

ДВУХПЕТЛЕВАЯ СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ЯДРА

В. А. Ерохин^{a,b,}, П. Инделикато^{c,**}, В. М. Шабаетов^a*

*^a Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Центр перспективных исследований
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета
195251, Санкт-Петербург, Россия*

*^c Laboratoire Kastler-Brossel^{***}, École Normale Supérieure et Université P. et M. Curie
F-75252, Case 74, 4 pl. Jussieu, France*

Поступила в редакцию 5 марта 2005 г.

Представлено вычисление двухпетлевой собственно-энергетической поправки к уровню энергии основного состояния водородоподобных ионов с зарядом ядра $Z \geq 10$. Расчет выполнен без разложения по параметру $Z\alpha$, где α — постоянная тонкой структуры. Проведено сравнение полученных данных с результатами аналитических расчетов в рамках $Z\alpha$ -разложения, найдено существенное разногласие с аналитическими результатами порядка $\alpha^2(Z\alpha)^6$. С помощью экстраполяции получено наиболее точное значение для двухпетлевой собственно-энергетической поправки для $1s$ -состояния в водороде.

PACS: 31.30.Jv, 31.10.+z, 31.30.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Водородоподобный ион как наиболее простая атомная система традиционно привлекает к себе пристальное внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. В отличие от атома водорода, экспериментальное исследование которого началось еще в XIX столетии, тяжелые водородоподобные ионы стали доступны для экспериментального изучения сравнительно недавно. В настоящее время высокоточные спектроскопические измерения выполняются для самых тяжелых ионов вплоть до водородоподобного урана. Наглядным примером является измерение лэмбовского сдвига основного состояния в водородоподобном ионе урана, точность которого за последнее десятилетие увеличилась в 10 раз. Погрешность наиболее точного экспериментального результата [1] составляет 13 эВ (около 5% от полного КЭД-вклада); в ближайшем будущем предполагается увеличение точности эксперимента до

1 эВ. Этот планируемый эксперимент является одним из стимулов для теоретических исследований КЭД-эффектов во втором порядке по постоянной тонкой структуры α без разложения по параметру $Z\alpha$ (Z — заряд ядра). Последовательный учет таких эффектов необходим для теоретического описания тяжелых водородоподобных ионов на адекватном уровне точности.

Исходя из известных членов разложения по $Z\alpha$, можно сделать вывод о том, что наибольший вклад среди одноэлектронных КЭД-эффектов второго порядка вносит двухпетлевая собственно-энергетическая (СЭ) поправка, изображенная на рис. 1. Вследствие медленной сходимости разложения по $Z\alpha$ для этой поправки, ее значение, основанное на известных членах разложения, — а следовательно, и значение полной КЭД-поправки второго порядка — становится неопределенным уже для умеренно тяжелых ионов. Это обосновывает необходимость вычисления двухпетлевой СЭ-поправки без разложения по параметру $Z\alpha$.

Расчет этой поправки во всех порядках по $Z\alpha$ является весьма актуальным также и для легких

*E-mail: yerokhin@pcqnt1.phys.spbu.ru

**P. Indelicato

*** Unité Mixte de Recherche du CNRS № 8552.

ионов, в том числе для водорода. Несмотря на значительные усилия, направленные на вычисление членов $Z\alpha$ -разложения, численно большие значения найденных коэффициентов свидетельствуют о его весьма медленной сходимости ряда даже для $Z = 1$. В настоящее время теоретическая погрешность энергии основного состояния в атоме водорода происходит главным образом от старших членов $Z\alpha$ -разложения двухпетлевой СЭ-поправки [2]. Следует иметь в виду, что сложность вычисления коэффициентов разложения быстро растет по мере увеличения их порядка. Недавно опубликованные результаты для всех вкладов порядка $\alpha^2(Z\alpha)^6$ [2–4] явились прорывом в этой области. Осуществление подобных вычислений в следующем порядке не представляется возможным в обозримом будущем. Более реальной альтернативой такому вычислению является расчет двухпетлевой СЭ-поправки без разложения по параметру $Z\alpha$.

Кратко остановимся на результатах, полученных к настоящему моменту для коэффициентов разложения двухпетлевой СЭ-поправки по параметру $Z\alpha$. Поправка к энергии традиционно выражается через безразмерную функцию F , определенную следующим образом (в единицах $\hbar = c = 1$):

$$\Delta E = m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} F(Z\alpha), \quad (1)$$

где n обозначает главное квантовое число рассматриваемого состояния. Функция F может быть представлена в виде ряда по $Z\alpha$ и $L = \ln(Z\alpha)^{-2}$:

$$F(Z\alpha) = B_{40} + (Z\alpha) B_{50} + (Z\alpha)^2 \times \\ \times \left[L^3 B_{63} + L^2 B_{62} + L B_{61} + G^{h.o.}(Z\alpha) \right], \quad (2)$$

где $G^{h.o.}$ обозначает вклад всех высших порядков по $Z\alpha$,

$$G^{h.o.}(Z\alpha) = B_{60} + Z\alpha(\dots).$$

Известные к настоящему времени члены разложения по $Z\alpha$ приведены ниже (см. обзор в работе [5]):

$$B_{40}(ns) = 1.409244\dots, \quad (3)$$

$$B_{50}(ns) = -24.2668(31), \quad (4)$$

$$B_{63}(ns) = -8/27, \quad (5)$$

$$B_{62}(1s) = 16/27 - (16/9)\ln 2, \quad (6)$$

$$B_{61}(1s) = 49.838317, \quad (7)$$

$$B_{60}(1s) = -61.6(9.2). \quad (8)$$

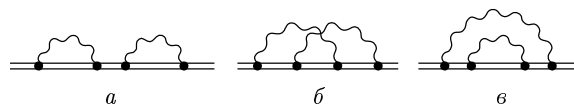


Рис. 1. Двухпетлевая собственнно-энергетическая поправка

Перейдем теперь к обсуждению вычисления двухпетлевой СЭ-поправки, представленной диаграммами на рис. 1, без использования разложения по параметру $Z\alpha$. Вклад диаграммы на рис. 1а удобно разделить на две части: приводимую и неприводимую. Под приводимой частью мы понимаем вклад, в котором энергия промежуточных состояний в спектральном разложении среднего электронного пропагатора совпадает с энергией начального состояния, а под неприводимой частью — остаток. Можно показать, что неприводимая часть остается инвариантной при ковариантных калибровочных преобразованиях. Она часто рассматривается отдельно и называется поправкой «петля за петлей» (loop-after-loop). Основной причиной для отдельного рассмотрения этого вклада является то, что вычисления для него значительно проще, чем для оставшейся части двухпетлевой СЭ-поправки, которую мы будем далее называть компактной. Впервые расчет поправки «петля за петлей» во всех порядках по $Z\alpha$ был выполнен Митрущенковым и др. [6] для ряда тяжелых водородоподобных ионов. Позднее расчеты этой поправки выполнялись также другими группами [7, 8].

Компактная часть двухпетлевой СЭ-поправки представлена приводимой частью диаграммы на рис. 1а, а также диаграммами на рис. 1б (перекрестная диаграмма) и рис. 1в (вложенная диаграмма). Первые попытки их вычисления во всех порядках по $Z\alpha$ были предприняты относительно недавно в работах Малламалли и Сапирштейна [9] и Гойденко и др. [10]. В расчете [10] была использована нековариантная процедура перенормировки, и поэтому полученные результаты не могут считаться достаточно обоснованными. В работе Малламалли и Сапирштейна использовался полностью ковариантный подход, но фактическое вычисление было выполнено только для некоторой части полного вклада. В этой работе компактная часть двухпетлевой СЭ-поправки была разделена на три вклада, названные авторами как « M -член», « P -член» и « F -член». (Подробное обсуждение каждого из этих членов будет дано ниже.) Практические вычисления были выполнены только для M - и F -членов, причем (вслед-

ствие очень больших затрат компьютерных ресурсов) расчет M -члена был проделан лишь для двух ионов с $Z = 92, 83$. P -член не был рассмотрен в этой работе, поскольку его вычисление требовало развития новых расчетных методов.

Исследование Маллампалли и Сапирштейна было продолжено в нашей работе [11], в которой было выполнено вычисление P -члена и получено полное значение для двухпетлевой $C\bar{E}$ -поправки для $Z = 92, 83$. В наших последующих работах [12, 13] был проведен первый полный расчет двухпетлевой $C\bar{E}$ -поправки для основного состояния водородоподобных ионов с $Z \geq 40$. Вследствие того что расчет был выполнен только для сравнительно больших значений Z , а также в силу недостаточно высокой точности вычислений в этих работах не было проведено детальное сравнение с аналитическими расчетами в рамках разложения по $Z\alpha$, и вопрос о согласии результатов, полученных различными методами, остался открытым.

