

# ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ И НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

*А. В. Брантов\*, В. Ю. Быченков*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

*В. Розмус\*\**

*Физический факультет, Университет Альберты  
Эдмонтон Альберта, Т6Г 2J1, Канада*

*К. Капчак\*\*\**

*Факультет электротехники и компьютерных технологий, Университет Альберты  
Эдмонтон Альберта, Т6Г 2J1, Канада*

Поступила в редакцию 11 ноября 2004 г.

Предложена регулярная процедура нахождения решения линеаризованного кинетического уравнения заряженных частиц с интегралом столкновений Ландау в плазме с большим  $Z$ . С использованием этого для всего диапазона частот, волновых чисел и параметра столкновительности получена продольная диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы, переходящая в соответствующих асимптотических пределах к известным ранее выражениям. Также для произвольных соотношений между характерными пространственными и временными масштабами плазмы сформулированы уравнения нелокального переноса для малых возмущений, существенно расширяющие область применимости предшествующих теорий.

PACS: 52.25.Dg, 52.25.Fi, 52.35.Fp, 52.38.-r

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что диэлектрическая восприимчивость плазмы относится к предмету, являющемуся неизменным атрибутом любого учебника по физике плазмы, все еще не существует универсального выражения или простой алгоритмической схемы для ее нахождения в столкновительной плазме во всей области волновых чисел  $k$  и частот  $\omega$ . Это связано с тем, что нахождение даже линейного отклика плазмы требует решения интегродифференциального кинетического уравнения для частиц, испытывающих кулоновские столкновения. Именно нахождение такого решения в виде, допускающем его рутинное использование для различных приложений, является основным сдерживающим фактором теории

отклика плазмы со столкновениями. Естественное упрощение теории возникает при замене точного интеграла столкновений Ландау модельными выражениями или при использовании упрощающих предположений о слабых, либо, наоборот, сильных столкновениях частиц, что может приводить к существенной потере точности в вычислениях.

Наиболее широко известное выражение для диэлектрической проницаемости столкновительной плазмы легко получается при использовании модельного интеграла столкновений Батнагара–Гросса–Крука (БГК) [1]. Такое приближение позволяет качественно описать влияние столкновений на дисперсионные свойства плазмы. Однако в определенной области  $(\omega, k)$  использование диэлектрической проницаемости для модели БГК приводит к большой ошибке. Попытка улучшить такое модельное описание, вводя резерфордскую зависимость эффективной частоты столкновений

\*E-mail: brantov@sci.lebedev.ru, abrantov@phys.ualberta.ca

\*\*W. Rozmus

\*\*\*C. Capjack

от скорости, не позволила существенно поднять точность нахождения диэлектрической восприимчивости [2, 3]. Заметное улучшение теории возникло при нахождении электростатического отклика плазмы с использованием лоренцевской модели с точным (по параметру  $m_e/m_i$ ) электрон-ионным интегралом столкновений Ландау [4–6]. Это выражалось в сужении области  $(\omega, k)$ , в которой не достигается удовлетворительное количественное описание диэлектрической постоянной. Вместе с тем, как следует из результатов данной работы, пренебрежение электрон-электронным интегралом столкновений все еще не позволяет количественно описать диэлектрические свойства плазмы во всей области частот и длин волн.

Помимо теоретических моделей, предлагающих унифицированное качественное описание диэлектрической восприимчивости во всей области  $(\omega, k)$ , существуют стандартные подходы теории возмущений, которые дают корректные асимптотические представления диэлектрической восприимчивости. К таким подходам относятся кинетическая теория отклика слабостолкновительной плазмы [7] и теория гидродинамического типа для столкновительной плазмы [8]. Эти теории, естественно, имеют сильные ограничения по параметрам  $\omega/\nu_{ei}$  и  $k\lambda_{ei}$ , где  $\nu_{ei}$  — частота электрон-ионных ( $e-i$ ) столкновений, а  $\lambda_{ei}$  — длина свободного пробега электронов. Предложенная в работе [9] слабостолкновительная нелокальная теория, хотя и расширяет область количественного описания диэлектрической проницаемости, все еще не охватывает всех пространственно-временных масштабов возмущений. Наиболее прямолинейный путь вычисления диэлектрической восприимчивости для произвольных заданных значений  $(\omega, k)$  состоит в численном решении кинетического уравнения Фоккера–Планка в фурье-представлении, что весьма нетривиально, требует навыков математического моделирования и плохо поддается параметризации. В этой связи построение теории, предлагающей универсальный «рецепт» воспроизведения диэлектрической восприимчивости для всего диапазона частот, волновых чисел и столкновительности плазмы  $(\nu_{ei}, \lambda_{ei})$ , представляет собой практически важную задачу. Ее решению посвящена данная работа.

Вопрос о диэлектрической восприимчивости столкновительной плазмы тесно связан с проблемой нелокального переноса. Теоретические модели нелокального переноса в горячей плазме развиваются уже более 20 лет, начиная с работ [10–12], и до сих пор их совершенствование остается ак-

туальным для условий  $\lambda_{ei}/L < 10^{-2}$ , которые, с одной стороны, характерны для экспериментов по лазерному термоядерному синтезу (ЛТС), а с другой, — когда не применима классическая сильностолкновительная теория переноса [13, 14]. Так, в экспериментах по ЛТС характерная длина неоднородности плазмы  $L$  в области поглощения лазерной энергии обычно не превышает ста длин свободного пробега электронов. По этой причине интерпретация практически всех экспериментов с лазерной плазмой требует привлечения теории нелокального переноса.

Наиболее значительный прогресс в развитии теории нелокального переноса был достигнут в модели малых возмущений [9, 15, 16], для которой в определенных предположениях удается получить аналитические решения кинетического уравнения и с их помощью найти электронные потоки. Эти теории предполагали медленность (квазистационарность) процессов переноса, когда коэффициенты переноса не зависят от времени. В таком квазистатическом приближении были сформулированы уравнения нелокальной гидродинамики, полностью эквивалентные кинетическому описанию плазмы [16]. Вместе с тем нестационарность процессов переноса может значительно ограничивать применимость развитой теории [17]. В линейной теории учет эффектов нестационарности переноса, по существу, эквивалентен учету  $\omega$ -зависимости коэффициентов переноса, что приводит к нетривиальной зависимости диэлектрической восприимчивости от частоты. В работах [4, 18] он проводился для слабостолкновительной и бесстолкновительной плазмы. Развитый в данной работе подход позволяет исследовать транспортные свойства плазмы для любых соотношений между временными, пространственными и столкновительными масштабами плазмы.

Модели нелокальной гидродинамики обладают тем преимуществом, что упрощают описание процессов переноса для практического использования. Такие модели развивались начиная с начала 90-х годов [19–22] и ставили своей целью включение кинетических эффектов (например, затухание Ландау) в сравнительно простые уравнения гидродинамики. В этой связи аналитическое описание коэффициентов переноса с помощью последовательной (даже ограниченной линейным приближением) теории привело бы к дальнейшему совершенствованию моделей нелокальной гидродинамики.

В настоящей работе нахождение уравнений переноса для возмущений и выражения для диэлектрической восприимчивости основано на решении

начальной задачи для линеаризованного кинетического уравнения для частиц плазмы [16]. Метод его решения справедлив для плазмы с достаточно большим зарядом ионов  $Z \gg 1$  и произвольными соотношениями между длиной неоднородности возмущения  $L = k^{-1}$  и длиной свободного пробега электрона, а также между типичным временным масштабом возмущения  $\tau = \omega^{-1}$ , временем электронных столкновений и временем свободного пролета электроном характерного масштаба неоднородности ( $1/kv_{Te}$ , где  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов). С использованием разложения функций распределения по полиномам Лежандра в данном подходе просуммированы все угловые гармоники функции распределения электронов, что позволяет описать непрерывный переход в полученных уравнениях переноса и выражении для диэлектрической восприимчивости от сильностолкновительного гидродинамического предела к бесстолкновительному случаю. При этом процедура решения начальной задачи для возмущения функции распределения [16] обобщена на нестационарный случай. Уравнения переноса сформулированы в виде соотношений между фурье-компонентами электронных потоков и обобщенными гидродинамическими силами, т. е. градиентами плотности и температуры и электрическим полем. Как результат нестационарности задачи все электронные коэффициенты переноса в  $(\omega, k)$ -пространстве содержат мнимую часть, которая отсутствует в квазистационарной теории [9, 15, 16]. Полученная комплексная продольная диэлектрическая восприимчивость проанализирована во всей области  $(\omega, k)$  в зависимости от параметров столкновительности плазмы,  $k\lambda_{ei}$ ,  $\omega\lambda_{ei}/v_{Te}$ . Установлена связь диэлектрической восприимчивости плазмы с нестационарными нелокальными коэффициентами переноса.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАЗМЕ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

Рассмотрим малые потенциальные возмущения однородной равновесной плазмы с максвелловскими функциями распределения электронов и ионов  $f_M^a$  ( $a = e, i$ ), характеризуемыми плотностью  $n_a$  и температурой  $T_a$ . Основное состояние будем считать квазистационарным, допуская лишь медленное изменение во времени температур частиц благодаря перераспределению энергии между электронами и ионами за счет столкновений. Тогда линеаризованное кинетическое уравнение для пространственных

фурье-компонент возмущений функций распределения частиц,  $\delta f_a = f_a - f_M^a$ , имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\right) \delta f_a + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \frac{\partial f_M^a}{\partial \mathbf{v}} = C_{ab}[\delta f_a, f_b] + C_{ab}[f_a, \delta f_b] + C_{aa}[\delta f_a, f_a] + C_{aa}[f_a, \delta f_a], \quad (1)$$

где  $C_{ab}$  и  $C_{aa}$  — интегралы столкновений Ландау частиц одного и разных сортов с зарядом  $e_a$  и массой  $m_a$ .

