

НОВЫЕ ТИПЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР В МНОГОПОДРЕШЕТОЧНЫХ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А. Б. Борисов*

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 2005 г.

Найден широкий класс трехмерных пространственных структур в многоподрешеточных антиферромагнетиках в изотропном приближении (модель главного кирального поля на группе $SU(2)$). Согласно теории Андреева–Марченко такое приближение применимо к спиновому стеклу и дает качественное понимание структур в реальных многоподрешеточных антиферромагнетиках. Уравнения модели специальными подстановками редуцированы в новые уравнения с простой геометрической интерпретацией. С помощью дифференциально-геометрического метода получены различные типы структур (некоторые из них определяются произвольными функциями), включая локализованные и нелокализованные текстуры, структуры со степенью отображения равной единице, антиферромагнитные «мишени» и трехмерные источники, двумерные и трехмерные вихревые и спиральные структуры. Указываются возможности экспериментальной проверки локализованных, вихревых и спиральных структур в антиферромагнетиках.

PACS: 12.39.Dc, 02.30.Jr, 11.10.Im, 75.10.Nk

1. ВВЕДЕНИЕ

В обычно используемой феноменологической теории сложные магнитные структуры рассматриваются как совокупность вставленных друг в друга магнитных подрешеток. При континуальном описании каждая магнитная подрешетка характеризуется средней плотностью магнитного момента M_j , где j — номер подрешетки. В длинноволновом приближении для анализа динамики и магнитных пространственных структур такой подход является малоэффективным. Когда в магнитной системе основную роль играют обменные взаимодействия, можно избежать использования большого числа магнитных подрешеток и найти более простые эффективные уравнения динамики [1–4]. Возникновение магнитоупорядоченных состояний всегда сопровождается явлением спонтанного нарушения симметрии обменных взаимодействий — гамилтониан обменных взаимодействий инвариантен относительно любого поворота всех спинов на один и тот же угол, но никакая магнитная структура не является инвариантной относительно всех таких поворотов: существуют макропараметры (макро-

скопические мультипольные моменты), которые не инвариантны относительно поворота всех спинов на один и тот же угол. Зависящие от координат и времени локальные повороты спинов, изменяющие равновесные значения макровеличин, представляют элементарные магнитные возбуждения системы. Вследствие близкодействующего характера обменных сил энергия этих элементарных возбуждений (магнонов) обращается в нуль при импульсе, стремящемся к нулю. Наиболее общее выражение для длинноволновой феноменологической плотности потенциальной энергии U (в кристаллах без центра инверсии при нулевой спонтанной намагниченности), инвариантной относительно группы $SO(3)$ спиновых вращений, в случае, когда основное состояние магнетика инвариантно только относительно тождественного преобразования группы $SO(3)$, согласно теориям Андреева–Марченко [1–3] и Волкова–Желтухина [4], имеет вид

$$U = \frac{1}{2}(c_{ik,lm}\omega_{i,l}\omega_{k,m}). \quad (1)$$

Здесь инвариантные к спиновым вращениям (реализуемым правыми сдвигами на группе $SU(2)$) величины $\omega_{i,l}$ связывают повороты матрицы спиновых вращений G ($G \in SU(2)$), параметры которой зави-

*E-mail: borisov@imp.uran.ru

сят от координат, в точках x_i и $x_i + dx_i$ следующим образом:

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} = i \sigma_p \omega_{p,k} G. \quad (2)$$

Нахождение двумерных и трехмерных структур с произвольным инвариантным тензором $c_{ik,lm}$, который играет роль модулей упругости, является трудной и полностью нерешенной задачей. В этой статье мы находим новые типы пространственных текстур в многоподрешеточных антиферромагнетиках в изотропном приближении, полагая

$$c_{ik,lm} \propto \delta_{ik} \delta_{lm}. \quad (3)$$

Хотя такое приближение применимо буквально только к спиновому стеклу [2, 3], оно позволяет упростить задачу и дает качественное понимание структур в реальных многоподрешеточных антиферромагнетиках. Подобное приближение используется в континуальной теории нематиков (одноконстантное приближение) и теории упругости с аппроксимацией анизотропного кристалла изотропной средой. Для дальнейшего изложения удобно использовать эквивалентные формы уравнений, следующих из (1), (3). Из уравнений (1), (2), (3) сразу следует, что с точностью до масштабных преобразований выражение для U равно

$$\frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\partial G^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} \right)$$

и описывает нелинейную модель главного кирально-го на группе $SU(2)$. Подставляя в это выражение разложение матрицы G ,

$$G = in_j \sigma_j + n_0 \sigma_0, \quad (4)$$

по матрицам Паули σ_j ($j = 1, 2, 3$) и единичной матрице σ_0 , мы получаем стационарную модель n -поля ($n \in S^3$), $n_\mu = (n_0, \mathbf{n})$ со связью $\mathbf{n}^2 + n_0^2 = 1$ в виде

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} + \frac{\partial n_0}{\partial x_i} \frac{\partial n_0}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Модель (5) универсальна и имеет многочисленные физические приложения в теории поля и физике конденсированных сред. Она описывает низкоэнергетическую динамику π -мезонов [5] (поле \mathbf{n} пропорционально триплету пионов) и пионный конденсат в стационарном случае. Модель (5) является конформно-инвариантной [6] и интегрируемой [7, 8] методом обратной задачи рассеяния в пространствах (2,0)

и (1,1). В трехмерном случае выявление пространственных структур крайне затруднено из-за нелинейности уравнений с триплетом полей. В этой работе мы находим широкий класс решений модели (1), (3) с помощью специальных подстановок, которые показывают глубокую связь этой модели с задачами классической дифференциальной геометрии.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 используются три подстановки, которые хотя и не охватывают многообразия всех решений (1), (3), но увеличивают число уравнений и редуцируют систему (1), (3) в новые системы с простой геометрической интерпретацией. Первая из этих систем — тригональная система для гармонических координат. Для ее решения в разд. 3 применяется дифференциально-геометрический метод интегрирования. Вначале мы совершаем преобразование годографа, т.е. изменяем роль зависимых и независимых переменных. Однако далее после такой замены, в отличие от стандартного преобразования годографа, мы не заменяем производные полей, а определяем их как новые переменные, связанные с компонентами метрического тензора, индуцированного таким преобразованием. Тогда искомое уравнение переписывается в терминах компонент метрического тензора. Поскольку независимые переменные вначале были евклидовыми, тензор кривизны в терминах введенной метрики равен нулю. В итоге получаем самосогласованную систему уравнений для определения компонент метрического тензора. При этом уравнение нулевой кривизны оказывается главным уравнением, а искомая система уравнений — ее редукцией. Ее решение позволяет далее по формулам классической геометрии найти решение для искомого дифференциального уравнения в виде неявных функций. Мы показываем, что при определенной ограниченности такой дифференциально-геометрический подход, основанный на вложении нелинейного уравнения в частных производных в определенную дифференциальную связь в евклидовом пространстве, дает широкий класс пространственных структур, получение которых другими методами крайне затруднено. В итоге находим семь пространственных текстур, включающих вихри, солитоны, пространственные источники, нелокализованные структуры и структуры со степенью отображения равной единице, сходные по некоторым своим свойствам с топологическими солитонами. Многие из этих решений определяются произвольными функциями. Раздел 3 посвящен определению структур, связанных со второй и тре-

твей подстановками. Для второй подстановки поле θ локально зависит от вспомогательного поля a , $\theta = \theta(a)$. При этом поля a, b, c — гармонические функции с определенными связями между их градиентами. Дифференциально-геометрический метод позволяет найти четыре пространственные структуры, включая антиферромагнитные «мишени», спиральные вихри и их дипольные конфигурации. Наконец, в конце разд. 3 обсуждаются пространственные спиральные структуры, связанные с подстановкой, которая позволяет редуцировать решение модели (5) в R^3 в решение этой же модели, где матрица G зависит от двух гармонических полей

$$G = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{(b+c)i}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} & \exp\left(-\frac{(-b+c)i}{2}\right) i \sin \frac{\theta}{2} \\ \exp\left(\frac{(-b+c)i}{2}\right) i \sin \frac{\theta}{2} & \exp\left(-\frac{(b+c)i}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

с углами θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), b ($0 \leq b \leq 2\pi$), c ($0 \leq c \leq 2\pi$) мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta b + \cos \theta \Delta c - \sin \theta \nabla c \nabla \theta &= 0, \\ \Delta c + \cos \theta \Delta b - \sin \theta \nabla b \nabla \theta &= 0, \\ \Delta \theta + \sin \theta \nabla b \nabla c &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Широкие классы решений модели (7) могут быть получены посредством следующих подстановок.

1) Уравнения (7) выполняются, если поля (θ, b, c) удовлетворяют простой и компактной системе уравнений

$$\Delta b = \Delta c = \Delta \theta = 0, \quad (8)$$

$$\nabla c \nabla \theta = \nabla b \nabla \theta = \nabla b \nabla c = 0, \quad (9)$$

инвариантной к перестановкам θ, b, c и координатам x, y, z . Векторные поля $\nabla c, \nabla b$ и $\nabla \theta$ являются нормальными к поверхностям $b = \text{const}, c = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, пересекающимися друг с другом под прямыми углами, и с геометрической точки зрения решение системы (8), (9) определяет триортогональные гармонические координатные поверхности. Начиная с фундаментальной монографии [9], триортогональная система координат обсуждалась во многих монографиях по дифференциальной геометрии. Проблема построения всех триортогональных систем координат имеет длительную историю и была решена недавно Захаровым [10] в рамках обратной задачи рассеяния.