Вычисления двухпетлевой $C\bar{E}$ -поправки в области малых значений Z весьма существенно осложнены численными сокращениями, которые быстро растут по мере уменьшения Z . В настоящей работе мы представляем схему вычисления этой поправки, которая пригодна для расчетов в области малых значений Z , и выполняем фактический расчет для $Z \geq 10$. Полученные данные сравниваются с результатами аналитических вычислений в рамках разложения по $Z\alpha$. Мы заключаем, что наши результаты хорошо согласуются с членами $Z\alpha$ -разложения в порядках $\alpha^2(Z\alpha)^4$ и $\alpha^2(Z\alpha)^5$, но расходятся с существующими результатами порядка $\alpha^2(Z\alpha)^6$. С помощью экстраполяции наших данных мы получаем наиболее точный результат для двухпетлевой $C\bar{E}$ -поправки к лэмбовскому сдвигу основного состояния атома водорода.

2. ФОРМАЛИЗМ

Перейдем теперь к детальному рассмотрению двухпетлевой $C\bar{E}$ -поправки. Общие выражения для различных вкладов в эту поправку могут быть легко получены с помощью метода двухвременных функций Грина [14]. Впервые эти формулы были выведены в работе [15].

Выражение для поправки «петля за петлей» (неприводимая часть диаграммы на рис. 1а) может быть записано как

$$\Delta E_{LAL} = \sum_n^{\varepsilon_n \neq \varepsilon_a} \frac{\langle a | \gamma^0 \tilde{\Sigma}(\varepsilon_a) | n \rangle \langle n | \gamma^0 \tilde{\Sigma}(\varepsilon_a) | a \rangle}{\varepsilon_a - \varepsilon_n}, \quad (9)$$

где $\tilde{\Sigma}(\varepsilon) = \Sigma(\varepsilon) - \delta m^{(1)}$, $\Sigma(\varepsilon)$ обозначает однопетлевой $C\bar{E}$ -оператор, а $\delta m^{(1)}$ — однопетлевой контрчлен перенормировки массы. Однопетлевой $C\bar{E}$ -оператор определяется следующим образом:

$$\Sigma(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2i\alpha\gamma^0 \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D^{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}_{12}) \alpha_\mu G(\varepsilon - \omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \alpha_\nu, \quad (10)$$

где G — функция Грина уравнения Дирака с кулоновским потенциалом $G(\varepsilon) = [\varepsilon - H(1 - i0)]^{-1}$, H обозначает дираковский гамильтониан, $D^{\mu\nu}$ — фотонный пропагатор, $\alpha_\mu = (1, \boldsymbol{\alpha})$ — вектор, составленный из матриц Дирака, $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Как следует из выражения (9), вычисление поправки «петля за петлей» может быть выполнено путем обобщения численной схемы, разработанной для расчета $C\bar{E}$ -поправки первого порядка.

Отметим, что перенормировка массы выполняется нами с помощью введения массового контрчлена в лагранжиан системы (см., например, [16]). В таком случае каждый (под)граф, дающий вклад в собственную энергию, сопровождается соответствующим вкладом от контрчлена перенормировки массы.

Вклад перекрестной («O») диаграммы (рис. 1б) дается следующим выражением (для простоты здесь и далее подразумеваем фейнмановскую калибровку фотонного пропагатора):

$$\Delta E_O = 2i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_4 D(\omega_1, x_{13}) \times \times \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Lambda^\mu(\varepsilon_a - \omega_1, \varepsilon_a) \times \times \psi_a(\mathbf{x}_4) \text{—к.ч.}, \quad (11)$$

где «к.ч.» обозначает соответствующий вклад контрчлена перенормировки массы. Величина D обозначает скалярную часть фотонного пропагатора в фейнмановской калибровке,

$$D(\omega, x_{12}) = \frac{\exp(i\sqrt{\omega^2 + i0}x_{12})}{4\pi x_{12}}, \quad (12)$$

где выбор фазы квадратного корня фиксирован условием $\text{Im}\sqrt{\omega^2 + i0} > 0$, а $x_{12} = |\mathbf{x}_{12}|$. Вершинный оператор Λ^μ определен как

$$\Lambda^\mu(\varepsilon_a - \omega_1, \varepsilon_a) = 2i\alpha\gamma^0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 D(\omega_2, x_{24}) \alpha_\nu \times \\ \times G(\varepsilon_a - \omega_1 - \omega_2) \alpha^\mu G(\varepsilon_a - \omega_2) \alpha^\nu. \quad (13)$$

Для простоты записи здесь и далее опускаем радиальные аргументы в функциях G , Σ , Λ в тех случаях, когда они могут быть однозначно восстановлены. Вклад вложенной (« N ») диаграммы (рис. 1 в) записывается как

$$\Delta E_N = 2i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_4 D(\omega_1, x_{14}) \times \\ \times \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \tilde{\Sigma}(\varepsilon_a - \omega_1) \times \\ \times G(\varepsilon_a - \omega_1) \alpha^\mu \psi_a(\mathbf{x}_4) - \text{к.ч.} \quad (14)$$

Наконец, приводимая («red») часть вклада диаграммы на рис. 1а дается выражением

$$\Delta E_{red} = \Delta E_{SE} \langle a | \gamma^0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tilde{\Sigma}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_a} | a \rangle, \quad (15)$$

где ΔE_{SE} обозначает СЭ-поправку первого порядка,

$$\Delta E_{SE} = \langle a | \gamma^0 \tilde{\Sigma}(\varepsilon_a) | a \rangle.$$

Перенормировка компактной части двухпетлевой СЭ-поправки может быть выполнена с помощью стандартной техники свободной КЭД путем разложения связанных электронных пропагаторов в ряд по степеням взаимодействия с ядром. Анализ приведенных выше выражений (см., например, работу [17]) показывает, что каждый из вкладов (11), (14) и (15) содержит ультрафиолетовые (УФ) расходимости, которые сокращаются в общей сумме. Таким образом, сумма всех трех вкладов в сдвиг энергии,

$$\Delta E_{comp} = \Delta E_N + \Delta E_O + \Delta E_{red}, \quad (16)$$

свободна от ультрафиолетовых расходимостей. Выражения для приводимого и вложенного вкладов содержат также инфракрасные (ИК) расходимости. Такие ИК-расходимости (называемые также в англоязычной литературе как «reference-state singularities») могут возникать в КЭД связанных состояний в случаях, когда энергия промежуточных состояний в спектральном разложении электронных пропагаторов совпадает с энергией начального состояния. Подробный анализ возникающих ИК-расходимостей и доказательство их сокращения могут быть найдены в работе [13].

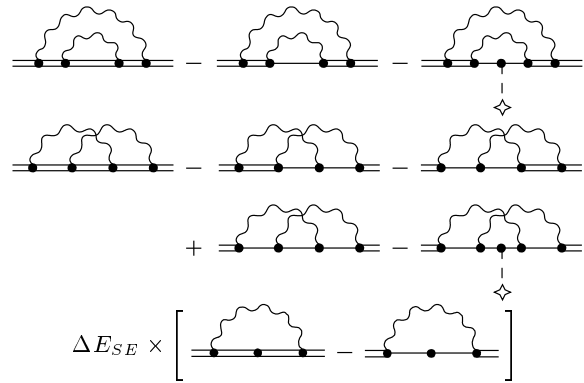


Рис. 2. Схематическое изображение УФ-вычитаний для M -члена. Для приводимой части использовано тождество $(\partial/\partial\varepsilon)(\varepsilon - H)^{-1} = -(\varepsilon - H)^{-2}$

Теперь перейдем к рассмотрению общей схемы практического вычисления соответствующих вкладов. Основная проблема заключается в том, что выражения, содержащие связанные электронные пропагаторы, намного удобнее вычислять в координатном пространстве, в то время как ковариантное выделение УФ-расходимостей обычно проводится в импульсном представлении и для свободных пропагаторов. В случае СЭ-поправки первого порядка оказывается возможным выделить все УФ-расходимости в виде членов, которые не содержат связанных электронных пропагаторов (так называемые 0- и 1-потенциальные члены, см. [18, 19]). Эти вклады вычисляются в импульсном представлении, в то время как конечный остаток (многопотенциальный член) рассматривается в координатном пространстве. В двухпетлевом случае подобного разделения сделать не удастся, что связано с наличием перекрывающихся УФ-расходящихся блоков в перекрестной и вложенной диаграммах. Тем не менее общая стратегия в данном случае по-прежнему основывается на разложении связанных электронных пропагаторов в ряд по степеням взаимодействия с кулоновским потенциалом ядра.