Выполняя одностороннее преобразование Фурье во времени и разлагая функцию распределения  $\delta f_a$  по полиномам Лежандра,  $P_l(\theta)$ ,

$$\delta f_a = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^a P_l(\theta), \quad C_{ab} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{ab}^l P_l(\theta), \quad (2)$$

получаем бесконечную систему уравнений для  $(\omega, k)$ -компонент Фурье угловых гармоник функций распределения,  $f_l^a$ ,

$$-i\omega f_l^a + ikv \frac{l}{2l-1} f_{l-1}^a + ikv \frac{l+1}{2l+3} f_{l+1}^a - C_{aa}^l - C_{ab}^l = S_l^a. \quad (3)$$

Здесь интегралы столкновений  $C_{ab}^l$  (как для  $b = a$ , так и для  $b \neq a$ ), записанные с помощью потенциалов Розенблюда [8], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ab}^l}{\nu_{ab}(v)} = & \frac{l(l+1)}{6} f_l^a (J_2^0 - 3I_0^0 - 2J_{-1}^0) + \\ & + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial f_l^a}{\partial v} (J_2^0 + J_{-1}^0) \right) + \\ & + \frac{m_a}{m_b} v \frac{\partial}{\partial v} (f_l^a I_0^0) + \frac{m_a}{m_b} \frac{4\pi v^3}{n_b} f_M^a f_l^b + v \frac{\partial f_M^a}{\partial v} \times \\ & \times \frac{l\delta J_{-1-l}^l - (l+1)\delta I_l^l}{2l+1} \left( 1 - \frac{m_a}{m_b} \right) + \\ & + \frac{v^2}{2(2l+1)} \frac{\partial^2 f_M^a}{\partial v^2} \left( \frac{l(1-l)}{2l-1} (\delta I_l^l + \delta J_{1-l}^l) + \right. \\ & \left. + \frac{(1+l)(2+l)}{2l+3} (\delta I_{l+2}^l + \delta J_{-1-l}^l) \right) + \\ & + \frac{v}{2(2l+1)} \frac{\partial f_M^a}{\partial v} \left( \frac{(l^2+3l-2)\delta I_l^l + l(l-1)\delta J_{1-l}^l}{2l-1} - \right. \\ & \left. - \frac{(l+1)(l+2)\delta I_{l+2}^l + (l^2-l-4)\delta J_{-1-l}^l}{2l+3} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\nu_{ab}(v) = 4\pi n_b (e_a e_b)^2 \Lambda_{ab} / m_a^2 v^3$  — зависящая от

скорости частота столкновений частиц сорта  $a$  с частицами сорта  $b$ ,  $\Lambda_{ab}$  — кулоновский логарифм, а

$$\begin{aligned} \{I_m^0; \delta I_m^n\} &= \frac{4\pi}{n_b v^m} \int_0^v \{f_M^b; f_n^b\} v^{m+2} dv, \\ \{J_m^0; \delta J_m^n\} &= \frac{4\pi}{n_b v^m} \int_v^\infty \{f_M^b; f_n^b\} v^{m+1} dv \end{aligned} \quad (5)$$

представляют собой невозмущенные потенциалы Розенблюда ( $J_m^0$ ) и их возмущения ( $\delta J_m^n$ ), определяющиеся из стандартных выражений [8].

В предположении, что начальное возмущение функции распределения  $\delta f_a(t=0)$  определяется возмущенным максвелловским распределением, т. е. характеризуется начальными возмущениями плотности  $\delta n_a(0)$  и температуры  $\delta T_a(0)$  [16],

$$\begin{aligned} \delta f(v, t=0) &= \\ &= \left[ \frac{\delta n_a(0)}{n_a} + \frac{\delta T_a(0)}{T_a} \left( \frac{v^2}{2v_{Ta}^2} - \frac{3}{2} \right) \right] f_M^a(v), \end{aligned} \quad (6)$$

источники в кинетическом уравнении (3) (правые части) возникают только для двух первых угловых гармоник функции распределения ( $S_l^a = 0$  при  $l \geq 2$ ) и определяются начальными возмущениями функции распределения и  $(\omega, k)$  фурье-компонентой электрического поля, а именно,  $S_0 = \delta f(t=0)$ ,  $S_1^a = (e_a E/T_a) v f_M^a$ .

Взяв два момента по скоростям уравнения (3) с  $l=0$  для возмущений плотности,  $\delta n_a$ , и температуры,  $\delta T_a$ ,

$$\begin{aligned} \delta n_a &= 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f_a^0, \\ \delta T_a &= \frac{4\pi m_a}{3n_a} \int_0^\infty dv v^2 (v^2 - 3v_{Ta}^2) f_a^0 \end{aligned} \quad (7)$$

( $v_{Ta} = \sqrt{T_a/m_a}$  — тепловая скорость), получаем законы сохранения числа частиц и энергии:

$$\frac{\partial \delta n_a}{\partial t} + ik n_a u_a = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta T_a}{\partial t} + ik \frac{2}{3n_a} (q_a + n_a u_a T_a) &= \\ &= \frac{4\pi m_a}{3n_a} \int dv v^4 C_{ab}^0 \equiv \frac{\partial \delta T_a}{\partial t} \Big|_{ab}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $u_a$  — средняя скорость частиц, а  $q_a$  — их тепловой поток:

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{4\pi}{3n_a} \int dv v^3 f_1^a, \\ q_a &= \frac{2\pi T_a}{3} \int dv v^3 \left( \frac{v^2}{v_{Ta}^2} - 5 \right) f_1^a. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и всюду ниже тепловая энергия частиц дается в нормировке, отвечающей постоянной Больцмана равной единице. Правая часть в уравнении (9) описывает столкновительный обмен энергией между сортами частиц:

$$\begin{aligned} \int dv v^4 C_{ab}^0 &= 2 \int dv \nu_{ab} v^4 \times \\ &\times \left\{ f_M^a \left( \delta J_{-1}^0 - \frac{m_a}{m_b} \delta J_0^0 \right) + f_a^0 \left( J_{-1}^0 - \frac{m_a}{m_b} I_0^0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно, для момента  $u_a$  из уравнения (3) с  $l=1$  получаем закон сохранения импульса

$$\begin{aligned} n_a m_a \frac{\partial u_a}{\partial t} + ik (\delta n_a T_a + \delta T_a n_a) + ik \Pi_{||}^a - e_a n_a E &= \\ &= \frac{4\pi m_a}{3} \int dv v^3 C_{ab}^1 \equiv n_a m_a \frac{\partial u_a}{\partial t} \Big|_{ab}, \end{aligned} \quad (12)$$

где вклад столкновений (трение) описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int dv v^3 C_{ab}^1 &= \left( 1 + \frac{m_a}{m_b} \right) \times \\ &\times \int dv v^3 \nu_{ab} (f_M^a \delta J_{-2}^1 - f_1^a I_0^0). \end{aligned} \quad (13)$$

Величина  $\Pi_{||}^a$  в (12) дается выражением

$$\Pi_{||}^a = \frac{8\pi m_a}{15} \int dv v^4 f_2^a \quad (14)$$

как продольная составляющая тензора напряжений.

Дальнейшее упрощение связано с разложением электрон-ионного и ион-электронного интегралов столкновений по отношению характерной скорости ионов к скорости электронов в соответствующих уравнениях (3). В результате для этих интегралов столкновений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ei}^l}{\nu_{ei}(v)} &= \frac{1}{2} l(l+1) f_l^e + \frac{4\pi v}{n_i} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{m_e}{m_i} \left( f_l \int_0^v dv' v'^2 f_M^{i'} + \delta_{l0} f_M^e \int_0^v dv' v'^2 f_0^{i'} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3v} \left( \frac{\partial f_l^e}{\partial v} \int_0^v dv' v'^4 f_M^{i'} + \delta_{l0} \frac{\partial f_M^e}{\partial v} \int_0^v dv' v'^4 f_0^{i'} \right) \right\} - \\ &- \delta_{l1} u_i \frac{\partial f_M^e}{\partial v}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{ie}^l}{\nu_{ie}(v)} = & -\frac{v}{3n_e v_{Te}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} l(l+1) f_l^i + \\ & + \frac{4\pi v^3}{3v_{Ti}^2} \frac{m_i}{m_e} \delta_{l1} \int_0^\infty dv' f_1^{e'} + \\ & + \frac{v}{3n_e} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{m_i v^3}{m_e v_{Te}^3} f_l^i + \frac{v^2}{v_{Te}} \frac{\partial f_l^1}{\partial v} \right) + \right. \\ & \left. + 4\pi \delta_{l0} f_M^i v^3 \left( f_0^e(0) - \frac{1}{v_{Ti}^2} \int_0^\infty dv' v' f_0^{e'} \right) \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где функции распределения, помеченные штрихом, отвечают аргументу  $v'$ . Приведенные интегралы столкновений дают законы сохранения числа частиц, импульса и энергии. При этом обмен энергией между электронами и ионами (охлаждение) в уравнении (9) для возмущений температуры электронов благодаря столкновениям описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta T_e}{\partial t} \Big|_{ei} = & 2\nu_{ei}^T \frac{m_e}{m_i} \left\{ \frac{\delta n_i}{n_i} (T_i - T_e) + \delta T_i + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi}{n_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( v_{Te}^3 f_0^e(0) T_i - T_e v_{Te} \int dv v f_0^e \right) \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\nu_{ei}^T = 2\nu_{ei}(v_{Te})/(3\sqrt{2\pi})$ . Уравнение баланса энергии для ионов содержит такой же вклад с противоположным знаком (нагрев). Соответственно, в закон сохранения импульса (12)  $e$ - $i$ -столкновения дают вклад

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} \Big|_{ei} = & \nu_{ei}^T u_i - \frac{1}{m_e n_e} \mathcal{R}_{ie}, \\ \mathcal{R}_{ie} = & \frac{4\pi m_e}{3} \int dv v^3 \nu_{ei}(v) f_1^e, \quad (18) \end{aligned}$$

учитывающий силу трения  $\mathcal{R}_{ie}$  и отдачу ионов  $\nu_{ei}^T u_i$ .

Интересуясь только кинетическими эффектами для электронов, ищем решение уравнения (3) только для электронной функции распределения. При этом, предполагая, что ионы имеют большую кратность ионизации  $Z \gg 1$ , можно пренебречь электрон-электронными ( $e$ - $e$ ) столкновениями в уравнениях для высших гармоник электронной функции распределения, оставив только  $C_{ee}^0$  в уравнении для ее симметричной части. Мы пренебрегаем также вкладами  $\sim m_e/m_i$  в  $C_{ei}$ , отвечающими за медленное перераспределение энергии от электронов к ионам, существенное только на больших временных масштабах. Это является хорошо оправданным, например, для лазерной плазмы. Таким образом, для

электрон-ионного интеграла столкновений будем использовать выражение

$$C_{ei}^l = -\frac{l(l+1)}{2} \nu_{ei} f_l^e + \delta_{l1} \nu_{ei} \frac{v}{v_{Te}^2} f_M^e u_i, \quad (19)$$

рассматривая среднюю скорость ионов  $u_i$ , входящую в  $C_{ei}$ , как заданную величину. Подобная система уравнений для  $f_l^e$  рассматривалась в работах [16] с использованием системы отсчета, в которой ионы покоились. Однако, в отличие от данного подхода, в этих работах использовалось квазистационарное приближение, накладывающее предположение о достаточной медленности процессов переноса. Здесь мы освобождаемся от такого ограничения.

