ЖЭТФ, 2005, том 128, вып. 6 (12), стр. 1220–1226

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА И КОНЕЧНОСТЬ СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ

М. Б. Голубев [a], *С. Р. Кельнер* [b*]

[a] *Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ*
607195, Саров, Россия

[b] *Московский инженерно-физический институт (Государственный университет)*
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 июля 2005 г.

Сингулярности в метрике классических решений уравнений Эйнштейна (решения Шварцшильда, Керра, Райсснера – Нордстрёма и Керра – Ньюмена) приводят к появлению в тензоре Эйнштейна обобщенных функций. Для исследования этих функций, которые могут иметь более сложный по сравнению с δ-функцией Дирака характер, использован прием, основанный на предельной последовательности решений. Показано, что решения будут удовлетворять уравнениям Эйнштейна всюду, если тензор энергии – импульса имеет соответствующую сингулярную добавку не электромагнитного происхождения. При учете этой добавки полная энергия оказывается конечной и равной mc^2, а для решений Керра и Керра – Ньюмена угловой момент — $mc\mathbf{a}$. Поскольку решения Райсснера – Нордстрёма и Керра – Ньюмена соответствуют точечному заряду в классической электродинамике, полученный результат позволяет по-новому взглянуть на проблему расходимости собственной энергии точечного заряда.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных принципов ОТО является равенство инертной и гравитационной масс. Однако классические решения уравнений Эйнштейна (решения Шварцшильда, Керра, Райснера – Нордстрёма и Керра – Ньюмена) на первый взгляд не удовлетворяют этому принципу. Для решений Шварцшильда и Керра тензор энергии – импульса, а следовательно и собственная энергия равны нулю, для решений Райснера – Нордстрёма и Керра – Ньюмена собственная энергия бесконечна, в то время как гравитационная масса конечна для всех этих решений.

Причиной этого несоответствия может быть то, что перечисленные решения удовлетворяют уравнениям Эйнштейна не во всем пространстве. Общим свойством решений является наличие в метрике сингулярностей вида $1/r$, $1/r^2$. Этот факт наводит на мысль, что тензор Эйнштейна, зависящий от вторых производных метрики, может содержать обобщенные функции, которые теряются при прямом дифференцировании[1)] и поэтому не учитываются в тензоре энергии – импульса. Ранее этот вопрос был исследован для упомянутых выше решений в представлении Керра – Шилда в работах [1, 2]. В этих работах показано, что тензор Эйнштейна действительно содержит обобщенные функции, которые могут иметь более сложный, по сравнению с δ-функцией Дирака, характер.

Собственную энергию и момент можно определить инвариантным образом. Мы дополнили исследования [1, 2] рассмотрением некоторых других представлений решений, а также вычислили полную собственную энергию и угловой момент. Сингулярные добавки к тензору энергии – импульса приводят к конечности значений энергии и момента. Вопрос о возможных физических причинах конечности собственной энергии в ОТО также рассматривался в работе [3].

[*] E-mail: skelner@rambler.ru

[1)] Например, в электростатике для потенциала точечного заряда имеем $\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r})$, в то время как непосредственное дифференцирование дает $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0$.

2. АНАЛОГИЯ С ЭЛЕКТРОСТАТИКОЙ

Метод, позволяющий определить, появляется ли обобщенная функция при дифференцировании сингулярной функции, проще всего пояснить на примере электростатики. Потенциал точечного заряда

$$\varphi = \frac{e}{r} \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,, \tag{2}$$

где $\rho = e\delta(\mathbf{r})$. Один из способов убедиться в этом состоит в следующем. Заменим потенциал (1) несингулярной функцией вида

$$\tilde{\varphi} = \frac{e}{r}\,\theta(r - r_0) + \left(\frac{3\,e}{2\,r_0} - \frac{e\,r^2}{2\,r_0^3}\right)\theta(r_0 - r)\,, \tag{3}$$

