

# ЭВОЛЮЦИЯ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В СЛАБНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ КОНЦЕНТРАЦИИ

*А. И. Матвеев\**

*Таганрогский государственный радиотехнический университет  
347928, Таганрог, Россия*

Поступила в редакцию 17 марта 2005 г.

Рассмотрена пространственная эволюция ленгмюровской волны, возбужденной внешними источниками, в слабнеоднородной электронной плазме без внешних источников с малым положительным градиентом концентрации плазмы вдоль направления распространения волны. На первом этапе эволюции дисперсия волны близка к линейной. После того как фазовая скорость увеличится вдвое, наступает второй этап эволюции. Волна теряет свою индивидуальность, становясь гибридом из двух волн. Ее профиль приобретает вид последовательности фрагментов этих волн, чередующихся друг с другом. Дисперсия волны определяется дисперсией каждого из фрагментов. В процессе эволюции расстояние между равновесными значениями фрагментов волн увеличивается, вследствие чего волна распадается на две волны, также нагруженные захваченными электронами. Перед распадом происходит укрупнение горбов волны, из-за этого в момент распада волна трансформируется в последовательность разнополярных солитонов.

PACS: 52.35.Mw

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления, возникающие в процессе эволюции волны в неоднородной плазме вследствие резонансного взаимодействия ее с частицами, рассматривались во многих работах [1–6]. Полное решение такого типа задач возможно лишь на основе замкнутой системы уравнений Власова – Максвелла. В основном эта система решалась либо после линеаризации уравнений, либо асимптотическими методами [7–9]. В случае, когда параметры волны на расстояниях, соизмеримых с длиной волны, изменяются незначительно, распределение электронов с экспоненциальной точностью описывается с помощью адиабатических инвариантов [10–12]. Их применение дает менее громоздкие выражения для всевозможных моментов функции распределения по сравнению с асимптотическими методами, позволяет выделить резонансные и нерезонансные компоненты в этих моментах, не решая волнового уравнения [1, 12]. Основной трудностью в решении уравнений Власова – Максвелла является построение са-

мосогласованных решений. Однако в рамках адиабатического подхода решение самосогласованной задачи упрощается, так как нет нужды детально описывать движение заряженных частиц, достаточно ограничиться нахождением функции распределения по адиабатическим инвариантам или интегралам движения [13, 14].

Далее описана эволюция ленгмюровской волны после ее включения внешними источниками в слабнеоднородной плазме с положительным градиентом  $dN/dz > 0$  концентрации электронов. Она характеризуется тремя этапами. На первом этапе эволюции ангармонизм волны и отличие ее дисперсии от линейной дисперсии учитывается нелинейной поправкой. С ростом концентрации и увеличением фазовой скорости электроны, захваченные в потенциальные ямы волны, оседают на дно этих ям, а освободившаяся область фазового пространства постепенно заполняется вновь захваченными электронами [2, 12]. Влияние захваченных электронов на профиль волны является локальным, так как сводится к углублению потенциальных ям волны только в окрестности их минимумов. Дело в том, что

\*E-mail: physics@EGF.tsure.ru

функция распределения Максвелла убывает экспоненциально быстро, поэтому в процессе увеличения фазовой скорости число электронов, захваченных в начальный момент эволюции, значительно больше, чем в любой последующий. Электроны, захваченные в начале эволюции, конденсируются на дне потенциальных ям волны, так что возникает характерный уровень энергии  $H_0$ , ниже которого находится основная масса этих электронов. Ток электронов с энергией  $H < H_0$  становится большим, превышая ток остальных электронов. Однако фазовый интервал движения этих электронов ограничен стенками потенциальных ям. Поэтому их ток способен изменить профиль волны в основном только внутри фазового интервала  $|\psi| < \theta_0$ ,  $\theta_0 = \varphi^{-1}(H_0)$ : у волны в области ее минимумов появляется «провисание» потенциала. В процессе эволюции размер провисания увеличивается, оно превращается во фрагмент новой волны. Вследствие этого на втором этапе эволюции ленгмюровскую волну можно представить как последовательность чередующихся, непрерывно переходящих друг в друга фрагментов двух волн с разными длинами волн. Верхняя часть волны состоит из горбов положительной полярности исходной волны, нижняя часть — из горбов отрицательной полярности новой, зарождающейся волны. Каждая из последовательностей фрагментов обладает своей дисперсией (их длины волн в процессе эволюции меняются независимо). Поэтому гибрид из двух волн на самом деле является волной с двойной дисперсией, в отличие от классической ленгмюровской волны, получаемой путем линеаризации уравнений Власова–Максвелла. Особенности эволюции волны с двойной дисперсией на втором этапе рассмотрены в разд. 3.

В процессе эволюции размер фрагментов обеих волн увеличивается и в конце второго этапа формирование фрагментов завершается: каждый из фрагментов имеет свою длину волны и амплитуду. Поэтому, когда расстояние между равновесными значениями фрагментов двух волн становится больше суммы их амплитуд,  $A_1 + A_2$ , происходит распад гибрида на две волны, также нагруженные захваченными электронами. Однако в довольно короткий период перед распадом сильно сказывается нелинейность волны, из-за чего происходит укрупнение положительных и отрицательных горбов этой волны. Профиль волны приобретает вид последовательности солитонов положительной и отрицательной полярностей, чередующихся друг с другом. Их эволюция рассмотрена в разд. 4, 5.

Хорошо известно явление распадной неустойчи-

вости высокочастотной плазменной волны [15, 16]. Распад этой волны на две низкочастотные возможен при условии синхронизации:  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $k_0 = k_1 + k_2$ , где индексы 0, 1, 2 относятся соответственно к исходной волне и двум волнам после распада. В рассматриваемом далее распаде волны в слабонеоднородной плазме роль этих двух условий играют условия сохранения средних плотностей потока энергии и тока.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ТОКИ ПРОЛЕТНЫХ И ЗАХВАЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим стационарную самосогласованную задачу включения и распространения продольной замедленной волны в слабонеоднородной электронной плазме, концентрация которой медленно изменяется вдоль оси  $z$ , в следующей постановке. Предполагается, что внешние источники, расположенные в области  $z < 0$ , где плазма в отсутствие поля однородна, слабо подпитывают включаемую замедленную волну, работая так, что амплитуда волны, которая распространяется вдоль оси  $z$ , увеличивается от нуля при  $z \rightarrow -\infty$  до  $A(0)$  при  $z = 0$ . Невозмущенная функция распределения электронов  $f_0(v^2/2T)$  при  $z \rightarrow -\infty$  известна. Роль внешних источников заключается в поддержании самосогласованного поля волны заданного вида с учетом ее самовоздействия. В случае малых амплитуд можно показать, что при рассматриваемом включении волны токи резонансных пролетных и захваченных электронов с точностью до слагаемых, пропорциональных  $\sqrt{A}$ , компенсируют друг друга, поэтому на этапе включения закон дисперсии близок к линейному. Так как изменение амплитуды, если она мала, практически не сказывается на изменении концентрации  $N$ , фазовую скорость волны в процессе включения можно считать постоянной и равной  $u_0$ . В области  $z > 0$ , где внешние источники отсутствуют, концентрация  $N$  электронной плазмы вдоль оси  $z$  очень медленно увеличивается,  $dN/dz > 0$ . Причем как в области включения волны, так и в области  $z > 0$ , где внешние источники отсутствуют, эволюция волны происходит настолько медленно, что на расстояниях, сравнимых с длиной волны, ее можно не принимать во внимание.

Далее принята безразмерная форма записи, в которой время  $t$  и координата  $z$  поделены соответственно на  $\omega^{-1}$  и  $k_0^{-1}$ , фазовая скорость и скорости электронов — на  $u_0 = \omega/k_0$ , функция распределения

$f_0(v^2/v_T^2)$ , нормированная на единицу, — на  $k_0/\omega$ , концентрация электронов  $N$  — на  $n_{cr} \equiv m\omega^2/4\pi e^2$ , плотность тока  $j$  — на  $e\omega n_{cr}/k_0$ , электронная температура  $T = mv_T^2/2$  — на  $mu_0^2$ , потенциал  $\varphi$  — на  $mu_0^2/e$ .