Уравнения для высших ( $l > 1$ ) угловых гармоник функции распределения (3) исключаются путем введения модифицированной частоты столкновений  $\nu_l$  [16, 23], для которой может быть написано следующее рекуррентное соотношение [23]:

$$\begin{aligned} \nu_l(v) = & -i\omega + \frac{1}{2} l(l+1) \nu_{ei}(v) + \\ & + \frac{(l+1)^2}{4(l+1)^2 - 1} \frac{k^2 v^2}{\nu_{l+1}(v)}, \quad (20) \end{aligned}$$

которое позволяет записать следующее выражение для первой угловой гармоники:

$$f_1^e = -\frac{ikv}{\nu_1(v)} f_0^e + \frac{1}{\nu_1(v)} \frac{\partial f_M^e}{\partial v} \left( \frac{eE}{m_e} - \nu_{ei} u_i \right), \quad (21)$$

где симметричная часть возмущений электронной функции распределения  $f_0^e$  удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\begin{aligned} \left( -i\omega + \frac{k^2 v^2}{3\nu_1} \right) f_0^e - C_{ee} [f_0^e] = \\ = \frac{ikv^2}{3\nu_1} \frac{eE}{T_e} f_M^e - ik u \frac{v^2 \nu_{ei}}{3v_{Te}^2 \nu_1} f_M^e + \delta f^e(v, t=0) \quad (22) \end{aligned}$$

с начальным возмущением  $f^e(v, t=0)$ , определяемым соотношением (6).

Следуя работам [16], общее решение уравнения (22) представим с помощью базисных функций  $\psi^A$

$$\begin{aligned} f_0^e = & i \frac{eE}{kT_e} f_M^e + \left( \frac{\delta n_e(0)}{n_e} - \omega \frac{eE}{kT_e} \right) \psi^N f_M^e + \\ & + \frac{3}{2} \frac{\delta T_e(0)}{T_e} \psi^T f_M^e - ik u_i \psi^R f_M^e, \quad (23) \end{aligned}$$

которые удовлетворяют следующему кинетическому уравнению с различными источниками  $S_A$  ( $A = N, T, R$ ):

$$\left( -i\omega + \frac{k^2 v^2}{3\nu_1} \right) \psi^A = (f_M^e)^{-1} C_{ee} [f_M^e \psi^A] + S_A, \quad (24)$$

где  $S_N = 1$ ,  $S_T = v^2/3v_{Te}^2 - 1$  и  $S_R = v^2\nu_{ei}/3v_{Te}^2\nu_1$ . Мы также вводим моменты базисных функций  $J_B^A$  [16],

$$J_B^A = \frac{4\pi}{n_e} \int_0^\infty v^2 dv \psi^A f_M^e S_B, \quad (25)$$

которые симметричны по отношению к перестановке верхнего и нижнего индексов.

Исключить начальные возмущения из уравнения (23) можно, вычислив первые два момента  $\delta n_e$  и  $\delta T_e$  (7), что приводит к следующим соотношениям между начальными  $\delta n_e(0)$ ,  $\delta T_e(0)$  и текущими  $\delta n_e$ ,  $\delta T_e$  возмущениями:

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_e}{n_e} &= i \frac{eE}{kT_e} + \left( \frac{\delta n_e(0)}{n_e} - \omega \frac{eE}{kT_e} \right) J_N^N + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{\delta T_e(0)}{T_e} J_N^T - ik u_i J_N^R, \\ \frac{\delta T_e}{T_e} &= \left( \frac{\delta n_e(0)}{n_e} - \omega \frac{eE}{kT_e} \right) J_T^N + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{\delta T_e(0)}{T_e} J_T^T - ik u_i J_T^R. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответственно, исключение начальных возмущений  $\delta T_e(0)$  и  $\delta n_e(0)$  из уравнения (23) позволяет получить выражение для симметричной части функции распределения электронов,  $f_0^e$ , исходя из низших гидродинамических моментов

$$\begin{aligned} f_0^e &= i \frac{eE}{kT_e} f_M^e + \left( \frac{\delta n_e}{n_e} - i \frac{eE}{kT_e} \right) \frac{J_T^T \psi^N - J_T^N \psi^T}{D_{NT}^{NT}} f_M^e + \\ &\quad + \frac{\delta T_e}{T_e} \frac{J_N^N \psi^T - J_N^T \psi^N}{D_{NT}^{NT}} f_M^e - \\ &\quad - ik u_i \left( \psi^R - \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}} \psi^N - \frac{D_{NT}^{NR}}{D_{NT}^{NT}} \psi^T \right) f_M^e, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $D_{AB}^{CD} = J_A^C J_B^D - J_A^D J_B^C$ . Полученное выражение вместе с уравнением для  $f_1^e$  (21) позволяет сформулировать линейную теорию электронного отклика плазмы и переноса.

### 3. НЕЛОКАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Выше был реализован подход, позволивший выразить функцию распределения электронов через ее низшие моменты. Тем самым решается вопрос о замыкании цепочки уравнений для гидродинамических моментов. Простейшее замыкание такого типа хорошо известно в сильностолкновительном случае при использовании методов Чепмена–Энскога или

Греда. Однако при этом накладываются сильные ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электрона  $\lambda_{ei}$  и характерным масштабом неоднородности возмущений в плазме  $L$  [24],  $\lambda_{ei}/L < 0.06/\sqrt{Z}$ . Это приводит к невозможности использования классической теории для описания экспериментов по взаимодействию лазерного излучения с веществом в рамках термоядерных исследований, когда практический интерес представляют достаточно мелкомасштабные возмущения. Значительное расширение области использования гидродинамических уравнений, являющихся удобным инструментом для описания плазмы, было достигнуто в рамках нелокальной гидродинамики [16], сформулированной для достаточно медленных процессов в квазистатическом приближении. Здесь мы решаем вопрос об обобщении нелокальной гидродинамики на случай быстропеременных процессов в плазме.

#### А. Нелокальные уравнения переноса

Первые три момента кинетического уравнения (1) дают уравнения непрерывности, движения и баланса энергии для электронов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_e i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} &= -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}^* + \frac{1}{m_e n_e} i \mathbf{k} \cdot \hat{\Pi}^e - \frac{1}{m_e n_e} \mathbf{R}_{ie}, \\ \frac{\partial \delta T_e}{\partial t} + \frac{2}{3n_e} i \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_e + \frac{2}{3} T_e i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\mathbf{u}_e$  — средняя скорость дрейфа электронов, а  $\mathbf{E}^*$  — фурье-компонента эффективного электрического поля

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + i \mathbf{k} \frac{T_e}{e} \left( \frac{\delta n_e}{n_e} + \frac{\delta T_e}{T_e} \right). \quad (29)$$

Следуя предыдущим работам [16], мы ввели здесь обобщенную силу трения  $\mathbf{R}_{ie} = \mathcal{R}_{ie} - m_e n_e \nu_{ei}^T \mathbf{u}_i$ . Заметим, что уравнение движения электронов (второе уравнение) может быть использовано для определения тензора напряжений

$$i \mathbf{k} \hat{\Pi}^e = \mathbf{R}_{ei} + e n_e \mathbf{E}^* - i \omega m_e n_e \mathbf{u}_e,$$

а два оставшихся уравнения системы (28) полностью эквивалентны системе (26).

С помощью интегрирования (10), (21) электрический ток  $\mathbf{j} = e n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$  и тепловой поток могут быть представлены в стандартной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}^* + \alpha i \mathbf{k} \delta T_e + \beta_j e n_e \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{q}_e &= -\alpha T_e \mathbf{E}^* - \chi i \mathbf{k} \delta T_e - \beta_q n_e T_e \mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (30)$$

а для силы трения получаем

$$\mathbf{R}_{ie} = (\beta_j - 1)n_e e \mathbf{E}^* + \beta_q n_e i \mathbf{k} \delta T_e - \nu_{ei}^T \beta_r m_e n_e \mathbf{u}_i. \quad (31)$$

Здесь введены нелокальные нестационарные коэффициенты переноса в  $(\omega, k)$ -пространстве: электропроводность  $\sigma$ , термотоковый коэффициент  $\alpha$ , температуропроводность  $\chi$  и коэффициенты ионного конвективного переноса  $\beta_{j,q,r}$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^2 n_e}{k^2 T_e} \left( \frac{J_T^T}{D_{NT}^{NT}} + i\omega \right), \\ \alpha &= -\frac{en_e}{k^2 T_e} \left( \frac{J_T^N + J_T^T}{D_{NT}^{NT}} + i\omega \right), \\ \beta_j &= 1 - \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}}, \\ \chi &= \frac{n_e}{k^2} \left( \frac{2J_T^N + J_T^T + J_N^N}{D_{NT}^{NT}} + i\frac{5}{2}\omega \right), \\ \beta_q &= \frac{D_{NT}^{RT} + D_{NT}^{RN}}{D_{NT}^{NT}}, \\ \beta_r &= 1 + k^2 v_{Te} \lambda_{ei} \times \\ &\times [J_R^R - (1 - \beta_j)(J_R^N + J_R^T) + \beta_q J_R^T] - \\ &- (2\pi)^{3/2} \frac{v_{Te}}{n_e} \int_0^\infty \frac{dv v \nu_{ei}(v)}{\nu_1(v)} f_M^e. \end{aligned} \quad (32)$$

Все коэффициенты электронного переноса — комплексные функции, которые, будучи приведенными к безразмерному виду с помощью классических выражений, могут быть параметризованы посредством  $k\lambda_{ei}$ ,  $\omega/\nu_{ei}^T$  и  $Z$ . В статическом пределе  $\omega = 0$  нелокальные коэффициенты переноса (32) были исследованы в работах [16]. Область применимости статических коэффициентов переноса в классическом сильностолкновительном пределе,  $k\lambda_{ei} < 0.06/\sqrt{Z}$ , в плазме с большой кратностью ионизации ионов,  $Z \gg 1$ , определена малостью частоты по сравнению с частотой  $e$ - $i$ -столкновений,  $\omega \ll \nu_{ei}^T$  [8]. При этом сами коэффициенты фактически определяются величиной  $\nu_{ei}^T$ , а эффекты, связанные с элек-