где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда ($\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$). Подставив этот потенциал в (2), находим, что $\tilde{\varphi}$ будет решением уравнения Пуассона для плотности заряда

$$\rho = -\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{4\,\pi} = \frac{3\,e}{4\pi r_0^3}\,\theta(r_0 - r)\,. \tag{4}$$

Интеграл по объему от (4) не зависит от r_0 и равен e. Если перейти к пределу $r_0 \to 0$, то

$$\tilde{\varphi} \to e/r, \quad \rho \to e\,\delta(\mathbf{r}),$$

т. е. предел решения (3) отвечает наличию в начале координат точечного источника с зарядом e и является решением уравнения (2). Легко показать, что данный результат не зависит от выбора потенциала в области $r < r_0$, причем не обязательно гладкое поведение потенциала в точке $r = r_0$. Результат всегда один: в пределе $r_0 \to 0$ потенциал $\varphi = e/r$, а плотность заряда $\rho = e\delta(\mathbf{r})$.

В классической электродинамике обычно применяется более простой по сравнению с изложенным метод описания точечных источников, а именно, используется преобразование Фурье. Эффективность этого метода в электродинамике обусловлена линейностью уравнений Максвелла. В случае же общей теории относительности уравнения нелинейны и, по-видимому, наиболее простой подход к исследованию точечных объектов состоит в описанной выше процедуре сглаживания решений. Ниже мы применяем эту процедуру к классическим решениям уравнений Эйнштейна.

3. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

Что понимать под собственной энергией в ОТО — вопрос нетривиальный. Обычно этот вопрос решается с помощью псевдотензора энергии–импульса (см., например, [4] и цитируемую там литературу). Недостаток такого подхода заключается в том, что определение собственной энергии системы привязано к специальной (декартовой) системе координат и не инвариантно относительно преобразований координат. Псевдотензор энергии–импульса позволяет приписать плотность энергии гравитационному полю, которую, однако, не удается локализовать.

Можно определить собственную энергию, используя тензор энергии–импульса только полей и вещества. Для стационарных или статических решений существует вектор Киллинга $\xi = \partial/\partial t$, который порождает сохраняющийся ток

$$J^i = T^i_k\,\xi^k\,, \tag{5}$$

где T^i_k — тензор энергии–импульса, $\xi^k = (1,0,0,0)$ — контравариантные компоненты вектора ξ [5]. Поскольку $\nabla_i\,J^i = 0$, выполняется закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\,\sqrt{-g}\,J^0 = -\int dS_\alpha\,\sqrt{-g}\,J^\alpha_0\,. \tag{6}$$

Если определить плотность энергии как нулевую компоненту этого тока, то полная энергия

$$E = \int d^3x\,\sqrt{-g}\,J^0 = \int d^3x\,\sqrt{-g}\,T^0_k\,\xi^k \tag{7}$$

не будет зависеть от используемых координат.

4. МЕТРИКА РЕЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

Решение Рейсснера–Нордстрёма [6] в декартовых координатах можно представить в виде

$$ds^2 = \Phi\,dt^2 - \left(\frac{1}{\Phi} - 1\right)(\mathbf{n}\,d\mathbf{x})^2 - d\mathbf{x}^2\,, \tag{8}$$

где

$$\Phi = \frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}$$

(m и Q — масса и заряд соответственно[2)]), $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$. Это решение удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$G^{ik} = 8\pi\,T^{ik}\,, \tag{9}$$

[2)] Используются единицы, в которых гравитационная постоянная и скорость света равны 1.

где

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F^i{}_l F^{lk} + \frac{1}{4}\, g^{ik} F_{lm} F^{lm}\right)$$

— тензор энергии – импульса электромагнитного поля, всюду, кроме точки $r = 0$, в которой решение сингулярно. Выяснить структуру особенности тензора G^{ik} и характер возникающей обобщенной функции можно с помощью процедуры, аналогичной описанной в разд. 2.

