ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 3 (9), стр. 542–548

РЕНОРМАЛОНЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА β-ФУНКЦИИ

И. М. Суслов[*]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2004 г.

Показано, что существование или отсутствие ренормалонных сингулярностей в борелевской плоскости определяется аналитическими свойствами функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$ и некоторых других функций. Конструктивный критерий отсутствия сингулярностей состоит в «правильном» поведении β-функции и ее борелевского образа $B(z)$ на бесконечности, $\beta(g) \propto g^\alpha$, $B(z) \propto z^\alpha$ с $\alpha \le 1$. Этот критерий, по-видимому, выполнен для теории φ^4, квантовой электродинамики и квантовой хромодинамики, но нарушается в $O(n)$-симметричной сигма-модели с $n \to \infty$.

PACS: 11.10.-z, 11.10.Hi, 11.10.Jj

1. Более двадцати лет назад Липатовым [1] предложен метод вычисления высоких порядков теории возмущений, согласно которому они определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Метод оказался применимым к широкому кругу задач [2, 3], но вскоре был подвергнут сомнению в связи с обнаружением факториально больших вкладов отдельных диаграмм — ренормалонов [4], которые, по мнению 'т Хофта [5], не содержатся в инстантонном вкладе. С формальной точки зрения асимптотика теории возмущений определяется особой точкой в борелевской плоскости, ближайшей к началу координат. Если наличие инстантонных особенностей не вызывает сомнений, то существование сингулярностей ренормалонного происхождения никогда не было доказано, что признается самыми активными сторонниками этого направления [6]: такие сингулярности легко получаются при суммировании отдельных последовательностей диаграмм, но невозможно убедиться в их сохранении при учете всех диаграмм. В работе [7] предложено доказательство отсутствия ренормалонных сингулярностей в теории φ^4, что ставит под сомнение концепцию ренормалонов в целом; однако аналогичные доказательства для других теорий поля отсутствуют. Предлагаемый ниже анализ проясняет ситуацию с ренормалонными сингулярностями в произвольной теории поля: в общем случае

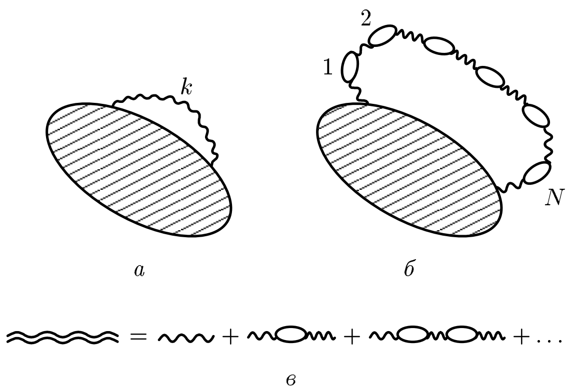

Рис. 1

их существование или отсутствие определяется аналитическими свойствами функции Гелл-Манна–Лоу и некоторых других функций.

Простейший класс ренормалонных диаграмм возникает в квантовой электродинамике в результате выделения в произвольной диаграмме внутренней фотонной линии (рис. 1*а*) и вставки в нее цепочек электронных петель (рис. 1*б*). В исходной диаграмме выделенной фотонной линии с импульсом k соответствовало интегрирование $\int d^4k\, k^{-2n}$ по области больших импульсов ($n = 3, 4\ldots$). При вставке в фотонную линию N электронных петель под интегралом возникает дополнительный множитель $\ln^N(k^2/m^2)$ (m — масса электрона), что после интегрирования дает величину порядка $N!$.

