системе координат второе слагаемое в выражении (6) для тензора проводимости не зависит от координат.

Перейдем теперь к вычислению эффективного тензора проводимости. Для этого запишем закон Ома в виде

$$j(r) = \hat{\sigma}(r)E(r) = \hat{\sigma}_s(r)E(r) + \hat{\sigma}_a E(r). \quad (7)$$

Уравнение непрерывности $\operatorname{div} j = 0$ в соответствии с формулой (7) принимает вид

$$\operatorname{div} [\hat{\sigma}_s(r) \operatorname{grad} \varphi(r)] = 0, \quad (8)$$

где учтено, что

$$\operatorname{div} [\hat{\sigma}_a(r) \operatorname{grad} \varphi(r)] = 0.$$

Поскольку $\hat{\sigma}_s(r)$ — симметричный тензор, потенциал $\varphi(r)$ (а следовательно, и поле $E(r)$) совпадает с таковым в задаче о поликристаллической среде с хаотически разбросанными кристаллографическими осями симметричного тензора проводимости.

Используя результаты работы [1], можно записать (см. (1))

$$\langle \hat{\sigma}_s(r)E(r) \rangle = \sqrt{\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22}} \langle E(r) \rangle. \quad (9)$$

Усредняя (7) с учетом (9), приходим к выражению

$$\langle j(r) \rangle = \sqrt{\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22}} \langle E(r) \rangle + \hat{\sigma}_a \langle E(r) \rangle, \quad (10)$$

откуда сразу же следуют выражения для эффективных компонент:

$$\hat{\sigma}_s^e = \sqrt{\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22}} \hat{I}, \quad \hat{\sigma}_a^e = \hat{\sigma}_a, \quad (11)$$

где \hat{I} — единичный тензор.

Теперь для компонент тензора $\hat{\sigma}(H)$ из (3) можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22} &= \sigma_{11}\sigma_{22} - \frac{(\sigma_{12} + \sigma_{21})^2}{4}, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

а компоненты эффективного тензора проводимости поликристаллической среды равны

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_s^e &= \left(\sigma_{11}\sigma_{22} - \frac{(\sigma_{12} + \sigma_{21})^2}{4} \right)^{1/2} \hat{I}, \\ \hat{\sigma}_a^e &= \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \hat{C}, \end{aligned} \quad (13)$$

где \hat{C} — кососимметричный тензор. Заметим, что поскольку кристаллографические оси монокристаллов разбросаны в среде по направлениям хаотически (и равновероятно по углу), тензор эффективной проводимости (13) не должен зависеть от того, в какой конкретно лабораторной системе координат были записаны значения тензора локальной проводимости (3). Прямая проверка показывает, что

$$\tilde{\sigma}_e = F(\hat{\sigma}(r)) = F\left(\hat{U}^+(\alpha)\hat{\sigma}(r)\hat{U}(\alpha)\right), \quad (14)$$

где $F(\hat{\sigma}(r))$ определяет выражения (13), а $\hat{U}(\alpha)$, как и ранее, оператор поворота на угол α .

Интересно отметить, что тензор эффективной проводимости можно получить из других соображений, воспользовавшись выражением для эффективной проводимости двухфазной среды в магнитном поле. Представим, что локальная анизотропия (4) рассмотренной выше среды не «настоящая», а образованная искусственным образом — локально среда представляет собой плоскопараллельные бесконечно тонкие полоски с различными проводимостями $\hat{\sigma}_1(H)$ и $\hat{\sigma}_2(H)$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1(H) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_2(H) &= \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (15)$$