трон-электронными соударениями, являются малыми поправками порядка  $O(Z^{-1})$  [13, 14]. Граница применимости этого классического предела определяется длиной делокализации энергии электронов  $\lambda_\epsilon = \sqrt{Z}\lambda_{ei}$  [11, 12], определяющей пространственный масштаб, при котором скорость релаксации за счет  $e$ - $e$ -столкновений становится равной скорости пространственного переноса в кинетическом уравнении (22). В окрестностях этой границы  $e$ - $e$ -столкновения начинают существенным образом влиять на коэффициенты переноса, модифицируя симметричную часть функции распределения, которая, в свою очередь, определяет как анизотропную добавку (см. уравнение 21), так и электронные потоки. Это приводит к сужению области применимости статического приближения для коэффициентов переноса, которая определяется теперь соотношением между  $\omega$  и частотой  $e$ - $e$ -столкновений. Вместе с тем с ростом  $k\lambda_{ei}$  перераспределение электронов благодаря пространственному переносу приводит к тому, что подтепловые электроны (электроны с малыми скоростями,  $v \lesssim v_{Te}$ ) начинают определять возмущение симметричной части функции распределения, тем самым эффективно увеличивая частоту  $e$ - $e$ -столкновений [9]. Так, для  $k\lambda_{ei} \gg \sqrt{Z}$  их характерные скорости  $v^* \sim v_{Te}/(Zk^2\lambda_{ei}^2)^{1/7}$  становятся заметно меньше тепловых [9, 16]. Таким образом, область применимости статического приближения для коэффициентов переноса для умеренных градиентов  $0.06/\sqrt{Z} < k\lambda_{ei} < 6Z^{2/3}$  определяется условием  $\omega \ll \nu_{ee}^T, \nu_{ei}^T (k\lambda_{ei})^{4/7}/Z^{5/7}$  [9, 16], где  $\nu_{ee}^T = 2\nu_{ee}(v_{Te})/(3\sqrt{2}\pi)$ . При больших градиентах в области  $k\lambda_{ei} \sim 6Z^{2/3}$  необходим учет всех угловых гармоник для корректного описания перехода к бесстолкновительному пределу. Этим объясняется резкий переход к области, в которой нарушается применимость статического приближения для коэффициентов переноса, которая в бесстолкновительной области по волновым числам ( $k\lambda_{ei} > 6Z^{2/3}$ ) определена стандартно, как  $\omega \ll kv_{Te}$ . В дальнейшем область применимости статического приближения для коэффициентов переноса,

$$\omega \ll \begin{cases} \nu_{ei}^T, & k\lambda_{ei} > 0.06/\sqrt{Z}, \\ \nu_{ee}^T, \nu_{ei}^T (k\lambda_{ei})^{4/7}/Z^{5/7}, & 0.06/\sqrt{Z} < k\lambda_{ei} < 6Z^{2/3} \\ kv_{Te}, & k\lambda_{ei} > 6Z^{2/3}, \end{cases} \quad (33)$$

будем определять как квазистатический предел нашей нелокальной теории. Отметим, что упомянутый выше резкий переход к бесстолкновительному

кинетическому пределу выражается в том, что выражение (33) формально испытывает скачок при  $k\lambda_{ei} \sim 6Z^{2/3}$ .

**В. Нелокальные коэффициенты переноса**

Область применимости классической (локальной) теории хорошо определена в квазистатистическом пределе (33) [24]. С ростом  $\omega$  эта область расширяется, поскольку при  $|\omega + i\nu_{ei}^T| \gg kv_{Te}$  имеется простое точное решение кинетического уравнения [8] в пренебрежении  $e$ - $e$ -столкновениями. Наше точное решение показывает, что нелокальные эффекты несущественны, если  $k\lambda_{ei} < 0.06/\sqrt{Z}$ ,  $0.1\omega/\nu_{ei}^T$ . Тогда уравнение (24) может быть решено путем разложения базисных функций с использованием двух первых полиномов Лагерра,  $\psi^A = C_0^A + C_1^A(v^2/3v_{Te}^2 - 1)$ . При этом имеет место следующее приближенное выражение для эффективной частоты столкновений:  $\nu_1 = \nu_{ei} - i\omega$ . В результате коэффициенты переноса получаем в виде квадратур [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_{SH}} &= \frac{1}{48} \int_0^\infty dx x^6 Q(x), \\ \frac{\alpha}{\alpha_{SH}} &= \frac{1}{144} \int_0^\infty dx x^6 (x^2 - 5) Q(x), \\ \frac{\chi}{\chi_{SH}} &= \frac{1}{1200} \int_0^\infty dx x^6 (x^2 - 5)^2 Q(x), \\ \beta_r &= 1 - \int_0^\infty dx Q(x), \\ \beta_j &= 1 - \sqrt{\frac{2}{9\pi}} \int_0^\infty dx x^3 Q(x), \\ \beta_q &= \sqrt{\frac{1}{18\pi}} \int_0^\infty dx x^3 (5 - x^2) Q(x), \end{aligned} \tag{34}$$

где введены обозначения

$$Q(x) = \frac{\nu_{ei}^T x \exp(-x^2/2)}{\nu_{ei}^T - i\sqrt{2/9\pi}\omega x^3}, \quad x = v/v_{Te},$$

а

$$\begin{aligned} \sigma_{SH} &= \frac{32n_e e^2}{3\pi m_e \nu_{ei}^T}, & \alpha_{SH} &= \frac{16n_e e}{\pi m_e \nu_{ei}^T}, \\ \chi_{SH} &= \frac{200n_e v_{Te} \lambda_{ei}}{3\pi} \end{aligned}$$

отвечают классическим коэффициентам переноса [13, 14]. Эти выражения для коэффициентов переноса не зависят от волнового числа и соответствуют локальному пределу, включая гидродинамический. Их зависимость от частоты иллюстрирует рис. 1.

Полученные выражения (34) в пределе сильных столкновений и низких частот,  $\omega \ll \nu_{ei}^T$ , дают класси-

ческие действительные коэффициенты переноса [13] с малыми мнимыми поправками

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_{SH}} &= 1 + i \frac{105}{16} \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}, \\ \frac{\alpha}{\alpha_{SH}} &= 1 + i \frac{105}{8} \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}, & \frac{\chi}{\chi_{SH}} &= 1 + i \frac{609}{40} \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}, \\ \beta_j &= -i \frac{32}{3\pi} \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}, & \beta_q &= -i \frac{32}{2\pi} \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}, \\ \beta_r &= -i \frac{\omega}{\nu_{ei}^T}. \end{aligned} \tag{35}$$

С ростом  $\omega$  действительная часть классических коэффициентов переноса  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  монотонно уменьшается, а мнимая часть растет, достигает максимума при  $\omega \sim 0.1\nu_{ei}^T$ , а затем падает (см. рис. 1). Коэффициенты ионного конвективного переноса в пределе сильных столкновений пренебрежимо малы, они возникают только из-за нестационарности, так как непосредственно видно, что они пропорциональны  $\omega$ . При этом в высокочастотном пределе,  $\omega \gg \nu_{ei}^T$ , коэффициенты  $\beta_j$  и  $\beta_r$  стремятся к единице, имея малые мнимые части, а коэффициент  $\beta_q$  мал по абсолютной величине, причем его действительная часть мала по сравнению с мнимой. В этом же пределе коэффициенты переноса  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  становятся чисто мнимыми с малыми действительными поправками:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{i e^2 n_e}{m_e \omega} \left( 1 - i \frac{\nu_{ei}^T}{\omega} \right), \\ \chi &= \frac{i T_e n_e}{m_e \omega} \left( \frac{5}{2} - i \frac{13\nu_{ei}^T}{4\omega} \right), \\ \alpha &= \frac{i e n_e}{m_e \omega} \left( \frac{5}{2} \left( \frac{\pi^8 (\nu_{ei}^T)^5}{36\omega^5} \right)^{1/6} + i \frac{3\nu_{ei}^T}{2\omega} \right), \\ \beta_j &= 1 - i \frac{\nu_{ei}^T}{\omega}, & \beta_q &= -i \frac{3\nu_{ei}^T}{2\omega}, \\ \beta_r &= 1 - \left( \frac{9\pi (\nu_{ei}^T)^2}{2\omega^2} \right)^{1/3} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} (1 + i\sqrt{3}). \end{aligned} \tag{36}$$

С ростом параметра столкновительности  $k\lambda_{ei}$  меняется и характер частотной зависимости коэффициентов переноса. Так, коэффициенты  $\alpha$  и  $\chi$  характеризуются существенно немонотонной зависимостью от частоты, что хорошо видно на рис. 2. Например, действительная часть коэффициента температуропроводности сначала возрастает с ростом частоты  $\omega$  по сравнению со статическим случаем, а затем при  $\omega/\nu_{ei}^T > 1$  убывает. Соответственно, мнимая часть температуропроводности сначала отрицательна, убывая до минимального значения, затем начинает расти, меняет знак, достигает максимума и снова убывает. При этом и мнимая, и действительная части температуропроводности имеют



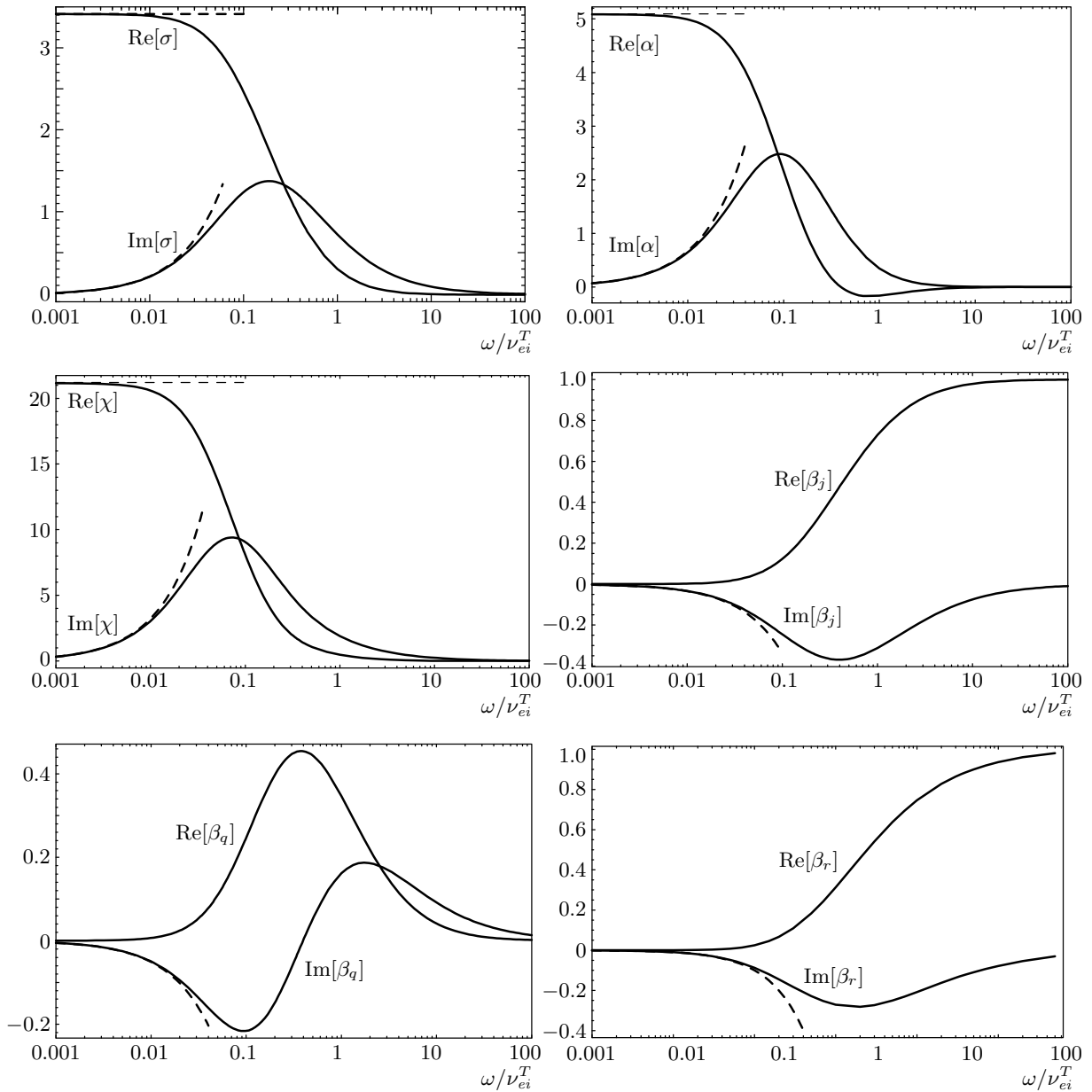


Рис. 1. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициентов переноса,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  и  $\beta_{j,q,r}$ , от  $\omega/\nu_{ei}^T$  в длинноволновом пределе,  $k\lambda_{ei} < 0.06/\sqrt{Z}$ ,  $0.1\omega/\nu_{ei}^T$ . Штриховые линии отвечают статическому пределу (35)