[*]E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Произвольные вставки в фотонную линию приводят к замене константы взаимодействия g_0 на бегущую константу связи $g(k^2)$ (рис. 1*в*) и возникновению интеграла $\int d^4k\, k^{-2n} g(k^2)$. Суммирование цепочек петель соответствует использованию для функции Гелл-Манна–Лоу однопетлевого приближения $\beta(g) = \beta_2 g^2$ и дает известный результат

$$g(k^2) = \frac{g_0}{1 - \beta_2 g_0 \ln(k^2/m^2)}. \qquad (1)$$

После интегрирования по области $k^2 \gtrsim m^2$ имеем

$$\int d^4k\, k^{-2n} g(k^2) = \\ = g_0 \sum_N \int d^4k\, k^{-2n} \left(\beta_2 g_0 \ln \frac{k^2}{m^2}\right)^N \sim \\ \sim g_0 \sum_N N! \left(\frac{\beta_2}{n-2}\right)^N g_0^N, \qquad (2)$$

что после суммирования по Борелю дает ренормалонные сингулярности в точках[1)]

$$z_n = \frac{n-2}{\beta_2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots \qquad (3)$$

борелевской плоскости z.

Проведенный ниже анализ основан на том, что при известной β-функции не представляет проблемы просуммировать весь класс диаграмм, получаемый всевозможными вставками в фотонную линию: для этого достаточно решить уравнение Гелл-Манна–Лоу

$$\frac{dg}{d\ln k^2} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \ldots \qquad (4)$$

с начальным условием $g(k^2) = g_0$ при $k^2 = m^2$ и исследовать разложение по g_0 для интеграла типа (2). Исследование более сложных классов ренормалонных диаграмм возможно путем использования общего уравнения ренормгруппы в форме Каллана–Симанчика.

2. В качестве иллюстрации рассмотрим модельную β-функцию

$$\beta(g) = \frac{\beta_2 g^2}{1 + g^2}, \qquad (5)$$

для которой уравнение (4) легко решается:

$$g(k^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_0} - g_0 - x\right) + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{g_0} - g_0 - x\right)^2 + 1}, \qquad (6)$$

где $x = \beta_2 \ln(k^2/m^2)$. Правая часть регулярна в точке $g_0 = 0$ и может быть разложена в ряд по степеням g_0. Структура ряда имеет вид

$$g = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left\{\frac{g_0}{r(x)}\right\}^N, \qquad (7)$$

где $r(x)$ — радиус сходимости, а коэффициенты A_N зависят от N степенным образом. Радиус сходимости определяется расстоянием до особенности, ближайшей к началу координат. Особые точки g_c правой части выражения (6) соответствуют нулям подкоренного выражения и определяются уравнением

$$g_c^2 + (x + 2i) g_c - 1 = 0 \qquad (8)$$

и комплексно-сопряженным ему. При больших x минимальный по модулю корень имеет величину $g_c \approx 1/x$ и ряд (7) принимает вид

$$g(k^2) = \sum_{N=1}^{\infty} A_N (g_0 x)^N = \\ = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \left(\beta_2 \ln \frac{k^2}{m^2}\right)^N g_0^N, \qquad (9)$$

что после подстановки в интеграл (2) дает сингулярности в точках (3) (при больших N интеграл определяется большими k, которым соответствуют большие x). Тем самым подтверждается аргументация Паризи [8] о возможности существования ренормалонных сингулярностей во внутренне непротиворечивых теориях.

3. Общая картина определяется судьбой полюса Ландау в однопетлевом результате (1). Этот полюс может оставаться на действительной оси, сдвигаться в комплексную плоскость или уходить на бесконечность. Правая часть соотношения (1) как функция g_0 меняется на характерном масштабе $(\ln(k^2/m^2))^{-1}$; это свойство не меняется при учете высших петель, так как при малых g_0 результат (1) всегда верен. Если $g(k^2)$ как функция g_0 имеет особенности в конечной части комплексной плоскости, то характерный масштаб ее изменения естественно определяется расстоянием до ближайшей особой точки, которое тем самым оказывается порядка $(\ln(k^2/m^2))^{-1}$, порождая ряд типа (9) и

[1)] Аналогичные сингулярности с $n = 0, -1, -2, \ldots$ возникают от интегрирования по области малых импульсов («инфракрасные ренормалоны»).

ренормалонные сингулярности. Однако это не всегда так: например, для целых функций характерный масштаб изменения определяется другими причинами и указанный вывод перестает быть справедливым.

