

О СТРУКТУРЕ ДВУМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЫ

А. Я. Воронов*

*Российский Федеральный ядерный центр — ВНИИЭФ
607190, Саров, Нижегородская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 ноября 2003 г.

Проведено исследование структуры пространственно-периодических внутренних пограничных слоев плазмы положительного столба тлеющего разряда, организованного в длинной трубке цилиндрической формы с электроположительным газом внутри. При анализе исходной математической модели использовались асимптотические методы, а именно, метод пограничных функций. Рассмотрен случай образования контрастных структур типа всплеска. Найдены все главные члены погранслоевой асимптотики решения. Полученные результаты сравниваются с известными данными зондовых измерений основных физических характеристик ионизационных волн (страт) в неоне при низких давлениях.

PACS: 52.90.+z

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Специалистам, использующим в своей практической деятельности или в научных исследованиях электроразрядные лазеры и другие газоразрядные устройства, хорошо известно явление расслоения плазменного столба газового разряда на слои (страты), получившие название ионизационных волн. Являясь одним из основных типов неустойчивости газоразрядной плазмы, этот эффект давно привлекает внимание исследователей. Изучению его свойств посвящено заметное количество экспериментальных и теоретических работ (см., например, обзоры [1, 2], а также работы [3, 4]). Повышенный интерес исследователей к ионизационным волнам обусловлен несколькими обстоятельствами. С научной точки зрения это явление привлекает к себе внимание прежде всего как классический пример самоорганизации газоразрядной плазмы, а с практической оно может быть использовано в реакторах по разделению газовых смесей [5], формированию плазменно-пылевых кристаллов [6] или в электрических ловушках для сбора пылевых частиц с целью последующего их удаления из газообразной среды [7]. Наконец, страты сильно ухудшают полезные характе-

ристики всех газоразрядных технических устройств и приборов, заметно сокращая область их практического применения. Экспериментально изучены многие свойства страт.

Цель настоящей работы — теоретическое изучение структуры неподвижных страт большой амплитуды, возникающих после расслоения плазмы положительного столба тлеющего разряда низкого давления.

2. Пусть разряд происходит в цилиндрической трубке радиуса R и длиной $L \gg R$ с круглыми плоско-параллельными электродами. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) , начало которой совместим с центром анода, а ось z направим по оси разряда от анода к катоду. Математическую модель бесконечно длинного стационарного разряда в электроположительном газе при наличии осевой симметрии выпишем в безразмерном виде [8]:

$$\begin{aligned} h\nabla^2 N_e + \nu\nabla(N_e \mathbf{V}) + h\gamma(I - \theta N_p N_e) &= 0, \\ h\nabla^2 N_p - \nabla(N_p \mathbf{V}) + h(I - \theta N_p N_e) &= 0, \\ h\nabla \mathbf{V} = N_p - N_e, \quad \nabla \times \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial N_e}{\partial x} = 0, \quad N_p = q(y, h), \quad V_x = 0, \quad x = 0, \\ N_a = b_a(y, h), \quad V_x = V_x^{(1)}, \quad x = 1, \\ a = e, p. \end{aligned} \quad (1.1)$$

*E-mail: otd4@expd.vniief.ru

В задаче (1.1) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} 0 \leq x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad 0 \leq y = \frac{z}{R} \leq \frac{L}{R}, \\ \frac{D_p}{D_e} = \gamma, \quad \frac{T}{T_e} = \nu, \\ \frac{c_a}{c_p^{(0)}} = N_a, \quad R \frac{k_p}{D_p} \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla \Phi, \\ \alpha c_p^{(0)} \frac{R^2}{D_p} = \theta, \quad \mathbf{V} = h \boldsymbol{\varepsilon}, \quad h = \frac{r_D}{R}, \\ \nabla^2 = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

c_e и c_p — концентрации, соответственно, свободных электронов плазмы и однозарядных положительных ионов, D_a и k_a — их коэффициенты свободной диффузии и подвижности, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, Φ — безразмерный потенциал этого поля, $c_p^{(0)}$ — некоторая характерная концентрация положительных ионов, r_D — радиус Дебая для этих ионов, α — коэффициент объемной электрон-ионной рекомбинации. Функция $I = I(x, y; N_e, h)$ определяет скорость ионизации, т. е. число пар разноименных заряженных частиц, возникающих в единице объема плазмы за единицу времени. Коэффициенты D_a и k_a так же, как температуры свободных электронов плазмы T_e и нейтральной газовой среды T , считаются постоянными по всему объему плазмы. Уравнения системы (1.1) записаны в предположении, что конвективное движение и магнитное поле отсутствуют.

Заметим, что в уравнениях системы (1.1) перед старшими производными стоит малый параметр $0 < h \ll 1$ [8]. Следовательно, для анализа задачи (1.1) можно использовать асимптотические методы теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, например, метод пограничных функций [9].

Ограничимся рассмотрением случая длинной трубки и будем считать положительный столб тлеющего разряда бесконечно длинным ($-\infty < y < \infty$). В этом случае можно не учитывать влияние электродов на изучаемый объект.

2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ h . РЕГУЛЯРНЫЙ РЯД

1. Пусть произошло расслоение столба разряда и в нем появились неподвижные ионизационные волны длиной l_{st} , которую считаем известной. Она может быть измерена экспериментально или оценена

теоретически [3]. Функцию $I(x, y; N_e, h)$ также считаем известной и l -периодической по переменной y :

$$I(x, y; N_e, h) = I(x, y + l; N_e, h), \quad l = l_{st}/R. \quad (2.1)$$

Явный вид этой функции будет выписан ниже. Неизвестными в задаче (1.1) считаем функции $N_a(x, y, h)$ и $\mathbf{V}(x, y, h)$, т. е. концентрации заряженных компонентов плазмы и вектор напряженности электрического поля. Заметим при этом, что значения этих функций на стенке трубки ($x = 1$), т. е. величины b_a и $V_x^{(1)}$ (радиальная составляющая электрического поля), а также $q(y, h)$ (значение концентрации ионов на оси разряда) считаются известными.

Обозначим всю совокупность искомым величин через $W(x, y, h)$. Тогда асимптотику решения задачи (1.1) можно записать в виде [8, 9]:

$$\begin{aligned} W(x, y, h) = w(x, y, h) + \\ + \Pi w(x_1, y, h) + R w(x_2, y, h), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $x_1 = x/h$, $x_2 = (x-1)/h$ — быстрые переменные.

Потребуем, чтобы все переменные величины были l -периодическими, т. е. чтобы выполнялось условие

$$W(x, y, h) = W(x, y + l, h). \quad (2.3)$$

Регулярную часть асимптотики (2.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} w(x, y, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s w_s(x, y) = \\ = w_0(x, y) + h w_1(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогичный вид имеют и разложения пограничных функций $\Pi w(x_1, y, h)$ и $R w(x_2, y, h)$, первая из которых может вносить заметный вклад в значение основной функции только вблизи точки $x = 0$, а вторая — вблизи точки $x = 1$. Коэффициенты этих разложений, т. е. функции $w_s(x, y)$, $\Pi_s w(x_1, y)$, $R_s w(x_2, y)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, определяются стандартно. Так, например, при установлении коэффициентов регулярного ряда (2.4) $w_s(x, y)$ на первом этапе ($s = 0$) для определения неизвестных функций $v_0(x, y)$, $n_0^{(e)}(x, y)$ и $n_0^{(p)}(x, y)$ получим вырожденную ($h = 0$) по отношению к системе уравнений задачи (1.1) систему. Решение этой системы очевидно [8]:

$$v_0(x, y) \equiv 0, \quad n_0^{(e)}(x, y) \equiv n_0^{(p)}(x, y) = A_0(x, y).$$

Здесь $A_0(x, y)$ — произвольная функция.