максимум при  $\omega/\nu_{ei}^T \sim 1$  для  $k\lambda_{ei} = 1$  (см. рис. 2). Еще более сложная зависимость от частоты возникает для термотокового коэффициента  $\alpha$ , мнимая и действительная части которого имеют по три точки перегиба. При этом действительная часть  $\alpha$  меняет знак с ростом  $\omega$ . Сказанное выше свидетельствует о нетривиальном характере проявления эффекта Петелье в горячей плазме.

Относительно простые выражения для коэффициентов переноса могут быть получены в области

$(\omega, k)$ , где электрон-электронные столкновения вносят несущественный вклад [6], т. е. для

$$\omega \gg \nu_{ee}^T, \nu_{ei}^T (k\lambda_{ei})^{4/7} / Z^{5/7}.$$

В этом случае, получая решения для базисных функций распределения в виде

$$\psi^A = 3\nu_1 S_A / (k^2 v^2 - 3i\omega\nu_1),$$

приходим к следующим выражениям для их моментов:

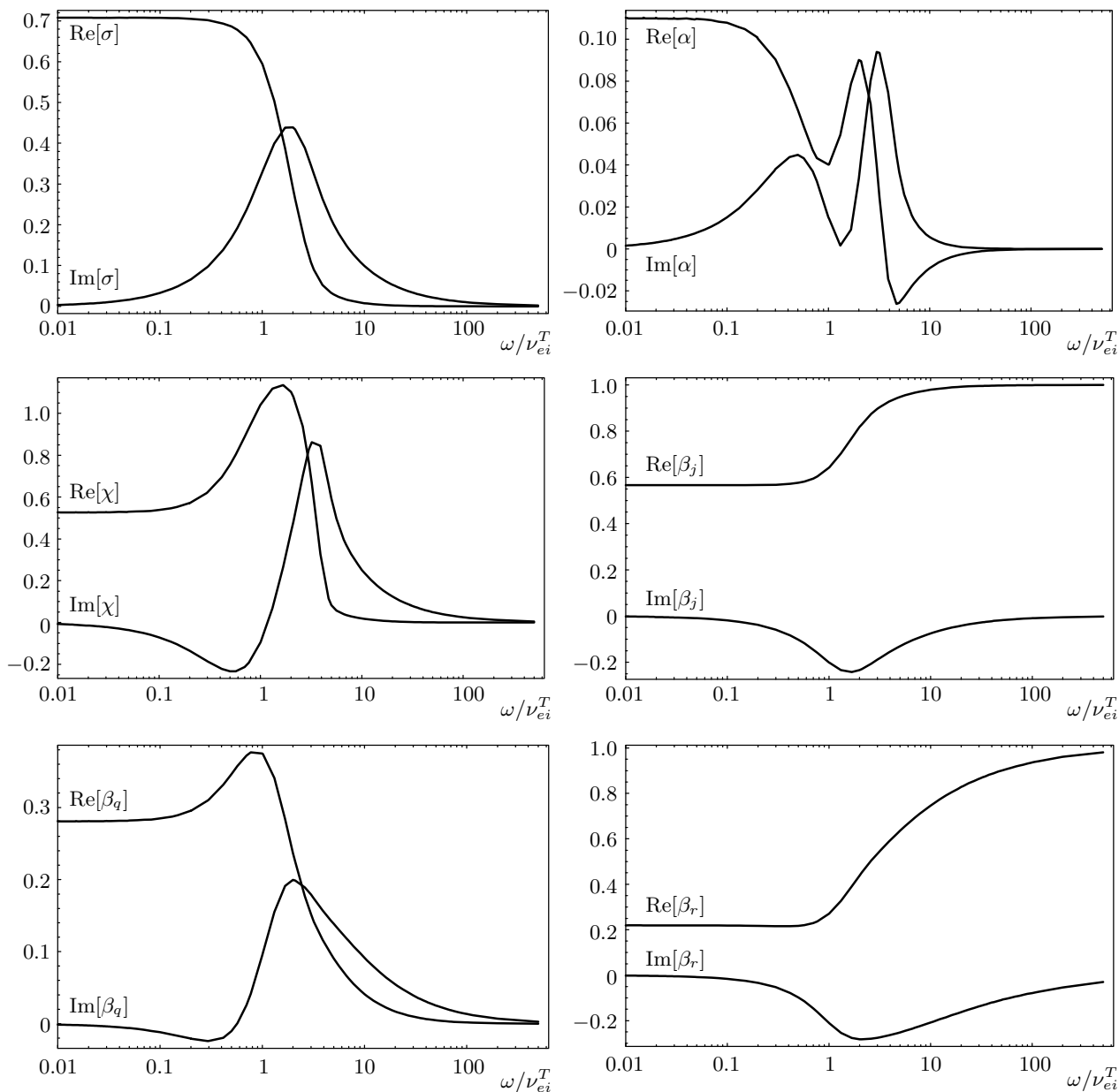


Рис. 2. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициентов переноса,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  и  $\beta_{j,q,r}$ , от  $\omega/\nu_{ei}^T$  для  $k\lambda_{ei} = 1$

$$\begin{aligned}
 J_N^N &= \frac{3}{kv_{Te}} \int_0^\infty dx W(x), & J_R^N &= \frac{3\nu_{ei}^T}{kv_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{dx W(x)}{x\nu_1(x)}, \\
 J_N^T &= \frac{1}{kv_{Te}} \int_0^\infty dx (x^2 - 3)W(x), & J_R^T &= \frac{\nu_{ei}^T}{kv_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{dx W(x)(x^2 - 3)}{x\nu_1(x)}, \\
 J_T^T &= \frac{1}{3kv_{Te}} \int_0^\infty dx (x^2 - 3)^2 W(x), & J_R^R &= \frac{3\pi(\nu_{ei}^T)^2}{2kv_{Te}} \int_0^\infty \frac{dx W(x)}{x^2\nu_1^2(x)},
 \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$W(x) = \frac{\sqrt{2/\pi} k v_{Te} \exp(-x^2/2)}{k^2 v_{Te}^2 / \nu_1(x) - 3i\omega/x^2},$$

через которые легко вычисляются все коэффициенты переноса (32).

В бесстолкновительном кинетическом пределе,  $k\lambda_{ei} \gg 1$ , имеем  $\beta_j, \beta_r = 1$ ,  $\beta_q = 0$ , а другие коэффициенты зависят от параметра  $p = \omega/kv_{Te}$  и могут быть получены с использованием в (37) в качестве эффективной частоты  $\nu_1 = kv_{Te}h_1$ , где  $h_{l-1} = -ip + x^2 l^2 / (4l^2 - 1)h_l$  (ср. уравнение (20)). При этом для  $h_1$  может быть предложена простая приближенная формула

$$h_1(x, p) = i(\pi(p - \sqrt{p^2 - x^2})/6 - p), \quad (38)$$

которая с точностью примерно до 1% совпадает с точным решением. Подставляя вычисленные таким образом выражения (37) в уравнения (32), мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^2 n_e v_{Te}}{kT_e} \times \\ &\times \left( \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty \left( \frac{x^4}{3} - 2x^2 + 3 \right) W(x) dx + ip \right), \\ \alpha &= \frac{en_e v_{Te}}{kT_e} \left( \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty \left( x^2 - \frac{x^4}{3} \right) W(x) dx - ip \right), \\ \chi &= \frac{n_e v_{Te}}{k} \left( \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty \frac{x^4}{3} W(x) dx + i\frac{5}{2}p \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где использовано следующее обозначение:

$$\Delta = \int x^4 W(x) dx \int W(x) dx - \left( \int x^2 W(x) dx \right)^2.$$

Отметим, что выражения для бесстолкновительных коэффициентов переноса в отличном от (39) представлении, были получены в работе [18] с использованием в явном виде суммирования бесконечного ряда. Вместе с тем в бесстолкновительном случае коэффициенты переноса могут быть получены абсолютно точно (без использования бесконечного суммирования в функции  $h_1$  или ее аппроксимации (38)) с помощью решения начальной задачи (6) для бесстолкновительного кинетического уравнения. Это следует из соответствующих бесстолкновительных выражений для моментов  $J_A^B$ :

$$\begin{aligned} J_N^N &= \frac{i}{\omega} J_+(p), \quad J_N^T = \frac{i}{3\omega} ((p^2 - 1)J_+(p) - p^2), \\ J_T^T &= \frac{i}{9\omega} ((p^4 - 2p^2 + 5)J_+(p) - p^4 + p^2), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$J_+(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{i\infty}^x dt \exp\frac{t^2}{2}$$

— стандартная дисперсионная функция, возникающая в бесстолкновительной теории плазмы [1]. Поведение бесстолкновительных коэффициентов переноса как функций  $\omega/kv_{Te}$  представлено на рис. 3. Эти коэффициенты отвечают результату работы [20]. В квазистатическом бесстолкновительном пределе из (40) воспроизводим результат [16, 19]

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{5}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^2 n_e v_{Te}}{kT_e}, \quad \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{en_e v_{Te}}{kT_e}, \\ \chi &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{n_e v_{Te}}{k}, \end{aligned} \quad (41)$$

отвечающий свободному (кнудсеновскому) квазистационарному переносу.