Рассмотрим метрику вида (8), заменив в ней Φ следующей непрерывной функцией:

$$\widetilde{\Phi} = \frac{1}{r^2}\left(r^2 - 2\,m\,r + Q^2\right)\theta(r - r_0) + \\ + \frac{1}{r_0^2}\left(r_0^2 - 2\,m\,r_0 + Q^2\right)\theta(r_0 - r)\,. \quad (10)$$

При этом метрика становится несингулярной и в пределе $r_0 \to 0$ переходит в метрику (8). Отметим, что требование непрерывности метрики необходимо, поскольку первые производные метрического тензора входят в уравнения Эйнштейна нелинейно. Если допустить разрывы функций g_{ik}, то в уравнениях появятся квадраты δ-функций. Вторые же производные входят линейно, поэтому можно допустить разрыв первых производных, если понимать последующее дифференцирование в смысле обобщенных функций.

Тензор энергии – импульса, соответствующий сглаженной метрике, может быть получен из уравнений Эйнштейна. Приведем (0,0)-компоненту этого тензора:

$$T_0^0 = \frac{1}{8\,\pi}\,G_0^0 = \frac{Q^2}{8\pi\,r^4}\,\theta(r - r_0) + \\ + \left(\frac{m}{4\pi\,r^2\,r_0} - \frac{Q^2}{8\pi\,r^2\,r_0^2}\right)\theta(r_0 - r)\,. \quad (11)$$

Первое слагаемое в правой части — плотность энергии электростатического поля в области $r > r_0$. Второе слагаемое, возникшее в результате сглаживания метрики, не исчезает в пределе $r_0 \to 0$. Собственная энергия построенного решения равна

$$E = \frac{Q^2}{2\,r_0} + \left(m - \frac{Q^2}{2\,r_0}\right) = m\,. \quad (12)$$

Можно показать, что результат (12) не зависит от способа сглаживания метрики. В пределе $r_0 \to 0$ формулу (11) можно записать в виде

$$T_0^0 = m\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,Q^2 \varpi(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Здесь $\varpi(\mathbf{r})$ — обобщенная функция, определяемая следующим правилом интегрирования:

$$\int f(\mathbf{r})\,\varpi(\mathbf{r})\,d^3x = \int \frac{f(\mathbf{r}) - f(0)}{4\,\pi\,r^4}\,d^3x\,, \quad (14)$$

где $f(\mathbf{r})$ — ограниченная гладкая функция. Предельное выражение (13) также не зависит от способа сглаживания метрики. Фурье-образ функции $\varpi(\mathbf{r})$

$$\widetilde{\varpi}(\mathbf{k}) \equiv \int \varpi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3x = -\frac{\pi}{4}\,|\mathbf{k}|\,. \quad (15)$$

Функция

$$\varpi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^4}$$

всюду, кроме точки $\mathbf{x} = 0$, поэтому величина $(1/2)Q^2\varpi(\mathbf{r})$ в выражении (13) описывает плотность энергии электростатического поля. Особенность в начале координат приводит к тому, что $\widetilde{\varpi}(\mathbf{k} = 0) = 0$, т. е. интеграл от $\varpi(\mathbf{r})$ по всему пространству равен нулю. Это означает, что расходимость энергии электростатического поля компенсируется бесконечной отрицательной энергией в центре.

Остальные компоненты тензора энергии – импульса в пределе $r_0 \to 0$ имеют вид

$$T_\alpha^0 = 0\,, \quad (16)$$

$$T_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\left[m\left(3\,n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}\right)\delta(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + Q^2\left(2\,n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}\right)\varpi(\mathbf{r})\right]\,. \quad (17)$$

Фурье-образ пространственных компонент тензора энергии – импульса имеет вид

$$\widetilde{T}_\beta^\alpha = \frac{\pi\,Q^2\,k}{16}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \quad (18)$$

В случае метрики Шварцшильда ($Q = 0$ в (8)) слагаемое $m\,\delta(\mathbf{r})$ в T_k^i, соответствующее точечному источнику, можно получить непосредственно, если учесть наличие члена $\Delta(1/r)$ в G_k^i. Более сложная обобщенная функция $\varpi(\mathbf{r})$ возникает в качестве источника в случае $Q \neq 0$. Своим происхождением она обязана тому, что в G_k^i входит величина $\Delta(1/r^2)$.