На следующем шаге ($s = 1$) для определения

неизвестных функций $A_0(x, y)$ и $\mathbf{v}_1(x, y)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_0 + \nu \nabla(A_0 \mathbf{v}_1) + \gamma(i_0 - \theta A_0^2) &= 0, \\ \nabla^2 A_0 - \nabla(A_0 \mathbf{v}_1) + i_0 - \theta A_0^2 &= 0, \quad \mathbf{v}_1 = -\nabla \varphi_0, \\ A_0 = q_0(y), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= 0, \quad x = 0; \\ A_0 = b_0(y), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= -v_{1x}^{(1)}, \quad x = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $v_{1x}^{(1)} = v_{1x}(1, y)$, $i_0 = i_0(x, y)$, $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$ — главные члены, отличные от нуля, в разложениях типа (2.4) для функций $V_x(1, y, h)$, $I(x, y, h)$ и $\Phi(x, y, h)$, соответственно, причем первые две из них считаются известными. Исключив в уравнениях этой задачи члены, содержащие вектор $\mathbf{v}_1(x, y)$, для определения неизвестной функции $A_0(x, y, \mu)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} \mu^2 \nabla^2 A_0 &= A_0^2 - I_0, \\ (x, y) \in D &= [(0 < x < 1) \times (-\infty < y < \infty)], \\ A_0(0, y, \mu) &= q_0(y), \quad A_0(1, y, \mu) = b_0(y), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\mu^2 = \frac{1 + \nu}{\nu \theta (1 + \sigma)}, \quad \frac{k_p}{k_e} = \sigma, \quad \theta I_0 = i_0, \quad q_0(y) = q(y, 0).$$

Поскольку в общем случае одной функцией A_0 нельзя удовлетворить двум граничным значениям — $b_0^{(e)}$ и $b_0^{(p)}$, — в дополнительные условия краевых задач (2.5) и (2.6) вводится новый неизвестный параметр $b_0(y)$, который может зависеть от μ и должен быть l -периодическим. Связь между параметрами $b_0(y)$, $b_0^{(e)}(y)$ и $b_0^{(p)}(y)$ устанавливается при определении пограничных функций $Rw(x_2, y, h)$.

Рассмотрим случай $0 < \mu \ll 1$ (при $R = 1$ см, $p = 1$ Торр, $\nu = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ см³ · с⁻¹, $c_p^{(0)} \geq 10^{12}$ см⁻³ имеем $\mu \leq 0.3$).

Уравнение задачи (2.6) относится к типу уравнений реакция–диффузия. В работе [10] показано, что при выполнении определенных условий уравнения этого типа имеют l -периодические по переменной y решения со всплеском (контрастные структуры типа всплеска), вершина которого лежит на некоторой гладкой l -периодической кривой C (кривая всплеска). Введем обозначение

$$F(x, y; A_0, \mu) = A_0^2 - I_0$$

и запишем выражение, определяющее функцию $I_0(x, y; A_0, \mu)$:

$$I_0(x, y; A_0, \mu) = g(x, y, \mu)A_0 + \xi(x, y, \mu)A_0^3,$$

где $g(x, y, \mu)$ — частота ионизации нейтралов прямым электронным ударом, а $\xi(x, y, \mu)$ — частота ступенчатой ионизации. Эти величины считаются известными и l -периодическими по переменной y .

Таким образом, мы ищем l -периодическое по переменной y решение задачи (2.6), которое при малых μ близко к некоторому решению $\alpha_{00}(x, y)$ вырожденного ($\mu = 0$) уравнения

$$\begin{aligned} F(x, y; \alpha_{00}, 0) &= f(x, y; \alpha_{00}, 0) = \\ &= \alpha_{00}^2 - g(x, y, 0)\alpha_{00} - \xi(x, y, 0)\alpha_{00}^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

всюду внутри замкнутой области \bar{D} , исключая малую окрестность l -периодической кривой C , где происходит всплеск решения.

Асимптотику по параметру μ решения задачи (2.6) строим в виде суммы четырех рядов:

$$\begin{aligned} A_0(x, y, \mu) &= \alpha_0(x, y, \mu) + T\alpha_0(\tau_0, y, \mu) + \\ &+ Q\alpha_0(\tau, \zeta, \mu) + S\alpha_0(\tau_1, y, \mu), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\alpha_0(x, y, \mu) = \alpha_{00}(x, y) + \mu\alpha_{01}(x, y) + \dots$$

— регулярный ряд,

$$T\alpha_0(\tau_0, y, \mu) = T_0\alpha_0(\tau_0, y) + \mu T_1\alpha_0(\tau_0, y) + \dots,$$

$$\tau_0 = \frac{x}{\mu},$$

$$S\alpha_0(\tau_1, y, \mu) = S_0\alpha_0(\tau_1, y) + \mu S_1\alpha_0(\tau_1, y) + \dots,$$

$$\tau_1 = \frac{x-1}{\mu},$$

— ряды, описывающие пограничные слои в окрестности границ области D , т. е. в точках $x = 0$ и $x = 1$, соответственно, а

$$Q\alpha_0(\tau, \zeta, \mu) = Q_0\alpha_0(\tau, \zeta) + \mu Q_1\alpha_0(\tau, \zeta) + \dots$$

— ряд, который описывает всплеск решения вблизи кривой C , переменные τ и ζ описываются ниже. Неизвестная кривая всплеска определяется в ходе построения асимптотики (2.8).

2. Определим члены регулярного ряда и проверим наличие условий существования у задачи (2.6) решения со всплеском. Как уже отмечалось, $\alpha_{00}(x, y)$ является корнем уравнения (2.7). Всего же это уравнение имеет три корня:

$$\alpha_{00}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\xi_0} \left[1 - \sqrt{1 - 4g_0\xi_0} \right] = \varphi_1(x, y),$$

$$\alpha_{00}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\xi_0} \left[1 + \sqrt{1 - 4g_0\xi_0} \right] = \varphi_2(x, y),$$

$$\alpha_{00}^{(3)}(x, y) \equiv 0, \quad \xi_0 = \xi(x, y, 0), \quad g_0 = g(x, y, 0).$$