Выражение для теплового потока часто записывается через градиент температуры и электрический ток [14]. В соответствии с этим, исключая электрическое поле из уравнений (30), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\frac{\alpha T_e}{\sigma} \mathbf{j} - \kappa i \mathbf{k} \delta T_e - n_e T_e \beta u_i, \\ \kappa &= \chi - \frac{\alpha^2 T_e}{\sigma}, \quad \beta = \beta_q - \frac{e\alpha}{\sigma} \beta_j, \end{aligned} \quad (42)$$

где введен коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и коэффициент ионного конвективного переноса  $\beta$ . Их зависимости от  $\omega$  иллюстрируются рис. 4 для двух разных параметров столкновительности. Формулы (42) для  $j = 0$  (бестоковая плазма) имеют прямое отношение к описанию переноса в плазме ЛТС. На примере коэффициента теплопроводности в задаче о релаксации тепла в работе [17] было показано, что эффекты нестационарности имеют важное значение при  $k\lambda_{ei} \gtrsim 0.1$ . Для таких масштабов неоднородности квазистационарный подход, который в основном развивался до сих пор [9, 11, 12, 15, 16], оказывается неприменимым. Развита выше теория устраняет это ограничение. Предложенные нами уравнения нелокальной гидродинамики с нестационарными коэффициентами переноса позволяют описать плазму для любых пространственных и временных масштабов возмущений.

#### 4. ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ

Поскольку гидродинамические уравнения (28) эквивалентны кинетическому описанию и полно-

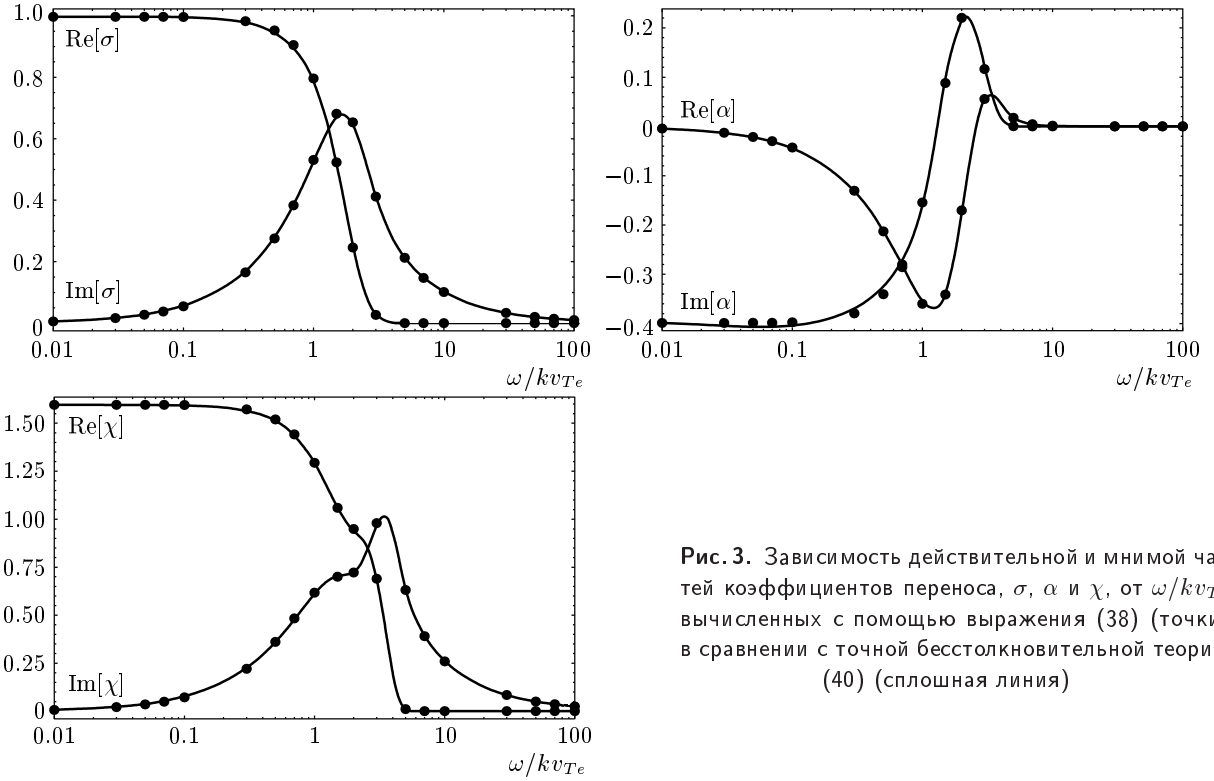


Рис. 3. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициентов переноса,  $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\chi$ , от  $\omega/kv_{Te}$ , вычисленных с помощью выражения (38) (точки), в сравнении с точной бесстолкновительной теорией (40) (сплошная линия)

стью определяют линейный отклик плазмы на малые возмущения во всей области параметров  $(\omega, k)$ , эти уравнения можно использовать для получения продольной диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon(\omega, k)$ . Для вычисления диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = 1 + 4\pi i \frac{j}{\omega E} \quad (43)$$

исключаем из выражения для электрического тока возмущения плотности и температуры электронов, разрешив систему (28):

$$j = \left[ 1 - i\omega \left( \frac{e^2 n_e}{k^2 T_e \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)^2}{\sigma^2(2k^2 \kappa - 3i\omega n_e)} \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ -\frac{ie^2 n_e}{k^2 T_e} \omega E + \right. \\ \left. + en_e u_i \left[ 1 - i\omega \left( \frac{e^2 n_e \beta_j}{k^2 T_e \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)(1 - \beta)}{\sigma(2k^2 \kappa - 3i\omega n_e)} \right) \right] \right\} \equiv \\ \equiv -\frac{ie^2 n_e}{k^2 T_e} \omega(1 + i\omega J_N^N) E + en_e u_i (1 + i\omega J_N^R). \quad (44)$$

Остановимся сначала на исследовании чисто электронной плазмы в пределе неподвижных (бесконечно тяжелых) ионов, когда  $u_i = 0$ .

### А. Электронная диэлектрическая проницаемость

Будем характеризовать парциальный вклад  $\delta\epsilon_e$  электронов в диэлектрическую проницаемость ( $\epsilon = 1 + \delta\epsilon_e$ ) величиной  $\delta\epsilon \equiv k^2 \lambda_{De}^2 \delta\epsilon_e$ , где  $\lambda_{De}$  — дебаевский радиус электронов. Из соотношения (44) для нее получаем следующее выражение:

$$\delta\epsilon = \left[ 1 - i\omega \left( \frac{e^2 n_e}{k^2 T_e \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)^2}{\sigma^2(2k^2 \kappa - 3i\omega n_e)} \right) \right]^{-1} \equiv \\ \equiv 1 + i\omega J_N^N, \quad (45)$$

позволяющее установить вклад всех коэффициентов переноса и фактически определяющееся единственным моментом  $J_N^N$ .

В классическом гидродинамическом пределе,  $k\lambda_{ei} < 0.06/\sqrt{Z}$ ,  $0.1\omega/\nu_{ei}^T$ , аналитическое выражение для  $\delta\epsilon$  получается подстановкой уравнений (34) в выражение (45). В пределе низких частот,  $\omega \ll \nu_{ei}^T$ , это приводит к выражению

$$\delta\epsilon = \frac{2x(8x - 3i\omega)}{16x^2 - 6\omega^2 - 47i\omega x}, \quad x = \frac{32k^2 v_{Te}^2}{3\pi \nu_{ei}^T}. \quad (46)$$

В пределе  $\omega \gg x$  электронная восприимчивость определяется классической электропроводностью,  $\delta\epsilon_e = 4\pi i \sigma_{SH}/\omega$ . В противоположном случае,