с ограничениями на их градиенты. В Заключении обсуждается возможная экспериментальная реализация найденных структур в антиферромагнетиках.

2. ПОДСТАНОВКИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В этом разделе предлагаются новые типы подстановок, которые в стационарном случае приводят уравнения модели (1), (3) к более простым уравнениям и новым задачам дифференциальной геометрии. В параметризации Эйлера матрицы G имеем

Условие гармоничности (8) является нетривиальной редукцией уравнений Ляме и соответствующей ей $U-V$ -пары.

2) Для следующей подстановки положим поле θ локально зависящим от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$, $\theta = \theta(a)$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\theta_{,aa} = \sin \theta(a), \quad (10)$$

$$\Delta b = \Delta a = \Delta c = 0, \quad (11)$$

$$\nabla c \nabla a = 0, \quad \nabla b \nabla a = 0, \quad (\nabla a)^2 = \nabla b \nabla c \quad (12)$$

для полей $\theta(a), a, b, c$, следуют уравнения (7).

3) Наконец, мы используем анзац-обобщение, предложенное в работах [11, 12] для модели \mathbf{n} -поля ($n \in S^2$). В стационарном случае уравнения, которые следуют из равенства (5), имеют простой вид:

$$\Delta n_\mu = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (13)$$

Пусть поля n_μ локально зависят от вспомогательных полей $\alpha(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r})$: $n_\mu = n_\mu(\alpha, \beta)$. Нетрудно убедиться, что поле $n_\mu(\alpha, \beta)$ будет удовлетворять снова уравнению n -поля в двумерном пространстве (α, β) :

$$n_{\mu,\alpha\alpha} + n_{\mu,\beta\beta} = 0, \quad (14)$$

если поля (α, β) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\beta = \Delta\alpha = 0, \tag{15}$$

$$\nabla\beta\nabla\alpha = 0, \quad (\nabla\alpha)^2 = (\nabla\beta)^2. \tag{16}$$

Уравнения (15), (16) являются прямым обобщением условия аналитичности на трехмерный случай, так как при $D = 2$ они эквивалентны условию аналитичности функции $\alpha + i\beta$ относительно переменной $x + iy$. С геометрической точки зрения решение этих уравнений определяет две ортогональные гармонические координатные поверхности с равными длинами нормалей. Системы типа (8), (9) обсуждались в работе [13] для введения сопряженных гармонических функций в трехмерном пространстве.

Таким образом, предложенные подстановки приводят к новым задачам дифференциальной геометрии — введению новых систем координат с условиями (8), (9), (11), (12), (15), (16). Хотя общее решение уравнений (8), (11), (15) нетрудно записать, учет условий (9), (12), (16) после этого встречает непреодолимые трудности. Их можно избежать, если использовать дифференциально-геометрический метод интегрирования [11, 12], который редуцирует искомые задачи к уравнениям для меньшего количества новых независимых переменных.

3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ КООРДИНАТ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Уместно вначале обсудить вкратце прямой способ [14] получения некоторых решений уравнений (8), (9) с помощью популярных одиннадцати ортогональных систем координат, приведенных в работе [15]. Пусть $u_i = u_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$) — криволинейная ортогональная система координат. Тогда система координат, полученная локальными заменами $u_i \rightarrow W_i(u_i(x, y, z))$ ($i = 1, 2, 3$), будет также ортогональной. Для семи ортогональных систем координат можно найти гармонические функции W_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом. В этих системах оператор Лапласа для произвольной функции $W(u_1, u_2, u_3)$ имеет вид

$$\Delta W = \sum_{i=1}^3 g_i(u_1, u_2, u_3) \frac{\partial}{\partial u_i} \left(f_i(u_i) \frac{\partial W}{\partial u_i} \right)$$

с известной формой функций $g_i(u_1, u_2, u_3)$, $f_i(u_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому поля $w_i(x, y, z) = W_i(u_i)$ ($i = 1, 2, 3$), которые удовлетворяют уравнениям

$$f_i(u_i) \frac{\partial W_i(u_i(x, y, z))}{\partial u_i} = C_i$$

с постоянными значениями C_i ($i = 1, 2, 3$), являются гармоническими и ортогональными.

Для общего решения уравнений (8), (9) необходимо привлечение методов классической дифференциальной геометрии. С этой целью вначале мы используем преобразование годографа. Обозначим $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$ и $x_1 = \theta$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. Поменяем роль зависимых и независимых переменных и будем искать

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

как функции x_1, x_2, x_3 . На геометрическом языке такая зависимость означает введение криволинейной системы координат с элементом длины

$$ds^2 = dy_i dy_i = g_{ik} dx_i dx_k$$

в евклидовом пространстве с координатами y_1, y_2, y_3 (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Метрический тензор g_{ik} и обратный ему g^{ik} равны соответственно

$$g_{ik} = \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_p}{\partial x_k}, \quad g^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_k}{\partial y_p}. \tag{17}$$

Приведем для удобства и полноты изложения необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В криволинейной системе координат в каждой точке

$$\mathbf{r} = (y_1, y_2, y_3) = \mathbf{r}(x)$$

определен локальный базис

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{,i} \quad \left(\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \right),$$

изменение которого в пространстве в векторном

$$\mathbf{e}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \tag{18}$$

и координатном

$$y_{n,i,j} = \Gamma_{ij}^k y_{n,k} \tag{19}$$

виде определяется символами Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kn} (g_{in,j} + g_{jn,i} - g_{ij,n}). \tag{20}$$

Условие интегрируемости системы (18) (условие евклидовости пространства) приводит к обращению в нуль

$$R_{prsi} = 0 \tag{21}$$

тензора Римана R_{prsi} :

$$R_{prsi} = \frac{\partial \Gamma_{p,ri}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_{p,rs}}{\partial x_i} + \Gamma_{rs}^m \Gamma_{m,pi} - \Gamma_{ri}^m \Gamma_{m,ps}, \quad (22)$$

где $\Gamma_{m,ps} = g_{mn} \Gamma_{ps}^n$. Наконец, отметим важное соотношение

$$\frac{\partial^2 x_p}{\partial y_i \partial y_j} = -\Gamma_{ks}^p \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_j}, \quad (23)$$

которое нетрудно вывести дифференцированием тождества

$$\frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \delta_{pn}$$

по переменной x_j и с использованием уравнения (19).

Применим сейчас методы классической геометрии для решения уравнений (8), (9). Из равенств (9) следует, что дважды контрвариантный метрический тензор $g^{ik} = (g^{-1})_{ik}$, зависящий от x_1, x_2, x_3 , имеет диагональный вид ($g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0$):

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/H_3^2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где H_i^2 ($i = 1, 2, 3$) — диагональные компоненты метрического тензора g_{ik} . Далее, в отличие от стандартного преобразования годографа, будем рассматривать H_i как новые независимые поля и запишем для них соответствующие уравнения. Условие (21) дает шесть уравнений Ляме для определения функций H_i . Чтобы записать их кратко, введем символы Дарбу

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j).$$

Тогда уравнения Ляме примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_i} + \beta_{ik} \beta_{jk} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_k} + \beta_{ik} \beta_{kj} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где индексы i, j, k различны и равны одному из чисел 1, 2, 3. Эти уравнения учитывают условие ортогональности (9) и евклидовость независимых переменных x, y, z полей θ, b, c . Требование гармоничности этих полей является редукцией уравнений Ляме. Из формулы (23) сразу следует, что уравнения (8) записываются как нелинейные уравнение первого порядка:

$$g^{jk} \Gamma_{i,jk} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (26)$$

для полей H_i , где $\Gamma_{i,jk}$ — символы Кристоффеля для метрики (24). Таким образом, решение уравнений (8), (9) сведено к геометрической задаче: определению системы координат с метрикой (24) в евклидовом пространстве с дополнительными условиями,

т. е. решению уравнения (25) для H_1, H_2, H_3 с редукциями (26). Если метрический тензор известен, то зависимость $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i = 1, 2, 3$) и, следовательно, полей θ, b, c от x, y, z можно найти интегрированием переопределенной, но линейной системы (19).

Нетрудно показать, что из системы (26) сразу следует, что величины

$$\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2}$$

не зависят от переменной x_i ($i = 1, 2, 3$). Заметим, что это условие является частным случаем условия Робертсона [16] для систем криволинейных координат, допускающих разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа. В итоге диагональные компоненты метрического тензора факторизуются

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\sqrt{F_2(x_1, x_3)} \sqrt{F_3(x_1, x_2)}}, \\ H_2 &= \frac{1}{\sqrt{F_1(x_2, x_3)} \sqrt{F_3(x_1, x_2)}}, \\ H_3 &= \frac{1}{\sqrt{F_1(x_2, x_3)} \sqrt{F_2(x_1, x_3)}} \end{aligned} \quad (27)$$

функциями F_i ($i = 1, 2, 3$) уже от двух переменных. Подставляя эти соотношения в уравнения Ляме (25), мы получаем шесть уравнений для определения полей F_i . Первые три уравнения имеют вид

$$-F_1 F_{2,x_1} F_{3,x_2} + F_{1,x_2} (F_3 F_{2,x_1} - F_2 F_{3,x_1}) = 0, \quad (28)$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3).