В общем случае решение уравнения Гелл-Манна–Лоу имеет вид

$$F(g) = F(g_0) + \ln \frac{k^2}{m^2}\,, \tag{10}$$

где

$$F(g) = \int \frac{dg}{\beta(g)}\,.$$

С учетом поведения функции $F(g)$ при малых g можно записать

$$F(g) = -\frac{1}{\beta_2 g} + f(g)\ , \quad \text{где} \quad \lim_{g\to 0} g f(g) = 0\,, \tag{11}$$

и, формально разрешая (10) относительно g, имеем

$$g(k^2) = F^{-1}\left\{-\frac{1}{\beta_2 g_0} + f(g_0) + \ln\frac{k^2}{m^2}\right\}. \tag{12}$$

Если функция $z = F(g)$ регулярна в точке g_0 и $F'(g_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки g_0 существует обратная функция $g = F^{-1}(z)$, которая также является регулярной. Поэтому особые точки функции $F^{-1}(z)$ суть $z_c = F(g_c)$, где всевозможные g_c определяются условием

$$F'(g_c) = 0 \quad \text{или} \quad F'(g_c) \quad \text{не существует}\,. \tag{13}$$

Особые точки по переменной g_0 в (12) определяются уравнением

$$z_c = -\frac{1}{\beta_2 g_0} + f(g_0) + \ln\frac{k^2}{m^2} \tag{14}$$

или

$$g_0 x - 1 = \beta_2 g_0 [z_c - f(g_0)]\,. \tag{15}$$

Если величина z_c конечна, то при больших x уравнение (15) имеет корень $g_0 \approx 1/x$, лежащий в области малых g_0, где правая часть уравнения (15) несущественна в силу (11); тем самым имеется особенность в точке $g_c \approx 1/x$, которая порождает ряд (9), приводящий к ренормалонным сингулярностям (3). Если же $z_c = \infty$, то уравнение (14) не имеет решений для $g_0 \sim 1/x$ и разложение типа (9) возможно лишь с коэффициентами A_N, убывающими быстрее любой экспоненты: ренормалонный вклад оказывается заведомо меньше инстантонного, а особенностей в борелевской плоскости не возникает. Решения с $g_0 \sim 1$ (возможные из-за сингулярностей функции $f(g_0)$) во всяком случае не связаны с ренормалонным механизмом: их вклад определяется рядом, в котором величина g_0^N не сопровождается множителем типа $(\ln(k^2/m^2))^N$. Резюмируя, приходим к следующему выводу. Ренормалонные сингулярности имеют место, если существует хотя бы одна точка g_c (включая $g_c = \infty$), для которой выполнено условие (13) и $z_c = F(g_c) < \infty$; в противном случае ренормалонных сингулярностей нет.

Осталось переформулировать результаты в терминах самой β-функции. Прежде всего заметим, что регулярный корень вида

$$\beta(g) \propto (g - g_c)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

не приводит к ренормалонам: при этом производная $F'(g_c)$ не существует, но $F(g_c) = \infty$; в частности, это верно для корня в точке $g = 0$. Степенное поведение на бесконечности, $\beta(g) \propto g^\alpha$, порождает ренормалоны только при $\alpha > 1$ (что в случае знакопостоянной функции $\beta(g)$ совпадает с условием существования полюса Ландау). Все прочие возможности выполнения условия (13) связаны с сингулярностями функции $\beta(g)$ в конечных точках g_c: для существования ренормалонов они должны быть достаточно сильными, так чтобы функция $1/\beta(g)$ была интегрируема в точке g_c (например, $\beta(g) \propto (g - g_c)^\gamma$ с $\gamma < 1$). Достаточным условием отсутствия ренормалонов является регулярность функции $\beta(g)$ при конечных g и степенное поведение $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha \leq 1$ на бесконечности; фактически при конечных g допустимы слабые особенности типа $\beta(g) \propto (g - g_c)^\gamma$ с $\gamma > 1$.

4. Если предположить, что все особые точки в борелевской плоскости имеют либо инстантонное, либо ренормалонное происхождение[2)], то можно сформулировать конструктивный критерий отсутствия ренормалонных сингулярностей.