Таким образом, решения Шварцшильда и Рейсснера – Нордстрёма можно распространить на все пространство, если добавить точечный источник в тензор энергии – импульса. Это утверждение можно отнести как к точечному заряду, так и к черной дыре, поскольку нигде не использовалось соотношение между зарядом и массой.

В обычных единицах формула (13) записывается в виде

$$T_0^0 = mc^2\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,Q^2\varpi(\mathbf{r})\,, \tag{19}$$

где $\varpi(\mathbf{r})$ определено в (14). Отметим, что гравитационная постоянная не входит в это выражение. Легко проверить, что предельные формулы (16)–(18) для тензора энергии–импульса также не зависят от гравитационной постоянной. Поэтому полученные результаты справедливы и в случае плоского пространства-времени. Таким образом, общая теория относительности позволяет найти тензор энергии–импульса покоящегося (или равномерно движущегося) точечного заряда в классической электродинамике. Полная энергия заряда при этом оказывается конечной величиной.

5. МЕТРИКА КЕРРА–НЬЮМЕНА

Применим ту же процедуру для исследования структуры сингулярности в метрике Керра–Ньюмена [7]:

$$ds^2 = \eta_{ik}\,dx^i\,dx^k + $$
$$+\Psi\left(dt - \frac{(r^2x_\alpha + r[\mathbf{x}\times\mathbf{a}]_\alpha + a_\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}))\,dx^\alpha}{r(r^2+a^2)}\right)^2. \tag{20}$$

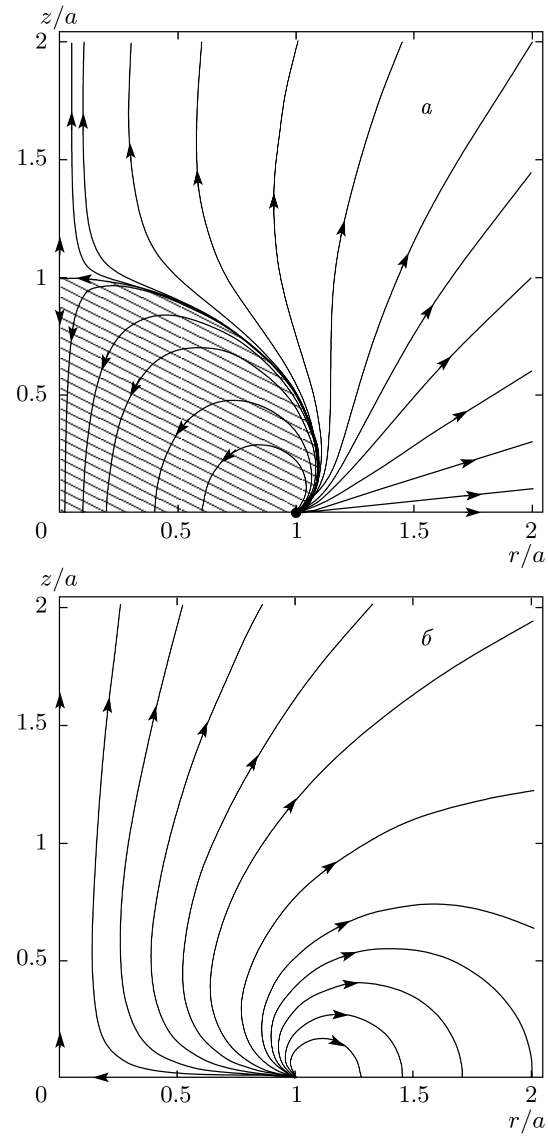
Здесь

$$\Psi = \frac{Q^2 - 2\,m\,r}{r^2 + \dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2}{r^2}}\,, \tag{21}$$