Вторая группа уравнений содержит частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} -2(F_3 F_{1,x_2}^2 + F_2 F_{1,x_3}^2) + F_1 (2F_3 F_{1,x_2,x_2} + 2F_2 F_{1,x_3,x_3} + F_{1,x_3} F_{2,x_3} - F_{2,x_1} F_{3,x_1} + F_{1,x_2} F_{3,x_2}) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3).

Обсудим кратко решение (28), (29). Из формулы (28) мы нашли, что

$$\begin{aligned} F_{3,x_1} &= \frac{F_3 F_{1,x_3} F_{2,x_1}}{F_2 F_{1,x_3} - F_1 F_{2,x_3}}, \\ F_{3,x_2} &= \frac{-F_3 F_{1,x_2} F_{2,x_3}}{F_2 F_{1,x_3} - F_1 F_{2,x_3}} \end{aligned} \quad (30)$$

и исследовали вначале простые случаи, когда в выражениях (30) или числитель, или знаменатель, или оба одновременно обращаются в нуль. В противном случае условие их совместности

$$\frac{F_1 F_{1,x_2 x_3}}{F_{1,x_3} F_{1,x_2}} = \frac{F_2 F_{2,x_2 x_3}}{F_{2,x_3} F_{2,x_1}} \quad (31)$$

приводит к простым уравнениям

$$F_{1,x_3} = F_1^{g_3} g_3, \quad F_{2,x_3} = F_2^{g_3} g_3. \quad (32)$$

Вид полей $g_i (i = 1, 2, 3)$, зависящих только от x_3 , определяется подстановкой (32) в систему (29). Мы показали, что в итоге $g_3 = 2$ или $g_3 = 1/2$, причем первый случай приводит к общим эллипсоидальным координатам (см. ниже). После определения $F_i (i = 1, 2, 3)$ зависимости $x = x(\theta, b, c)$, $y = y(\theta, b, c)$, $z = z(\theta, b, c)$ находятся решением линейной системы (19). Поскольку полученные нами метрики удовлетворяют условию Робертсона, эти зависимости могут быть найдены в явном виде. Для краткости изложения детальные вычисления для всех случаев опускаем. Приведем здесь только окончательные результаты для полей $F_i (i = 1, 2, 3)$ и (θ, b, c) (в цилиндрической системе координат (r, z, φ)):

1)

$$F_1 = \frac{1}{2\alpha} g \operatorname{sh}^2 \frac{x_2}{2g}, \quad F_2 = \frac{1}{2g\alpha} f^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{2f},$$

$$F_3 = \frac{2f^2 g \operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{2f} \operatorname{sh}^2 \frac{x_2}{2g}}{Q^2 \alpha \operatorname{ch} \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{f} - \frac{x_2}{g} \right) \operatorname{ch} \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{f} + \frac{x_2}{g} \right)}, \quad (33)$$

где f, g, Q, α — постоянные параметры, а поля (θ, b, c) определяются выражениями

$$\operatorname{th} \frac{\theta}{2f} = \frac{-\sqrt{r^2 + (z - \alpha)^2} + \sqrt{r^2 + (z + \alpha)^2}}{2\alpha},$$

$$\operatorname{ch} \frac{bg}{2} = \frac{\sqrt{r^2 + (z - \alpha)^2} + \sqrt{r^2 + (z + \alpha)^2}}{2\alpha},$$

$$c = Q \varphi. \quad (34)$$

Вихревое решение для поля c характеризуется индексом Q , который принимает целые значения. При $Q = 1$ система координат (34) связана с координатами (u, v, φ) вытянутого эллипсоида вращения [15] соотношениями $\sin u = \operatorname{th}(\theta/2f)$, $\operatorname{ch} v = \operatorname{cth}(bg/2)$. Поля θ и b определяют нелокализованные текстуры, поскольку во всем интервале изменения x, y, z получаем $0 < \operatorname{th}(\theta/2f) < 1$, $0 < \operatorname{cth}(bg/2) < \infty$ и, следовательно, $0 < \theta < \infty$, $0 < b < \infty$.

2)

$$F_1 = \frac{e^{-x_2/g}}{4}, \quad F_2 = \frac{e^{x_1/f}}{4},$$

$$F_3 = \frac{e^{x_1/f} f^2 g^2}{(f^2 + e^{x_1/f + x_2/g} g^2) Q^2} \quad (35)$$

($f, g = \operatorname{const}$). Поле c имеет вихревой вид, поля θ и b определяют нелокализованные структуры:

$$\theta = -f \ln \left(\frac{g(-z + \sqrt{r^2 + z^2})}{2f^2} \right),$$

$$b = g \ln \left(\frac{z + \sqrt{r^2 + z^2}}{2g} \right), \quad c = Q \varphi \quad (Q \in \mathbb{Z}). \quad (36)$$

При $Q = 1$ эта система координат связана с параболическими координатами вращения [15] простыми заменами.

3) В этом случае поля $F_i (i = 1, 2, 3)$ и (θ, b, c) имеют следующий вид:

$$F_3 = \frac{4(1 + e^{x_2/g})^2 f^2 g^2 \left(\cos \frac{x_1}{2f} + \sin \frac{x_1}{2f} \right)^2}{Q^2 \left(1 + e^{2x_2/g} - 2e^{x_2/g} \sin \frac{x_1}{f} \right)}, \quad (37)$$

$$F_2 = f^2 \left(1 + \sin \frac{x_1}{f} \right), \quad F_1 = \frac{(1 + e^{x_2/g})^2 g^2}{2e^{x_2/g}},$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - f \arcsin \frac{1}{8r^2} \left(-1 - 8z^2 + \sqrt{(1 - 8r^2)^2 + 16z^2(1 + 8r^2 + 4z^2)} \right),$$

$$\operatorname{ch} \frac{b}{g} = \frac{1}{8r^2} \left(1 + 8z^2 + \sqrt{(1 - 8r^2)^2 + 16z^2(1 + 8r^2 + 4z^2)} \right), \quad c = Q \varphi \quad (Q \in \mathbb{Z}) \quad (38)$$

($f, g = \operatorname{const}$). При $f = -1$ поле θ образует солитонную структуру, локализованную вблизи начала координат (см. рис. 1). Оно меняется от нуля до π и имеет простое асимптотическое поведение:

$$\theta \rightarrow 4\sqrt{2} z \quad (\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0),$$

$$\theta \rightarrow \pi - \frac{1}{\sqrt{2} R} \quad (R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty).$$

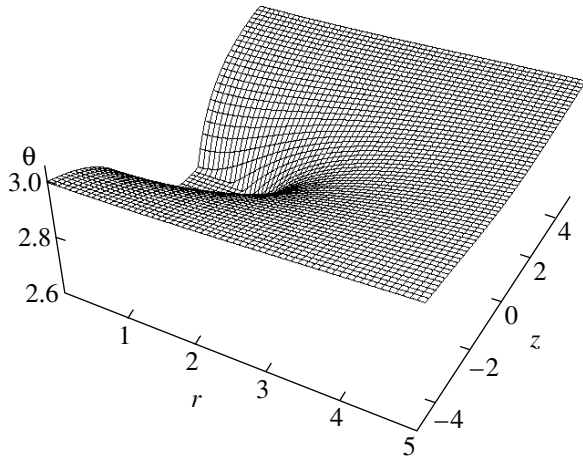


Рис. 1. Пространственное распределение поля $\theta(r, z)$. Поле стремится к нулю при $r^2 + z^2 \rightarrow 0$

4)

$$F_1 = \frac{1}{f}gQ \operatorname{sh}^2 \frac{x_2}{g}, \quad F_2 = \frac{1}{g}fQ \operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{f},$$

$$F_3 = \frac{2fg \operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{f} \operatorname{sh}^2 \frac{x_2}{g}}{Q \left(\operatorname{ch} \frac{2x_1}{f} + \operatorname{ch} \frac{2x_2}{g} \right)}, \quad (39)$$

($f, g = \text{const}, Q \in Z$). Поле c имеет вихревой вид, поля θ, b дают нелокализованные текстуры

$$\operatorname{ch} \frac{\theta}{f} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left\{ -1+r^2+z^2 + \left[r^4 + (-1+z^2)^2 + 2r^2(1+z^2) \right]^{1/2} \right\},$$

$$\operatorname{ch} \frac{b}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left\{ 1+r^2-z^2 + \left[r^4 + (-1+z^2)^2 + 2r^2(1+z^2) \right]^{1/2} \right\}, \quad c = Q\varphi. \quad (40)$$

5) Поля F_i ($i = 1, 2, 3$) зависят от функции $P(x_2, x_3)$,

$$F_3 = 1, \quad F_2 = f^2, \quad F_1 = e^{P(x_2, x_3)}, \quad (41)$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$P_{x_2, x_2} + f^2 P_{x_3, x_3} = 0 \quad (42)$$

($f = \text{const}$). Если мы выберем P как действительную часть комплексной функции $F(x_2 + ix_3/f)$, получим решение в неявном виде

$$\theta = fz, \quad x + iy = \int \exp \left(\frac{-F}{2} \left(b + \frac{ic}{f} \right) \right) db. \quad (43)$$

Эта квазидвумерная структура характеризуется простейшей зависимостью поля θ от координат и многообразием двумерных решений для полей b, c , характерным для полей скоростей течения двумерной несжимаемой невязкой жидкости. Так, при линейной зависимости F от $x_2 + ix_3/f$ получаем решения

$$b = \varphi Q_1 + \frac{Q_2 \ln r}{f},$$

$$c = f \left(-(Q_1 \ln r) + \frac{\varphi Q_2}{f} \right) \quad (Q_1, Q_2 \in Z), \quad (44)$$

которые при $Q_1 = 0$ включают вихри (для поля c) и логарифмические источники (для поля b) или логарифмические спирали $Q_1 \neq 0$.