В качестве α_{00} выберем φ_1 , т.е. положим

$$\alpha_{00}(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) > 0,$$

$$(x, y) \in \overline{D} = [(0 \leq x \leq 1) \times (-\infty < y < \infty)].$$

Из вида функции $\varphi_1(x, y)$ следует, что должно выполняться неравенство

$$g_0 \xi_0 < 0.25.$$

При этом, очевидно,

$$\varphi_1(x, y) < \varphi_2(x, y), \quad g_0 \leq \varphi_1(x, y) < 2g_0,$$

а из (2.7) следует, что частные производные от функции $f(x, y; \alpha_{00}, 0)$ по аргументу α_{00} при замене этого аргумента на $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$f'_\alpha(x, y; \varphi_1, 0) > 0, \quad f'_\alpha(x, y; \varphi_2, 0) < 0, \quad x, y \in \overline{D}.$$

Помимо этого, существует функция $\psi(x, y)$, такая что

$$\int_{\varphi_1(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y; \alpha_{00}, 0) d\alpha_{00} = \frac{1}{3}\psi^3 - \frac{1}{2}g_0\psi^2 - \frac{1}{4}\xi_0\psi^4 - d = 0, \quad x, y \in \overline{D}, \quad (2.9)$$

где

$$d = -\frac{g_0}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{3}\varphi_1^3 - \frac{1}{4}\xi_0\varphi_1^4$$

и на отрезке интегрирования $[\varphi_1, \psi]$ нет других корней уравнения (2.7), кроме φ_1 и φ_2 . Имеем $f(x, y; \alpha, 0) < 0$ при $\varphi_2 < \alpha < \psi$. Таким образом, можно констатировать, что задача (2.6) имеет l -периодическое решение со всплеском, которое в \overline{D} при малых μ будет близко к $\varphi_1(x, y)$ везде, кроме малой окрестности кривой всплеска C [10].

Легко проверяется, что уравнение (2.9) имеет три различных действительных корня $\delta(x, y) < \varphi_1(x, y) < \psi(x, y)$, один из которых (функция $\varphi_1(x, y)$) известен и имеет двойную кратность, а остальные два находятся решением квадратного уравнения [8].

Несложно находятся последующие члены регулярного ряда α_{0s} , $s \geq 1$. Так, например,

$$\alpha_{01}(x, y) = -\frac{f'_\mu(x, y; \varphi_1(x, y), 0)}{f'_\alpha(x, y; \varphi_1(x, y), 0)} = \frac{g_1(x, y)\varphi_1 + \xi_1(x, y)\varphi_1^3}{2\varphi_1 - g_0 - 3\xi_0\varphi_1^2},$$

где

$$g_1(x, y) = g'_\mu(x, y, 0), \quad \xi_1(x, y) = \xi'_\mu(x, y, 0).$$

3. ПОГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ АСИМПТОТИКИ (2.8)

1. Найдем члены ряда $T\alpha_0(\tau_0, y, \mu)$, $\tau_0 = x/\mu$. Задача, определяющая главный член $T_0\alpha_0(\tau_0, y)$ этого ряда, имеет вид

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left(\tau_0 \frac{\partial T_0\alpha_0}{\partial \tau_0} \right) = F(0, y; \alpha_{00}(0, y) + T_0\alpha_0, 0) - f(0, y; \alpha_{00}(0, y), 0) = \omega_0^2 - g_0\omega_0 - \xi_0\omega_0^3, \quad 0 < \tau_0 < \infty, \quad (3.1)$$

$$T_0\alpha_0(0, y) = q_0(y) - \varphi_1(0, y), \quad T_0\alpha_0(\infty, y) = 0, \quad (3.2)$$

$$\omega_0 = \omega_0(\tau_0, y) = \varphi_1(0, y) + T_0\alpha_0(\tau_0, y).$$

Уравнение (3.1) — это обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, в котором y играет роль параметра задачи.

Заменяем задачу (3.1), (3.2) эквивалентным интегральным уравнением:

$$\begin{aligned} Z(t, y) = & \int_0^\infty \exp(-mx^2) [B_2 \exp(-2mx^2) - \\ & - B_1 \exp(-mx^2) + 4m^2x^2 - 4m - 1] G(t, x) dx + \\ & + \int_0^\infty [1 - 2B_1x^2 \exp(-mx^2) + 3B_2x^2 \exp(-2mx^2)] \times \\ & \times Z(t, x) G(t, x) \frac{dx}{x^2} + \\ & + \int_0^\infty (3B_2 \exp(-mx^2) - B_1) Z^2(t, x) G(t, x) dx + \\ & + \int_0^\infty B_2 Z^3(t, x) G(t, x) dx. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Здесь

$$Z(t, y) = \frac{T_0\alpha_0(t, y)}{q_0 - \varphi_1^0} - \exp[-m(y)t^2],$$

где $m(y)$ — неизвестный параметр, который в общем случае может зависеть от y ,

$$t = \sqrt{(1 - 2\xi_0\varphi_1^0)\varphi_1^0} \tau_0,$$

$$B_1 = \frac{1 - 3\xi_0^0\varphi_1^0}{1 - 2\xi_0^0\varphi_1^0} \frac{q_0 - \varphi_1^0}{\varphi_1^0},$$

$$B_2 = \frac{\xi_0^0\varphi_1^0}{1 - 2\xi_0^0\varphi_1^0} \left(\frac{q_0 - \varphi_1^0}{\varphi_1^0} \right)^2,$$

$$\xi_0^0 = \xi_0(0, y) = \xi(0, y, 0), \quad \varphi_1^0 = \varphi_1(0, y),$$

$$G(t, x) = xK_1(t)I_1(x), \quad x \leq t;$$

$$G(t, x) = xK_1(x)I_1(t), \quad t \leq x,$$

$K_1(x)$ и $I_1(x)$ — функции Бесселя первого рода мнимого аргумента. Очевидно, имеет место неравенство

$$0 \leq q_0(y) \leq \psi(0, y) = \psi^0.$$

Отметим одну особенность интегрального уравнения (3.3), которая имеет конкретный физический смысл. В отсутствие ступенчатой ионизации, т.е. при $\xi_0^0 = 0$ ($B_2 = 0$), это уравнение имеет нужное нам положительное решение с экспоненциальной оценкой при $t \rightarrow \infty$ только для $q_0 < \varphi_1^0$ ($B_1 < 0$) [8]. Но вблизи кривой всплеска $q_0 > \varphi_1^0$. В этом случае уравнение (3.3) может иметь положительное решение только при $\xi_0^0 > 0$, и чем больше q_0 превышает φ_1^0 , тем больше должна быть частота ступенчатой ионизации. Как будет показано ниже, такой рост ξ_0^0 может быть обеспечен сильным увеличением электрического поля, создаваемого пространственными зарядами плазмы. Само же решение интегрального уравнения (3.3) может быть построено с помощью метода последовательных приближений. Отметим еще одно свойство решения этого уравнения, которое будет использовано ниже. В силу осевой симметрии

$$\frac{\partial Y(0, y)}{\partial t} = 0,$$

а

$$\frac{\partial^2 Y(0, y)}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(1 + B_1 + B_2),$$

где

$$Y(t, y) = \frac{T_0 \alpha_0(t, y)}{q_0 - \varphi_1^0}.$$

Явный вид всех последующих членов $T_s \alpha_0(\tau_0, y)$, $s \geq 1$, находится аналогично.