В работе [1] показано, что решением самосогласованной системы уравнений Власова–Максвелла для ленгмюровской волны в слабонеоднородной плазме являются произвольные функции  $f^\pm(I^\pm)$  для пролетных электронов и  $f_T(J)$  для захваченных электронов. Здесь

$$I^\pm = \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle = \frac{u^2}{2} + H \pm u \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sqrt{2(H - \varphi)},$$

$$J = u \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{2\pi} \sqrt{2(H - \varphi)},$$

— адиабатические инварианты пролетных и захваченных электронов [17], знаки «±» относятся, соответственно, к пролетным опережающим и отстающим электронам,  $\psi_1, \psi_2$  — точки поворота, при которых подкоренное выражение под знаком интеграла обращается в нуль,

$$H = \frac{(v - u)^2}{2} + \varphi$$

— энергия электрона в неинерциальной системе отсчета. При малом ангармонизме волны

$$J = \frac{4}{\pi} u \sqrt{A} \kappa^2 B(\kappa), \quad (2.1)$$

где  $\kappa^2 = H/2A$  — параметр захвата,

$$B(\kappa) = \frac{E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)}{\kappa^2},$$

$K(\kappa), E(\kappa)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода.

В области  $z > 0$  с увеличением фазовой скорости большинство пролетных опережающих электронов, скорость которых сравнивается с фазовой скоростью волны, становятся отстающими, но небольшая их часть захватывается волной. Если  $N_s = N(u_s)$  и  $u_s$  — соответственно, концентрация и скорость электронов в момент захвата их волной,  $I_s^\pm(R) = G \pm R$ ,  $R = J(H = \varphi_m)$  — значения адиабатических инвариантов пролетных и захваченных электронов на сепаратрисе,  $G = u^2/2 + \varphi_m$ ,  $\varphi_m$  — максимальное значе-

ние  $\varphi$ , то распределение электронов после их захвата запишем в виде [1]

$$N_T f_T(J) = \begin{cases} \left. \frac{N_s u_s}{u} f_0 \left( \frac{G(R)}{T} \right) \right|_{R=J}, & J > R_0, \\ \left. \frac{2N_0}{u} f_0 \left( \frac{G_0(R_0)}{T} \right) \right|_{R_0=J}, & J < R_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $G \approx u_s^2/2$ ,  $R_0 = R(z = 0)$ ,  $N_0 = N(z = 0)$ . В формуле (2.2) концентрация захваченных электронов  $N_T$  определена с помощью уравнения Лиувилля. Приравняв значение адиабатического инварианта (2.1) в момент захвата электронов волной его значению в любой точке  $z > 0$ , где амплитуда и фазовая скорость равны  $A$  и  $u > 1$ , а  $B(\kappa) \approx 1$ , выразим  $G$  через  $u, H$  и подставим в (2.2):

$$N_T f_T(J) = \begin{cases} \frac{N_s u_s}{u} f_0(\gamma H^2), & H > H_0, \\ 2 \frac{N_0}{u} f_0(v_T^{-2}), & H < H_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\gamma = u^2/8TA A_0$ ,  $H_0$  — значение энергии, отделяющее электроны, захваченные в процессе включения волны ( $z < 0$ ), от электронов, захваченных в области  $z > 0$ , где нет внешних источников,  $H_0 \approx 2\sqrt{AA_0}/u$ . В процессе увеличения фазовой скорости волны захватываются только опережающие пролетные электроны, поэтому распределение захваченных электронов полностью определяется распределением пролетных электронов в области  $v > u_0$ . Если  $f_0(v^2/v_T^2)$  монотонно убывает, то максимум (2.3) достигается при  $H = H_0$ , т. е. электроны конденсируются в окрестности этого уровня энергии. В случае максвелловской функции это легко объяснимо, если учесть, что в процессе эволюции с увеличением фазовой скорости при меньших ее значениях в потенциальные ямы волны захватывается значительно большее количество электронов, чем при больших значениях фазовой скорости. Очевидно, что наибольшее количество электронов захватывается в начале эволюции волны, особенно в том случае, когда фазовая скорость волны близка к тепловой скорости электронов.

С помощью (2.3) ток электронов в области  $z > 0$  запишем в виде

$$j(\varphi) = \begin{cases} j_1(\varphi), & \varphi > H_0, \\ j_2(\varphi), & \varphi < H_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$j_1(\varphi) = 2 \int_{\varphi}^{\varphi_{max}} \frac{N_s u_s f_0(\gamma H^2)}{2(H - \varphi)} dH + j_U,$$

$$j_2(\varphi) = 2N_0 \int_{\varphi}^{H_0} \frac{f_0(v_T^{-2}) dH}{\sqrt{2(H-\varphi)}} + 2 \int_{H_0}^{\varphi_{max}} \frac{N_s u_s f_0(\gamma H^2)}{\sqrt{2(H-\varphi)}} dH + j_U, \quad (2.5)$$

где

$$j_U = uN \left( P(\varphi - \langle \varphi \rangle) + 2 \int_{\varphi_{max}}^{\sqrt{\varphi_{max}}} \frac{f_0(u^2/v_T^2) dH}{\sqrt{2(H-\varphi)}} \right) - \langle j_T \rangle - \langle j_{T0} \rangle - \langle j_{Ur} \rangle,$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v-u} \frac{\partial f_0}{\partial v}.$$

Первое слагаемое в формуле (2.5) — ток электронов, захваченных в процессе включения волны и ускоренных волной до скорости, равной  $u$ , второе слагаемое в (2.5) и первое слагаемое в (2.4) — ток электронов, захваченных в области  $z > 0$ , второе слагаемое в выражении для  $j_U$  — ток резонансных пролетных электронов. Их средние токи соответственно равны

$$\langle j_{T0} \rangle = \frac{2J(H_0)N_0 f_0(v_T^{-2})}{u},$$

$$\langle j_T \rangle = 2 \int_{G_0}^G N_s f_0 \left( \frac{G}{T} \right) \frac{dR}{dG} dG,$$

$$\langle j_{Ur} \rangle = -2RN f_0(v_T^{-2}),$$

где

$$J(H_0) = u \langle \sqrt{2(H_0 - \varphi)} \rangle.$$

В формулах (2.4), (2.5) область интегрирования  $H > \varphi_{max}$  разбивается точкой  $\sqrt{\varphi_{max}}$  [1]. Средний ток  $\langle j_{T0} + j_T + j_{Ur} \rangle$  совпадает по величине с импульсом отдачи плазмы. Ранее отмечалось, что в процессе включения резонансные токи пролетных и захваченных электронов компенсируют друг друга, т. е. их средний ток равен нулю. Поэтому в любой момент эволюции средняя плотность тока электронов сохраняется и равна нулю, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. В процессе длительной эволюции волны,  $f_0(u^2/v_T^2) \ll f_0(v_T^{-2})$ , ток резонансных пролетных электронов становится пренебрежимо малым и поэтому далее не учитывается. Условие  $\varphi \leq H_0$  эквивалентно ограничению по фазе,  $|\psi| \leq \theta_0$ , где  $\theta_0$  — наименьший по величине корень уравнения  $H_0 = \varphi(\theta_0)$ . Поэтому фазовые колебания электронов, захваченных в области  $z < 0$ , и электронов, которые захвачены вблизи точки  $z = 0$ ,

ограничены интервалом  $|\psi| \leq \theta_0$ . Их вклад в полный ток в виде обоих интегралов (2.5) при достаточно длительной эволюции волны становится больше вклада электронов, фазовые колебания которых совершаются вне этого интервала.