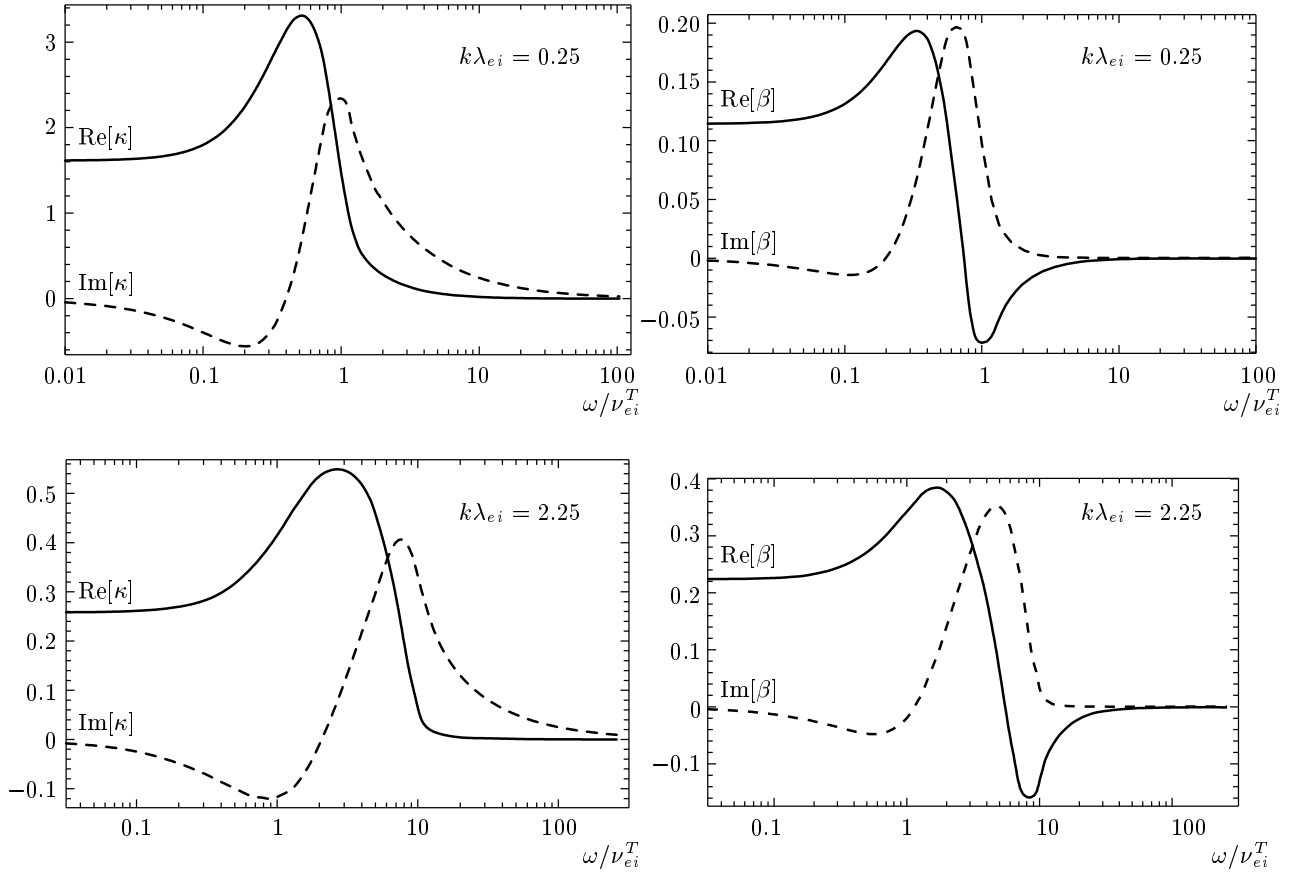


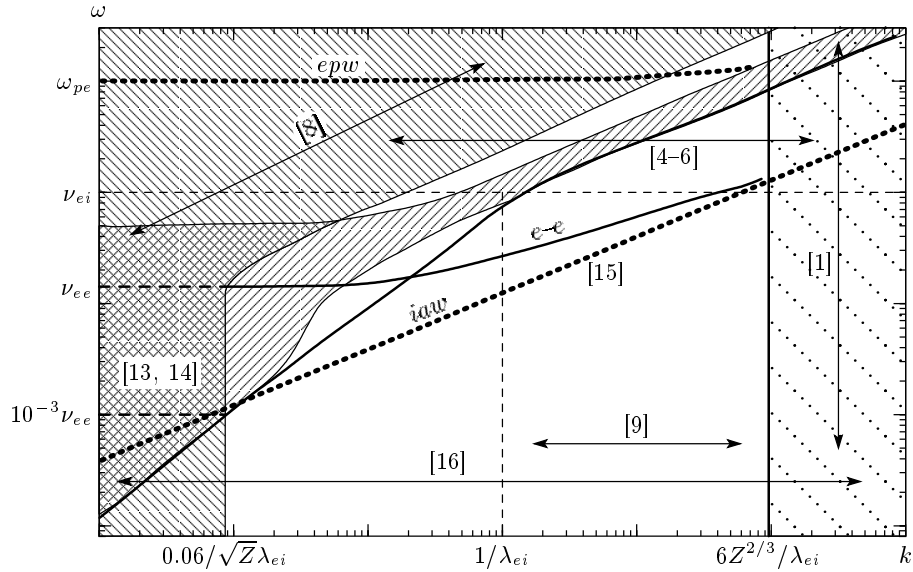
Рис. 4. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициентов переноса,  $\kappa$  и  $\beta$ , от  $\omega/\nu_{ei}^T$  для  $k\lambda_{ei} = 0.25$  и  $k\lambda_{ei} = 2.25$

$\omega \ll x$ , коэффициенты переноса не существенны для описания статической диэлектрической проницаемости, которая отвечает дебаевской экранировке,  $\text{Re} \epsilon = 1 + 1/k^2 \lambda_{De}^2$ , они лишь определяют малую мнимую добавку  $\text{Im} \epsilon = 41\omega/16x$ , вклад в которую от коэффициентов  $\sigma, \alpha, \chi$  сопоставим. Дисперсионное соотношение  $\epsilon = 0$  для  $k\lambda_{De} \ll 1$  дает классическую энтропийную моду  $\omega = 2ik^2 \kappa_{SH}/3n_e$  с коэффициентом теплопроводности, определяемым соотношением (42),  $\kappa_{SH} = 128n_e \nu_{Te} \lambda_{ei}/3\pi$  [13, 14]. Для быстрых процессов,  $\omega \gg \nu_{ei}^T$ , диэлектрическая проницаемость определяется высокочастотной электрической проводимостью и описывается хорошо известным выражением  $\epsilon = 1 - (\omega_{pe}^2/\omega^2) (1 - i\nu_{ei}^T/\omega)$  [7].

На рис. 5 приведена параметрическая плоскость  $(k, \omega)$ , разбитая на области, отвечающие различным приближениям для описания диэлектрической проницаемости от классического гидродинамического предела (штриховка влево) до бесстолкновительного кинетического предела (область, помеченная точ-

ками). Область между тонкими сплошными линиями на рис. 5 (штриховка вправо) отвечает сильно затухающим возмущениям, в ней  $\text{Im} \epsilon > \text{Re} \epsilon$ . Под жирной сплошной немаркированной линией действительная часть диэлектрической проницаемости соответствует дебаевскому экранированию,  $\text{Re} \epsilon = 1 + 1/k^2 \lambda_{De}^2$ . Граница  $\omega(k)$ , обозначенная  $e-e$ , отделяет квазистационарный режим (33), где важны электрон-электронные столкновения, от нестационарного режима. Отметим, что при  $k\lambda_{ei} \ll 6Z^{2/3}$  и квазистатическом приближении достаточно использовать две угловые гармоники (диффузное приближение) для вычисления функции распределения электронов и, соответственно, всех коэффициентов переноса, а также диэлектрической проницаемости [9]. В этом пределе и при  $k\lambda_{ei} \gg 1/\sqrt{Z}$  для диэлектрической проницаемости приближенное выражение [9]

$$\delta\epsilon = 1 + i \frac{\omega}{k\nu_{Te}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2.17 \frac{Z^{2/\tau}}{(k\lambda_{ei})^{3/\tau}} \right\}, \quad (47)$$



**Рис. 5.** Параметрическая  $(k, \omega)$  плоскость для продольной диэлектрической проницаемости плазмы. Точками схематически показаны спектры, отвечающие ленгмюровским ( $epw$ ) и ионно-звуковым волнам ( $iaw$ ). В квадратных скобках даны ссылки на цитируемую литературу

хорошо совпадает с точным решением. Проведенный нами анализ показывает, что, в действительности, область применимости соотношения (47) оказывается несколько уже,  $k\lambda_{ei} > 1$ .

В области частот, где можно пренебречь электрон-электронными столкновениями, из (37) мы восстанавливаем диэлектрическую проницаемость, полученную в работах [4–6], которая в бесстолкновительном кинетическом пределе  $\nu_{ei} \rightarrow 0$  дает известное выражение

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 - J_+ \left( \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) \right]. \quad (48)$$

Полученное общее выражение для диэлектрической проницаемости пригодно для описания плазмы во всей области  $k$  и  $\omega$  и для любой столкновительности плазмы. До сих пор для описания вклада столкновений в диэлектрическую проницаемость плазмы наиболее широко привлекаются результаты, основанные на использовании упрощенного интеграла столкновений Батнагара–Гросса–Крука (БГК). Развитая теория дает возможность определить точность данного приближения. Наилучшее согласие дает выражение, предложенное в работе [3]:

$$\delta\epsilon^C = \frac{1 - J_+(y)}{1 - iJ_+(y)/y k \lambda_{ei}}, \quad y = \frac{\omega + i\nu_{ei}^T}{kv_{Te}}. \quad (49)$$

Однако, несмотря на качественно верное поведение в целом, это выражение заметно отличается от точного результата для  $k\lambda_{ei} < 1$  в широкой области частот (см. рис. 6a). С ростом  $k\lambda_{ei}$  согласие улучшается, но, как видно на рис. 6б, в области параметров  $\omega \sim \nu_{ei}$  все еще сохраняется отличие эмпирической формулы (49) от точного решения в 2–3 раза.

### В. Вклад ионов в диэлектрическую проницаемость

Согласно определению (43) исключение ионной скорости из выражения (44) позволяет получить вклад ионов в диэлектрическую проницаемость плазмы. Строго говоря, при этом необходимо полное кинетическое описание ионной компоненты. Однако, как показано в работе [25], для описания достаточно быстрых возмущений,  $\omega \gg kv_{Ti}$ , где  $v_{Ti}$  — ионная тепловая скорость, можно воспользоваться гидродинамическими уравнениями для ионов, в которых ионная вязкость и теплопроводность учитываются с помощью 21-моментного приближения метода Грета, что позволяет записать законы сохранения для ионов (8), (9), (12) в виде

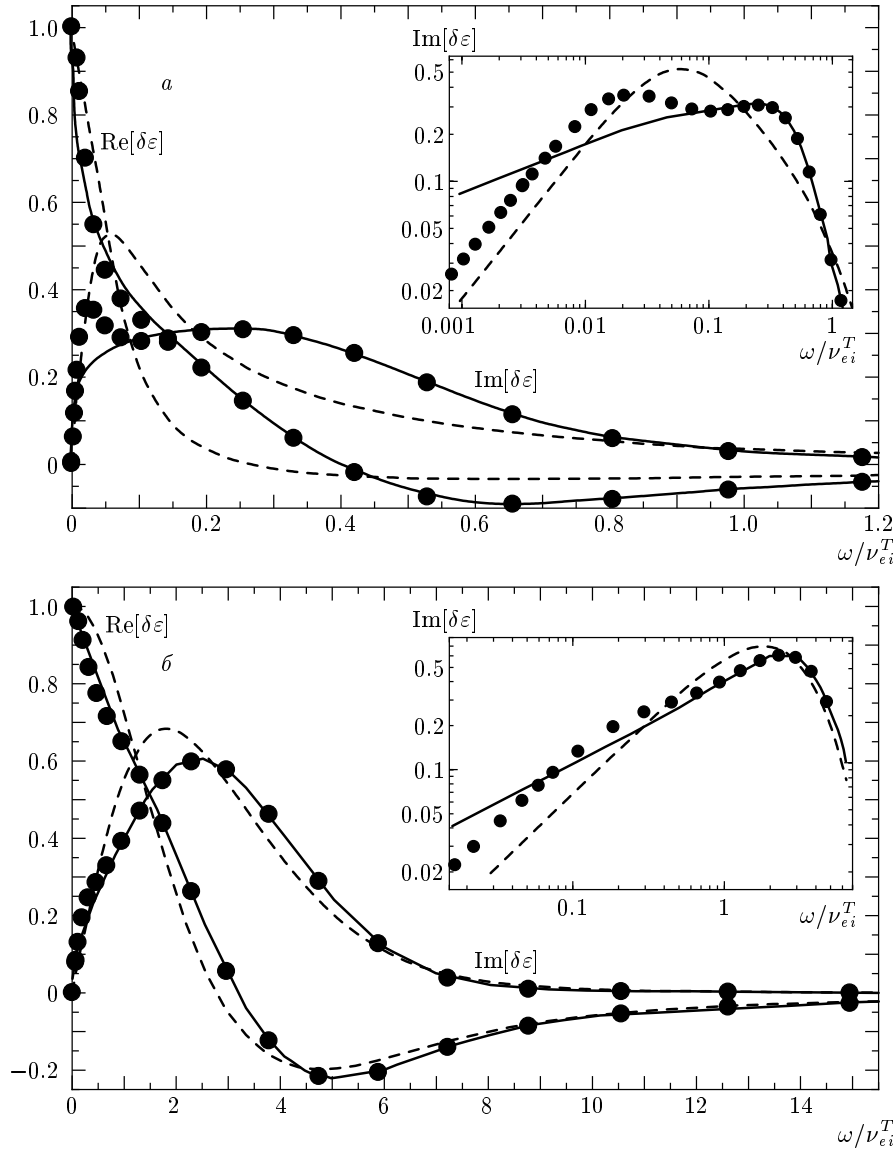


Рис. 6. Зависимость реальной и мнимой частей  $\delta\epsilon(\omega, k)$  (45) (точки) от  $\omega/\nu_{ei}^T$  для  $k\lambda_{ei} = 0.25$  (а) и  $k\lambda_{ei} = 2.25$  (б) в сравнении с теорией без электрон-электронных столкновений (сплошная линия) [4] и с БГК-моделью (49) (штрихи) [3]

$$\begin{aligned}
 -i\omega u_i &= \frac{eZ}{m_i} E - ikv_{Ti}^2 \left( \frac{\delta n_i}{n_i} + \frac{\delta T_i}{T_i} \right) - \\
 -\frac{4}{3} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} \hat{\eta}_i u_i + \frac{1}{n_i m_i} \mathcal{R}_{ie} - \nu_{ei}^T u_i, & \quad (50) \\
 -i\omega \delta T_i &= -\frac{2}{3} i k u_i T_i - \frac{2}{3 n_i} k^2 \kappa_i \delta T_i, \\
 -i\omega \delta n_i + i k u_i n_i &= 0.
 \end{aligned}$$