2. Краевая задача, определяющая $S_0 \alpha_0(\tau_1, y)$, $\tau_1 = (x - 1)/\mu$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 S_0 \alpha_0}{\partial \tau_1^2} = F(1, y; \alpha_{00}(1, y) + S_0 \alpha_0, 0) -$$

$$- f(1, y; \alpha_{00}(1, y), 0) = \omega_1^2 - g_0^{(1)} \omega_1 - \xi_0^{(1)} \omega_1^3,$$

$$-\infty < \tau_1 < 0, \quad (3.4)$$

$$S_0 \alpha_0(0, y) = b_0(y) - \varphi_1^{(1)}, \quad S_0 \alpha_0(-\infty, y) = 0.$$

Здесь

$$\omega_1 = \omega_1(\tau_1, y) = \alpha_{00}(1, y) + S_0 \alpha_0(\tau_1, y),$$

$$\xi_0^{(1)} = \xi(1, y, 0), \quad \varphi_1^{(1)} = \varphi_1(1, y), \quad g_0^{(1)} = g(1, y, 0).$$

Решение задачи (3.4) запишем в виде

$$\frac{2}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1^{(1)}) (\varphi_1^{(1)} - \delta_1)}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\psi_1 - b_0}{(\psi_1 - \varphi_1^{(1)}) |\varphi_1^{(1)} - b_0|}} + \sqrt{\frac{b_0 - \delta_1}{(\varphi_1^{(1)} - \delta_1) |\varphi_1^{(1)} - b_0|}}}{\sqrt{\frac{\psi_1 - \omega_1}{(\psi_1 - \varphi_1^{(1)}) |\varphi_1^{(1)} - \omega_1|}} + \sqrt{\frac{\omega_1 - \delta_1}{(\varphi_1^{(1)} - \delta_1) |\varphi_1^{(1)} - \omega_1|}}} = \sqrt{\frac{\xi_0^{(1)}}{2}} \tau_1, \quad (3.5)$$

$$\psi_1 = \psi(1, y), \quad \delta_1 = \delta(1, y).$$

3. Теперь найдем члены пограничного ряда $Q \alpha_0(\tau, \zeta, \mu)$. Прежде всего отметим, что кривую всплеска C будем искать также в виде разложения по положительным степеням малого параметра μ . При этом главный член этого разложения (кривая C_0) ищется в виде $x = \chi(y)$, $\chi(y)$ — главная l -периодическая функция, такая что $0 < \chi(y) < 1$.

Следуя подходу, описанному в работе [10], в окрестности C_0 введем локальную систему координат ρ, ζ , где $|\rho|$ — расстояние от текущей точки $M(x, y)$ до кривой C_0 , отсчитанное по нормали к C_0 , а ζ — ордината основания этой нормали, находящегося на кривой C_0 . Для достаточно малой окрестности кривой C_0 взаимно однозначное соответствие

между координатами x, y и ρ, ζ определяется формулами

$$x = \chi(\zeta) + \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\chi')^2}}, \quad y = \zeta - \frac{\rho \chi'(\zeta)}{\sqrt{1 + (\chi')^2}}.$$

При этом необходимо считать ρ положительным, когда точка M находится правее C_0 , и отрицательным, если она левее C_0 . Уравнение кривой всплеска C в локальной системе координат будем искать в виде

$$\rho = \lambda(\zeta, \mu) = \mu \lambda_1(\zeta) + \mu^2 \lambda_2(\zeta) + \dots,$$

где l -периодические функции $\lambda_i(\zeta)$ подлежат определению. Для их нахождения, т.е. для определения кривой C , используется условие

$$\left. \frac{\partial A_0}{\partial \rho} \right|_C = 0, \tag{3.7}$$

которое означает, что решение задачи (2.6) как функция переменной ρ имеет на кривой C экстремум.

Введем растянутую переменную

$$\tau = \frac{\rho - \lambda(\zeta, \mu)}{\mu}$$

и следующее обозначение, которое удобно в теоретических построениях:

$$\bar{w}(\rho, \zeta, \mu) = w(x(\rho, \zeta), y(\rho, \zeta), \mu).$$

Здесь, как обычно, через $w(x, y)$ обозначена вся совокупность переменных величин. Теперь выпишем граничное условие, которому должна удовлетворять функция $Q\alpha_0(\tau, \zeta, \mu)$ при $\tau = 0$. Из (3.7) следует, что

$$\left. \frac{\partial \bar{\alpha}_0}{\partial \rho} \right|_{\rho=\lambda(\zeta, \mu)} + \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial Q\alpha_0}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0.$$

Используя выражение для $\nabla^2 Q\alpha_0$, полученное в работе [10], и определяя $Q_0\alpha_0(\tau, \zeta)$ в новых обозначениях, получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0\alpha_0}{\partial \tau^2} &= \bar{F}(0, \zeta; \alpha_{00}(0, \zeta) + Q_0\alpha_0(0, \zeta)) = \\ &= \omega_C^2 - g_0^C \omega_C - \xi_0^C \omega_C^3, \quad -\infty < \tau < \infty, \\ \frac{\partial Q_0\alpha_0(0, \zeta)}{\partial \tau} &= 0, \quad Q_0\alpha_0(\pm\infty, \zeta) = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\omega_C = \omega(\tau, \zeta) = \bar{\alpha}_{00}(0, \zeta) + Q_0\alpha_0(\tau, \zeta).$$

В работе [10] показано, что задача (3.8) при любой l -периодической функции $\chi(\zeta)$ имеет нетривиальное l -периодическое по переменной ζ решение с экспоненциальной оценкой. Неизвестная функция $\chi(\zeta)$ определяется на следующем шаге. Интеграл задачи (3.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{(\psi_C - \varphi_{1C})(\varphi_{1C} - \delta_C)}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\Lambda}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{\frac{\xi_0^C}{2}} |\tau|, \\ \Lambda &= \arcsin \left[\frac{(\varphi_{1C} - \delta_C)(\psi_C - \omega_C)}{(\psi_C - \varphi_{1C})(\omega_C - \delta_C)} \right]^{1/2}, \\ \psi_C &= \psi(\chi(\zeta), \zeta), \quad \delta_C = \delta(\chi(\zeta), \zeta), \\ \varphi_{1C} &\leq \omega_C \leq \psi_C. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сформулируем задачу, определяющую $Q_1\alpha_0(\tau, \zeta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1\alpha_0}{\partial \tau^2} &= F'_\alpha(\tau, \zeta) Q_1\alpha_0 - \beta \frac{\partial Q_0\alpha_0}{\partial \tau} + F_1(\tau, \zeta), \\ -\infty < \tau < \infty, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial Q_1\alpha_0}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{\partial \bar{\alpha}_{00}}{\partial \rho} \right|_{\rho=0},$$

$$Q_1\alpha_0(\pm\infty, \zeta) = 0. \tag{3.10}$$

Здесь

$$F'_\alpha(\tau, \zeta) = 2\omega_C - g_0^C - 3\xi_0^C \omega_C^2, \quad \beta = \frac{1 + (\chi')^2 - \chi\chi''}{\chi [1 + (\chi')^2]^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} F_1(\tau, \zeta) &= \left[(F'_\alpha - f'_\alpha) \frac{\partial \bar{\alpha}_{00}(0, \zeta)}{\partial \rho} + \right. \\ &+ (F'_\xi - f'_\xi) \frac{\partial \bar{\xi}(0, \zeta)}{\partial \rho} + (F'_g - f'_g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho} \left. \right] \times \\ &\times (\lambda_1(\zeta) + \tau) + (F'_\alpha - f'_\alpha) \bar{\alpha}_{01}(0, \zeta) + \\ &+ (F'_\xi - f'_\xi) \bar{\xi}_1(0, \zeta) + (F'_g - f'_g) \bar{g}_1(0, \zeta), \end{aligned}$$

$$F'_\alpha - f'_\alpha = 2\omega_C - g_0^C - 3\xi_0^C \omega_C^2 - (2\alpha_{00} - g_0^C - 3\xi_0^C \alpha_{00}^2).$$