### 3. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНЫ С ДВОЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Эволюция волны в слабонеоднородной плазме описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + u j(\varphi) = 0, \quad (3.1)$$

которое является следствием уравнений Власова–Максвелла и имеет первый интеграл

$$W = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 + U(\varphi), \quad (3.2)$$

где

$$U(\varphi) = 2 \int_0^{\varphi} u j(\varphi) d\varphi$$

— эффективный потенциал. Дисперсионное уравнение волны после интегрирования (3.2) запишем как условие периодичности потенциала  $\varphi$  по фазе  $\psi$

$$\pi = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} d\varphi / \sqrt{W - U(\varphi)}, \quad (3.3)$$

где  $\varphi_{min}, \varphi_{max}$  — корни подкоренного выражения под знаком интеграла. Проинтегрируем (2.4), (2.5) сначала по  $\varphi$ , а затем по  $H$ . Так как в случае максвелловского распределения функция

$$f_0(\gamma H^2) = \frac{\exp(-\gamma H^2)}{\sqrt{2\pi T}}$$

экспоненциально быстро убывает с ростом  $H$ , основной вклад под знаком второго интеграла в (2.5) вносят электроны с энергией  $H = H_0$  (поэтому при его интегрировании вынесем за знак интеграла  $\sqrt{H-\varphi}$ , положив  $H = H_0$ ) и  $N_s u_s \approx N_0$ ; остальные интегралы вычисляются точно [18]:

$$U(\varphi) = 2u \int j(\varphi) d\varphi = \begin{cases} U_1(\varphi), & \varphi > H_0, \\ U_2(\varphi), & \varphi < H_0, \end{cases}$$

где

$$U_1(\varphi) = u^2 NP \left\{ (\varphi - \varphi_0)^2 - b_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\varphi^2\right) D_{-3/2}\left(\sqrt{2\gamma}\varphi\right) \right\}, \quad (3.4)$$

$$U_2(\varphi) = u^2 NP \left\{ (\varphi - \varphi_0)^2 - b_1 \sqrt{H_0 - \varphi} - b_2 (H_0 - \varphi)^{3/2} - c_U \right\}. \quad (3.5)$$

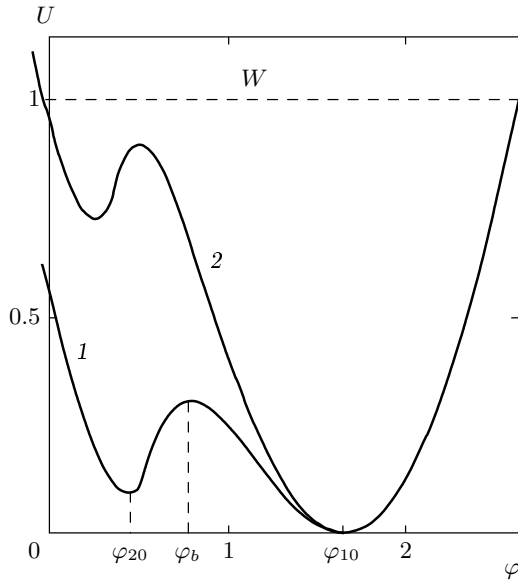


Рис. 1. Зависимости эффективного потенциала от потенциала волны;  $u/u_0 = 2.5$  (1),  $3.5$  (2)

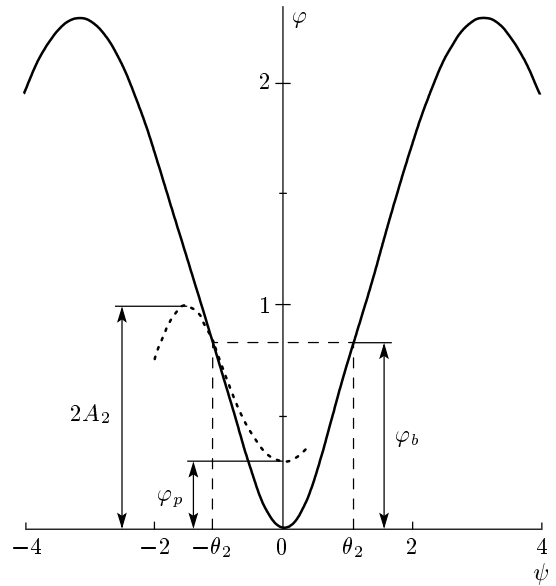


Рис. 2. Провисание потенциала волны

Здесь

$$b_0 = \frac{2N_0}{uNP\sqrt{T}(2\gamma)^{3/4}},$$

$$b_1 = \frac{2N_0}{uNP\sqrt{\gamma T}} (\Phi(\sqrt{\gamma}\varphi_{max}) - \Phi(\sqrt{\gamma}H_0)),$$

$$b_2 = \frac{8\sqrt{2}N_0}{3uNP} f_0(v_T^{-2}),$$

$$\varphi_0 = \langle \varphi \rangle + \frac{\langle j_T + j_{T0} + j_{U_T} \rangle}{uNP},$$

$$c_U = b_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}H_0^2\right) D_{-3/2}\left(\sqrt{2\gamma}H_0\right),$$

$D_{-\nu}(x)$  — функция параболического цилиндра,  $\Phi(x)$  — интеграл ошибок,  $c_U$  — постоянная, обеспечивающая непрерывность  $U(\varphi)$ . Эффективный потенциал  $U(\varphi)$  можно вычислить точно, раскладывая подынтегральное выражение, даваемое (2.5). Результат этого вычисления из-за громоздкости не приводится, он дан в виде графика на рис. 1 при следующих параметрах плазмы и волны:  $T = 10^6$  К,  $v_T = 0.55 \cdot 10^7$  м/с,  $v_T/u_0 = 0.7$ ,  $u/u_0 = 2.5$  (1),  $3.5$  (2).

Рельеф  $U(\varphi)$  на первом этапе эволюции определяется в основном двумя точками: потенциалом  $\varphi_0$  (на рис. 1 и далее  $\varphi_{10} = \varphi_0$ ), при котором достигается минимум эффективного потенциала, и потенциалом, равным  $H_0$ . Потенциал  $\varphi = H_0$  отделяет область  $\varphi > H_0$ , в которой  $U(\varphi)$  очень близок к эффективному потенциалу в линейном слу-

чае, от области  $\varphi < H_0$ , где происходит накопление качественных изменений, вызванных конденсацией электронов у дна потенциальной ямы. С ростом фазовой скорости волны  $H_0 = 2\sqrt{AA_0}/u$  уменьшается, а  $\varphi_0$  вместе с  $\langle j_T \rangle \approx uNP\varphi_0$  увеличивается. Полагая, что  $H_0 = \varphi_0$ , найдем величину фазовой скорости, при которой заканчивается первый этап,  $u_1 = 2\sqrt{AA_0}/\varphi_0 \approx 2$ . Дисперсия волны на первом этапе описана в работе [1], где найдена нелинейная поправка к линейному дисперсионному уравнению.

Выясним, как сказывается конденсация захваченных электронов в потенциальных ямах волны на процессе ее эволюции. Если эволюция волны достаточно длительна,  $u > 2$ , то  $H_0$  уменьшается до величины  $H_0 < \varphi_0$  и отрицательный вклад, вносимый слагаемыми, пропорциональными  $b_0$ , в  $U_1(\varphi)$  и слагаемыми, пропорциональными  $b_1, b_2$ , в  $U_2(\varphi)$ , перемещается в область  $\varphi < \varphi_0$ . По этой причине согласно (3.4) эффективный потенциал  $U_1(\varphi)$  с уменьшением  $\varphi$  в области  $\varphi < \varphi_{10}$  сначала растет (рис. 1), затем, достигнув максимума при потенциале

$$\varphi_b = \frac{2A}{u} \left\{ 1 + \frac{v_T^2 \sqrt{H_0}}{2uNP(\varphi_0 - H_0)} \exp\left(-\frac{1}{v_T^2}\right) \right\} \quad (3.6)$$

в области  $\varphi < \varphi_b$ , уменьшается. Эффективный потенциал  $U_2(\varphi)$ , являясь продолжением  $U_1(\varphi)$ , с уменьшением  $\varphi$  также уменьшается из-за отрицательного вклада слагаемых, пропорциональных  $b_1, b_2$ , но после достижения минимума при

$$\varphi_{20} = H_0 - \frac{\sqrt{2}A_0v_T}{\sqrt{\pi}\varphi_0 \exp(1/v_T^2)},$$

увеличивается.