где $\mathbf{a}$ — пространственный вектор, a — его модуль, r определяется уравнением

$$r^4 - r^2(\mathbf{x}^2 - a^2) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2 = 0\,. \tag{22}$$

Легко показать, что это обычное представление Керра–Шилда, если вектор $\mathbf{a}$ направить вдоль оси z. Поверхности постоянного r представляют собой эллипсоиды вращения, ось которых совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$. При $r = 0$ эллипсоид вырождается в диск радиуса a. На этом диске метрика непрерывна, но компоненты метрики и 4-потенциала поля имеют излом, а напряженности электромагнитного поля — разрыв (см. рисунок). Это означает, что на диске имеется сингулярное распределение массы, заряда и токов, которое не находит отражения в тензоре энергии–импульса электромагнитного поля.



Силовые линии электрического (a) и магнитного ($б$) полей для решения Керра–Ньюмена. Штриховкой выделена область замкнутых силовых линий электрического поля

Построим решение, аналогичное решению (10). Для этого в (20) заменим Ψ функцией

$$\widetilde{\Psi} = \frac{Q^2 - 2\,m\,r}{r^2 + \dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2}{r^2}}\,\theta(r - r_0) + $$
$$+ \frac{Q^2 - 2\,m\,r_0}{r_0^2 + \dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2}{r_0^2}}\,\theta(r_0 - r)\,. \tag{23}$$

Построенное решение всюду непрерывно, но имеет разрыв производной при $r = r_0$. Чтобы удовлетворить уравнениям Эйнштейна, (0,0)-компонента тензора энергии – импульса должна иметь следующий вид:

$$T_0^0 = \frac{1}{8\pi} G_0^0 = \frac{Q^2}{4\pi}\left(\frac{a^2}{\rho^3} - \frac{r^2}{\rho^3} - \frac{1}{2\rho^2}\right)\theta(r-r_0) + \\ + \frac{{r_0}^2\left(2Mr_0 - Q^2\right)\left({r_0}^4 - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)}{8\pi r^2\left(r^4 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)} \times \\ \times \frac{\left(r^4{r_0}^4 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^4 + r^6a^2 + r^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2a^2\right)}{\left({r_0}^4 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)^3}\theta(r_0 - r) + \\ + \frac{r_0\left(Mr_0\left({r_0}^4 - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right) - Q^2\left({r_0}^4 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)\right)}{8\pi\left({r_0}^4 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)^3} \times \\ \times \left({r_0}^2a^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2\right)\delta(r - r_0), \quad (24)$$

где

$$\rho = r^2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2/r^2.$$

Вклад в собственную энергию каждой из трех частей T_0^0 при $r_0 \to 0$ представляет собой расходящиеся величины, однако в сумме расходимости удивительным образом компенсируются:

$$E = \frac{Q^2}{4r_0} + \frac{Q^2\left({r_0}^2 + a^2\right)\lambda}{4{r_0}^2 a} + \\ + \left(2mr_0 - Q^2\right)\left(\frac{\left(5{r_0}^2 + a^2\right)\lambda}{4{r_0}^2 a} - \frac{3}{4r_0}\right) - \\ - \frac{2Q^2 - 5mr_0}{2r_0} + \frac{\left(2Q^2r_0 - m(5{r_0}^2 + a^2)\right)\lambda}{2r_0 a} = m, \quad (25)$$

где

$$\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{r_0}\right).$$

Первая, вторая и третья строки в этой формуле — вклады областей $r > r_0$, $r < r_0$ и поверхности $r = r_0$, соответственно. Вклад каждой из областей зависит от способа сглаживания метрики. Например, если выбрать функции g_{ik} так, чтобы в точке r_0 производные $\partial g_{ik}/\partial r$ были непрерывны, то в выражении (24) исчезнет слагаемое с δ-функцией. Однако полная энергия E, как и в случае метрики Рейсснера – Нордстрёма, не зависит от способа сглаживания метрики (см. Приложение). Полученный результат распространяется и на метрику Керра (достаточно в выражениях (20)–(25) положить $Q = 0$).