Связь между значениями проводимостей в полосках α_i, β_i и тензором проводимости монокристалла находится при помощи хорошо известного метода усреднения одномерных сред (общее решение для слоистых сред приведено в работе [4]):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{11} &= 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}{2(\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= -\tilde{\sigma}_{21} = \frac{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Тензор эффективной проводимости двухфазной среды в магнитном поле [2], записанный в виде, приведенном в работе [5], следующим образом выражается через $\hat{\sigma}_1(H)$ и $\hat{\sigma}_2(H)$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_e &= \begin{pmatrix} \sigma_s^e & \sigma_a^e \\ -\sigma_a^e & \sigma_s^e \end{pmatrix}, \\ \sigma_s^e &= \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2}, \\ \sigma_a^e &= \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Для того чтобы получить тензор эффективной проводимости поликристалла, необходимо представить α_i и β_i из (16) как функции компонент тензора $\tilde{\sigma}_{ik}$ и подставить последние в (17). Как видно из формулы (16),

$$\tilde{\sigma}_{11} \tilde{\sigma}_{22} = (\sigma_s^e)^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_a^e, \quad (18)$$

откуда сразу следуют выражения для тензора эффективной проводимости поликристалла в магнитном поле равенства (13).

Отметим, что в работе [3] приведены общие соотношения, из которых можно получить равенства (13).

3. МОДЕЛЬ СИЛЬНОАНИЗОТРОПНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕД

Для рассмотренного выше класса двумерных поликристаллических сред с хаотически разбросанными кристаллографическими осями кристаллов возможно вычисление тензора эффективной проводимости без детализации конкретной структуры среды. Однако при анализе распределения локальных тока, поля, плотности джоулевого тепловыделения необходимо обратиться к какой-либо конкретной реализации такой среды. Как показано в работе [6] (см., также [7]), в случае сильной анизотропии возможна простая геометрическая модель, отражающая главные особенности поликристаллической среды. Основным геометрическим объектом такой структуры является ловушка — вершина нескольких кристаллов с таким расположением кристаллографических осей в них, что ток, который, естественно, предпочитает течь по направлению с наименьшим сопротивлением, закрутится вокруг нее (см. рис. 1). При подходе к центру ловушки токовый жгут утончается, плотность тока возрастает и, в конце концов, ток перетекает на «соседний» жгут, по которому он течет в обратную сторону, «разматываясь» с ловушки.

Хорошей моделью ловушки может служить анизотропная среда с кристаллографическими осями, изогнутыми вдоль спирали (рис. 2). Компоненты тензора электропроводности без магнитного поля следующим образом выражаются в системе координат (x, y) через единичный вектор \mathbf{n} , направленный по касательной к спирали (вдоль оси y_k на рис. 2):

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \sigma_{\perp} \delta_{ik} + (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) n_i n_k, \\ n_x &= \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta,\end{aligned}\quad (19)$$

в «собственной» кристаллографической системе тензор $\hat{\sigma}$, естественно, имеет вид (2).

При не равном нулю внешнем магнитном поле в лабораторной системе координат тензор электропроводности получается путем «поворота» тензора (3) на угол θ :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \cos^2 \theta + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos \theta \sin \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta & (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} \cos^2 \theta - \sigma_{21} \sin^2 \theta \\ (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{21} \cos^2 \theta - \sigma_{12} \sin^2 \theta & \sigma_{11} \sin^2 \theta + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos \theta \sin \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\psi} \\ \sigma_{\psi r} & \sigma_{\psi\psi} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (20)$$

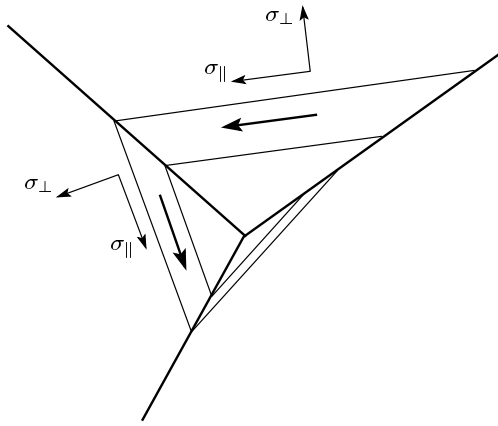


Рис. 1. Стык трех кристаллитов, образующих ловушку. Стрелками указано направление тока в закрученном токовом жгуте. Показаны кристаллографические системы координат с указанием направления кристаллографических осей «хорошей» σ_{\parallel} и «плохой» $\sigma_{\perp} \ll \sigma_{\parallel}$ проводимостей