Таким образом, после достаточно длительной эволюции волны из-за локального увеличения тока захваченных электронов в пределах фазового интервала  $-\theta_0 < \psi < \theta_0$ ,  $\theta_0 = \varphi^{-1}(H_0)$ , у эффективного потенциала  $U(\varphi)$  слева от основного минимума  $\varphi_0$  появляется вторая потенциальная яма (рис. 1). После ее появления в эволюции волны наступает второй этап: изменение потенциала  $\varphi$  ограничено не левой ветвью параболы  $U(\varphi) \sim (\varphi - \varphi_0)^2$ , как на первом этапе, а левой стенкой новой ямы (рис. 1). Из-за этого нижняя часть волны  $\varphi < \varphi_b$  в пределах интервала  $-\theta_2 < \psi < \theta_2$ ,  $\varphi(\theta_2) = \varphi_b$ , опускается еще ниже относительно ее верхней части (рис. 2). Конденсация электронов на дне потенциальных ям волны приводит к своеобразному эффекту — провисанию ее потенциала в области минимумов потенциальных ям. Так как форма провисания определяется профилем второй ямы эффективного потенциала, его можно рассматривать как фрагмент новой волны. После образования второй ямы у эффективного потенциала  $U(\varphi)$  изменение потенциала  $\varphi$  происходит поочередно в обеих потенциальных ямах. Вследствие этого ленгмюровскую волну на втором этапе эволюции можно представить как последовательность чередующихся, непрерывно переходящих друг в друга фрагментов двух волн с разными длинами волн. С увеличением фазовой скорости волны потенциал (3.6) уменьшается, что приводит к увеличению высоты барьера, разделяющего ямы, и сдвигу его влево (рис. 1). Наступает момент, когда высота эффективного потенциала  $U(\varphi)$  становится близкой к величине первого интеграла  $U(\varphi_b) \approx W$ , оставаясь меньше его. В этот момент формирование профилей волн завершается, т. е. можно говорить об амплитудах первой и второй волн, равных соответственно  $A \approx \varphi_{10} - \varphi_b$  и  $A_2 \approx \varphi_b - \varphi_{20}$ , где  $\varphi_{10} \approx \varphi_0$ ,  $\varphi_{20} \approx H_0$  — значения равновесия первой и второй волн.

Для аналитического описания эволюции волны с учетом провисания ее потенциала воспользуемся уравнением (3.1). Вычислим интегралы в (2.4), (2.5) и разложим полученные выражения в ряды по  $\tilde{\varphi}_1 = \varphi - \varphi_{10}$ ,  $\tilde{\varphi}_2 = \varphi - \varphi_{20}$ , ограничиваясь старшими порядками по  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2$ . После подстановки разло-

жений в (3.1) в системе отсчета, связанной с волной, найдем

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial z'^2} = -NP(1 - g_1)\tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_b < \varphi < \varphi_{max}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2}{\partial z'^2} = -NP(1 + g_2)\tilde{\varphi}_2, \quad \varphi < \varphi_b,$$

где  $z' = z - ut$ ,  $g_1 = g_1(\gamma, \varphi_0)$ ,

$$g_1(\gamma, \varphi) = \gamma b_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\varphi^2\right) D_{1/2}\left(\sqrt{2\gamma}\varphi\right),$$

$$g_2(\gamma) = \frac{\sqrt{2} f_0(\gamma H_0^2)}{uNP\sqrt{H_0 - \varphi_{20}}} \left\{ \frac{Av_T^2}{2u(H_0 - \varphi_{20})} - 1 \right\}.$$

Отметим, что система уравнений (3.7) на втором этапе эволюции пока не является самосогласованной. Трудность решения любой самосогласованной задачи заключается в том, что распределение электронов определяется потенциалом электрического поля, однако для нахождения последнего нужно знать это распределение. Распределение на втором этапе эволюции пока неизвестно. Тем не менее решение самосогласованной задачи облегчается, если принять во внимание, что распределение захваченных электронов формируется в процессе захвата опережающих пролетных электронов, распределение которых известно. Распределение захваченных электронов определяется также профилем потенциальной ямы, однако эта зависимость является более слабой. Действительно, форму волны нужно учитывать лишь при вычислении адиабатических инвариантов, например (2.1). Значение же адиабатического инварианта в первую очередь определяется амплитудой и фазовой скоростью волны и в меньшей мере зависит от ее формы. С учетом этих замечаний будем решать самосогласованную задачу эволюции волны на втором этапе, взяв в качестве исходного распределения распределение (2.3) электронов, захваченных на первом этапе, полагая в нем, что  $A$  и  $u$  — амплитуда и фазовая скорость волны на втором этапе.

Приближенное решение системы (3.7) в обоих случаях имеет вид

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} A_1 (1 + \cos(\psi_1 - \theta_1 - \theta_2)) + \varphi_p, & 2m(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2 < \psi_1 < \theta_1 + (2m + 1)(\theta_1 + \theta_2), \\ A_2 (1 - \cos \psi_2), & 2m(\theta_1 + \theta_2) - \theta_2 < \psi_2 < \theta_2 + 2m(\theta_1 + \theta_2), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $A_1, A_2$  — амплитуды фрагментов волн,

$$\psi_1 = \int k_1 dz - t, \quad \psi_2 = \int k_2 dz - t,$$

$$\theta_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\varphi_{max} - \varphi_b}{2A_1}}, \quad \theta_2 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\varphi_b}{2A_2}},$$

$\varphi_p = \varphi_{10} - A_1$  — величина провисания потенциала. Из графика, представленного на рис. 2, видно, что в процессе второго этапа  $\varphi_b$  уменьшается от  $\varphi_0 \approx A_1$  до  $2A_2$ ,  $\varphi_{max}$  увеличивается от  $2A_1$  до  $2(A_1 + A_2)$  (считаем, что  $\varphi_{min} = 0$ ). Поэтому, если учесть, что вначале второго этапа  $A_2 \approx A_1$ , то  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в течение второго этапа увеличиваются от  $\pi/2$  до максимального значения, равного  $\pi$ . Период потенциала (3.8) равен  $2(\theta_1 + \theta_2)$ .

В качестве исходных уравнений, описывающих дисперсию фрагментов волн, возьмем

$$k_1^2 = NP(1 - g_1), \quad k_2^2 = NP(1 + g_2). \quad (3.9)$$

Очевидно, что  $\lambda_1 > \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ ,  $\lambda_2 = 2\pi/k_2$  — длины волн первого и второго фрагментов. Поправки к длинам волн, которые определяются уравнениями (3.9), оказываются квадратичными по  $A$  и в случае  $A \ll 1$  их можно не принимать во внимание.

Выражения (3.9) показывают, что дисперсия дополнительных друг к другу фрагментов различна: с появлением провисания потенциала длина волны последовательности фрагментов, которые образуют нижнюю часть волны, где происходит конденсация электронов, становится меньше длины волны другой последовательности фрагментов, из которых состоит ее верхняя часть.

Таким образом, важное отличие стационарного нелинейного решения системы уравнений Власова — Максвелла для ленгмюровской волны, эволюционирующей в плазме с положительным градиентом концентрации, от других линеаризованных решений этой системы уравнений (например, моды Ван Кампена) состоит в том, что возможны решения в виде волн с двойной дисперсией, т. е. волн, состоящих из последовательности чередующихся друг с другом фрагментов двух волн, каждая из которых обладает своей дисперсией.

Длина волны равна сумме длин ее фрагментов  $l_1 = 2\theta_1/k_1$ ,  $l_2 = 2\theta_2/k_2$ . Отсюда с учетом формул (3.8), (3.9) имеем

$$\lambda = l_1 + l_2 = \frac{4}{\sqrt{NP}} \left( \frac{\arcsin \sqrt{(\varphi_{max} - \varphi_b)/2A_1}}{\sqrt{1 - g_1}} + \frac{\arcsin \sqrt{\varphi_b/2A_2}}{\sqrt{1 + g_2}} \right). \quad (3.10)$$

В начале второго этапа  $\varphi_b \approx \varphi_0 \approx A_1 \approx A_2$ ,  $\varphi_{max} - \varphi_b \approx A_1$ ,  $g_1 \approx 0$ ,  $g_2 \approx 0$ , поэтому дисперсия близка к линейной:  $u^2 NP \approx 1$ . В конце второго этапа  $\varphi_b = 2A_2$ ,  $\varphi_{max} = 2(A_1 + A_2)$ , откуда, если пренебречь  $g_1, g_2$ , из (3.10) следует дисперсионное уравнение  $u\sqrt{NP} = 2$ . Увеличение правой части вдвое по сравнению со случаем линейного дисперсионного уравнения связано с тем, что длина волны гибрида из двух волн в конце второго этапа вдвое больше длины волны каждого из фрагментов (в линейном приближении длины волн  $\lambda_1, \lambda_2$  фрагментов одинаковы).