6) Структура определяется полем P

$$F_1 = \frac{(kgQ)^2 x_2^2}{4}, \quad F_2 = \frac{(kgQ)^2}{2e^{P(x_1, x_3)}},$$

$$F_3 = \frac{x_2^2}{4} \quad (45)$$

($g, k, Q = \text{const}$), удовлетворяющим эллиптическому уравнению Лиувилля

$$e^P + P_{x_1, x_1} + g^2 k^2 Q^2 P_{x_3, x_3} = 0. \quad (46)$$

Это уравнение имеет общее решение, которое выражается в терминах аналитической функции $F(x_1 + ix_3/gkQ)$ и ее комплексно-сопряженной $\bar{F}(x_1 - ix_3/gkQ)$:

$$P(x_1, x_3) = \ln \left(\frac{-8F' \left(x_1 + \frac{ix_3}{gkQ} \right) \bar{F}' \left(x_1 - \frac{ix_3}{gkQ} \right)}{\left(F \left(x_1 + \frac{ix_3}{gkQ} \right) + \bar{F} \left(x_1 - \frac{ix_3}{gkQ} \right) \right)^2} \right).$$

Однако такие решения приводят к мнимым значениям H_1 и H_3 . Если мы выберем одномерное решение (46) в виде

$$P = \ln \left(\frac{1}{2} k^2 \operatorname{sech}^2 \frac{kx_1}{2} \right),$$

мы получим в сферической системе координат R, Θ, φ ($r = R \sin \Theta, z = R \cos \Theta$) структуру

$$\operatorname{th}(k\theta) = -\cos \Theta, \quad b = \frac{g}{R}, \quad c = Q\varphi \quad (Q \in Z) \quad (47)$$

с нелокализованным распределением поля θ , полем трехмерного точечного источника для b и вихрем для поля c .

7) Поля F_i зависят от полей μ, ν, λ

$$\lambda = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right)}, \quad \mu = -\left(\frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right) k_1^2}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right)}\right), \quad (48)$$

$$\nu = -\operatorname{dn}^2\left(\frac{c}{c_3}, k\right)$$

следующим образом:

$$F_1 = \frac{c_2 c_3}{(\mu - \nu) c_1}, \quad F_2 = \frac{c_1 c_3}{(-\lambda + \nu) c_2}, \quad (49)$$

$$F_3 = \frac{c_1 c_2}{(-\lambda + \mu) c_3}.$$

Здесь $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$, k — модуль эллиптических функций Якоби, c_i ($i = 1, 2, 3$) — постоянные. Из уравнений (19) получаем решение для θ, b, c в неявном виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{k \operatorname{sn}\left(\frac{c}{c_3}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right) \operatorname{sn}\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right)}, \\ y &= -\frac{k \operatorname{cn}\left(\frac{c}{c_3}, k\right) \operatorname{dn}\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right) \operatorname{sn}\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right) \operatorname{sn}\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right)}, \quad (50) \\ z &= \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right) \operatorname{cn}\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right) \operatorname{dn}\left(\frac{c}{c_3}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{b}{c_2}, k_1\right) \operatorname{sn}\left(\frac{\theta}{c_1}, k\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что поля μ, ν, λ являются общими эллипсоидальными координатами (эллиптическими координатами в пространстве) [15–17], если они изменяются в интервалах

$$\{-1 < \nu < -1 + k^2 < \mu < 0 < \lambda < \infty\}. \quad (51)$$

Положим

$$\left\{c_1 = \frac{\pi}{K(k)}, \quad c_2 = \frac{\pi}{K(k_1)}, \quad c_3 = \frac{\pi}{2K(k)}\right\}, \quad (52)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Тогда отображение (50), (52) группового многообразия $SU(2)$ в R^3 взаимно однозначно и имеет степень отображения [18] равную единице. Несмотря на то что эллиптические координаты в пространстве в различных параметризациях изложены в ряде монографий (параметризация (50) с точностью

до сдвигов полей и масштабных преобразований совпадает с параметризацией в работе [17]), для целей настоящей работы необходимо их более детальное исследование. Из уравнений (50) получаем соотношения симметрии

$$\begin{aligned} b(x, y, z) &= -b(x, y, -z) + 2\pi, \quad c(x, y, z) = \\ &= -c(x, -y, z) + \pi = c(-x, -y, z) + \pi, \end{aligned}$$

которые сразу определяют области значений и определений полей b, c :

$$0 < b < \pi (z > 0), \quad \pi < b < 2\pi (z < 0),$$

$$0 < c < \pi/2 \quad (x > 0, y < 0),$$

$$\pi/2 < c < \pi \quad (x > 0, y > 0),$$

$$\pi < c < 3\pi/2 \quad (x < 0, y > 0),$$

$$3\pi/2 < c < 2\pi \quad (x < 0, y < 0).$$

Отсюда следует, что поле $b = 0$ при $z = 0$, а поле c имеет нетривиальную структуру вихревой нити, расположенной по оси z , со скачком поля 2π в полуплоскости $x = 0, y < 0$. Заметим, что при $z = 0$ и $k = 0$ поле c совпадает с полярным углом $\varphi + \pi/2$, поскольку в этом случае

$$x = \frac{\sin c}{\sin(\theta/2)}, \quad y = -\frac{\cos c}{\sin(\theta/2)}.$$

Явное выражение для сложной трехмерной структуры (50), (52) может быть получено следующим образом. Уравнение

$$\frac{x^2}{1+t} + \frac{y^2}{1-k^2+t} + \frac{z^2}{t} = 1 \quad (53)$$

определяет поверхность второго порядка. Корни этого уравнения t_1, t_2, t_3 , выбранные в интервалах $-1 < t_1 < -1 + k^2 < t_2 < 0 < t_3 < \infty$ и совпадающие, как известно, соответственно с ν, μ, λ , и дают выражение последних через x, y, z . Поля θ, b, c найдутся после этого численными методами из соотношений (48). Локализованное распределение поля θ для разных значений z представлено на рис. 2. Из формул (48), (53) следует асимптотическое поведение поля θ

$$\theta \propto \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty).$$

Поле b локализовано при малых значениях z и делокализовано при больших значениях (рис. 3) Вихревой характер поля c изображен на рис. 4 для двух значений z , где ясно виден скачок поля на 2π .

Структуры (50) не являются топологическими, поскольку отсутствие постоянных пределов полей b, c (при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$) (подобно сферическим координатам Θ, φ) не позволяет компактифицировать пространство R^3 в сферу S^3 и ввести топологический инвариант из $\pi_3(SU(2))$ [18], совпадающий со степенью отображения.

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ СО ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ ПОДСТАНОВКАМИ

Обсудим решение уравнений (11), (12) для второй подстановки, используя дифференциально-геометрический метод интегрирования. Обозначим $y_1 = x, y_2 = y, y_3 = z$ и $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ и будем искать $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i = 1, 2, 3$) как функции x_1, x_2, x_3 . Тогда из формул (12), (17) следует, что метрический тензор $g^{ik} = (g^{-1})_{ik}$, связанный с таким преобразованием, имеет недиагональный вид:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & h_1^2 \\ 0 & h_1^2 & h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

После преобразования годографа уравнения (11) записываются в виде (26) с метрическим тензором (54). Мы показали, что решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{(-U_{x_2 x_3}^2 + U_{x_2 x_2} U_{x_3 x_3})^{1/2}}, \\ h_2 &= \frac{(U_{x_3 x_3})^{1/2}}{(U_{x_2 x_3})^{1/2} (U_{x_2 x_3}^2 - U_{x_2 x_2} U_{x_3 x_3})^{1/2}}, \\ h_3 &= \frac{U_{x_2 x_2}^{1/2}}{U_{x_2 x_3}^{1/2} (U_{x_2 x_3}^2 - U_{x_2 x_2} U_{x_3 x_3})^{1/2}}, \end{aligned} \quad (55)$$