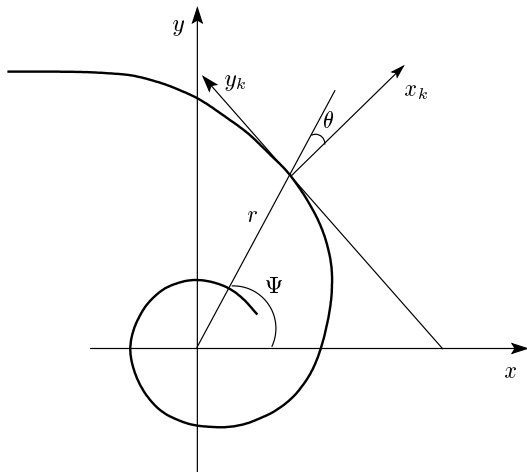


Рис. 2. Модель ловушки: (x, y) — лабораторная, (x_k, y_k) — кристаллографическая системы координат. Угол θ для логарифмической спирали не зависит от координат и определяется соотношением $\pi/2 - \theta = \text{arctg}(1/b)$, где b — параметр, определяющий «закрученность» спирали $r = a \exp(b\psi)$

Отметим, что, поскольку угол θ не зависит от координат, компоненты тензора $\tilde{\sigma}$ (20) также от координат зависеть не будут; уравнение непрерывности $\text{div } j = 0$ при этом представляет собой уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами,

$$\sigma_{rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + (\sigma_{r\psi} + \sigma_{\psi r}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \psi} + \frac{1}{r} \sigma_{\psi\psi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (21)$$

и имеет следующее решение:

$$\varphi(r, \psi) = Ar^{\alpha} e^{im\psi}. \quad (22)$$

Минимуму диссипации отвечает значение $m = 1$ (см. аналогичную задачу об определении поля вблизи клиновидного края на проводнике [8]), для α при этом получаем

$$\alpha = \omega - i\gamma, \quad \omega = \left(\frac{\sigma_{\psi\psi}}{\sigma_{rr}} - \frac{(\sigma_{r\psi} + \sigma_{\psi r})^2}{4\sigma_{rr}^2} \right)^{1/2}, \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_{r\psi} + \sigma_{\psi r}}{2\sigma_{rr}}.$$

Здесь предполагается, что выполнено следующее неравенство:

$$\frac{\sigma_{\psi\psi}}{\sigma_{rr}} - \frac{(\sigma_{r\psi} + \sigma_{\psi r})^2}{4\sigma_{rr}^2} > 0.$$

Таким образом, распределение потенциала вблизи центра ловушки имеет вид

$$\varphi(r, \psi) = Ar^{\omega} \cos(\psi - \gamma \ln r). \quad (24)$$

Поскольку основные события «разыгрываются» вблизи центра ловушки (именно здесь среда «набирает» сопротивление), на некотором расстоянии радиуса R от нее можно заменить локально анизотропную среду на эффективную с тензором, имеющим компоненты σ_{rr}^e , $\sigma_{r\psi}^e = -\sigma_{\psi r}^e$ и $\sigma_{\psi\psi}^e$, потребовав выполнения на границе стандартных условий, следующих из уравнения непрерывности:

$$j_r(r = R) = j_r^+(r = R),$$

и потенциальности поля:

$$\varphi(r = R) = \varphi^+(r = R).$$

Здесь индекс «+» обозначает решение внешней задачи (в области $r \geq R$)

$$\varphi(r, \psi) = Br \cos(\psi - \theta). \quad (25)$$

Выполнение указанных граничных условий определяет компоненты эффективного тензора проводимости (см. Приложение), которые совпадают с полученными ранее (13) строгим методом.