На первом шаге подбираем вычитания, составленные из диаграмм, содержащих вместо связанных электронных пропагаторов свободные, таким образом, чтобы поточечная разность соответствующих вкладов не содержала УФ-расходимостей. (Под поточечной разностью мы подразумеваем то, что означенные вычитания должны выполняться в каждой точке, т.е. для подынтегрального выражения.) Получившийся вклад мы, следуя за Маллампалли и Сапирштейном [9], называем M -членом. Его схематическое изображение дано на рис. 2. M -член состо-

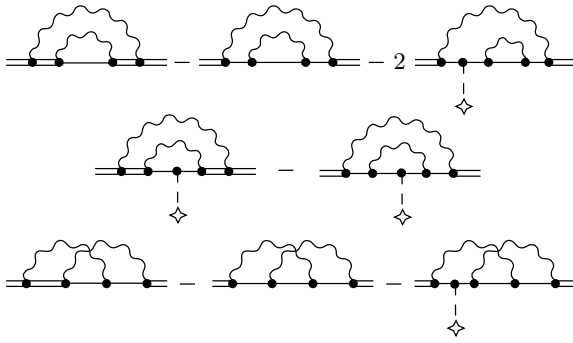


Рис. 3. Схематическое изображение УФ-вычитаний для P -члена

ит из трех частей, которые происходят от вложенной и перекрестной диаграмм и приводимой части диаграммы 1а. Вычитания подобраны таким образом, что каждая из этих трех частей не содержит УФ-расходимостей.

Теперь нужно учесть вычтенные диаграммы. Эти диаграммы естественно распадаются на две части. Одни из них содержат только свободные электронные пропагаторы и, следовательно, могут быть вычислены с помощью стандартной техники свободной КЭД. Другие содержат связанные электронные пропагаторы и представляют собой большую проблему для расчетов. Для таких диаграмм мы вводим дополнительные вычитания, которые понижают степень их расходимости. Полученная поточечная разность называется P -членом [9]; соответствующие УФ-вычитания схематически изображены на рис. 3. P -член состоит из трех частей, первые две из которых возникают от вложенной диаграммы, а третья — от перекрестной. Последняя часть должна быть учтена дважды, что соответствует двум эквивалентным вычитаниям в M -члене. Проиллюстрируем достигнутое понижение степени расходимости на примере первой разности на рис. 3. Можно показать, что эта (поточечная) разность УФ расходится только за счет внутренней СЭ-петли, в то время как расходимость, происходящая от внешней СЭ-петли, сокращается.

Наконец, соберем все оставшиеся вычитания и назовем полученный вклад F -членом (рис. 4). Он состоит из диаграмм, содержащих только свободные пропагаторы.

Таким образом, мы разделили компактную часть двухпетлевой СЭ-поправки на три вклада. Смысл такого разделения в том, что для вычисления каждого из этих членов используется свой метод. M -член вычисляется в координатном пространстве с исполь-

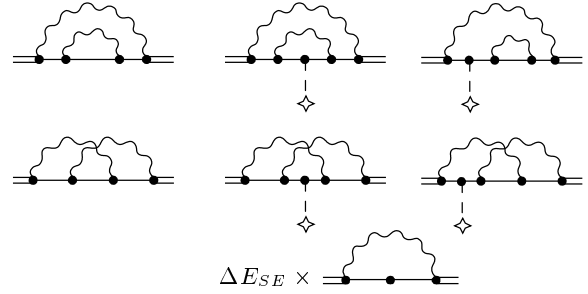


Рис. 4. Графическое представление F -члена. Крайние справа диаграммы в первых двух рядах должны быть учтены дважды

зованием аналитического представления для связанных электронных пропагаторов. F -член вычисляется в импульсном пространстве с применением размерной регуляризации и фейнмановской параметризации. Расчет P -члена проводится в смешанном координатно-импульсном представлении; при этом связанные электронные пропагаторы вычисляются с помощью конечного базисного набора для уравнения Дирака и последующего численного преобразования Фурье.

2.1. M -член: формулировка и анализ

Как следует из рис. 2, M -член состоит из трех частей, которые будем называть вложенным M -вкладом, перекрестным M -вкладом и приводимым M -вкладом, соответственно:

$$\Delta E_M = \Delta E_{N,M} + \Delta E_{O,M} + \Delta E_{red,M}. \quad (17)$$

Выражение для вложенного M -вклада получим из формулы (14) с помощью дополнительных вычитаний,

$$\begin{aligned} \Delta E_{N,M} = & 2i\alpha \int_C d\omega_1 \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_4 \times \\ & \times D(\omega_1, x_{14}) \left[\psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Sigma(\varepsilon_a - \omega_1) \times \right. \\ & \left. \times G(\varepsilon_a - \omega_1) \alpha^\mu \psi_a(\mathbf{x}_4) - \text{вычитания} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Вычитания определим следующей подстановкой:

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Sigma(\varepsilon_a - \omega_1) G(\varepsilon_a - \omega_1) \rightarrow \\ \rightarrow G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Sigma^{(2+)}(\varepsilon_a - \omega_1) G(\varepsilon_a - \omega_1) - \\ - G^{(a)}(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Sigma^{(2+)}(\varepsilon_a) G^{(a)}(\varepsilon_a - \omega_1). \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь

$$G^{(a)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{\mu_a} \frac{\psi_a(\mathbf{x}_1) \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_2)}{E - \varepsilon_a + i0}, \quad (20)$$

μ_a обозначает проекцию полного момента состояний ψ_a в формуле (20), а $\Sigma^{(2+)}$ — часть однопетлевого СЭ-оператора (10), содержащая два и более взаимодействия с кулоновским потенциалом ядра:

$$\Sigma^{(2+)} = \Sigma - \Sigma^{(0)} - \Sigma^{(1)}, \quad (21)$$

где верхний индекс обозначает порядок члена разложения по степеням потенциала. Отметим, что первая часть вычитаний (19) сокращает УФ-расходимости, а вторая — ИК-расходимости, присутствующие в полном вложенном вкладе (14). Непосредственный анализ показывает, что вложенный M -вклад, определенный таким образом, является конечным.

Обсудим теперь выбор контура интегрирования по ω_1 в формуле (18) (для простоты будем считать, что a — основное состояние). В исходном выражении (14) интегрирование по ω_1 выполнялось вдоль вещественной оси. Однако для практических расчетов контур интегрирования удобно развернуть параллельно мнимой оси. В наших вычислениях мы использовали контур C_{LH} [20, 19], состоящий из двух частей, низкоэнергетической (C_L) и высокоэнергетической (C_H). Низкоэнергетическая часть простирается от $\varepsilon_0 - i0$ до $-i0$ по нижнему берегу разреза фотонного пропагатора и от $i0$ до $\varepsilon_0 + i0$ по верхнему берегу разреза (детали см. в работе [19]). Высокоэнергетическая часть определена следующим образом:

$$C_H = [\varepsilon_0 + i0, \varepsilon_0 + i\infty) + (\varepsilon_0 - i\infty, \varepsilon_0 - i0].$$

Параметр ε_0 , который делит контур на две части, может выбираться произвольно в пределах $\varepsilon_0 \in (0, m + \varepsilon_a)$. В настоящей работе этот параметр был выбран следующим образом: $\varepsilon_0 = \varepsilon_a/2$.

Для того чтобы обосновать возможность деформации контура интегрирования в формуле (18), необходимо показать, что СЭ-оператор $\Sigma(\varepsilon_a - \omega_1)$ может быть аналитически продолжен в требуемую область комплексной плоскости ω_1 . Такое доказательство представлено в работе [13]. Там же показано, что явное выражение для СЭ-оператора, которое реализует такое аналитическое продолжение, может быть получено из формулы (10) путем замены контура интегрирования по ω с $(-\infty, \infty)$ на C_{LH} . Таким образом, мы заключаем, что выражение (18) остается справедливым, если контур интегрирования по ω_1

заменить на C_{LH} , а в качестве СЭ-оператора взять его приведенное выше аналитическое продолжение.

Выражение для перекрестного M -вклада получим из формулы (11) с помощью дополнительных вычитаний,

$$\begin{aligned} \Delta E_{O,M} &= 2i\alpha \int_C d\omega_1 \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_4 \times \\ &\times D(\omega_1, x_{13}) \left[\psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Lambda^\mu(\varepsilon_a - \omega_1, \varepsilon_a) \times \right. \\ &\quad \left. \times \psi_a(\mathbf{x}_4) - \text{вычитания} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

где вершинный оператор определен формулой (13), а вычитания определяются следующей подстановкой (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} G_1 G_2 G_3 \rightarrow &G_1 G_2 G_3 - G_1 G_2^{(0)} G_3^{(0)} - G_1^{(0)} G_2^{(0)} G_3 + \\ &+ G_1^{(0)} G_2^{(0)} G_3^{(0)} - G_1^{(0)} G_2^{(1)} G_3^{(0)}. \quad (23) \end{aligned}$$

Здесь $G^{(0)}$ обозначает свободную функцию Грина уравнения Дирака, а $G^{(1)}$ — член первого порядка в разложении кулоновской функции Грина в ряд по степеням кулоновского потенциала V_C :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \\ &= \int dz G^{(0)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{z}) V_C(z) G^{(0)}(E, \mathbf{z}, \mathbf{x}_2). \quad (24) \end{aligned}$$

Можно показать, что выражение (22) является конечным.