Тензор энергии – импульса позволяет также найти полный момент системы. Вследствие азимутальной симметрии существует вектор Киллинга $\eta = \partial/\partial\varphi$, который позволяет ввести сохраняющийся ток

$$I^i = -T_k^i\eta^k, \quad \nabla_i I^i = 0. \quad (26)$$

Полный момент определяется равенством

$$M = \int d^3x\sqrt{-g}\,I^0 = \int d^3x\sqrt{-g}\,T_k^0\eta^k. \quad (27)$$

Вклады в интеграл (27) областей $r > r_0$, $r < r_0$ и поверхности $r = r_0$ в пределе $r_0 \to 0$ расходятся, но эти расходимости компенсируются, и полный момент, независимо от способа сглаживания метрики, оказывается конечной величиной:

$$M = \frac{Q^2}{4}\left(\lambda\left(\frac{a}{r_0} + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0}{a} + \frac{a}{r_0}\right) + \\ + \left(2mr_0 - Q^2\right)\left(\lambda\left(\frac{3}{2} + \frac{5r_0^2}{4a^2} + \frac{a^2}{4r_0^2}\right) - \frac{5r_0}{4a} - \frac{3a}{4r_0}\right) - \\ - (a^2 + r_0^2)\left(\lambda\left(\frac{m}{2r_0} + \frac{5mr_0 - 2Q^2}{2a^2}\right) + \frac{Q^2}{ar_0} - \frac{5m}{2a}\right) = \\ = ma. \quad (28)$$

При вычислениях, проделанных в этой работе, использовалась программа Mathematica 5, Wolfram Research, Inc.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в работе, для того чтобы решения Шварцшильда, Керра, Рейсснера – Нордстрёма и Керра – Ньюмена удовлетворяли уравнениям Эйнштейна во всем пространстве, включая $r = 0$, необходимо добавить в тензор энергии – импульса сингулярные слагаемые, содержащие обобщенные функции. При этом полная энергия для всех решений оказывается конечной и равной mc^2. Для решений с ненулевым зарядом эта добавка играет роль натяжений Пуанкаре, т. е. в центре расположена бесконечная отрицательная масса, которая компенсирует электростатическую энергию заряда. Появление отрицательной массы при регуляризации метрики отмечалось также в [8].

На существование отрицательной массы для решений с ненулевым зарядом указывает также и тот факт, что для пробных частиц гравитационное притяжение переходит в отталкивание уже на классическом радиусе Q^2/mc^2. В этом можно убедиться, проанализировав уравнения движения пробных частиц.

Из полученных результатов следует, что невозможно построить самосогласованную классическую модель электрона без привлечения дополнительных полей (или материи) с необычными свойствами. Эти поля должны давать отрицательный вклад в энергию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (МНТЦ) (грант № 1655).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сглаженные решения и соответствующая им полная энергия исследовались в ряде работ (см., например, работу [8] и цитируемую в ней литературу). В данном Приложении мы покажем, что используемое нами определение E (формула (7)) дает результат, не только инвариантный относительно преобразований координат, но и не зависящий от способа сглаживания метрики в важном частном случае, когда при сглаживании сохраняется керровская структура (20) метрики.