Поскольку однородная задача, соответствующая (3.10), имеет нетривиальное решение, равное $\partial Q_0\alpha_0/\partial \tau$, исходная задача (3.10) разрешима только при выполнении условия ортогональности неоднородности $F_1 - \beta \partial Q_0\alpha_0/\partial \tau$ к решению однородного уравнения. Используя выражение для $F_1(\tau, \zeta)$ и свойство интеграла в симметричных пределах от четных и нечетных функций, можно упростить условие разрешимости, сведя его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} \int_{-\infty}^{\infty} (F'_\xi - f'_\xi)_\tau \frac{\partial Q_0\alpha_0}{\partial \tau} d\tau &= \\ = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial Q_0\alpha_0}{\partial \tau} \right)^2 d\tau. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) — это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\chi(\zeta)$. Входящие под интегралы этого уравнения функции $\partial Q_0\alpha_0/\partial \tau$ и $\alpha_{00}^3(\chi(\zeta), \zeta) - \omega_C^3$ также зависят от $\chi(\zeta)$ и являются l -периодическими по явно входящей переменной ζ . Поэтому к уравнению (3.11) необходимо добавить условие

$$\chi(\zeta) = \chi(\zeta + l).$$

Заметим, что при выводе уравнения (3.11) ради простоты принято $g(x, y, \mu) \equiv \text{const}$. Однако нельзя считать $\xi(x, y, \mu) = \text{const}$, так как в этом случае уравнение (3.11) теряет смысл. Как уже отмечалось ранее, зависимость частоты ступенчатой ионизации ξ от точки $M(x, y)$ может обеспечить электрическое

поле объемных зарядов плазмы. Решением уравнения (3.11), т.е. нахождением функции $0 < \chi(\zeta) < 1$, определяется кривая C_0 . Тем самым определяются все члены асимптотики нулевого порядка по параметру μ для функции $A_0(x, y, \mu)$.

4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{v}_1(x, y, \mu)$

1. Задача, определяющая вектор $\mathbf{P}(x, y, \mu) = \mu \mathbf{v}_1(x, y, \mu)$, следует из задачи (2.5). Она имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla(A_0 \mathbf{P}) &= \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \mu \nabla^2 A_0, \quad \nabla \times \mathbf{P} = 0, \\ P_x(0, y, \mu) &= 0, \quad P_x(1, y, \mu) = P_x^{(1)}, \\ \mathbf{P}(x, y, \mu) &= \mathbf{P}(x, y + l, \mu). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение этой задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x, y, \mu) &= \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \mu \nabla \ln A_0(x, y, \mu) + \mu \mathbf{B} = \\ &= -\mu \nabla \varphi_0, \\ \varphi_0(x, y, \mu) &= -\frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \ln A_0 + B_z y + \text{const}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{B} — произвольный вектор, причем $B_x = 0$. Соотношения (4.2) позволяют определить все члены асимптотик для \mathbf{P} и φ_0 , которые также состоят из суммы четырех рядов вида (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x, y, \mu) &= \mathbf{p}(x, y, \mu) + T \mathbf{p}(\tau_0, y, \mu) + \\ &+ Q \mathbf{p}(\tau, \zeta, \mu) + S \mathbf{p}(\tau_1, y, \mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, \mu) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \varphi_{0s}(x, y) + T \varphi_0(\tau_0, y, \mu) + \\ &+ Q \varphi_0(\tau, \zeta, \mu) + S \varphi_0(\tau_1, y, \mu). \end{aligned}$$

При определении членов регулярных рядов имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0(x, y) &\equiv 0, \quad \mathbf{p}_1(x, y) = \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \nabla \ln \alpha_{00} + \mathbf{B}, \\ \varphi_{00}(x, y) &= \frac{1 - \gamma}{\nu(1 + \sigma)} \ln \alpha_{00}(x, y) - \mathcal{E}_0 y + \text{const}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\mathcal{E}_0 = -B_z$ — постоянная составляющая электрического поля, направленная вдоль оси разряда. В выражениях (4.3) значение константы выбирается так, чтобы потенциал φ_{00} в заданной точке имел известное значение. Аналогично определяются и все последующие члены регулярных рядов.

2. Найдем члены пограничных рядов. Из (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} T_0 \mathbf{P}(\tau_0, y) &= \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \mu \nabla \ln \frac{\omega_0(\tau_0, y)}{\alpha_{00}(0, y)}, \\ T_0 \varphi_0(\tau_0, y) &= \frac{1 - \gamma}{\nu(1 + \sigma)} \ln \frac{\omega_0(\tau_0, y)}{\alpha_{00}(0, y)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аналогично,

$$Q_0 \mathbf{P}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \mu \nabla \ln \frac{\omega_c(\tau, \zeta)}{\alpha_{00}(0, \zeta)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_0 p_x(\tau, \zeta) &= \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \frac{1}{\sqrt{1 + (\chi')^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{\omega_c(\tau, \zeta)}{\alpha_{00}(0, \zeta)}, \\ Q_0 p_z(\tau, \zeta) &= \frac{1 - \gamma}{\nu(1 + \sigma)} \frac{\chi'(\zeta)}{\sqrt{1 + (\chi')^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{\omega_c(\tau, \zeta)}{\alpha_{00}(0, \zeta)}. \end{aligned}$$

Из (4.5) видно, что значение вектора $Q_0 \mathbf{P}(\tau, \zeta)$ зависит от формы кривой всплеска. Так, например, если эта кривая представляет собой отрезок прямой $0 < x < 1, y = \text{const}$, то