Так же как и для вложенного M -вклада, численный расчет выражения (22) удобно проводить, используя контур C_{LH} для интегрирования по ω_1 . Доказательство того, что вершинный оператор $\Lambda^\mu(\varepsilon_a - \omega_1, \varepsilon_a)$ допускает необходимое аналитическое продолжение в комплексную плоскость ω_1 , выполняется таким же образом, как и для СЭ-оператора. Удобный выбор явного выражения для аналитического продолжения вершинного оператора получается путем замены контура интегрирования по ω с $(-\infty, \infty)$ на C_{LH} в формуле (13).

Наконец, выражение для приводимого M -вклада получается из формулы (15) с помощью соответствующих вычитаний. Используя явное выражение для СЭ-оператора, получаем

$$\begin{aligned} \Delta E_{red,M} &= \\ &= -2i\alpha \Delta E_{SE} \int_C d\omega \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 D(\omega, x_{13}) \times \\ &\times \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu \left[G(\varepsilon_a - \omega) G(\varepsilon_a - \omega) - \text{вычитания} \right] \times \\ &\quad \times \alpha^\mu \psi_a(\mathbf{x}_3), \quad (25) \end{aligned}$$

где вычитания определим следующей подстановкой:

$$G_1 G_2 \rightarrow G_1 G_2 - G_1^{(0)} G_2^{(0)} - G_1^{(a)} G_2^{(a)}. \quad (26)$$

Здесь первая часть вычитаний сокращает УФ-расходимости, а вторая — ИК-расходимости. Выбор контура интегрирования в формуле (25), равно как и численный расчет этого вклада, выполняется так же, как и для СЭ-поправки первого порядка [19].

2.2. P -член: формулировка и анализ

Общая схема УФ-вычитаний в P -члене графически представлена на рис. 3. P -член состоит из трех частей,

$$\Delta E_P = \Delta E_{N1,P} + \Delta E_{N2,P} + 2 \Delta E_{O,P}, \quad (27)$$

которые соответствуют трем строкам на рис. 3. Отдельные вклады будем называть, соответственно, как первый вложенный P -член, второй вложенный P -член и перекрестный P -член. Последний вклад должен быть учтен дважды, что отвечает двум эквивалентным вычитаниям в M -члене.

Основная проблема при вычислении P -члена состоит в том, что вычитания, изображенные на рис. 3, не сокращают всех УФ-расходимостей. По этой причине общие выражения для P -вкладов будем записывать в смешанном координатно-импульсном представлении. При этом УФ-расходящаяся часть будет вычисляться в импульсном представлении (которое облегчает ковариантное выделение УФ-расходимостей), а остальная часть выражения — в координатном. Использование координатного представления значительно облегчает аналитическое вычисление интегралов по угловым переменным и последующий численный расчет полученных выражений.

Общее выражение для первого вложенного P -члена дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Delta E_{N1,P} = & 2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \times \\ & \times D(\omega, x_{12}) \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu \left[G(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}) \times \right. \\ & \times \left. \gamma^0 \tilde{\Sigma}^{(0)}(E, \mathbf{p}) G(E, \mathbf{p}, \mathbf{x}_2) - \text{вычитания} \right] \times \\ & \times \alpha^\mu \psi_a(\mathbf{x}_2), \quad (28) \end{aligned}$$

где $E \equiv \varepsilon_a - \omega$, $\Sigma^{(0)}$ — свободный СЭ-оператор,

$\tilde{\Sigma}^{(0)} = \Sigma^{(0)} - \delta m^{(1)}$, вычитания определены следующей подстановкой:

$$\begin{aligned} G \tilde{\Sigma}^{(0)}(E) G \rightarrow & G \tilde{\Sigma}^{(0)}(E) G - G^{(0)} \tilde{\Sigma}^{(0)}(E) G^{(0)} - \\ & - G^{(1)} \tilde{\Sigma}^{(0)}(E) G^{(0)} - G^{(0)} \tilde{\Sigma}^{(0)}(E) G^{(1)} - \\ & - G^{(a)} \tilde{\Sigma}^{(0)}(\varepsilon_a) G^{(a)}, \quad (29) \end{aligned}$$

а функция Грина в смешанном представлении определяется как

$$G(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{x}_2 \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_2) G(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (30)$$

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x}_1 \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1) G(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (31)$$

Заметим, что последняя часть вычитаний (29) обеспечивает сокращение ИК-расходимостей.

Второй вложенный P -вклад дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta E_{N2,P} = & 2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 D(\omega, x_{12}) V_C(\mathbf{q}) \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \times \\ & \times \alpha_\mu \left[G(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \gamma^0 \Gamma^0(E, \mathbf{p}_1; E, \mathbf{p}_2) \times \right. \\ & \times \left. G(E, \mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2) - \text{вычитания} \right] \alpha^\mu \psi_a(\mathbf{x}_2), \quad (32) \end{aligned}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, Γ^μ обозначает свободный вершинный оператор (получаемый из вершинного оператора Λ^μ (13) при выключении внешнего поля), а вычитания определены подстановкой

$$\begin{aligned} G \Gamma^0(E, E) G \rightarrow & G \Gamma^0(E, E) G - \\ & - G^{(0)} \Gamma^0(E, E) G^{(0)} - G^{(a)} \Gamma^0(\varepsilon_a, \varepsilon_a) G^{(a)}. \quad (33) \end{aligned}$$

Снова последняя часть вычитаний (33) обеспечивает сокращение ИК-расходимостей.

Выражение для перекрестного P -вклада дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Delta E_{O,P} = & -2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \int d\mathbf{x}_1 \frac{\exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_1)}{\omega^2 - \mathbf{q}^2 + i0} \psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \alpha_\mu G^{(2+)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \times \\ & \times \gamma^0 \Gamma^\mu(E, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2) \psi_a(\mathbf{p}_2), \quad (34) \end{aligned}$$

где $G^{(2+)}$ обозначает часть кулоновской функции Грина, содержащую два и более взаимодействия с кулоновским полем: $G^{(2+)} = G - G^{(0)} - G^{(1)}$.

Теперь перейдем к обсуждению расходимостей, присутствующих в выражениях для P -вкладов. Используя размерную регуляризацию, выделим сначала УФ-расходящиеся части свободных однопетлевых операторов:

$$\tilde{\Sigma}^{(0)}(p) = B^{(1)}(\not{p} - m) + \Sigma_R^{(0)}, \quad (35)$$

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2) = L^{(1)}\gamma^\mu + \Gamma_R^\mu(p_1, p_2), \quad (36)$$

где индекс R обозначает УФ-конечную часть соответствующего вклада. С помощью этих формул, тождества Уорда ($L^{(1)} = -B^{(1)}$) и уравнения Дирака получаем выражения для УФ-расходящихся частей P -вкладов:

$$\begin{aligned} \Delta E_{N1, P} + \Delta E_{N2, P} &= \\ &= B^{(1)} \Delta E_{many, D} + \Delta E_{N1, P}^R + \Delta E_{N2, P}^R, \end{aligned} \quad (37)$$

$$2 \Delta E_{O, P} = 2 L^{(1)} \Delta E_{many, D} + 2 \Delta E_{O, P}^R. \quad (38)$$

Здесь $\Delta E_{many, D} = \langle a | \gamma^0 \Sigma^{(2+)}(\varepsilon_a) | a \rangle$ — многопотенциальная часть СЭ-поправки первого порядка, а индекс D указывает на то, что этот вклад должен быть вычислен в пространстве расширенной размерности D , так как он умножается на расходящуюся перенормировочную константу. (К счастью, в его практическом вычислении нет необходимости, поскольку он сокращается в сумме с F -членом.) Выражения для $\Delta E_{N1, P}^R$, $\Delta E_{N2, P}^R$ и $\Delta E_{O, P}^R$ получаются из формул (28), (32) и (34) с помощью замен $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_R$ и $\Gamma^\mu \rightarrow \Gamma_R^\mu$.

Следует отметить, что наш выбор перенормировочных констант $B^{(1)}$ и $L^{(1)}$ отличается от стандартного (см., например, [16]). В формулах (35), (36) мы выделяем только УФ-расходящуюся часть однопетлевых операторов. При этом явный вид констант $B^{(1)}$ и $L^{(1)}$ (в пространстве размерности $D = 4 - 2\epsilon$) дается следующим выражением:

$$B^{(1)} = -L^{(1)} = \frac{\alpha C_\epsilon}{4\pi\epsilon}, \quad (39)$$

где постоянная C_ϵ есть

$$C_\epsilon = \Gamma(1 + \epsilon) (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^\epsilon, \quad (40)$$

а μ — единичный параметр, имеющий размерность массы и введенный для того, чтобы член с взаимодействием в лагранжиане системы имел правильную размерность при $D \neq 4$. Такой выбор констант перенормировки позволяет избежать появления ИК-расходимостей в выражениях для $\Delta E_{N1, P}^R$, $\Delta E_{N2, P}^R$ и $\Delta E_{O, P}^R$.