где поле $U(x_1, x_2, x_3)$ является суммой произвольных трех полей, зависящих только от двух переменных:

$$U(x_1, x_2, x_3) = U_1(x_2, x_3) + U_2(x_1, x_3) + U_3(x_1, x_2). \quad (56)$$

Явный вид полей U_i определяется решением уравнений (21) с метрическим тензором (55). Эти уравнения имеют громоздкий вид и мы приведем здесь только одно из них:

$$\det \begin{pmatrix} U_{x_2, x_2, x_2} & U_{x_2, x_2, x_3} & U_{x_2, x_3, x_3} \\ U_{x_2, x_2, x_3} & U_{x_2, x_3, x_3} & U_{x_3, x_3, x_3} \\ U_{x_2, x_2} & U_{x_2, x_3} & U_{x_3, x_3} \end{pmatrix} = 0. \quad (57)$$

Первая и вторая строки матрицы в этом уравнении являются производными третьей строки соответственно по x_2 и x_3 . Это уравнение имеет решение, если первая или вторая строка равна нулю или при линейной зависимости между столбцами

$$\begin{pmatrix} U_{x_2, x_2, x_2} \\ U_{x_2, x_2, x_3} \\ U_{x_2, x_2} \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} U_{x_2, x_2, x_3} \\ U_{x_2, x_3, x_3} \\ U_{x_2, x_3} \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} U_{x_2, x_3, x_3} \\ U_{x_3, x_3, x_3} \\ U_{x_3, x_3} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Первые два условия эквивалентны одному из них, так как система (11), (12) инвариантна к перестановкам b и c . Совместно с решением уравнений (21) эти условия приводят к результатам, изложенным в п. 8, 9 (см. ниже). Можно показать, что другие типы решений, совместные с (58), существуют при условии, что функции f_1, f_2 постоянны или зависят от x_1 . После определения функций U_i ($i = 1, 2, 3$) зависимости $x = x(a, b, c), y = y(a, b, c), z = z(a, b, c)$ находятся решением линейной системы (19). Для анализа текстур θ, b, c используется решение (10) в виде солитона

$$\theta = 4 \arctg e^a \quad (59)$$

или решетки солитонов

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{a}{k}, k \right). \quad (60)$$

Мы опускаем детали вычислений для всех случаев и обсудим здесь только окончательные результаты для полей h_i ($i = 1, 2, 3$) и θ, b, c (в цилиндрической системе координат (r, z, φ)):

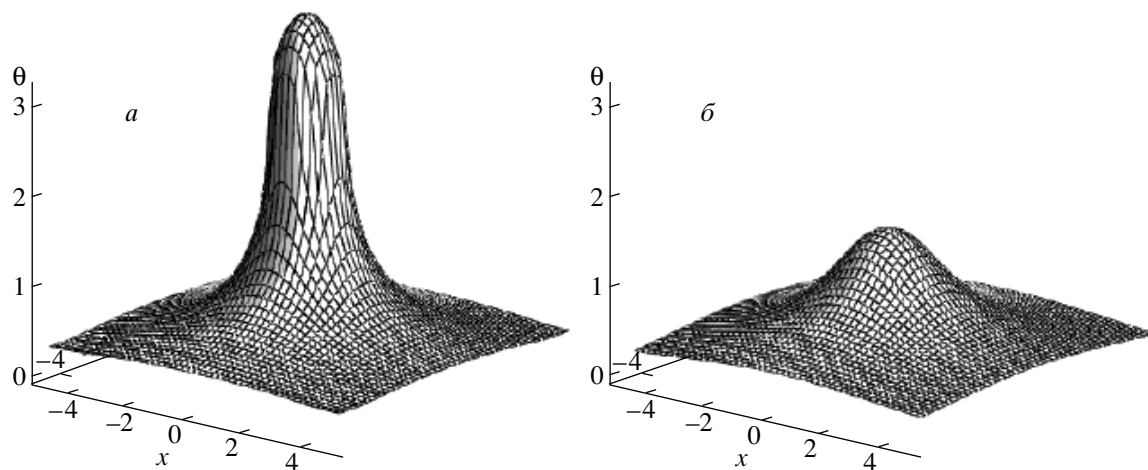


Рис. 2. Локализованная структура поля $\theta(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$). Показаны солитоны при $z = 0$ (а) и $z = 1$ (б)

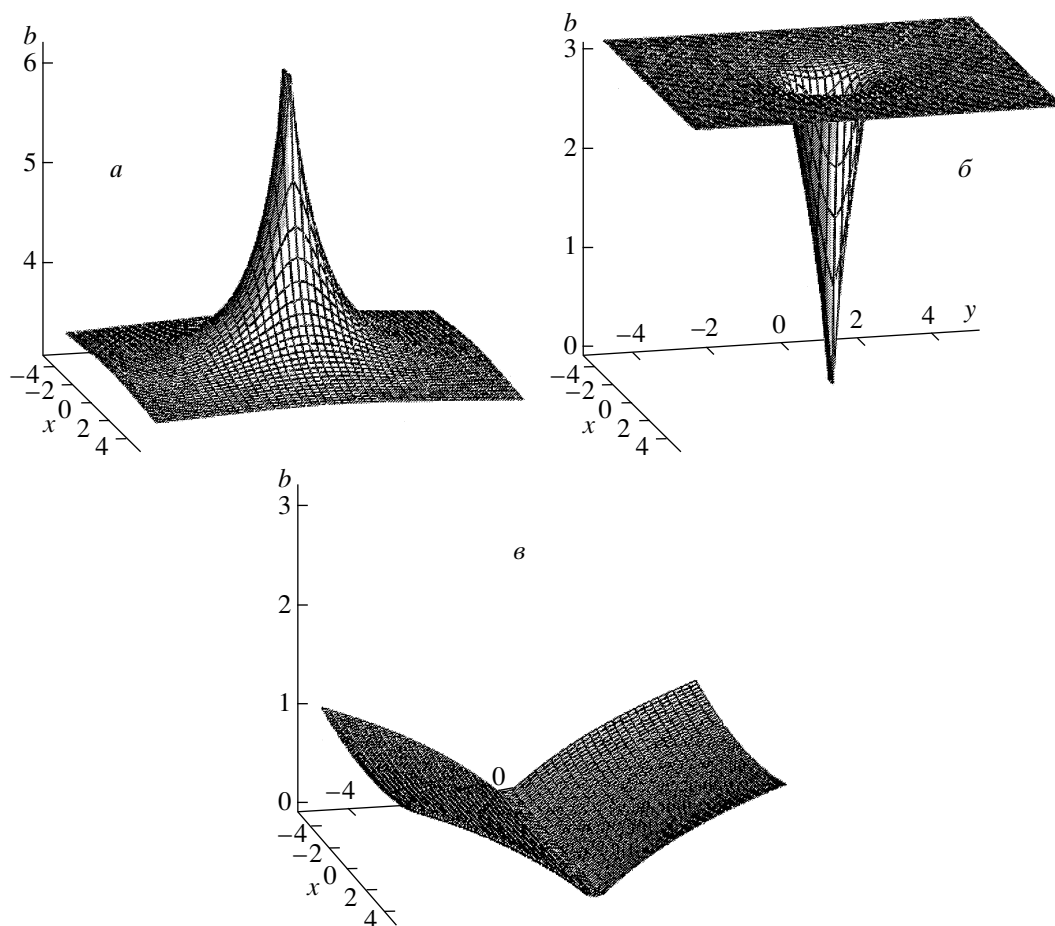


Рис. 3. Структура поля $b(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$). Показаны локализация поля при $z = -1$ (а), $z = 0.1$ (б) и его делокализация при $z = 100$ (в)

8)

$$\begin{aligned} h_1 &= \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}\right), \\ h_2 &= -Q_2^{-1/2} \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}\right) p^2 \sqrt{Q_1} \sqrt{\exp\left(\frac{-2x_1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}\right) + \frac{Q_2^2}{p^4 Q_1^2}}, \\ h_3 &= Q_2^{-1/2} \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}\right) \sqrt{Q_1}, \quad Q_1 Q_2 > 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Поля b, c имеют вихревой вид, поле a — логарифмический потенциал источника:

$$a = -\sqrt{Q_1 Q_2} \ln r, \quad b = gz + \varphi Q_2, \quad c = \varphi Q_1, \tag{62}$$

что дает, согласно формуле (59), локализованное распределение для θ :

$$\theta = 4 \arctg\left(r^{-\sqrt{Q_1 Q_2}}\right)$$

в интервале $[0, 2\pi]$.

9) Поля h_i ($i = 1, 2, 3$) зависят от функции $R(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} h_1 &= g^2 e^{-R/2}, \quad h_2 = \frac{g^2 e^{-R/2}}{f}, \\ h_3 &= \frac{\sqrt{e^R + f^4 g^6}}{e^{R/2} f g}, \end{aligned} \tag{63}$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$P_{x_1, x_1} + Q^2 P_{x_2, x_2} = 0. \tag{64}$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$R(x_1, x_2) = T(x_1 - ix_2/Q) + c. \text{ c.}$$

Тогда структура имеет простейшую зависимость от z и многообразие решений определяется выражениями

$$c = \frac{b}{Q^2} + Gz, \quad x + iy = \int_{-\infty}^{a-ib/Q} e^{T(x)} dx \tag{65}$$

с постоянными значениями G, Q . Отсюда следует, что $a - ib/Q$ — произвольная аналитическая функция $x + iy$. Обсудим простейшие типы структур, выбирая θ в виде решетки солитонов (60) и решение для $a - ib/Q$ в виде

$$a - i \frac{b}{Q} = \sum_{s=1}^n (f_s + i g_s) \ln(x + iy - c_s) \tag{66}$$

$(f_s, g_s \in R)$

с комплексными постоянными c_s . Выберем постоянные f_s, g_s из условия однозначности матрицы D (5).