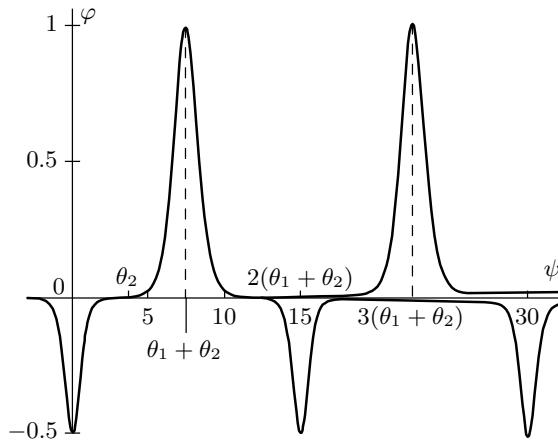
Для того чтобы решение (3.8), (3.10) стало самосогласованным, нужно вычислить адиабатический инвариант электронов в поле потенциала (3.8) и с его помощью найти функцию распределения электронов на втором этапе эволюции. В результате этих вычислений в выражении для  $g_2$ , входящем в (3.7), (3.9),  $\gamma$  нужно заменить коэффициентом

$$\gamma_1 = \frac{u^2}{16v_T^2 A_0 A_2}.$$

Причину трансформации ленгмюровской волны в гибрид из двух волн можно объяснить, рассматривая плазму как систему со многими колебательными степенями свободы. Если на первом квазилинейном этапе эволюции у волны одна колебательная степень свободы, то, после того как волной формируется поток из захваченных ею электронов, в плазменной системе появляется еще одна степень свободы, определяемая параметрами потока. Предложенный сценарий распада возможен для волны, нагруженной захваченными электронами, при таком их распределении, когда основная масса захваченных электронов конденсируется на дне потенциальных ям волны. В этом состоит отличие рассматриваемой модели распада волны от модели, описанных в известных работах [15, 16, 19].

#### 4. ЛЕНГМЮРОВСКАЯ ВОЛНА ПЕРЕД РАСПАДОМ

Наибольший интерес представляет поведение волны и изменение ее профиля перед распадом. В конце второго этапа, когда высота барьера  $U_1(\varphi_b)$  близка к величине  $W$ , не очевидно, что ангармонизм фрагментов волн будет малым и можно пользоваться решением (3.8). Если разложить точные выражения для эффективных потенциалов  $U_1(\varphi)$ ,  $U_2(\varphi)$  в ряды по  $\tilde{\varphi}_1 = \varphi - \varphi_{10}$ ,  $\tilde{\varphi}_2 = \varphi - \varphi_{20}$



**Рис. 3.** Распад последовательности разнополярных солитонов на две последовательности солитонов положительной и отрицательной полярностей

в окрестности их минимумов  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ , удерживая слагаемые, пропорциональные  $\tilde{\varphi}_1^4, \tilde{\varphi}_2^4$ , и подставить полученные выражения в (3.2), то после интегрирования вместо (3.8) получим решение, в котором вместо обычных косинусов будут эллиптические:  $\text{cn}(\psi_1 - \theta_1 - \theta_2, \tau_1), \text{cn}(\psi_2, \tau_2)$ , где

$$\tau_1 \approx A_1^{1/4} \left( \frac{u}{v_T} \right) \exp \left( -\frac{u^2}{4v_T^2} \right),$$

$$\tau_2 \approx \frac{A_2 u^2}{A_1^{3/2} \sqrt{v_T}} \exp \left( -\frac{A_1}{2A_2 v_T^2} \right).$$

Отсюда следует, что ангармонизм фрагментов волн с амплитудами  $A_1, A_2$  заметен лишь вблизи тепловой скорости, когда  $u \approx v_T, v_T \approx 1$ . Для первой волны это объяснимо, так как нелинейная поправка в выражении для  $U_1(\varphi)$  к члену  $(\varphi_1 - \varphi_0)^2$  вне области  $\varphi \approx \varphi_b$  экспоненциально мала. Поэтому далее вплоть до распада волны для описания формы импульсов положительной и отрицательной полярностей в области равновесных значений  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$  можно пользоваться формулой (3.8). Там, где потенциал  $U_1(\varphi)$  достигает максимума,  $\varphi \approx \varphi_b$ , профиль волны значительно отличается от синусоидального. Чтобы понять, как меняется форма потенциала волны в окрестности  $\varphi \approx \varphi_b$ , обратимся к графику рис. 1, кривая 2. В поле, форма потенциала которого совпадает с этой кривой, частица совершает финитное движение, отражаясь от краев потенциальной ямы, и быстро проскакивает области, где находятся ямы. Над вершиной барьера движение

частицы замедляется. Изменение потенциала  $\varphi$ , соответствующее движению частицы, в случае, когда  $W - U(\varphi_b) \ll W$ , представляет собой последовательность чередующихся друг с другом импульсов отрицательной и положительной полярностей (рис. 3). Для нахождения потенциала волны в окрестности  $\varphi \approx \varphi_b$  ограничимся поиском эффективных потенциалов  $U_1(\varphi), U_2(\varphi)$  в этой окрестности. Получим сначала распределение электронов с энергией  $H \approx \varphi_b$  в поле потенциала (3.8). Перед распадом  $\varphi_b \approx 2A_2$ , поэтому захваченные волной электроны с энергией  $\varphi_b < H < \varphi_{max}$  относительно фрагментов волны с амплитудой  $A_2$  будут пролетными, а электроны с энергией  $H_0 < H < \varphi_b$  — захваченными. Адиабатический инвариант первых имеет вид

$$J_1 \approx \frac{4}{\pi} u \sqrt{A_2} \kappa_2 E(\kappa_2^{-1}),$$

где  $\kappa_2^2 = H/2A_2$ , вторых —

$$J_2 = \frac{4}{\pi} u \sqrt{A_2} \kappa_2^2 B(\kappa_2).$$

Электроны с энергией  $H \approx \varphi_b$  захватываются в начале второго этапа после появления второй потенциальной ямы. Поэтому, определив значение функции (2.1) в этот момент и приравняв полученный результат значениям адиабатических инвариантов  $J_1, J_2$ , в приближении  $E(\kappa_2^{-1}) \approx 1, B(\kappa_2) \approx 1$  найдем распределение захваченных электронов с энергией  $H \approx \varphi_b$  перед распадом:

$$f_{Tb} = \begin{cases} f_0(\beta_1 H), & \varphi_b < H < \varphi_{max}, \beta_1 = \frac{u^2}{2v_T^2 A_0}, \\ f_0(\beta_2 H^2), & H_0 < H < \varphi_b, \beta_2 = \frac{u^2}{4v_T^2 A_0 A_2}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Вычислив эффективный потенциал

$$U_1(\varphi) = u^2 NP(\varphi - \varphi_0)^2 - 4u \int_{\varphi}^{\varphi_{max}} N_s u_s f_{Tb} \sqrt{2(H - \varphi)} dH, \quad \varphi > H_0, \quad (4.2)$$

разложим его в окрестности  $\varphi = \varphi_b$  в ряды по степеням  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_b$ . После этого, ограничиваясь слагаемыми, пропорциональными  $\tilde{\varphi}^3$ , получим

$$U_1(\tilde{\varphi}) = U_1(\varphi_b) - u^2 NP \left\{ (q_1 - 1) \tilde{\varphi}^2 - \frac{q_2}{3} \tilde{\varphi}^3 \right\}, \quad (4.3)$$

$$\varphi \approx \varphi_b,$$



где

$$q_1 = q_1(\beta_1) = N_0 \frac{\exp(-\beta_1 \varphi_b)}{NP v_T^2 \sqrt{A_0}}$$