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Прежде всего отметим, что в рассматриваемой ситуации детерминант локального тензора проводимости не зависит от координат:

$$\det \hat{\sigma}(H) = \text{const}, \tag{26}$$

т. е. «относительно» детерминанта среда однородна. В этом случае [2]

$$\det \hat{\sigma}(r) = \det \hat{\sigma}^e.$$

Действительно, непосредственным вычислением можно получить

$$(\sigma_s^e)^2 + (\sigma_a^e)^2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}, \tag{27}$$

где σ_{ik} — компоненты тензора (3).

Интересно отметить также тот факт, что $\text{rot } \mathbf{j} \neq 0$ даже в отсутствие магнитного поля, что приводит к появлению магнитного момента вблизи ловушки.

Предложенная модель позволяет рассмотреть распределение джоулевого тепловыделения ν в сильноанизотропной среде. Из формулы (24)

$$\nu = E_r j_r + E_\psi j_\psi = A^2 \sigma_{rr} \omega^2 r^{2(\omega-1)}. \tag{28}$$

Проанализируем это выражение в отсутствие магнитного поля. В этом случае

$$\omega(H=0) = \frac{\sqrt{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}}{\sigma_{rr}(H=0)},$$

$$\sigma_{rr}(H=0) = \sigma_{\parallel} \cos^2 \theta + \sigma_{\perp} \sin^2 \theta.$$

В случае сильной анизотропии, а именно этот случай отвечает модели ловушки, $\sigma_{\parallel} \gg \sigma_{\perp}$ (заметим, что можно рассматривать и противоположный случай, $\sigma_{\parallel} \ll \sigma_{\perp}$ — спираль, по которой завивается ток, будет закручена в противоположную относительно первого случая сторону), $\omega(H=0)$ можно представить в виде

$$\omega(H=0) = \sqrt{\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_P}} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_P} \sin^2 \theta \right)^{-1}. \tag{29}$$

Из выражения (29) следует, что если угол θ не слишком близок к $\pi/2$ (иначе спираль превратится в набор концентрических окружностей), то

$$\omega(H=0) \propto \sqrt{\frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}}} \ll 1$$

и джоулево тепловыделение будет расти при приближении к центру ловушки степенным образом, $\nu \propto r^{-2}$.

Один из авторов (А. С.) признателен И. М. Кагановой за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Из выражений (24) и (25) следуют выражения для компонент тока

$$j_r = Ar^{\omega-1} \left[\sigma_{rr} \omega \cos(\varphi - \ln r) + \frac{\sigma_{\psi r} - \sigma_{r\psi}}{2} \sin(\varphi - \ln r) \right], \tag{A.1}$$

$$j_r^+ = \sigma_{rr}^e B \cos(\varphi - \theta) - \sigma_{r\psi}^e B \sin(\varphi - \theta).$$

Условие равенства на границе

$$\varphi(r=R) = \varphi^+(r=R)$$

дает

$$B = AR^{\omega-1}, \quad \theta = \gamma \ln R, \tag{A.2}$$

а условие

$$j_r(r=R) = j_r^+(r=R)$$

дает

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^e B &= AR^{\omega-1} \omega \sigma_{rr}, \\ \sigma_{r\psi}^e B &= AR^{\omega-1} (\sigma_{\psi r} - \sigma_{r\psi})/2, \end{aligned} \tag{A.3}$$

откуда и следуют выражения (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
4. А. А. Снарский, П. М. Томчук, Украин. физ. ж. **32**, 66 (1987).
5. Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **72**, 288 (1977).
6. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **84**, 1756 (1983).
7. А. М. Dykhne and I. M. Kaganova, Phys. Rep. **288**, 263 (1997).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).