$$\begin{aligned} Q_0 p_x(\tau, \zeta) &\equiv 0, \\ Q_0 p_z(\tau, \zeta) &= \frac{1 - \gamma}{\nu(1 + \sigma)} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{\omega_c(\tau, \zeta)}{\alpha_{00}(0, \zeta)}, \\ Q_0 \varphi_0(\tau, \zeta) &= \frac{1 - \gamma}{\nu(1 + \sigma)} \ln \frac{\omega_c(\tau, \zeta)}{\alpha_{00}(0, \zeta)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} S_0 p(\tau_1, y) &= \frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \mu \nabla \ln \frac{\omega_1(\tau_1, y)}{\alpha_{00}(1, y)}, \\ S_0 \varphi_0(\tau_1, y) &= -\frac{\gamma - 1}{\nu(1 + \sigma)} \ln \frac{\omega_1(\tau_1, y)}{\alpha_{00}(1, y)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau_1, y) &= \alpha_{00}(1, y) \exp \left(\nu \frac{1 + \sigma}{1 - \gamma} S_0 \varphi_0 \right), \\ b_0(y) &= \varphi_1^{(1)} \exp \left[\nu \frac{1 + \sigma}{1 - \gamma} S_0 \varphi_0(0, y) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} T_0 \alpha_0(\tau_0, y) &= \varphi_1^{(0)} \left[\exp \left(\nu \frac{1 + \sigma}{1 - \gamma} T_0 \varphi_0 \right) - 1 \right], \\ q_0(y) &= \varphi_1^{(0)} \exp \left[\nu \frac{1 + \sigma}{1 - \gamma} T_0 \varphi_0(0, y) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Соотношение (4.8) устанавливает физический смысл введенного ранее неизвестного параметра $b_0(y)$. Наконец,

$$\psi_C = \varphi_{1C} \exp \left(\nu \frac{1 + \sigma}{1 - \gamma} Q_0 \varphi_0(0, \zeta) \right). \quad (4.10)$$

Таким образом, найдены главные члены асимптотик по параметру μ для всех неизвестных функций.

3. Задачи, определяющие главные члены пограничных рядов $Pw(x_1, y, h)$ и $Rw(x_2, y, h)$, формулируются так, чтобы устранить невязки, которые могут быть привнесены в граничные условия задачи (1.1) при нахождении функции $A_0(x, y, \mu)$ на обоих концах отрезка $[0, 1]$. Поскольку на левом конце этого отрезка все возникающие невязки удалось устранить с помощью функций $T_0w(\tau_0, y)$, имеем $Pw(x_1, y, h) \equiv 0$.

Пограничные функции $Rw(x_2, y, h)$ определяются в работе [11]. Как уже отмечалось ранее, при нахождении этих функций устанавливается связь между параметром $b_0(y)$ и значениями концентраций заряженных компонентов плазмы на внутренней поверхности стенки трубки $b_0^{(a)}$, $a = e, p$, которые по условию задачи (1.1) считаются известными. Поэтому будем считать, что поставленная задача решена.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ. ВЫВОДЫ

Обсудим основные результаты решения поставленной задачи, полученные в предыдущих разделах, и проанализируем графики функций, описывающих распределения основных физических характеристик газоразрядной плазмы: концентрации ее заряженных компонентов, напряженности электрического поля, потенциала, пространственных зарядов, а затем сравним результаты этого анализа с данными зондовых измерений для тех же величин в движущихся стратах. При этом анализ пристеночного пограничного слоя не проводится, т. е. функции $Rw(x_2, y, h)$ в расчетах не используются. Анализ структуры страт проводится только на основе решения задачи (2.5). Рассмотрим графики следующих функций:

$$N_p(x, y, h, \mu) \approx A_0(x, y, \mu) \approx \alpha_{00}(x, y) + T_0\alpha_0(\tau_0, y) + Q_0\alpha_0(\tau, \zeta) + S_0\alpha_0(\tau_1, y); \quad (5.1)$$

потенциала и электрического поля

$$\Phi(x, y, h, \mu) \approx \varphi_0(x, y, \mu) \approx \varphi_{00}(x, y) + T_0\varphi_0(\tau_0, y) + Q_0\varphi_0(\tau, \zeta) + S_0\varphi_0(\tau_1, y), \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_x(x, y, h, \mu) = \frac{1}{h}V_x \approx v_{1x}(x, y, \mu) \approx p_{1x}(x, y) + \frac{1}{\mu} [T_0p_x(\tau_0, y) + S_0p_x(\tau_1, y)], \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_z(x, y, h, \mu) = \frac{1}{h}V_z \approx v_{1z}(x, y, \mu) \approx p_{1z}(x, y) + \frac{1}{\mu}Q_0p_z(\tau, \zeta); \quad (5.4)$$

объемного заряда плазмы

$$\rho_e(x, y, h, \mu) = N_p(x, y, h, \mu) - N_e(x, y, h, \mu) = h\nabla\mathbf{V}(x, y, h, \mu) \approx \frac{h^2}{\mu}\nabla\mathbf{P} \approx h^2\nabla \left[\mathbf{p}_1 + \frac{1}{\mu}(T_0\mathbf{p} + Q_0\mathbf{p} + S_0\mathbf{p}) \right]. \quad (5.5)$$

Предполагается, что разряд происходит в длинной трубке с $R = 1$ см, заполненной неоном при давлении $p = 2$ Торр и $T = 300$ К. Для остальных параметров, входящих в выражения (5.1)–(5.5), использованы следующие численные значения: $E_0 = 3$ В/см, $\nu = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$, $\mu = 0.3$, $g_0 = 1.0$, $\xi_0^C = 0.114$, $\varphi_{1c} = 1.151$, $\psi_c = 9.94$. Эти значения соответствуют случаю, когда среднее значение концентрации ионов равно 10^{12} см $^{-3}$, а средняя температура $T_e \approx 2 \cdot 10^4$ К. Поскольку достоверная информация о частоте ступенчатой ионизации отсутствует, для ξ_0^C взято такое значение, при котором высота всплеска $\psi_c \approx 10$.

Пусть кривая всплеска C представляет собой отрезок прямой $0 < x < 1$, $y = \text{const}$ с периодом $l_{st} = 6$ см. В качестве $c_p^{(0)}$ выбрано значение концентрации ионов на оси однородной части нестратифицированного положительного столба тлеющего разряда с постоянным током, равным нижней границе появления страт. Анализ результатов зондовых измерений, приведенных в работах [12, 13], показывает, что при таком выборе $c_p^{(0)}$ в промежутке между стратами $q_0(y) < 1$.

На рис. 1 приведены графики функций (5.1) и (5.5) для $x = 0$, которые определяют распределения вдоль оси разряда концентрации ионов,

$$N_p(0, y, h, \mu) \approx A_0(0, y, \mu) = \bar{A}_0(\rho, \zeta, \mu) \approx q_0(y) + Q_0\alpha_0(\tau, \zeta),$$

и величины, пропорциональной плотности объемного заряда плазмы,

$$\nu \left(\frac{\mu}{h} \right)^2 \rho_c(0, y, h, \mu) = \nu \left(\frac{\mu}{h} \right)^2 \bar{\rho}_e(\rho, \zeta, \mu) \approx \nu\mu\nabla [T_0\mathbf{p} + Q_0\mathbf{p}].$$