Принимая во внимание тождество Уорда, получаем, что P -член представляется следующей суммой:

$$\begin{aligned} \Delta E_P &= L^{(1)} \Delta E_{many, D} + \Delta E_{N1, P}^R + \\ &+ \Delta E_{N2, P}^R + 2 \Delta E_{O, P}^R, \end{aligned} \quad (41)$$

где расходящимся является только первое слагаемое.

Можно показать, что ИК-часть вычитаний (29), (33) в P -члене полностью сокращается с соответствующей частью вычитаний (19), (26) в M -члене. Поэтому необходимость в отдельном рассмотрении вычтенных ИК-расходящихся членов не возникает.

Для удобства численного расчета перенормированных выражений (28), (32), (34) контур интегрирования по ω следует развернуть параллельно мнимой оси. В отличие от контура C_{LH} , использованного при расчете M -члена, для вычисления P -вкладов был применен стандартный виковский поворот контура $\omega \rightarrow i\omega$. Такая деформация контура приводит к появлению так называемых полюсных вкладов, происходящих от промежуточных состояний в электронных пропагаторах с энергией $\varepsilon_n = \varepsilon_a$. Подробное обсуждение такого способа разворота контура и возникающих при этом выражений может быть найдено в работе [11].

2.3. F -член: формулировка и анализ

Набор диаграмм, дающих вклад в F -член, изображен на рис. 4. Напомним, что каждый (под)граф, дающий вклад в собственную энергию, сопровождается соответствующим контрчленом перенормировки массы. Особенностью F -члена является то, что соответствующие диаграммы содержат только свободные электронные пропагаторы. Поэтому его вычисление выполнялось в импульсном пространстве с использованием стандартной техники свободной КЭД. Регуляризация УФ-расходимостей проводилась посредством перехода к пространству расширенной размерности $D = 4 - 2\epsilon$.

Диаграммы, представленные на рис. 4, можно разделить на три части. Первая часть состоит из вложенной и перекрестной диаграмм, не содержащих взаимодействия с кулоновским полем в электронных пропагаторах. Мы будем называть ее 0-потенциальным F -членом; соответствующие вклады будут помечаться индексом «zero». Вторая часть состоит из диаграмм, содержащих одно кулоновское взаимодействие; она называется 1-потенциальным F -вкладом («one»). Наконец, оставшаяся часть на-

зывается приводимым F -вкладом («red»). Таким образом,

$$\Delta E_F = \Delta E_{zero}^{(2)} + \Delta E_{one}^{(2)} + \Delta E_{red}^{zero}. \quad (42)$$

Выражение для 0-потенциального F -вклада может быть записано в следующем виде:

$$\Delta E_{zero}^{(2)} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_a(\mathbf{p}) \tilde{\Sigma}_{zero}^{(2)}(p) \psi_a(\mathbf{p}), \quad (43)$$

где $p = (\varepsilon_a, \mathbf{p})$ — 4-мерный импульс, $\tilde{\Sigma}_{zero}^{(2)} = \Sigma_{zero}^{(2)} - \delta m^{(2)}$, $\Sigma_{zero}^{(2)}$ обозначает свободный двухпетлевой СЭ-оператор, $\delta m^{(2)}$ — двухпетлевой контрчлен перенормировки массы. Свободный двухпетлевой СЭ-оператор состоит из двух частей, возникающих от вложенной («N») и перекрестной («O») диаграмм. Соответствующие вклады даются следующими выражениями:

$$\Sigma_{zero}^{(2N)}(p) = -4\pi i \alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \gamma_\sigma \times \\ \times \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \tilde{\Sigma}_D^{(0)}(p-k) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\sigma, \quad (44)$$

$$\Sigma_{zero}^{(2O)}(p) = -4\pi i \alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \times \\ \times \gamma_\sigma \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \Gamma_D^\sigma(p-k, p), \quad (45)$$

где $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$, $\tilde{\Sigma}_D^{(0)} = \Sigma_D^{(0)} - \delta m^{(1)}$, $\Sigma_D^{(0)}$ и $\Gamma_D^\sigma(p_1, p_2)$ обозначают свободные однопетлевые СЭ- и вершинный операторы, а индекс D подчеркивает, что они должны вычисляться в пространстве расширенной размерности. Общая структура УФ-расходимостей в свободном двухпетлевом СЭ-операторе дается выражением

$$\tilde{\Sigma}_{zero}^{(2)}(p) = (\not{p} - m) B^{(2)} + \\ + \frac{\alpha C_\epsilon^2}{4\pi\epsilon} \Sigma_{R,4}^{(0)}(p) + \Sigma_{zero,R}^{(2)}(p), \quad (46)$$

где $\Sigma_{R,4}^{(0)}$ обозначает перенормированный свободный однопетлевой СЭ-оператор, вычисленный в пространстве физической размерности, а двухпетлевая константа перенормировки имеет вид

$$B^{(2)} = \frac{\alpha^2 C_\epsilon^2}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{3}{4\epsilon} \right). \quad (47)$$

Однопотенциальный F -член выражается через соответствующий вклад в двухпетлевой СЭ-оператор следующим образом:

$$\Delta E_{one}^{(2)} = \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6} \bar{\psi}_a(\mathbf{p}_1) V_C(\mathbf{q}) \times \\ \times \Sigma_{one}^{(2)}(p_1, p_2) \psi_a(\mathbf{p}_2), \quad (48)$$

где $p_1 = (\varepsilon_a, \mathbf{p}_1)$, $p_2 = (\varepsilon_a, \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Однопотенциальный двухпетлевой СЭ-оператор $\Sigma_{one}^{(2)}$ представляется четырьмя неэквивалентными диаграммами на рис. 4, которые могут быть получены из двух свободных диаграмм добавлением взаимодействия с кулоновским полем во всех возможных положениях. В случае, когда взаимодействие добавляется к центральному пропагатору, будем называть такой вклад лестничным («lad»); в противном случае он будет называться боковым («side»). Боковые вклады должны учитываться дважды, чтобы принять во внимание эквивалентные диаграммы. Приведем теперь общие выражения для однопотенциальных вкладов:

$$\Sigma_{lad}^{(2N)}(p_1, p_2) = -4\pi i \alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \gamma_\sigma \times \\ \times \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \Gamma_D^0(p_1-k, p_2-k) \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \gamma^\sigma, \quad (49)$$

$$\Sigma_{side}^{(2N)}(p_1, p_2) = -8\pi i \alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \times \\ \times \gamma_\sigma \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \tilde{\Sigma}_D^{(0)}(p_1-k) \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \times \\ \times \gamma^0 \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \gamma^\sigma, \quad (50)$$

$$\Sigma_{lad}^{(2O)}(p_1, p_2) = (4\pi i \alpha \mu^{2\epsilon})^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} \times \\ \times \gamma_\sigma \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - \not{l} - m} \times \\ \times \gamma^0 \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - \not{l} - m} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{p}_2 - \not{l} - m} \gamma^\alpha, \quad (51)$$

$$\Sigma_{side}^{(2O)}(p_1, p_2) = -8\pi i \alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \gamma_\sigma \times \\ \times \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m} \gamma^0 \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - m} \Gamma_D^\sigma(p_2-k, p_2). \quad (52)$$

Приведем также общую структуру УФ-расходимостей в однопотенциальном члене:

$$\Sigma_{one}^{(2)}(p_1, p_2) = \gamma^0 L^{(2)} + \frac{\alpha C_\epsilon^2}{4\pi\epsilon} \Gamma_{R,4}^0(p_1, p_2) + \\ + \Sigma_{one,R}^{(2)}(p_1, p_2), \quad (53)$$

где $\Gamma_{R,4}^\mu(p_1, p_2)$ — свободный вершинный оператор, вычисленный в пространстве размерности 4, а перенормировочная константа $L^{(2)}$ связана с константой $B^{(2)}$ тождеством Уорда $L^{(2)} = -B^{(2)}$.

Наконец, рассмотрим последнюю часть F -члена. Приводимый F -вклад записывается в следующем виде:

$$\Delta E_{red}^{zero} = \Delta E_{SE,D} \langle a | \gamma^0 \frac{\partial}{\partial p^0} \Sigma_D^{(0)}(p) \Big|_{p^0=\varepsilon_a} | a \rangle, \quad (54)$$

где $\Delta E_{SE,D}$ — СЭ-поправка первого порядка, вычисленная в пространстве расширенной размерности. Выделяя явно расходящиеся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ вклады, получаем

$$\Delta E_{red}^{zero} = -\frac{\alpha C_\epsilon^2}{4\pi\epsilon} (\Delta E_{zero} + \Delta E_{one}) + B^{(1)} \Delta E_{many,D} + \Delta E_{red,R}^{zero}, \quad (55)$$

где

$$\Delta E_{zero} = \langle a | \gamma^0 \Sigma_{R,4}^{(0)} | a \rangle$$

и

$$\Delta E_{one} = \langle a | V_C(q) \gamma^0 \Gamma_{R,4}^0 | a \rangle$$

— 0-потенциальная и 1-потенциальная части однопетлевой СЭ-поправки.