при  $\varphi_b < H < \varphi_{max}$ ,

$$q_1 = q_1(\beta_2) = g_2(\beta_2, \varphi_b)$$

при  $H_0 < H < \varphi_b$ . При условии

$$\frac{u^2}{v_T^2} > \sqrt{A_0} \exp \frac{1}{v_T^2}$$

коэффициент перед  $\tilde{\varphi}^2$  в формуле (4.3) отрицателен, что необходимо для появления солитонного решения. Определив приближенно значения корней уравнения  $W - U_1(\tilde{\varphi}) = 0$ , разложим выражение  $W - U_1(\tilde{\varphi})$  в области  $\varphi > \varphi_b$  на множители:

$$W - U_1(\tilde{\varphi}) = u^2 NP \frac{q_2}{3} \{ (\tilde{\varphi}^2 + c^2) (a - \tilde{\varphi}) \}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_b,$$

где

$$c^2 = \frac{\delta w}{q_1 - 1}, \quad a = 3 \frac{q_1 - 1}{q_2}, \quad \delta w = \frac{W - U_1(\varphi_b)}{u^2 NP}.$$

Интегрируя (3.2) в окрестности  $\varphi \approx \varphi_b$  с найденным подкоренным выражением с помощью подстановки

$$\tilde{\varphi} = a - \sqrt{a^2 + c^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}, \quad (4.5)$$

получим

$$u \sqrt{NP \frac{q_2}{3}} \psi = \frac{F(\xi_0, \tau_s) - F(\xi, \tau_s)}{(a^2 + c^2)^{1/4}}, \quad (4.6)$$

где

$$\tau_s^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{2\sqrt{a^2 + c^2}},$$

а  $\xi_0$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\xi_0}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

При  $U(\varphi_b) \rightarrow W$  в формуле (4.6) положим  $F(\xi_0, \tau_s) \approx K(\tau_s)$ . После обращения неполного эллиптического интеграла в (4.6) и подстановки полученного результата в (4.5) найдем

$$\tilde{\varphi} = \pm \left\{ a - \sqrt{a^2 + c^2} \left( \frac{1 - \operatorname{cn}(k_s z', \tau_s)}{1 + \operatorname{cn}(k_s z', \tau_s)} \right) \right\}, \quad (4.7)$$

где

$$k_s = \sqrt{\frac{NP q_2 \sqrt{a^2 + c^2}}{3}}.$$

Отсчет  $z' = z - ut$  в этом выражении начинается с точки, в которой  $\tilde{\varphi}$  достигает максимума. Так как (3.8) является хорошим приближением для потенциала в окрестностях  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ , а (4.7) хорошо описывает потенциал у подножия солитонов, эти решения необходимо сшить. Приравняв (3.8) и (4.7), найдем точки, в которых сшиваются полуволна амплитуды  $A_1$  и подножие солитона  $\varphi \approx \varphi_b$  положительной полярности:  $\pm l_+ \approx \pm \pi/k_1$ , и точки, в которых сшиваются полуволна амплитуды  $A_2$  и подножие солитона отрицательной полярности:  $\pm l_- \approx \pm \pi/k_2$ ,

$$k_{1,2} = \sqrt{NP(1 \mp g_{1,2})}.$$

В конце второго этапа потенциал волны в системе отсчета, связанной с волной, в пределах  $-\lambda_s/2 < z' < \lambda_s/2$  приобретает вид

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} A_1 \left\{ 1 + \cos \left( k_1 \left( z' \pm \frac{\lambda_s}{2} \right) \right) \right\}, & -\lambda_s/2 < z' < -\lambda_s/2 + l_+, \\ & \lambda_s/2 - l_+ < z' < \lambda_s/2, \\ \pm \sqrt{\frac{\delta w}{q_1 - 1}} \operatorname{sn} \left( k_s \left( z' \pm \frac{\lambda_s}{4} \right), \tau_s \right) / \operatorname{dn} \left( k_s \left( z' \pm \frac{\lambda_s}{4} \right), \tau_s \right), & -\lambda_s/2 + l_+ < z' < -l_-, \\ & l_- < z' < \lambda_s/2 - l_+, \\ -A_2 (1 + \cos(k_2 z')), & -l_- < z' < l_-, \end{cases} \quad (4.8)$$

где  $\lambda_s$  — период следования солитонов, причем знак «-» перед  $\sqrt{\delta w/(q_1 - 1)}$  соответствует случаю  $-\lambda_s/2 + l_+ < z' < -l_-$ , знак «+» — случаю  $l_- < z' < \lambda_s/2 - l_+$ . Начало отчета совпадает с одним из минимумов потенциала.

Решение (4.8) является периодической функцией

с периодом (длиной волны)  $\lambda_s = 4K(\tau_s)/k_s$ . В пределе  $U(\varphi_b) \rightarrow W$  длина волны растет по логарифмическому закону [20]:

$$\lambda_s \approx \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{aNPq_2}} \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \tau_s^2}}, \quad \tau_s \rightarrow 1. \quad (4.9)$$

### 5. РАСПАД ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ

Эволюцию плазменных колебаний в момент распада волны  $U_1(\varphi_b) \approx W$  необходимо рассматривать особо, так как расстояние между импульсами положительной и отрицательной полярностей неограниченно растет. Очевидно, это не приводит к изменению функции распределения захваченных электро-

нов в пределах импульса отрицательной полярности. Нижняя часть потенциала  $\varphi \leq \varphi_b$  по-прежнему определяется формулой (4.8). В пределе  $\delta w \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow 0$  потенциал (4.7) становится солитоном [20, 21], однако, как было отмечено, самосогласованное решение можно записать только для солитонов отрицательной полярности:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_b - A_2 \{1 + \cos(k_2(z - ut))\}, & |z - ut| < l_-, \\ \varphi_b - \frac{a}{\text{ch}^2(k_s(z - ut)/2)}, & l_- < |z - ut| < \frac{\lambda_s}{2}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь

$$a = \frac{3(q_1(\beta_2) - 1)}{q_2},$$

$\pm l_- \approx \pm \pi/k_2$  — точки, в которых сшивается потенциал подножия солитона  $\varphi \approx \varphi_b$  с импульсом отрицательной полярности.

Чтобы построить самосогласованное решение для последовательности солитонов положительной полярности, найдем сначала распределение электронов, захваченных полем последовательности этих солитонов. Будем считать, что потенциал солитонов положительной полярности отличается от нуля лишь в очень малом интервале  $\Delta z' \ll \lambda_s$ , где  $\lambda_s$  — расстояние между солитонами. Тогда адиабатический инвариант, описывающий движение электронов, захваченных полем периодической последовательности солитонов, равен

$$J = \frac{uk_s}{2\pi} \int_0^{\lambda_s} \sqrt{2(H - \varphi)} dz' \approx \frac{2}{\pi} K(\tau_s) u \sqrt{2H_b},$$

$$H_b = H - \varphi_b.$$

Приведенный адиабатический инвариант имеет смысл, если движение электронов является периодическим, а это возможно при конечном расстоянии  $\lambda_s$  между солитонами. Далее показано, что хотя расстояние между солитонами в момент распада волны  $U(\varphi_b) = W$  неограниченно растет с уменьшением скорости роста высоты барьера, оно остается конечным, если эта скорость не обращается в нуль. Распределение электронов, захваченных последовательностью положительных солитонов, вычисленное с помощью этого адиабатического инварианта, имеет вид

$$f_{Tb} = f_0 \left( \frac{u_s^2}{v_T^2} \right) = f_0(\beta_b H_b), \quad \beta_b = \frac{u^2 K^2(\tau_s)}{2v_T^2 A_0}.$$

Сравнивая это распределение с (4.1), отметим, что эффективный потенциал  $U_1(\tilde{\varphi})$  остается в прежнем виде (4.3), только в коэффициентах  $q_1$  нужно заменить  $\beta_1$  на  $\beta_b$ . Следовательно, формулу (4.7) можно использовать для описания потенциала  $\varphi \approx \varphi_b$  у подножия солитонов положительной полярности. В пределе  $\delta w \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow 0$  этот потенциал становится солитоном, поэтому для  $\varphi > \varphi_b$  запишем

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_b + A \{1 + \cos(k_1(z - ut))\}, & |z - ut| < l_+, \\ \varphi_b + \frac{a}{\text{ch}^2(k_s(z - ut)/2)}, & l_+ < |z - ut| < \frac{\lambda_s}{2}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $a = 3(q_1(\beta_b) - 1)/q_2$ ,  $l_+ \approx \pi/k_1$ . Отметим, что полученное решение в виде солитонов отрицательной и положительной полярностей (5.1), (5.2), которые следуют друг за другом, возможно, если при  $U(\varphi_b) \rightarrow W$  плазма становится однородной. В этом случае распада волны не происходит, а расстояние между солитонами неограниченно растет.