Изменение поля a при обходе вокруг линии сингулярности должно быть кратно $2kK(k)$ (периоду функции $\text{sn}^2(a/k, k)$), полей b, c — кратно 2π . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \text{sn}^2\left(\frac{a}{k}, k^2\right) - 1, \quad f_s = \frac{Q_s}{Q}, \\ g_s &= -\left(\frac{kKN_s}{\pi}\right) \left(N_s, Q_s, \frac{Q_s}{Q^2} \in Z\right) \tag{67} \\ &(s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

При $n = 1$ формула (67) представляет собой структуру спиральных вихрей

$$\cos \theta = -1 + 2 \text{sn}^2\left(\frac{K \varphi N_1}{\pi} + \frac{Q_1 \ln r}{kQ}, k\right), \tag{68}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{kKN_1 \ln r}{\pi} - \varphi Q_1, \\ c &= Gz + \frac{kKN_1 \ln r}{\pi Q} - \frac{\varphi Q_1}{Q^2}. \end{aligned} \tag{69}$$

Поля θ, b, c (при фиксированном z) с дискретными параметрами $N_1 \neq 0, Q_1$ принимают постоянное значение на кривых в плоскости (x, y) , которые являются логарифмическими спиралями. Для $N_1 = Q_1 = Q = 1$ решение (68) представляет собой два спиральных домена (области с противоположными значениями $\cos \theta$), разделенных двумя логарифмическими спиралями (см. рис. 5). При произвольном N вихрь (68) описывает $|N|$ -заходную логарифмическую спираль, киральность которой (направление закручивания) определяется знаком произведения $N_1 Q_1 Q$. Параметр k определяет степень закручивания спирали, которая увеличивается с уменьшением k . График поля $\cos \theta$ и конфигурация доменов для двухзаходной спирали приведены на рис. 6. Ширина спиральных солитонов (доменных границ) зависит от величины k и увеличивается с удалением от центра вихря. Случаю $N = 0$ соответствует система концентрических (по переменной r) кольцевых доменов — антиферромагнитная мишень (рис. 7), которая является бесконечной полосовой доменной структурой по переменной $\ln r$.

Поскольку спиральная структура характеризуется двумя целыми числами (N, Q) , структура диполей имеет более разнообразный характер, чем для вихревых структур. Рассмотрим в качестве примера некоторые типы спиральных диполей для поля θ , состоящих из вихревых спиралей с числами (N_1, Q_1) , (N_2, Q_2) . На больших расстояниях такой диполь трансформируется в определенную спиральную конфигурацию с числами $(N_1 + N_2, Q_1 + Q_2)$. Диполь, состоящий из двух спиральных структур с числами $(-1, 1)$, образует на больших расстояниях двухзаходную спираль (рис. 8), диполь с $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$ — структуру $(2, 0)$ (рис. 9), поле которой на больших расстояниях зависит только от полярного угла, диполь с $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ — структуру антиферромагнитной мишени (рис. 10). Взаимодействие двух вихрей с параметрами (N, Q) и $(-N, -Q)$ имеет характер притяжения. Соответствующее решение имеет наименьшую энергию и локализованный характер, $\theta \rightarrow \pi$ (при $r \rightarrow \infty$), и приведено на рис. 11.

10) Структура определяется полем $P(x_1, x_3)$:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{G} e^{P/2} (-x_2 + G^2 x_3), \\ h_2 &= \frac{1}{G^2} (x_2 - G^2 x_3)^2 \sqrt{G^2 + \frac{e^P G^4}{(x_2 - G^2 x_3)^2}}, \\ h_3 &= \frac{1}{G^2} e^{P/2} (-x_2 + G^2 x_3), \end{aligned} \quad (70)$$

которое удовлетворяет эллиптическому уравнению Лиувилля

$$2G^2 e^P + P_{x_3, x_3} + G^2 P_{x_1, x_1} = 0. \quad (71)$$

Его одномерные решения $P = -2 \ln(C \operatorname{sech}(C x_1))$ дают в сферической системе координат текстуру

$$\begin{aligned} c &= \frac{\varphi}{CG}, \quad b = \frac{g}{R} + \frac{G\varphi}{C}, \\ \operatorname{th}(aC) &= \cos \theta \quad \left(\frac{1}{CG} \in Z, \quad \frac{G}{C} \in Z \right) \end{aligned} \quad (72)$$

вихря для поля c , поля вихря и пространственного источника для поля b . Хотя распределение (72) подобно структуре (47), соотношение (59) приводит к изменению поля θ в интервале $[0, 2\pi]$.

11) Поля h_i ($i = 1, 2, 3$), как и в случае эллиптических координат в пространстве, выражаются тремя эллиптическими функциями $F_i(u_i)$ (нет суммирования по повторяющимся неммым индексам) от переменных $u_1 = x_1$, $u_2 = \sqrt{c_1} (x_2 + c_2 x_3)/(c_1 - c_2)$,

$u_3 = \sqrt{c_2} (x_2 + c_1 x_3)/(c_1 - c_2)$ с постоянными значениями c_i в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{\sqrt{c_1} \sqrt{c_2}}{\sqrt{F_1 - F_2} \sqrt{-F_1 + F_3}}, \\ h_2 &= \frac{\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \sqrt{(-c_1 + c_2) F_1 - c_2 F_2 + c_1 F_3}}{\sqrt{F_1 - F_2} \sqrt{F_2 - F_3} \sqrt{-F_1 + F_3}}, \\ h_3 &= \frac{\sqrt{(-c_1 + c_2) F_1 + c_1 F_2 - c_2 F_3}}{\sqrt{F_1 - F_2} \sqrt{F_1 - F_3} \sqrt{F_2 - F_3}}. \end{aligned} \quad (73)$$

Функции $F_i(u_i)$ удовлетворяют уравнению

$$F_i^2, u_i = -a_0 - a_1 F_i(u_i) - a_2 F_i^2(u_i) - a_3 F_i^3(u_i). \quad (74)$$

Детальное описание соответствующей структуры будет приведено отдельно.

Обсудим текстуры, связанные с подстановкой (14)–(16). Решение системы нелинейных уравнений (15), (16) найдено в работе [19] в следующем неявном виде:

$$A(\omega) + yB(\omega) \pm z\sqrt{-1 - B^2(\omega)} = x \quad (75)$$

с произвольными аналитическими функциями $A(\omega)$, $B(\omega)$ от $\omega = \alpha + i\beta$. При заданном виде этих функций явный вид $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ находится решением комплексного уравнения (75). Оно является аналогом волны Римана для уравнения Хопфа и допускает прямое обобщение на случай N -мерного пространства. В общем случае, как и в гидродинамике, решение этого уравнения неоднозначно и для определения однозначных пространственных структур полей θ, b, c необходимо привлечение однозначных решений уравнения (14). Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением однозначных решений простейшего вида. Положим $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\beta)$, $c = c(\beta)$. Тогда из уравнения (14) следует, что

$$b = -\beta \frac{Q_1}{Q}, \quad c = \beta \frac{Q_2}{Q}. \quad (76)$$

Поле $\theta(\alpha)$ удовлетворяет уравнению синус-Гордон $(-\sin \theta(\alpha) Q_1 Q_2 / Q^2 + \theta''(\alpha) = 0)$ и при $Q_1 Q_2 > 0$ имеет решение в виде

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{\alpha \sqrt{Q_1 Q_2}}{kQ}, k \right) \quad (0 < k \leq 1). \quad (77)$$

При $Q_1 Q_2 < 0$ решение для $\theta(\alpha)$ может быть получено из формул (75), (76) сдвигом θ на π . Простейшие решения уравнения (75) получаются при выборе $A(\omega), B(\omega)$ в следующем виде:

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{i(-1 + F(\omega))}{1 + F(\omega)} \quad (78)$$

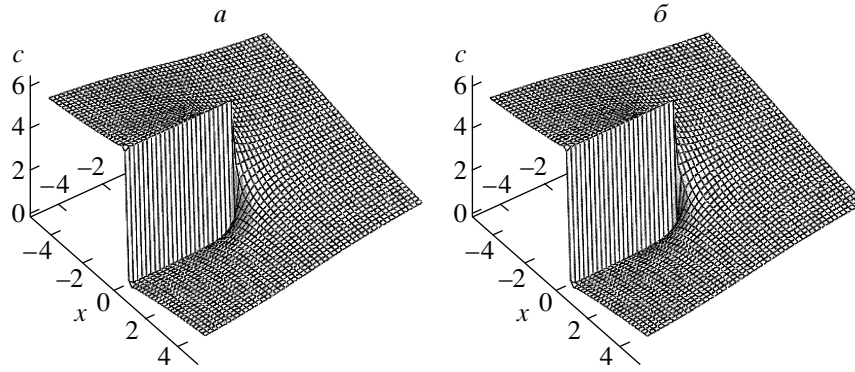


Рис. 4. Вихревая структура поля $c(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$). Показано распределение поля при $z = -0.1$ (а) и $z = 1$ (б) со скачком 2π в полуплоскости $x = 0, y < 0$