Наконец, соберем вместе 0-потенциальный, 1-потенциальный и приводимый F -вклады и запишем окончательный результат:

$$\Delta E_F = B^{(1)} \Delta E_{many,D} + \Delta E_{zero,R}^{(2)} + \Delta E_{one,R}^{(2)} + \Delta E_{red,R}^{zero}. \quad (56)$$

При получении этого выражения мы использовали тождество Уорда и уравнение Дирака. Расходящаяся часть формулы (56) сокращается в сумме с P -членом (см. (41)).

3. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ

Общая схема вычисления индивидуальных вкладов в двухпетлевую СЭ-поправку описана в статье [13]. Целью настоящей работы является расчет этой поправки в области малых значений заряда ядра Z , где вычисления существенно затруднены возникающими численными сокращениями. В этом разделе описываются основные моменты, которые позволили нам достичь относительно высокой точности расчетов в области малых Z .

Вычисление M -члена является наиболее требовательным с точки зрения компьютерных ресурсов. Это связано с тем, что после выполнения интегрирований по угловым переменным в формулах (18), (22) и учета правил отбора соответствующие выражения представляются в виде двукратной неограниченной

суммы по парциальным волнам. Для того чтобы достичь необходимой точности результата и сохранить общее время вычислений в разумных пределах, необходимо выделить из $\Delta E_{N,M}$ и $\Delta E_{O,M}$ части, которые содержат доминирующий вклад в пределе малых значений Z и расчет которых может быть проведён более просто, чем для полных выражений.

В случае вложенного M -вклада такая часть получается из формулы (18) следующей подстановкой:

$$G(\varepsilon_a - \omega_1) \gamma^0 \Sigma(\varepsilon_a - \omega_1) G(\varepsilon_a - \omega_1) \rightarrow G^{(a)}(\varepsilon_a - \omega_1) \times \gamma^0 \left[\Sigma^{(2+)}(\varepsilon_a - \omega_1) - \Sigma^{(2+)}(\varepsilon_a) \right] G^{(a)}(\varepsilon_a - \omega_1). \quad (57)$$

После выполнения этой подстановки двукратное суммирование по парциальным волнам сокращается до однократного и происходит упрощение общей структуры выражения, в результате чего соответствующий численный расчет может быть выполнен весьма эффективно. В случае перекрестного M -члена доминирующий вклад выбирался следующим образом. Обозначив через κ_1 , κ_2 и κ_3 релятивистский угловой параметр, соответственно, первого, второго и третьего электронного пропагатора в формуле (22) и через l_1 и l_2 — угловой момент, соответственно, первого и второго виртуального фотона, выделим вклад с $\kappa_1 = \kappa_a$, $\kappa_2 = \kappa_3$ и $l_1 = 0$ и (тождественный ему) вклад с $\kappa_3 = \kappa_a$, $\kappa_1 = \kappa_2$ и $l_2 = 0$. Очевидно, что эти вклады содержат только однократное суммирование по парциальным волнам и, следовательно, могут быть вычислены с лучшей точностью, чем полное выражение.

Перейдем теперь к рассмотрению общей схемы вычисления P -члена. Для приведения выражения для первого вложенного P -вклада к форме, удобной для численного расчета, перепишем его следующим образом:

$$\Delta E_{N1,P}^R = 2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \times \left[\sum_{n_1 n_2} \frac{\langle a n_2 | \alpha_\mu \alpha^\mu D(\omega) | n_1 a \rangle}{(\varepsilon_a - \omega - \varepsilon_{n_1})(\varepsilon_a - \omega - \varepsilon_{n_2})} \psi_{n_1}^\dagger(\mathbf{p}) \times \gamma^0 \Sigma_R^{(0)}(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}) \psi_{n_2}(\mathbf{p}) - \text{вычитания} \right]. \quad (58)$$

Здесь использовано спектральное представление для электронных пропагаторов, а вычитания определены формулой (29). Теперь введем матрицу S :

$$S(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{n_1 n_2} \frac{\langle a n_2 | \alpha_\mu \alpha^\mu D(\omega) | n_1 a \rangle}{(\varepsilon_a - \omega - \varepsilon_{n_1})(\varepsilon_a - \omega - \varepsilon_{n_2})} \times \psi_{n_2}(\mathbf{x}_1) \psi_{n_1}^\dagger(\mathbf{x}_2). \quad (59)$$

Ее фурье-преобразование определяется как

$$S(\omega, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \exp(i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \times S(\omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (60)$$

Теперь формулу (58) можно записать следующим образом:

$$\Delta E_{N1, P}^R = 2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \text{Tr} [S(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}) \times \gamma^0 \Sigma_R^{(0)}(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p})] - \text{вычитания} \right\}. \quad (61)$$

После аналитического выполнения интегрирований по угловым переменным это выражение использовалось нами для численного расчета. Матрица S строилась сначала в координатном, а затем в импульсном представлении с помощью конечного базисного набора для уравнения Дирака, построенного из B -сплайнов [21]. Одним из существенных моментов для достижения необходимой точности вычисления в области малых Z было использование базисного набора, удовлетворяющего соотношениям дуального кинетического баланса [22].

Для облегчения численного расчета выражение для второго вложенного P -вклада следует записать в виде, аналогичном (61):

$$\Delta E_{N2, P}^R = 2i\alpha \int_C d\omega \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} V_C(q) \times \left\{ \text{Tr} [S(\omega, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \times \gamma^0 \Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_2)] - \text{вычитания} \right\}, \quad (62)$$

где вычитания определены формулой (33). После аналитического выполнения интегрирований по угловым переменным это выражение использовалось нами для численного расчета. По сравнению с вычислениями для $\Delta E_{N1, P}^R$, такой расчет содержит два дополнительных численных интегрирования (вместо однократного интеграла по p — трехкратный интеграл по p_1, p_2 и $\xi = \hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2$). Значительную сложность при выполнении численных интегрирований представляет собой область больших значений импульсов p_1 и p_2 . Причиной этого является то, что функция Грина, построенная с помощью конечного базисного набора в координатном представлении, является недостаточно гладкой (по сравнению с точной функцией Грина). После выполнения численного преобразования Фурье эта негладкость проявляется в виде осцилляций при больших значениях

импульсов, что, в свою очередь, приводит к недостаточной стабильности численных интегрирований в этой области. Эта проблема решалась путем подбора вычитаний, поведение которых при больших значениях импульсов приближается к поведению подынтегрального выражения в формуле (62), но структура которых более простая и допускает более точный численный расчет. Выбранный нами набор вычитаний дается следующей подстановкой в формуле (62):

$$\begin{aligned} & \Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_2) \rightarrow \\ & \rightarrow \Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_2) - \Gamma_R^0(\varepsilon_a, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2) - \\ & - \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1) - \Gamma_R^0(\varepsilon_a, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_1) \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_2; \varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_2) - \right. \\ & \left. - \Gamma_R^0(\varepsilon_a, \mathbf{p}_2; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2) \right]. \quad (63) \end{aligned}$$

Очевидно, что эта разность (как функция p_1, p_2) хорошо убывает в области $p_1 \approx p_2$ и $p_{1,2} \gg \omega$. В то же время каждый из вычтенных членов является более простым для численного расчета, чем изначальное выражение (62).