Предложенный сценарий эволюции ленгмюровской волны не дает закона дисперсии в момент ее распада. В случае, когда  $U(\varphi_b) \rightarrow W$ , неограниченный рост расстояния между солитонами легко пояснить с помощью аналогии между механическим движением частицы и изменением потенциала, задаваемым уравнением (4.3). При движении частицы

над вершиной барьера, когда ее полная энергия равна высоте барьера, время прохождения частицы над барьером неограниченно возрастает. В связи с тем, что расстояние между солитонами и их фазовая скорость в момент распада волны неограниченно увеличиваются, встает вопрос: произойдет ли распад вообще? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно принять во внимание, что из-за изменения высоты барьера, даже очень медленного, время нахождения частицы над барьером, или, точнее, время перехода частицы из захваченного в пролетное состояние и наоборот, становится конечным [22, 23]. Аналогично, если происходит увеличение высоты  $U(\varphi_b)$  барьера, пусть даже очень медленное, расстояние между солитонами остается конечным.

Рассмотрим случай линейного роста высоты барьера

$$W - U(\varphi_b) = \varepsilon_d(z_d - z), \quad \varepsilon_d = \left| \frac{d(W - U(\varphi_b))}{dz} \right|,$$

$z_d$  — точка распада волны. Проанализируем эволюцию непосредственно перед распадом волны на расстоянии порядка нескольких  $\lambda_s$  до точки распада  $z_d$ . Выбрав для удобства за начало отсчета точку, в которой солитон положительной полярности в момент  $t = 0$  достигает максимума, обозначим в (4.4)

$$c^2 \approx \varepsilon z = \varepsilon(z' + ut), \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_d}{u^2 NP(q_1 - 1)}.$$

Тогда уравнение (3.1) для правого склона солитона положительной полярности в системе отсчета, связанной с ним, принимает вид

$$\frac{d\varphi_r}{dz'} = -\frac{k_s}{\sqrt{a}} \sqrt{(a - \varphi_r)(\varphi_r^2 + \varepsilon(z' + ut))}, \quad (5.3)$$

$$0 < z < z_d,$$

где  $\varphi_r = \varphi_r(k_s z') = \varphi(k_s z') - \varphi_b$ . Знак минус перед радикалом выбран потому, что на правом склоне солитона  $d\varphi_r/dz' < 0$ . Для  $\varphi \approx \varphi_b$  решение (5.3) в старшем порядке по  $\varepsilon$  при условии

$$k_s z' \gg 1, \quad \text{ch}(k_s z') \approx \frac{\exp(k_s z')}{2}$$

запишем в виде

$$\varphi \approx \varphi_b + 4ae^{-k_s z'} - \frac{\varepsilon z' \exp(k_s z')}{16a}, \quad 0 < z' < z_d. \quad (5.4)$$

Откуда, полагая  $\varphi = \varphi_b$ , в приближении  $\ln z' \ll k_s z'$  найдем

$$\lambda_s \approx \frac{1}{k_s} \ln \frac{8a}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.5)$$

Таким образом, перед распадом волна приобретает вид последовательности разнополярных солитонов, чередующихся друг с другом (рис. 3). Расстояние между солитонами в процессе эволюции волны увеличивается и в момент ее распада достигает величины (5.5), т. е. остается конечным, если скорость увеличения  $U(\varphi_b)$  не равна нулю. Значит, применение адиабатического инварианта обосновано и в момент распада, при условии  $\lambda_s \ll L$ , где  $L$  — характерный размер неоднородности. Отметим также, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \lambda_s = 0,$$

откуда приближение  $c^2 \approx \varepsilon z$  справедливо, несмотря на очень большое значение  $\lambda_s$ . Так как  $\Delta W \sim \varepsilon$ , в процессе распада на расстояниях, сравнимых с длиной волны, величина  $W$  не успевает измениться:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Delta W/W) = 0.$$

Найдем потенциалы волн после распада,  $U(\varphi_b) > W$ . Это можно сделать, оставаясь в рамках адиабатического приближения, если фазовые скорости последовательностей солитонов до и после распада одинаковы. Возникает вопрос, что произойдет с момента  $U(\varphi_b) = W$  при малом шевелении профиля эффективного потенциала  $U(\varphi)$ , если такое изменение заключается лишь в увеличении высоты барьера  $U(\varphi_b) > W$ ? Высота барьера эффективного потенциала  $U(\varphi_b)$ , разделяющего потенциальные ямы, с ростом фазовой скорости волны увеличивается, поэтому между двумя последовательностями солитонов положительной и отрицательной полярностей появляется зазор (рис. 3). В момент  $U(\varphi_b) = W$  можно считать, что обе волны сформировались. В линейном приближении токи этих волн определяются распределением пролетных электронов, которое в процессе распада не изменяется. Последнее означает, что рельеф эффективных потенциалов  $U_1(\varphi_1)$ ,  $U_2(\varphi_2)$  вне вершины барьера изменяется лишь в поправках по  $A_1$ ,  $A_2$  выше второго порядка. Поэтому форма вершин импульсов положительной и отрицательной полярностей в линейном приближении по амплитуде в процессе распада совпадает с формой, задаваемой (4.8). Для подножия этих импульсов можно положить  $\varphi \approx \varphi_b$ , тогда распределение захваченных электронов в рассматриваемом приближении в момент распада остается прежним. Это позволяет, как и в случае (4.2), записать эффектив-

ные потенциалы непосредственно после распада в окрестности  $\varphi \approx \varphi_b$  для первой и второй волн:

$$\begin{aligned} U_1(\tilde{\varphi}_1) &= u^2 NP \tilde{\varphi}_1^2 - \\ &- 4u \int_{\tilde{\varphi}_1}^{2A_1} N_s u_s f_0(\beta_b H) \sqrt{2(H - \tilde{\varphi}_1)} dH, \\ U_2(\tilde{\varphi}_2) &= u^2 NP \tilde{\varphi}_2^2 + \\ &+ 4u \int_{\tilde{\varphi}_2}^{\varphi_{b2}} N_s u_s f_0(\beta_2 H^2) \sqrt{2(H - \tilde{\varphi}_2)} dH, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \varphi_{b1}$ ,  $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 - \varphi_{b2}$ ,  $\varphi_{b1}$ ,  $\varphi_{b2}$  — минимальное и максимальное значения потенциалов первой и второй волн. Разложение эффективных потенциалов  $U_1(\varphi_1)$ ,  $U_2(\varphi_2)$  в ряд по степеням  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2$  в окрестности  $\varphi \approx \varphi_b$  с удержанием в них слагаемых, содержащих  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$  с показателями не выше третьей

степени, дает (4.3). Однако разложение  $W - U_1(\varphi_1)$ ,  $W - U_2(\varphi_2)$  на множители отличается от (4.4) тем, что в этом выражении  $\delta w$  нужно заменить на  $-\delta w$ . Поэтому

$$\begin{aligned} W - U_1(\tilde{\varphi}_{1,2}) &= \\ &= u^2 NP \frac{q_2}{3} \{ (\tilde{\varphi}_{1,2}^2 - c^2) (a_d - \tilde{\varphi}_{1,2}) \}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$c^2 = \frac{\delta w}{q_1 - 1}, \quad \delta w = \frac{U_1(\varphi_b) - W}{u^2 NP}, \quad a_d \approx 3 \frac{q_1 - 1}{q_2}.$$