с произвольной функцией F . В этом случае

$$\omega = F(\Omega), \quad \Omega = \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \exp i\varphi \quad (79)$$

(или антианалитическая функция $\omega = F(\Omega^*)$) комплексной переменной Ω — стереографической проекции сферы единичного радиуса в трехмерном пространстве ($x = \sin \Theta \cos \varphi, y = \sin \Theta \sin \varphi, z = \cos \Theta$). Зададим ω потенциалом источника вихря: $\omega = \alpha + i\beta = (Q + if) \ln \Omega$ ($Q, f \in R$). Тогда решение (79) представляет линейный дефект с сингулярными значениями производных поля θ на оси z ($\theta \rightarrow 0, \theta \rightarrow \pi$). При обходе вокруг линии сингулярностей из требования однозначности $\cos \theta, b, c$ следует, что изменение полей b, c должно быть кратно 2π , а изменение аргумента эллиптической функции в формуле (77) — кратно $2K$ (полупериоду эллиптической функции $\operatorname{sn}(u, k)$). Тогда структура характеризуется целочисленными значениями S, Q_1, Q_2 и ее выражение имеет следующий вид

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn} \left(-\frac{KS\varphi}{\pi} + \frac{1}{k} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right) \sqrt{Q_1 Q_2}, k \right), \quad (80)$$

$$b = -\varphi Q_1 - \frac{1}{\pi} k S K \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right) \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}, \quad (81)$$

$$c = \varphi Q_2 + \frac{1}{\pi} k K S \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right) \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}. \quad (82)$$

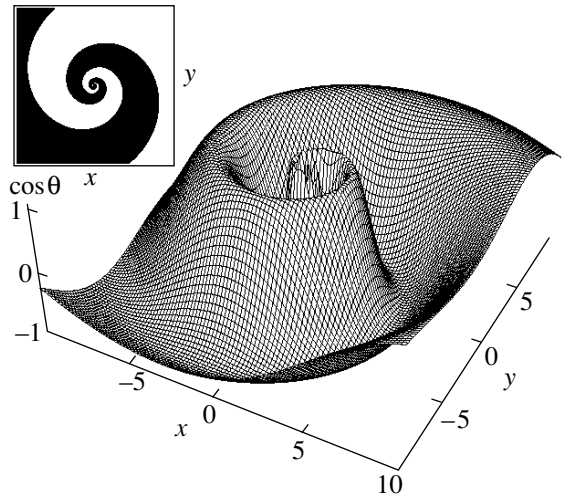


Рис. 5. Пространственное распределение $\cos \theta$ в одноосной спирали ($k = 0.5, N_1 = 1, Q_1 = 1, Q_2 = 1$). На вставке показаны домены с отрицательными (темные области) или положительными (светлые области) значениями $\cos \theta$

При $S = 0$ в простейшем (солитонном) случае ($k = 1$)

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{-1 + \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2} \right)^{\sqrt{Q_1 Q_2}}}{1 + \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2} \right)^{\sqrt{Q_1 Q_2}}}, \quad (83)$$

$$\theta = 2\pi + 2\Theta, \quad c = -b = \varphi \quad (Q_1 = Q_2 = 1) \quad (84)$$

и структура (84) приводит к полю $n_\mu = (-z/R, 0, -x/R, -y/R)$, компоненты которого совпадают с компонентами поля «ежа» ($\mathbf{m} = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$).

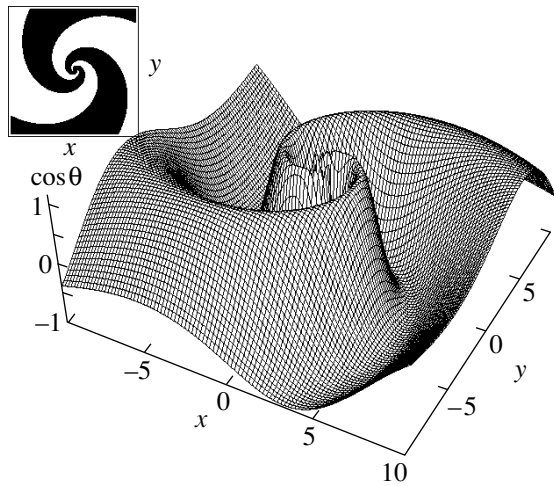


Рис. 6. Структура кора двухзаходной спирали ($k = 0.5, N_1 = 2, Q_1 = 1, Q = 1$)

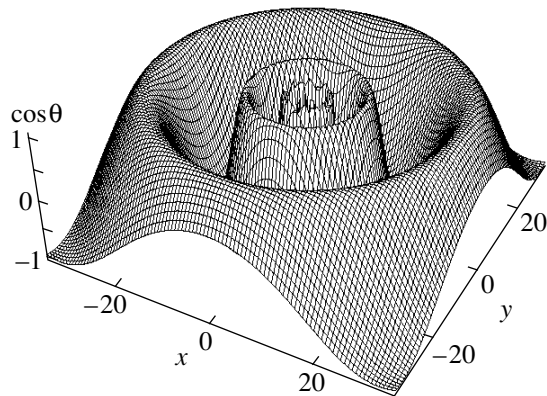


Рис. 7. Пространственное распределение $\cos \theta$ в антиферромагнитной мишени ($k = 0.3, N_1 = 0, Q_1 = 1, Q = 1$)

При $S \neq 0$ поле θ имеет сингулярную нить ($z = 0$), поле $\cos \theta$ принимает постоянное значение

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{c_1 \sqrt{Q_1 Q_2}}{k} \right)$$

на геликоидальных поверхностях

$$z = -R \operatorname{th} \left(c_1 + \frac{k S \varphi K(k)}{\pi \sqrt{Q_1 Q_2}} \right),$$

проходящих через начало координат, и при фиксированном значении $z = h$ на спиралях вида

$$r = \pm \frac{h}{\operatorname{sh} \left(c_1 + \frac{k S \varphi K(k)}{\pi \sqrt{Q_1 Q_2}} \right)}.$$

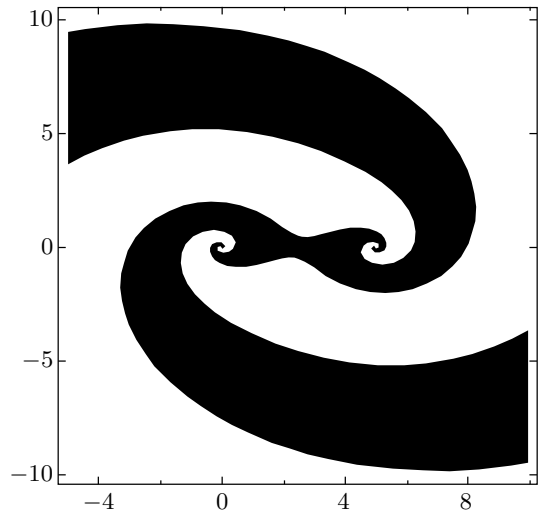


Рис. 8. Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей с параметрами $N_1 = -1, Q_1 = 1$ и $N_2 = -1, Q_2 = 1$, образующий на больших расстояниях двухзаходную спираль. Расстояние в паре $d = 5, Q = 1, k = 0.7$

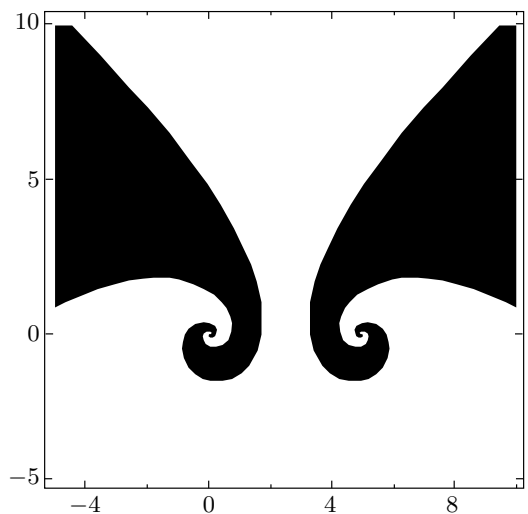


Рис. 9. Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей с параметрами $N_1 = -1, Q_1 = 1$ и $N_2 = -1, Q_2 = -1$. Расстояние в паре $d = 5, Q = 1, k = 0.7$

График для $\cos \theta$ и поля b при $S = 1$ и конечном значении z приведен на рис. 12.