Численный расчет перекрестного P -члена проводился по формуле (34) после аналитического выполнения интегрирований по угловым переменным. Для повышения устойчивости численных интегрирований в области больших значений моментов p и q мы использовали следующее вычитание:

$$\Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2) \rightarrow \Gamma_R^0(\varepsilon_a - \omega, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2) - \Gamma_R^0(\varepsilon_a, \mathbf{p}_1; \varepsilon_a, \mathbf{p}_2). \quad (64)$$

Численный расчет вычтенного вклада сильно облегчается тем, что для него интегрирование по ω в формуле (34) выполняется аналитически.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В табл. 1 приведены численные результаты для индивидуальных вкладов в двухпетлевую СЭ-поправку к энергии основного состояния водородоподобных ионов с зарядом ядра $Z \geq 10$. Расчет проводился в фейнмановской калибровке для точечной модели ядерного заряда. В настоящей работе вычислена поправка для $Z = 10-30$ и существенно увеличена точность для $Z = 40, 50, 60$ по сравнению с нашим предыдущим расчетом этой поправки [12, 13]. Численные данные для $Z \geq 70$ в табл. 1 заимствованы из работы [13]. Результаты наших вычислений во всех порядках по параметру $Z\alpha$ можно срав-

Таблица 1. Индивидуальные вклады в двухпетлевую СЭ-поправку

| Z | ΔE_{LAL} | ΔE_F^R | ΔE_P^R | ΔE_M | Сумма |
|-----|------------------|----------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| 10 | -0.3577 | 822.14(2) | -721.34(12) | -100.19(10) | 0.25(16) |
| 15 | -0.4951 | 292.902(13) | -235.205(70) | -57.366(48) | -0.164(85) |
| 20 | -0.6015 | 136.911(7) | -102.026(55) | -34.764(16) | -0.481(58) |
| 30 | -0.7565 | 44.729(3) | -29.410(25) | -15.465(5) | -0.903(26) |
| 40 | -0.8711 | 19.505(3) | -11.575(30) | -8.253(5) | -1.194(31) |
| | | | -11.41(15) ^a | -8.27(18) ^a | -1.05(23) ^a |
| 50 | -0.9734 | 10.025(2) | -5.488(26) | -5.001(3) | -1.437(26) |
| | | | -5.41(8) ^a | -4.99(6) ^a | -1.34(10) ^a |
| 60 | -1.082 | 5.723(1) | -2.970(18) | -3.341(2) | -1.670(18) |
| | | | -2.93(4) ^a | -3.342(21) ^a | -1.63(4) ^a |
| 70 | -1.216 | 3.497(1) | -1.757(25) | -2.412(11) | -1.888(27) |
| 83 | -1.466 | 1.938 | -1.057(13) | -1.764(4) | -2.349(14) |
| 92 | -1.734 | 1.276 | -0.812(10) | -1.513(3) | -2.783(10) |
| 100 | -2.099 | 0.825 | -0.723(7) | -1.384(3) | -3.381(8) |

Примечание. Все данные приведены в единицах $F(Z\alpha)$. ^a данные из работы [13].

нить с данными, полученными в рамках разложения по $Z\alpha$. Такое сравнение представлено на рис. 5, где штриховой линией обозначен вклад всех известных членов разложения (формулы (3)–(8)), а сплошной линией и кружками — результаты наших вычислений (в единицах безразмерной функции $F(Z\alpha)$, определенной формулой (1)). Видно, что численные данные демонстрируют гладкую зависимость от Z и визуально стремятся к известному результату при $Z \rightarrow 0$. Отметим, что физическая ($\sim (Z\alpha)^4$) зависимость полной поправки возникает в наших вычислениях в результате деликатного сокращения между индивидуальными вкладами (см. табл. 1). Наблюдаемое согласие численных значений для полной поправки с первыми членами разложения по $Z\alpha$ является одним из аргументов в пользу достоверности полученных результатов.

Для того чтобы провести более детальное сравнение численных данных с первыми членами разложения по $Z\alpha$, выделим из наших результатов вклад всех порядков по $Z\alpha$, начиная с $(Z\alpha)^5$:

$$\tilde{F}(Z\alpha) = \frac{F(Z\alpha) - B_{40}}{Z\alpha} = B_{50} + Z\alpha(\dots). \quad (65)$$

Численные результаты для функции $\tilde{F}(Z\alpha)$ представлены на рис. 6. Крест на оси ординат обозначает аналитическое значение $\tilde{F}(0)$. Количественное сравнение с аналитическими результатами выполня-

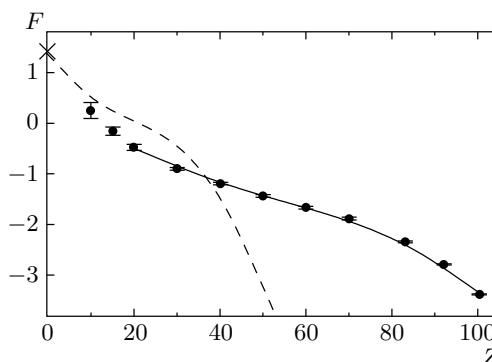


Рис. 5. Значения двухпетлевой СЭ-поправки во всех порядках по $Z\alpha$ (кружки, сплошная линия) и результаты, полученные в рамках разложения по $Z\alpha$ (штриховая линия)

лось путем экстраполяции данных в точку $Z = 0$. Для экстраполяции была выбрана процедура, впервые использованная Мором [23] и недавно подробно описанная в работе [24]. Такая экстраполяция, примененная к нашим данным (точки с $Z = 10$ и $Z = 15$ не использовались из-за большой численной погрешности), воспроизводит аналитическое значение для коэффициента B_{50} с точностью 15%. Отметим, что такая относительно большая погрешность экстраполяции связана с наличием степеней $\ln(Z\alpha)$

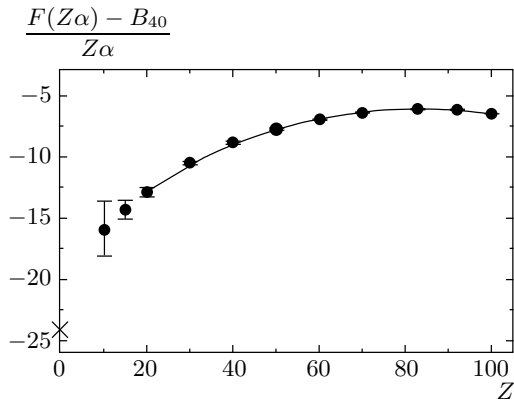


Рис. 6. Численные результаты для функции $\tilde{F}(Z\alpha)$, определенной выражением (65). Крест на оси ординат обозначает аналитическое значение этой функции в точке $Z = 0$

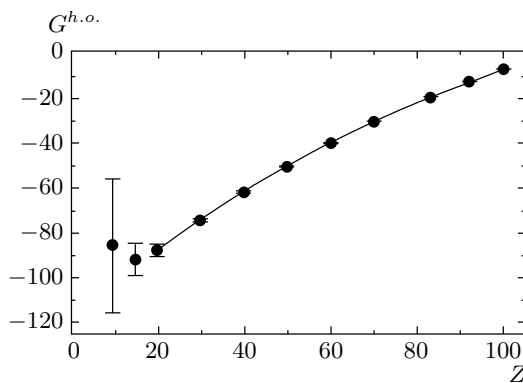


Рис. 7. Численные результаты для функции $G^{h.o.}(Z\alpha)$, определенной выражением (2)

в порядке $(Z\alpha)^6$ и отсутствием численных результатов в области малых значений Z . На основании представленного анализа можно заключить, что данные, полученные нами, подтверждают аналитические результаты для коэффициентов разложения порядка $(Z\alpha)^4$ и $(Z\alpha)^5$.

Для того чтобы провести сравнение с аналитическими вычислениями в следующем порядке по $Z\alpha$, выделим из наших результатов остаток $G^{h.o.}(Z\alpha)$, определенный формулой (2). Численные данные для этой функции представлены на рис. 7. Видно, что визуальный предел $G^{h.o.}(Z\alpha)$ при малых значениях Z примерно в два раза больше, чем результат Пахуцко-го и Йентшуры [2] для коэффициента $B_{60} = -62(9)$. Таким образом, можно заключить, что наши данные расходятся с имеющимися аналитическими результатами в порядке $(Z\alpha)^6$. В настоящий момент мы

не можем однозначно определить, в каком именно коэффициенте (B_{60} , B_{61} , B_{62} или B_{63}) заключается причина разногласия. Уже после того как были получены предварительные результаты настоящего вычисления, было найдено [25], что результат из работы [3] (формула (7)) для коэффициента B_{61} является неполным. Работа по вычислению недостающего вклада в B_{61} ведется в настоящее время. Не исключено, что этот добавочный член восстановит согласие результатов различных методов вычисления двухпетлевой СЭ-поправки.

Полученные нами результаты для вклада высших порядков $G^{h.o.}(Z\alpha)$ можно использовать для уточнения существующих результатов для двухпетлевой СЭ-поправки в ионах с $Z < 10$. Особенно важным с практической точки зрения является атом водорода. Применяя процедуру экстраполяции, описанную выше, к данным с $Z \geq 20$ на рис. 7, получаем следующий результат для $Z = 1$:

$$G^{h.o.}(1\alpha) = -127 \pm 30 \% . \quad (66)$$

Указанная погрешность была получена в предположении, что возможный дополнительный вклад в коэффициент B_{61} не превышает 10. Результат (66) существенно отличается от предыдущей оценки вклада высших порядков, полученной в работе [2] в рамках разложения по $Z\alpha$:

$$G^{h.o.}(1\alpha; \text{old}) = -61.6 \pm 15 \% . \quad (67)$$

Полученное отличие изменяет величину теоретического значения лэмбовского сдвига основного состояния в атоме водорода на 7 кГц.