Считаем, что амплитуды импульсов положительной и отрицательной полярностей,  $2A_1$ ,  $2A_2$ , в процессе распада не меняются. После подстановки (5.7) в (3.2) и интегрирования полученного выражения потенциалы волн после распада запишем в виде

$$\varphi_{1,2}(z - ut) = \begin{cases} \pm A_{1,2} (1 + \cos(k_{1,2}(z - ut))) \pm c, & |z - ut| < l_{\pm}, \\ \pm \frac{a_d}{\text{ch}^2(k_d(z - ut)/2)} \pm c, & l_{\pm} < |z - ut| < \frac{\lambda_d}{2}. \end{cases}$$

Здесь

$$k_d = \sqrt{\frac{(a_d + c)NPq_2}{3}}, \quad \tau_d = \sqrt{\frac{a_d - c}{a_d + c}},$$

индексы « $\pm$ » относятся, соответственно, к солитонам положительной и отрицательной полярностей,  $\lambda_d$  — период следования солитонов. Из полученных решений видно, что величина зазора

$$2c \sim \sqrt{U(\varphi_b) - W}$$

между подножиями импульсов отрицательной и положительной полярностей с ростом высоты барьера увеличивается. Фазовые скорости волн после распада определяются из условия сохранения средней плотности потока энергии в процессе распада:

$$S_w(\varphi) + S_e = S_{w1}(\varphi_1) + S_{w2}(\varphi_2) + S_{e1} + S_{e2}.$$

Здесь [1]

$$S_w(\varphi) = \frac{3NT (\langle \varphi_+^2 \rangle + \langle \varphi_-^2 \rangle)}{u^3},$$

$$S_{w1,2}(\varphi_{1,2}) = \frac{3NT \langle \varphi_{1,2}^2 \rangle}{u^3}$$

— средние плотности потоков энергии поля до и после распада,  $\varphi_+ = \varphi$ , если  $\varphi > 0$ ,  $\varphi_- = \varphi$ , если  $\varphi < 0$ ,

$$S_e = \langle j(\varphi_+) + j(\varphi_-) \rangle u^2 / 2,$$

$$S_{e1,2} = \langle j_{1,2}(\varphi_{1,2}) \rangle u_{1,2}^2 / 2$$

— средние плотности потоков колебательной энергии захваченных электронов до и после распада,

$$\langle j_1 \rangle = \frac{8}{\pi} \left\{ \int_{u_b}^{u_d} N_s f_0 \frac{d}{dv} (v\sqrt{A}) dv \right\},$$

$$\begin{aligned} \langle j_2 \rangle \approx \frac{8}{\pi} \left\{ \int_1^{u_b} N_s f_0 \frac{d}{dv} (v\sqrt{A}) dv - \right. \\ \left. - \frac{H_0}{2\sqrt{A_0}} N_0 f_0 (v_T^{-2}) \right\}, \end{aligned}$$

где  $f_0 = f_0(v^2/2T)$ ,  $u_b$  — фазовая скорость волны, при которой были захвачены электроны, имеющие энергию  $H = \varphi_b$  в момент распада. В момент распада в пренебрежении различием между  $a$  и  $a_d$  можно считать  $\varphi_+ = \varphi_1$ ,  $\varphi_- = \varphi_2$ , поэтому из уравнения баланса энергии следует, что фазовые скорости до и после распада близки  $u \approx u_1 \approx u_2$ . Отметим, что они отличаются лишь на величину  $\sqrt{2(A_1 + A_2)}$ . Длина волны после распада равна

$$\lambda_d \approx \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{a_d NP q_2}} \ln \left( 2\sqrt{\frac{2a_d}{c}} \right), \quad \tau_d \rightarrow 1. \quad (5.8)$$

Сравнивая формулы (4.9), (5.8), отметим, что длины волн до и после распада одинаковы, если  $a_d \approx a$ . Сравнение потенциалов волн до и после распада показывает, что форма импульсов положительной и отрицательной полярностей изменяется незначительно, в основном, у их подножия. Изменение формы солитонов положительной и отрицательной полярностей после прохождения точки распада сводится к тому, что края солитонов положительной полярности, ранее смыкавшиеся с краями солитонов отрицательной полярности, соединяются между собой, то же происходит с солитонами отрицательной полярности. Такое изменение формы солитонов не приводит к заметному изменению функции распределения захваченных электронов, тем более пролетных.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самым простым примером распада является генерация новых гармоник в нелинейной среде [16]. Формирование гармоник происходит сразу после распада, а их рост начинается с нулевой интенсивности. В случае параметрической неустойчивости предполагается существование малых волн возмущения на фоне волны накачки [15]. Частным случаем является распадная неустойчивость, когда волны возмущения две. Предложенная модель распада отличается от известных, так как применима лишь для волны, нагруженной захваченными электронами. Основное отличие состоит в том, что перед распадом волна испытывает качественную перестройку. В ее недрах зарождаются фрагменты новой волны. Перед распадом возникает гибрид из двух волн, каждая из которых обладает своей дисперсией. После того как фрагменты волн полностью сформируются, расстояние между их равновесными состояниями становится равным сумме амплитуд,  $A_1 + A_2$ . С этого момента возможно отделение новой волны от исходной. Однако, если бы волны в момент распада оставались периодическими, их потенциалы до и после распада невозможно было бы сшить. Действительно, из-за различия фазовых скоростей волн до и после распада у волн в точке распада в разные моменты времени фазы будут разными. Эта проблема решается, если учесть, что перед распадом происходит укрупнение горбов положительной и отрицательной полярностей и неограниченный рост расстояния между ними. То есть, чтобы возникли две новые волны, нагруженные захваченными электронами, исходная волна перед распадом трансформируется в последовательность разнополярных солито-

нов, которая в момент распада не является периодической. Для однократного акта распада достаточно увеличения фазовой скорости в  $2\sqrt{A_1/A_2}$  раза, что не так уж велико. Из этого следует, что после описанного выше распада от исходной ленгмюровской волны в процессе дальнейшей эволюции опять будут «отпочковываться» новые волны, нагруженные захваченными электронами. Таким образом, эволюция ленгмюровской волны в слабонеоднородной плазме с положительным градиентом концентрации сопровождается возникновением слабой турбулентности, сценарий развития которой аналогичен сценарию, предложенному Ландау на примере турбулентности гидродинамического течения вязкой жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Красовский, ЖЭТФ **107**, 741 (1995).
2. В. И. Карпман, Д. Р. Шкляр, ЖЭТФ **67**, 103 (1974).
3. Я. И. Истомин, В. И. Карпман, Д. Р. Шкляр, ЖЭТФ **64**, 2072 (1973).
4. E. Asseo, G. Laval, R. Pellat, and A. Roux, J. Plasma Phys. **8**, 341 (1972).
5. G. Laval and R. Pellat, J. Geophys. Res. **75**, 3255 (1970).
6. Н. С. Ерохин, Н. Н. Зольникова, В. Л. Красовский и др., ЖЭТФ **100**, 882 (1991).
7. В. С. Бескин, А. В. Гуревич, Я. И. Истомин, ЖЭТФ **92**, 1277 (1987).
8. В. И. Карпман, Д. Р. Шкляр, ЖЭТФ **62**, 944 (1972).
9. В. П. Милантьев, ЖЭТФ **35**, 132 (1983).
10. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **53**, 925 (1967).
11. А. С. Бакай, Ю. П. Степановский, *Адиабатические инварианты*, Наукова думка, Киев (1981).
12. В. Я. Давыдовский, А. И. Матвеев, Физика плазмы **11**, 1368 (1985).
13. А. С. Бакай, *Вопросы атомной науки и техники*, ХФТИ (1976).
14. В. Я. Давыдовский, А. И. Матвеев, Физика плазмы **13**, 443 (1987).
15. Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев, *Физика плазмы для физиков*, Атомиздат, Москва (1979).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

- 
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1965).
18. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).
19. А. И. Ахиезер, А. А. Ахиезер, Р. В. Половин, *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).
20. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
21. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1988).
22. А. В. Тимофеев, *ЖЭТФ* **75**, 1303 (1980).
23. В. Я. Давыдовский, А. И. Матвеев, *ЖТФ* **53**, 2125 (1982).