Общее однозначное решение для системы взаимодействующих пространственных спиралей

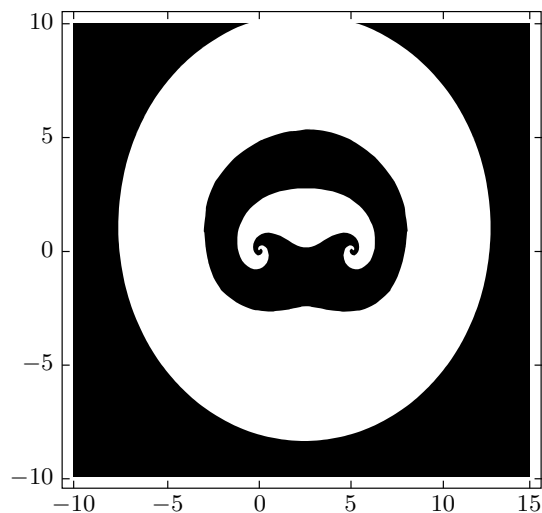


Рис. 10. Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей с параметрами $N_1 = 1$, $Q_1 = 1$ и $N_2 = -1$, $Q_2 = 1$, образующий на больших расстояниях антиферромагнитную мишень. Расстояние в паре $d = 5$, $Q = 1$, $k = 0.7$

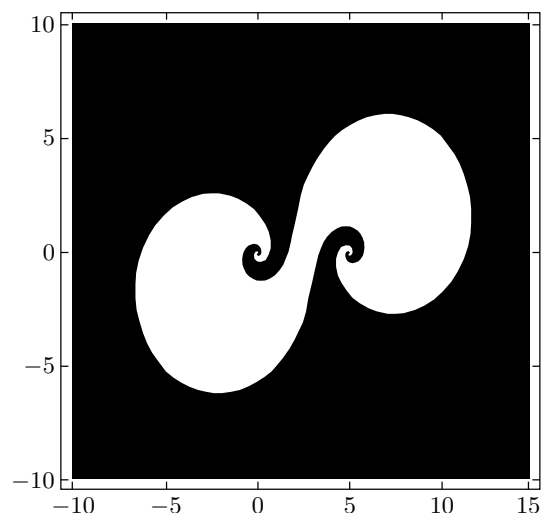


Рис. 11. Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей с параметрами $N_1 = -1$, $Q_1 = 1$ и $N_2 = 1$, $Q_2 = -1$, образующий на больших расстояниях однородное состояние $\theta = \pi$. Расстояние в паре $d = 5$, $Q = 1$, $k = 0.7$

$$\omega = \alpha + i\beta = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2ikK}{\pi} S_j + Q_j \right) \times \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} e^{i\varphi} - \operatorname{tg} \frac{\Theta_j}{2} e^{i\varphi_j} \right) + w(\Omega) \quad (85)$$

характеризуется произвольной мероморфной функ-

цией $w(\Omega)$, параметром k , целочисленными значениями S_j, N_j , произвольными вещественными постоянными θ_j, φ_j и содержит набор сингулярных лучей, исходящих из начала координат под углами $\theta_j, \phi_j (j = 1, \dots, n)$. При значениях $r \ll z$ структура (77), (85) представляет собой набор $|S_j|$ -заходных логарифмических спиралей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы нашли новые типы трехмерных текстур в многоподрешеточных антиферромагнетиках и показали плодотворность применения методов классической дифференциальной геометрии. Подстановки типа (14)–(16) (совместно с дифференциально-геометрическим методом) могут быть обобщены на случаи модели n -поля ($n \in S^N$), систем ортогональных n -полей на многообразиях Штифеля [7] и т. д. в пространстве-времени любой размерности.

Обсудим кратко экспериментальную реализацию найденных структур в антиферромагнетиках. Масштабно-инвариантные уравнения (7) записаны только в обменном приближении без учета магнитостатических полей, которые малы в антиферромагнетиках, и полей анизотропии. Поэтому форма найденных текстур справедлива только на расстояниях $r < l = \sqrt{\alpha/\beta}$ (α — постоянная обменного взаимодействия, β — постоянная анизотропии). Влияние последней изменит структуру на больших расстояниях от сингулярных нитей. Отметим, что в ферромагнетиках квазистационарные магнитные структуры типа мишеней и спиральных доменов наблюдаются в тонких магнитных пленках с сильной перпендикулярной анизотропией типа легкая ось после накачки гармоническим или импульсным магнитным полем [20, 21]. В последнее время наблюдается повышенный интерес к исследованию магнитных структур в наноматериалах (магнитных точках), где наблюдаются различные вихреподобные состояния с возможным выходом намагниченности из плоскости диска [22]. Наличие двумерной вихревой структуры в магнитных точках подтверждается методами электронной и магнитно-силовой микроскопии [23]. Процессы переключения, индуцированные плоскостными или перпендикулярными импульсными магнитными полями, возбуждают в таких системах магнитные структуры типа скирмионов, теоретически предсказанные в работе [24], или спиральные структуры [25]. В антиферромагнитных наноматериалах вихревые и спиральные структуры могут быть обнаружены методами спин-поляризованной сканирующей

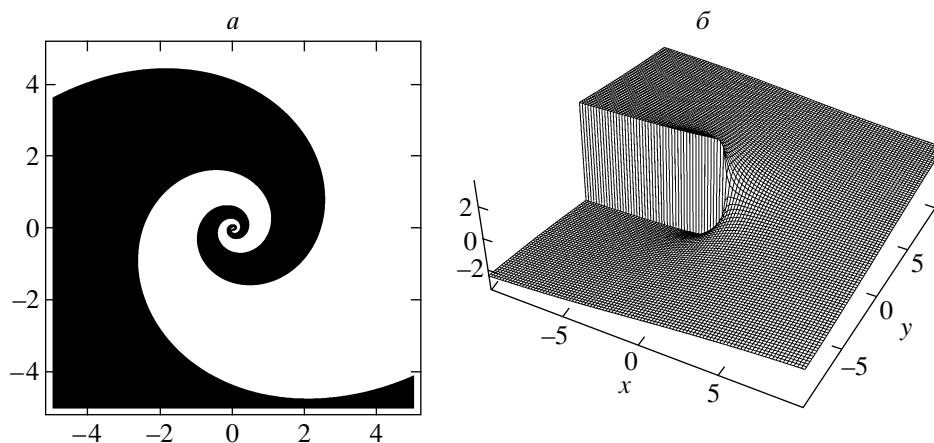


Рис. 12. Распределение полей $\cos \theta(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ в плоскости $z = 4$ в трехмерной спиральной структуре ($k = 1/3$, $S = 1$, $Q_1 = -1$, $Q_2 = -1$). Показаны домены с отрицательными (темные области) или положительными (светлые области) значениями $\cos \theta(x, y, z)$ (а) и вихревая структура поля $b(x, y, z = 4)$ со скачком 2π в полуплоскости $y = 0, x < 0$ (б)

туннельной микроскопии (SPSTM), особенно в перспективе ожидаемого создания SPSTM с атомной разрешающей способностью. Принцип действия SPSTM основан на сканировании тонким намагниченным острием (поле рассеяния порядка 0.1 Тл) поверхности пленки и записи магнитного сигнала. В многоподрешеточных антиферромагнетиках (как и в одноподрешеточных [26]) локальная намагниченность пропорциональна вторым производным от полей и сильно возрастает вблизи вихревых нитей и центров сингулярных структур.

Автор признателен В. Е. Захарову, В. В. Киселеву, Е. А. Кузнецову, А. В. Михайлову, А. Б. Шабату за плодотворные обсуждения результатов работы и полезные замечания, участникам сессии Совета РАН по нелинейной динамике за интерес к работе, Н. М. Зубареву за плодотворные обсуждения постановок в модели киральных полей, Ф. Р. Рыбакову за численные вычисления солитонов в триортогональной гармонической системе координат, Д. В. Долгих за помощь в компьютерной графике.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00100).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, ЖЭТФ **70**, 1867 (1976).
2. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **74**, 786 (1978).
3. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, УФН **130**, 37 (1980).
4. Д. В. Волков, А. А. Желтухин, ЖЭТФ **78**, 1867 (1980).
5. М. К. Волков, В. Н. Первушин, *Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов*, Атомиздат, Москва (1979).
6. А. М. Погорелов, УФН **134**, 575 (1981).
7. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980), с. 227.
8. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ЖЭТФ **74**, 1953 (1978).
9. G. Darboux, *Lecons sur le systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris (1910).
10. V. E. Zakharov, Duke Math. J. **94**, 103 (1998).
11. А. Б. Борисов, ДАН **389**, 603 (2003).
12. А. Б. Борисов, Математическая физика, анализ, геометрия **10**, 326 (2004).
13. М. А. Лаврентьев, Б. А. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, Москва (1973), с. 210.
14. В. В. Дякин, Частное сообщение (2003).

15. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1968), с. 181.
16. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*. Т. 1, Изд-во иностр. лит., Москва (1958), с. 484.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ляме и Матъе*, Наука, Москва (1973), с. 103.
18. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979), с. 742.
19. А. Б. Борисов, Письма в ЖЭТФ **76**, 95 (2002).
20. Г. С. Кандаурова, А. Э. Свидерский, ЖЭТФ **97**, 1218 (1990).
21. G. S. Kandaurova, Uspekhi Fiz. Nauk **45**, 1051 (2002).
22. T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, and T. Ono, Science **289**, 930 (2000).
23. X. Zhu, P. Grütter, V. Metlushko, and B. Ilic, Phys. Rev. B **66**, 024423 (2002).
24. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).
25. R. Höllinger, A. Killinger, and U. Krey, J. Magn. Magn. Mater. **261**, 178 (2003).
26. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, ФНТ **21**, 355 (1995).