Коммутатор ковариантных производных (см., например, [9]) имеет вид

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\xi_i = \xi^m R_{mikl}\,, \tag{29}$$

где R_{mikl} — тензор Римана. Умножая на g^{ik}, получаем в правой части тензор Риччи:

$$\nabla_i \nabla_l \xi^i - \nabla_l \nabla_i \xi^i = -\xi^m R_{ml}\,. \tag{30}$$

В этой формуле ξ^i — произвольный вектор. Пусть теперь ξ^i — вектор Киллинга. Тогда второе слагаемое в (30) обращается в нуль и получается соотношение

$$\nabla_i \xi^{i\,;k} = -R^{kl}\,\xi_l\,. \tag{31}$$

Поскольку $\xi^{i\,;k}$ — антисимметричный тензор, имеем

$$\nabla_i \nabla_k \xi^{i\,;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\,\xi^{i\,;k} = 0 \tag{32}$$

и приходим к равенству

$$\nabla_k \left(R^{kl}\,\xi_l\right) = 0\,. \tag{33}$$

Оказывается, что не только $T^{kl}\,\xi_l$, но и вектор $R^{kl}\,\xi_l$ также сохраняется. Отсюда следует справедливость равенства

$$\nabla_k \left(R\,\xi^k\right) = \xi^k\,\frac{\partial R}{\partial x^k} = 0\,, \tag{34}$$

где R — скалярная кривизна. Последнее выражение, впрочем, очевидно, поскольку вектор Киллинга — это генератор преобразований, не изменяющих метрику.

Из равенства (31), записанного в виде

$$R^{kl}\,\xi_l = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\xi^{i\,;k}\right), \tag{35}$$

следует, что величина

$$\int d^3x\,\sqrt{-g}\,R^{kl}\,\xi_l = \oint dS_i\,\sqrt{-g}\,\xi^{i\,;k} \tag{36}$$

и, таким образом, не зависит от способа сглаживания метрики в области $r < r_0$.

Для метрики вида (20) с произвольной функцией $\Psi(r,\theta)$ скалярная кривизна равна

$$R = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[(r^2 + a^2\cos^2\theta)\,\Psi(r,\theta)\right]. \tag{37}$$

Эта формула проверяется прямым, но весьма громоздким вычислением. Поэтому входящий в полную энергию интеграл от скалярной кривизны

$$-\frac{1}{2}\int R\,\sqrt{-g}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{2}\times$$
$$\times\int \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[(r^2 + a^2\cos^2\theta)\,\Psi(r,\theta)\right] dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{38}$$

не зависит от поведения функции $\Psi(r,\theta)$ в области $r < r_0$. Другими словами, величина (38) также не зависит от способа сглаживания метрики в области $r < r_0$. Надо лишь потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\left.\frac{\partial\Psi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0.$$

Из выражений (36), (38) следует, что скалярная величина

$$\int \left(R^0_k - \frac{1}{2}\,g^0_k\,R\right)\xi^k\,\sqrt{-g}\,d^3x\,, \tag{39}$$

пропорциональная собственной энергии (7), не чувствительна к способу сглаживания метрики.

Аналогичным образом доказывается, что полный момент (27) также не зависит от способа сглаживания метрики. Доказательство получается более простым, поскольку слагаемое со скалярной кривизной не вносит вклад в полный момент.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Balasin and H. Nachbagauer, Class. Quantum Grav. **10**, 2271 (1993); E-print archives gr-qc/9305009.

2. H. Balasin and H. Nachbagauer, Class. Quantum Grav. **11**, 1451 (1994); E-print archives gr-qc/9312028.

3. R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner, in: *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. by L. Witten, New York, Wiley (1962); E-print archives gr-qc/0405109.

4. S. S. Xulu, Astrophys. and Space Sc. **283**, 23 (2003).

5. B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965).

6. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., New York (1973).

7. G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, J. Math. Phys. **10**, 1842 (1969).

8. A. Burinskii, E. Elizalde, S. R. Hildebrandt, and G. Magli, Phys. Rev. D **65**, 064039 (2002).

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).