При этом вклад столкновений в закон сохранения импульса (12) описывается уравнением (18), продольная составляющая тензора напряжений представлена через ионную вязкость,

$$\Pi_{||}^i = ik4n_i T_i \hat{\eta}_i u_i / 3\nu_i \quad [25]:$$

$$\hat{\eta}_i = \frac{i\nu_i(\omega + 1.46i\nu_i)}{(\omega + 1.20i\nu_i)(\omega + 1.46i\nu_i) + 0.23\nu_i^2}, \quad (51)$$

обмен энергии вследствие  $e-i$ -столкновений в законе сохранения энергии (9) считается пренебрежимо малым, а выражение для ионного теплового потока  $q_i = -ik\kappa_i$  определяется теплопроводностью [25]

$$\kappa_i = \frac{5}{2} \frac{n_i v_{Ti}^2}{\nu_i} \frac{i(\omega + 1.29i\nu_i)}{(\omega + 0.8i\nu_i)(\omega + 1.29i\nu_i) + 0.21\nu_i^2}. \quad (52)$$

Здесь стандартным образом введена частота ион-ионных столкновений  $\nu_i = 4\sqrt{\pi}e_i^4 n_i \Lambda / 3T_i^{3/2} \sqrt{m_i}$ .

Использование соотношений (50)–(52) позволяет записать полную диэлектрическую проницаемость плазмы в виде

$$\epsilon = 1 + \frac{1 + i\omega J_N^N}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{c_s^2}{\lambda_{De}^2} \frac{(1 + i\omega J_N^R)^2}{\Delta}, \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = & \omega^2 + i\omega\nu_{ei}^T + \\ & + i\omega k^2 c_s^2 \left( J_R^R + \frac{(2\pi)^{3/2}}{n_e k^2 \lambda_{ei}} \int_0^\infty dv v \frac{\nu_{ei}}{\nu_1} f_M^e \right) - \\ & - k^2 \nu_{Ti}^2 \left( \frac{4i\omega \hat{\eta}_i}{3\nu_i} - \frac{5n_i \omega + 2ik^2 \kappa_i}{3n_i \omega + 2ik^2 \kappa_i} \right). \quad (54) \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (53) определяют полную продольную диэлектрическую проницаемость плазмы в условиях пренебрежимо малого затухания Ландау на ионах,  $\omega \gg kv_{Ti}$ .

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше с помощью кинетического подхода были сформулированы уравнения нелокального переноса для малых возмущений в общем случае произвольных соотношений между характерными пространственными и временными масштабами неоднородности плазмы и столкновений частиц. Тем самым полученные квазигидродинамические уравнения фактически заменяют описание плазмы с помощью кинетического уравнения, последовательно учитывая кинетические эффекты переноса в условиях как пространственной, так и временной нелокальности. Соответствующие нестационарные и нелокальные коэффициенты переноса в фурье-представлении детально исследованы во всей  $(\omega, k)$ -области с наглядной графической иллюстрацией. Развитая теория обобщает ранее представленные частные модели переноса на случай произвольных  $(\omega, k)$  и описывает все предельные переходы к известным результатам.

Предложен удобный алгоритм вычисления продольной диэлектрической проницаемости плазмы для произвольных значений частоты и волнового числа. Полученная диэлектрическая проницаемость описывает плавный переход от гидродинамической области сильных столкновений до бесстолкновительной кинетической области и от статического до высокочастотного пределов. На основе развитой теории, например, открывается возможность исследовать отклик плазмы в такой промежуточной области волновых чисел и частот, когда они оказываются

соответственно, порядка обратной длины свободного пробега и частоты столкновений электронов. Именно для таких параметров количественное описание отклика плазмы особенно затруднено.

Нахождение диэлектрической проницаемости плазмы основано на использовании приближения Ландау для интеграла столкновений, хотя, строго говоря, его более точное выражение Балеску–Ленарда [26, 27], учитывающее эффект динамической поляризации плазмы, само зависит от диэлектрической проницаемости. В условиях, когда такой эффект существен, решение задачи усложняется. Это усложнение связано с учетом вклада взаимодействия частиц с плазменными колебаниями. Поскольку фазовая скорость электронных ленгмюровских колебаний велика по сравнению с тепловой скоростью электронов, число частиц, взаимодействующих с плазменными волнами, относительно мало и эффект динамической поляризации плазмы не оказывает заметного влияния на столкновения. В случае взаимодействия с медленными ионно-звуковыми волнами этот эффект может оказаться существенным [28]. Соответствующая добавка к интегралу столкновений Ландау наиболее существенна для электрон-электронного интеграла столкновений и становится доминирующей при сильной неизотермичности плазмы, когда  $ZT_e/T_i > \Lambda_{ee} \ln(Z^2 m_i T_e^3 / m_e T_i^3)$ , т. е. при  $ZT_e/T_i > 10^3$  [28]. Таким образом, развитая здесь теория применима, если  $ZT_e/T_i < 10^3$ .

Развитие нелокальной гидродинамики особенно важно для описания теплового переноса, играющего первостепенное значение в проблеме ЛТС, и, в частности, для интерпретации и моделирования экспериментов с лазерной плазмой. Известно, что традиционные гидродинамические коды с тепловым потоком, описываемым на основе классической теории или ее простых эвристических модификациях, плохо объясняют экспериментальные данные, в то время как модели с нелокальным переносом дают гораздо лучшее совпадение с экспериментом [29]. Это позволяет надеяться, что представленная нестационарная теория переноса обладает хорошим потенциалом для практического использования в проблеме ЛТС. При этом особое место должно занимать изучение переноса при мелкомасштабных неоднородностях плазмы. С этим непосредственно связана задача о переносе энергии в спеклованном лазерном пучке, который используется для достижения более однородного облучения термоядерной мишени на основе использования ряда механизмов сглаживания лазерного излучения. При этом уже продемонстриро-



вано, что описание релаксации температуры в мелкомасштабных ( $L \sim \lambda_{ei}$ ) горячих лазерных пятнах требует учета эффектов нестационарности коэффициентов переноса [17]. Эти эффекты важны и для описания быстрого нагрева горячей лазерной плазмы, включая нагрев скин-слоя плазмы с резкой границей (последнее характерно для взаимодействия коротких лазерных импульсов с твердотельными мишенями).

Непосредственное применение нелокальных нестационарных коэффициентов переноса для малых возмущений может связываться с разработкой теории неустойчивостей лазерной плазмы. Важность учета нелокальности переноса в квазистационарном пределе для филаментационной неустойчивости и неустойчивости Мандельштама–Бриллюэна была продемонстрирована в работах [30, 31]. Разработанный нами подход открывает перспективу разработки подобной теории для сильно нестационарной лазерной плазмы. Еще одним важным направлением применения диэлектрической проницаемости являются расчеты сечения томсоновского рассеяния [32], широко используемого для диагностики плазмы [29].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16428) и Совета по естественно-научным и техническим исследованиям (NSERC) Канады.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988), с. 85.
2. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), с. 217.
3. M. Opher, G. J. Morales, and J. N. Leboeuf, *Phys. Rev. E* **66**, 016407 (2002).
4. В. Ю. Быченко, *Физика плазмы* **24**, 862 (1998).
5. R. A. Koch and W. Horton, Jr., *Phys. Fluids* **18**, 861 (1975).
6. J. R. Penafo, G. J. Morales, and J. E. Maggs, *Phys. Plasmas* **4**, 555 (1997).
7. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред*, Госатомиздат, Москва (1961), с. 110.
8. I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, and M. P. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, Reading (1966).
9. В. П. Силин, *УФН* **172**, 1021 (2002).
10. A. R. Bell, *Phys. Fluids* **26**, 279 (1983).
11. J. F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1664 (1983).
12. J. R. Albritton, E. A. Williams, I. B. Bernstein, and K. P. Swartz, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1887 (1986).
13. L. Spitzer and R. Härm, *Phys. Rev.* **89**, 977 (1953).
14. С. И. Брагинский, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, Атомиздат, Москва (1963), т. 1, с. 183.
15. E. M. Epperlein, *Phys. Plasmas* **1**, 109 (1994).
16. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. T. Tikhonchuk, and A. V. Brantov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4405 (1995); А. В. Брантов, В. Ю. Быченко, В. Т. Тихончук, В. Розмус, *ЖЭТФ* **110**, 1301 (1996); В. Ю. Быченко, В. Н. Новиков, В. Т. Тихончук, *ЖЭТФ* **114**, 1691 (1998).
17. S. Brunner, E. Valeo, and J. A. Krommes, *Phys. Plasmas* **7**, 2810 (2000).
18. A. Bendib, G. Matthieussent, and F. Bouzid, *Phys. Plasmas* **9**, 35 (2002).
19. G. W. Hammett and F. W. Perkins, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3019 (1990); G. W. Hammett, W. Dorland, and F. W. Perkins, *Phys. Fluids B* **4**, 2052 (1992).
20. Z. Chang and J. D. Callen, *Phys. Fluids B* **4**, 1167 (1992).
21. N. Mattor and S. E. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3419 (1997).
22. R. D. Hazeltine, *Phys. Plasmas* **5**, 3282 (1998).
23. V. Yu. Bychenkov, V. T. Tikhonchuk, and W. Rozmus, *Phys. Plasmas* **4**, 4205 (1997).
24. J. F. Myatt, W. Rozmus, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. E* **52**, 6759 (1995).
25. V. Yu. Bychenkov, J. Myatt, W. Rozmus, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Plasmas* **1**, 2419 (1994).
26. R. Balesku, *Phys. Fluids* **3**, 52 (1960).
27. A. Lenard, *Ann. Phys.* **3**, 90 (1960).
28. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971), с. 240.
29. G. Gregory, S. H. Glenzer, J. Knight et. al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 205006 (2004).
30. E. M. Epperlein, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2145 (1990).
31. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, A. V. Brantov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Plasmas* **7**, 1511 (2000).
32. J. F. Myatt, W. Rozmus, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. E* **57**, 3383 (1998).