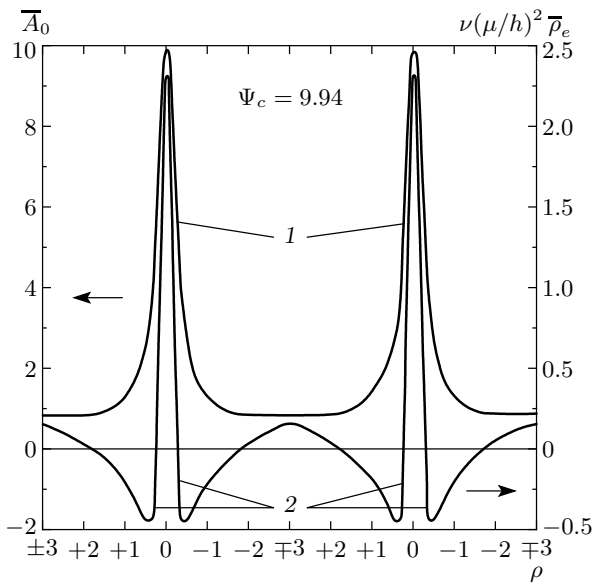


Рис. 1. Графики функций $A_0(0, y, \mu) = \bar{A}_0(\rho, \zeta, \mu) \approx q_0(y) + Q_0\alpha_0(\tau, \zeta)$, $y = \zeta - \rho$, $\rho = \mu\tau$ (кривая 1) и $\nu(\mu/h)^2\rho_e(x, y, \mu) = \nu(\mu/h)^2\bar{\rho}_e(\rho, \zeta, \mu) \approx \nu\mu\nabla[T_0p + Q_0p]$ (кривая 2), определяющих распределения вдоль оси газового разряда ($x = 0$) концентрации заряженных частиц плазмы и величины, пропорциональной плотности ее объемных зарядов

Эти выражения отличаются от распределений (5.1) и (5.5) по виду тем, что они не содержат пограничных функций S_0w , поскольку последние заметно отличны от нуля только вблизи границы $x = 1$. Во второе выражение также не включена величина ∇p_1 по причине ее малости. Помимо этого в выражении для N_p учтено граничное условие (3.2).

На рис. 1 видно, что распределение N_p типично для страт, а распределение ρ_e сравнивать не с чем, так как экспериментаторы обычно эту величину не измеряют, однако ее достоверность можно установить косвенным путем, а именно, по величине создаваемого этим зарядом поля. Отметим здесь лишь одну особенность этого распределения: в промежутке между стратами на оси $\rho_e > 0$.

На рис. 2 представлены графики функций (5.2) и (5.4) без учета постоянной продольной составляющей электрического поля E_0 , а на рис. 3 и 4 — графики тех же функций с учетом этого поля. Расчеты проводились на основании формул (4.6), (4.3) и (3.9). Распределение вдоль оси ($x = 0$) потенциала поля, создаваемого только объемным зарядом плазмы, совпадает с результатами экспериментальных измерений из работы [12]. Этот факт и позволяет

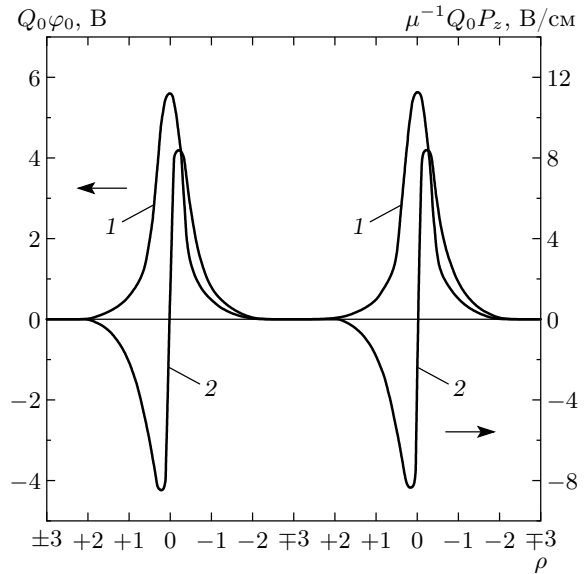


Рис. 2. Графики функций $(1/\mu)Q_0p_z(\tau, \zeta)$ и $Q_0\varphi_0(\tau, \zeta)$, определяющих распределения вдоль оси разряда ($x = 0$) электрического поля (кривая 2), создаваемого объемным зарядом плазмы с плотностью ρ_e (см. рис. 1, кривая 2), и потенциала этого поля (кривая 1)

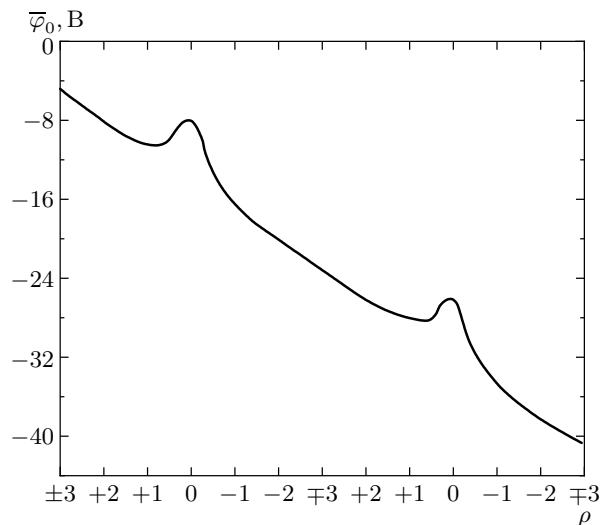


Рис. 3. График функции $\varphi_0(0, y, \mu) = \bar{\varphi}_0(\rho, \zeta, \mu) \approx \varphi_{00}(0, y) + Q_0\varphi_0(\tau, \zeta)$, определяющей распределение вдоль оси разряда потенциала полного электрического поля ε_z (см. рис. 4)

утверждать, что распределение ρ_e , которое следует из приведенного на рис. 1 графика, соответствует реальному распределению объемного заряда плазмы вдоль оси стратифицированного разряда.

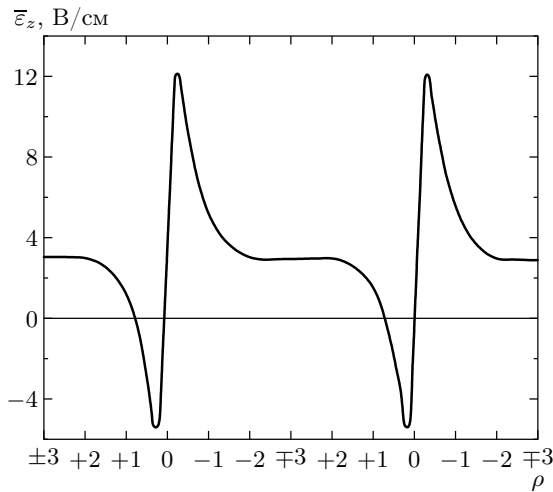


Рис. 4. График функции $\varepsilon_z(0, y, \mu) = \bar{\varepsilon}_z(\rho, \zeta, \mu) \approx p_{1z}(0, y) + (1/\mu)Q_0 p_z(\tau, \zeta)$, $y = \zeta - \rho$, $\rho = \mu\tau$, определяющей распределение вдоль оси разряда полного электрического поля, постоянная составляющая которого $E_0 = 3$ В/см

Из вида кривых, приведенных на рис. 3 и 4, следует, что перед каждой стратой со стороны анода имеется потенциальная яма. Ее глубина уменьшается с уменьшением высоты всплеска ψ_c и с увеличением E_0 . Заметим, что экспериментально у движущихся страт таких ям не обнаружено. Это можно объяснить тем, что при численных расчетах взяты завышенное значение ψ_c и заниженное значение E_0 . Из приведенных в работах [12, 13] графиков следует, например, что плотность плазмы в страте превышает среднее значение всего лишь в несколько раз, тогда как в численных расчетах использовано значение $\psi_c \approx 10$. Помимо этого из теории следует, что глубина потенциальной ямы зависит еще и от производной $\xi'_{0y}(0, y)$. Более того, если эта величина будет положительной и достаточно большой, то потенциальные ямы могут появиться и перед каждой стратой со стороны катода. Этот случай здесь подробно не рассмотрен по причине отсутствия достаточно полной информации относительно зависимости $\xi(x, y, \mu)$.