Вклады различных поправок в лэмбовский сдвиг основного состояния в некоторых водородоподобных ионах приведены в табл. 2. Отметим, что в силу устоявшейся традиции термин «лэмбовский сдвиг уровня» определяется несколько по-разному для легких и для тяжелых ионов. Это связано с тем, что для легких ионов естественно рассматривать смещение относительно дираковского уровня энергии с правильной зависимостью от приведенной массы (учитывая, таким образом, значительную часть эффекта отдачи). Для тяжелых ионов выделение нерелятивистской части эффекта отдачи не имеет смысла. Таким образом, чтобы получить энергию основного состояния атома водорода, к значениям лэмбовского сдвига, указанным в табл. 2, надо добавить

$$E_M = M + [f(n, j) - 1] m_r - [f(n, j) - 1]^2 \frac{m_r^2}{2M}, \quad (68)$$

где $M = m + m_N$ — масса атома, m_N — масса ядра, $m_r = m m_N / (m + m_N)$ — приведенная масса. Функция $f(n, j)$ дается следующим выражением:

Таблица 2. Индивидуальные вклады в лэмбовский сдвиг основного состояния водородоподобных ионов

| | $Z = 1$ | $Z = 54$ | $Z = 79$ | $Z = 92$ |
|---|--|---------------------|---------------------|---|
| КЭД-эффекты, $\sim \alpha$ | 8168514 | 43.841 | 156.48 | 266.42 |
| Двухпетлевая СЭ-поправка, $\sim \alpha^2$ | 2327(4) | -0.097(7) | -0.67(1) | -1.56(1) |
| Другие КЭД-эффекты, $\sim \alpha^2$ | -1603 | -0.005(9) | 0.08(11) | 0.30(33) |
| КЭД-эффекты, $\sim \alpha^3$ | 2 | | | |
| Конечный размер ядра | 1163(32) ^a 1253(50) ^b | 3.181(7) | 49.11(11) | 198.33(52) |
| Отдача | 2389 | 0.187 | 0.33 | 0.46 |
| Поляризация ядра | 5 | | | -0.19(9) |
| Полное теор. значение | 8172797(32)(4) ^a 8172888(50)(4) ^b | 47.107(13) | 205.33(16) | 463.76(62) |
| Эксперимент | 8172837(22) ^c | 54(10) ^d | 202(8) ^e | 468(13) ^f 460.2(4.6) ^g |

Примечание. Данные во втором столбце приведены в кГц, в третьем, четвертом и пятом — в эВ. ^a $r_p = 0.862(12)$ Фм [26], ^b $r_p = 0.895(18)$ Фм [27], ^c комбинация результатов работ [28, 29], ^d данные из работы [30], ^e данные из работы [31], ^f данные из работы [1], ^g данные из работы [32].

$$f(n, j) = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n - \delta)^2} \right]^{-1/2}, \quad (69)$$

где n — главное квантовое число,

$$\delta = |\kappa| - [\kappa^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2}, \quad (70)$$

κ — релятивистский угловой параметр уравнения Дирака. Для того чтобы получить значение для уровня энергии основного состояния электрона в тяжелых водородоподобных ионах, к значениям лэмбовского сдвига, указанным в табл. 2, надо добавить

$$E_D = m f(n, j). \quad (71)$$

Обзор современного состояния теории уровней энергии атома водорода может быть найден в работе [5]. Значение двухпетлевой СЭ-поправки для $Z = 1$, приведенное в табл. 2, вычислено с учетом полученного в настоящей работе результата для $G^{h.o.}(1\alpha)$. Погрешность поправки соответствует погрешности в формуле (66). Эффект конечного размера ядра приведен для двух значений зарядового радиуса протона: $r_p = 0.862(12)$ Фм, полученного в оригинальной работе [26], и $r_p = 0.895(18)$ Фм, полученного в результате недавнего анализа имеющихся экспериментальных данных по электрон-протонным столкновениям [27]. Заметим, что мы не используем более точное значение для радиуса протона, рекомендованное в работе [5], поскольку оно в значи-

тельной степени основано на сравнении теоретического и экспериментального значений лэмбовского сдвига в водороде. Отметим также, что значения КЭД-поправок, приведенные в табл. 2 для водорода, включают в себя часть эффекта отдачи, учет которой достигается введением приведенной массы в соответствующие формулы (детали см. в работе [5]). Полные теоретические значения лэмбовского сдвига для водорода содержат две погрешности, первая из которых соответствует неопределенности экспериментального значения зарядового радиуса протона, а вторая является чисто теоретической погрешностью и происходит от двухпетлевой СЭ-поправки. Поскольку первая погрешность значительно больше второй, мы можем извлечь зарядовый радиус протона из сравнения теоретического и экспериментального значений для лэмбовского сдвига. Такой метод определения дает величину

$$r_p = 0.877(8) \text{ Фм}, \quad (72)$$

которая весьма близка к рекомендованному в работе [5] значению $r_p = 0.875(7)$ Фм. Более точное определение протонного радиуса возможно из эксперимента на мюонном водороде [33].

В табл. 2 приводятся также вклады индивидуальных поправок в лэмбовский сдвиг основного состояния для некоторых тяжелых водородоподобных ионов. Детальный анализ каждого из этих

вкладов может быть найден в нашей предыдущей статье [13]. В настоящей работе мы приводим обновленные результаты для эффекта конечного размера ядра, полученные с помощью последних данных для зарядовых радиусов ядер и их погрешностей [34].

В заключение авторы выражают благодарность К. Пахуцкому и У. Йентшуре за полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 03-55-1442), РФФИ (грант № 04-02-17574) и фонда «Династия». Вычисления частично выполнялись во французских национальных компьютерных центрах CINES и IDRIS.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Stöhlker, P. H. Mokler, F. Bosch et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3109 (2000).
2. K. Pachucki and U. D. Jentschura, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 113005 (2003).
3. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **63**, 042503 (2001).
4. U. D. Jentschura, *Phys. Rev. A* **70**, 052108 (2004).
5. P. J. Mohr and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1 (2005).
6. A. Mitrushenkov, L. Labzowsky, I. Lindgren, H. Persson, and S. Salomonson, *Phys. Lett. A* **200**, 51 (1995).
7. S. Mallampalli and J. Sapirstein, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5297 (1998).
8. V. A. Yerokhin, *Phys. Rev. A* **62**, 012508 (2000).
9. S. Mallampalli and J. Sapirstein, *Phys. Rev. A* **57**, 1548 (1998).
10. I. Goidenko, L. Labzowsky, A. Nefiodov, G. Plunien, S. Zschocke, and G. Soff, in *The Hydrogen Atom. Precision Physics of Simple Atomic Systems*, ed. by S. G. Karshenboim et al., Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin (2001), p. 619.
11. V. A. Yerokhin and V. M. Shabaev, *Phys. Rev. A* **64**, 062507 (2001).
12. V. A. Yerokhin, P. Indelicato, and V. M. Shabaev, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 073001 (2003).
13. V. A. Yerokhin, P. Indelicato, and V. M. Shabaev, *Europ. Phys. J. D* **25**, 203 (2003).
14. V. M. Shabaev, *Phys. Rep.* **356**, 119 (2002).
15. R. Mills and N. Kroll, *Phys. Rev.* **98**, 1489 (1955).
16. C. Itzykson and J. Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980).
17. J. A. Fox and D. R. Yennie, *Ann. Phys. (New York)* **81**, 438 (1973).
18. N. J. Snyderman, *Ann. Phys. (New York)* **211**, 43 (1991).
19. V. A. Yerokhin and V. M. Shabaev, *Phys. Rev. A* **60**, 800 (1999).
20. P. J. Mohr, *Ann. Phys. (New York)* **88**, 26 (1974).
21. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer, New York (1978).
22. V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 130405 (2004).
23. P. J. Mohr, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1050 (1975).
24. E.-O. Le Bigot, U. D. Jentschura, P. J. Mohr, P. Indelicato, and G. Soff, *Phys. Rev. A* **68**, 042101 (2003).
25. K. Pachucki, частное сообщение (2004).
26. G. G. Simon, C. Schmidt, F. Borkowski, and V. H. Walther, *Nucl. Phys. A* **333**, 381 (1980).
27. I. Sick, *Phys. Lett. B* **576**, 62 (2003).
28. A. Huber, T. Udem, B. Gross et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 468 (1998).
29. C. Schwob, L. Jozefowski, B. de Beauvoir et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4960 (1999).
30. J. P. Briand, P. Indelicato, A. Simionovici, V. San Vicente, D. Liesen, and D. Dietrich, *Europhys. Lett.* **9**, 225 (1989).
31. H. F. Beyer, D. Liesen, F. Bosch et al., *Phys. Lett. A* **184**, 435 (1994).
32. A. Gumberidze, T. Stöhlker, D. Banaś et al., Gesellschaft für Schwerionenforschung Scientific Report 2003, ed. by U. Grundinger, Darmstadt (2004), p. 99.
33. D. Taqqu, F. Biraben, C. A. N. Conde et al., *Hyperfine Interact.* **119**, 311 (1999).
34. I. Angeli, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **87**, 185 (2004).