На рис. 5 и 6 приведены графики, определяющие распределения тех же физических характеристик (5.1)–(5.3), (5.5), но уже вдоль радиуса газового разряда. Расчеты проводились для случая, когда $\xi_0(x, y_0) \equiv 0$, где y_0 — ордината любой той точки на оси разряда, которая отстоит от двух соседних страт на равных расстояниях, $q_0(y_0) = 0.85$, а потенциал плазмы на внутренней поверхности стенки

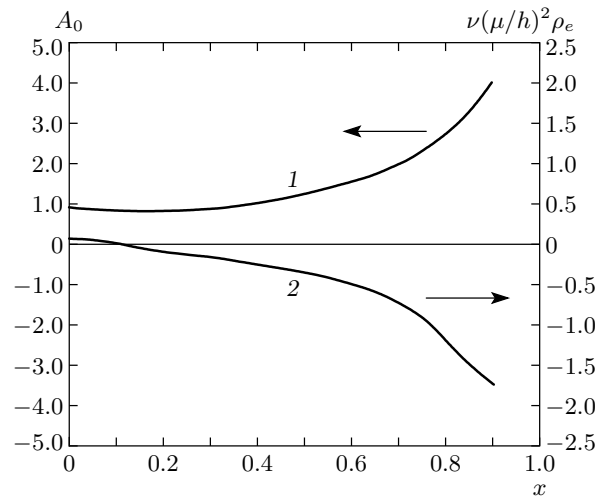


Рис. 5. Графики функций $A_0(x, y_0, \mu)$ и $\nu(\mu/h)^2 \rho_e(x, y_0, \mu)$, определяющих радиальные распределения концентрации заряженных компонентов плазмы и величины, пропорциональной ее объемному заряду с плотностью ρ_e (y_0 — ордината любой той точки на оси разряда, которая отстоит на равных расстояниях от центров двух соседних страт)

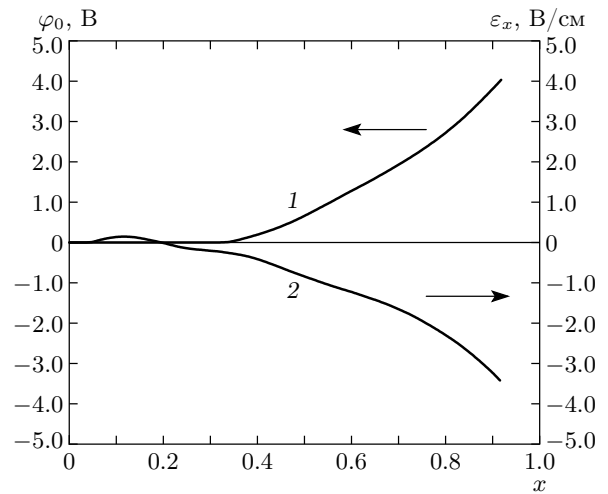


Рис. 6. Графики функций $\varepsilon_x(x, y_0, \mu)$ и $\varphi_0(x, y_0, \mu)$, определяющих распределения вдоль радиуса трубки электрического поля и потенциала этого поля (y_0 имеет то же значение, что и на рис. 5)

трубки больше потенциала на оси разряда. Эти предположения сделаны на основе анализа экспериментальных данных, приведенных в работах [12, 13] для движущихся страт. Установим для потенциала стенки такое значение, при котором $S_0 \varphi_0(0, y_0) = 5$ В

(при нулевом значении потенциала на оси). Тогда из (4.8) определяется параметр $b_0(y_0) = 6.9$. Для вычисления функции $S_0\alpha_0(\tau_1, y)$ использовалась формула (3.5).

Наконец, при определении функции $T_0\alpha_0(\tau_0, y)$ использовалось интегральное уравнение (3.3). Его решение строилось методом последовательных приближений. В качестве первого приближения взята функция

$$Z_1(t, y) = D(y)t^2 \exp(-t^2),$$

где неизвестный коэффициент D в общем случае может зависеть от y . Таким образом, решение уравнения (3.3) будет зависеть от двух параметров, $m(y)$ и $D(y)$, для нахождения которых имеются два условия (см. разд. 3, п. 1). Если при построении решения уравнения (3.3) ограничиться вторым приближением, то получим $m(y_0) = 6.2$, $D(y_0) = 6.4$. Именно это решение было использовано при проведении численных расчетов, лежащих в основе графиков на двух последних рисунках. Несмотря на грубое приближение, графики, представленные на рис. 5 и 6, не противоречат экспериментальным данным.

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать следующие основные выводы.

1. Пространственно-периодические внутренние переходные слои, возникающие в плазме положительного столба тлеющего разряда, имеют существенно двумерный характер. Не только продольные, но и радиальные распределения всех физических характеристик плазмы зависят от ординаты точки и сильно отличаются от аналогичных распределений в однородном столбе.

2. Используя найденные выше только главные члены асимптотики решения исходной математической модели, можно выявить основные черты структуры изучаемого объекта. При сравнении приведенных выше зависимостей с имеющимися в научной литературе данными зондовых измерений по структуре ионизационных волн обнаруживается удовлетворительное сходство (не только качественное).

В заключение отметим, что использованное выше приближенное решение допускает уточнение. Улучшить его можно, например, вычислив последующие члены асимптотики (2.8), либо путем численных расчетов. Во втором случае рекомендуется использовать приближенное решение в качестве начального условия задачи, а затем уточнить его численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Недоспасов, УФН **94**, 439 (1968).
2. Л. Пекарек, УФН **94**, 463 (1968).
3. А. Я. Воронов, Теплофиз. высок. темп. **15**, 28 (1977).
4. А. Я. Воронов, ДЕП. ВИНТИ, № 877-79 от 12.01.79 г.
5. Л. М. Волкова, А. М. Девятков, М. К. Тараджидзе, Вестник МГУ, Физ. астрон. **35**, 63 (1994).
6. А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, УФН **167**, 1215 (1997).
7. В. В. Балабанов, Л. М. Василяк, С. П. Ветчинин и др., ЖЭТФ **119**, 99 (2001).
8. А. Я. Воронов, Изв. РАН, МЖГ **3**, 185 (1998).
9. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, Москва (1973).
10. В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, ДАН **351**, 731 (1996).
11. А. Я. Воронов, Изв. РАН, МЖГ **6**, 105 (1999).
12. К. Ф. Бессонова, О. Н. Орешак, Е. П. Остапченко, В. А. Степанов, ЖТФ **41**, 979 (1971).
13. Ю. Б. Голубовский, С. У. Нисимов, ЖТФ **65**, 46 (1995).