Ряд теории возмущений для β-функции является факториально расходящимся [1–3], что связано с существованием разреза в комплексной плоскости g, исходящего из начала координат. Поэтому точка $g = 0$ является точкой ветвления, точка $g = \infty$, вообще говоря, тоже. Функция $\beta(g)$ представляется борелевским интегралом

[2)] Это предположение не является строго доказанным, но никто не предложил ему конструктивной альтернативы. Его можно мотивировать тем, что для конечномерных интегралов все особенности в борелевской плоскости связаны с экстремумами действия (аргументация 't Хофта в [5] является в этом случае необходимой и достаточной), тогда как ренормалонные сингулярности явным образом связаны с переходом к бесконечному числу интегрирований.

$$\beta(g) = \int_0^\infty dz e^{-z} B(gz) = g^{-1} \int_0^\infty dz e^{-z/g} B(z), \quad (16)$$

где $B(z)$ — борелевский образ функции $\beta(g)$. Предположим, что он имеет степенное поведение на бесконечности, $B(z) \propto z^\alpha$ (тогда $\beta(g) \propto g^\alpha$), и регулярен в области $|\arg z| < \pi/2 + \delta$, $\delta > 0$ (рис. 2*а*). Направляя контур интегрирования вдоль луча $z = |z| e^{i\phi_0}$, легко убедиться в сходимости интеграла (16) для $g = |g| e^{i\phi}$ с $|\phi - \phi_0| < \pi/2$. Ввиду возможности поворота контура на углы $|\phi_0| < \pi/2 + \delta$ получим регулярность функции $\beta(g)$ при $|\arg g| < \pi + \delta$ (рис. 2*б*), что означает отсутствие сингулярностей в конечных точках на физическом листе римановой поверхности. В этом случае поведение β-функции на бесконечности ($\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha \le 1$) дает условие отсутствия ренормалонных сингулярностей.

Полученный критерий может быть конструктивно использован следующим образом. Рассмотрим теорию φ^4 или квантовую электродинамику; тогда имеются инстантонные особенности, лежащие на отрицательной полуоси, и, возможно [5], ренормалонные сингулярности, лежащие на положительной полуоси (рис. 2*в*). Предположим, что ренормалонные сингулярности отсутствуют: тогда а) условие регулярности функции $\beta(g)$ при конечных g (рис. 2*а, б*) выполнено; б) асимптотика коэффициентов разложения β_N определяется ближайшей инстантонной особенностью и может быть найдена методом Липатова; в) борелевский интеграл хорошо определен, и ряд теории возмущений для функции $\beta(g)$ допускает однозначное суммирование, что позволяет определить ее поведение на бесконечности. Если рост β-функции оказывается более быстрым, чем g^α с $\alpha > 1$, то исходное предположение неверно и от противного доказано существование ренормалонных сингулярностей. Если же оказывается, что $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha \le 1$, то предположение об отсутствии ренормалонных сингулярностей является самосогласованным.

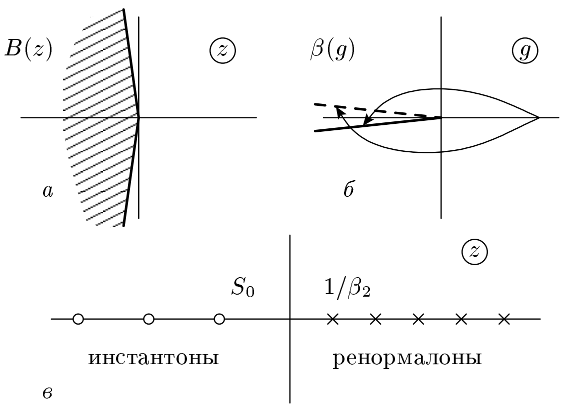

Рис. 2. Из аналитичности функции $B(z)$ при $|\arg z| < \pi/2 + \delta$ (*а*) следует аналитичность функции $\beta(g)$ при $|\arg g| < \pi + \delta$ (*б*), т. е. на всем физическом листе римановой поверхности; *в* — картина сингулярностей в борелевской плоскости для теории φ^4 и квантовой электродинамики, предложенная 'т Хофтом (S_0 — минимальное инстантонное действие, β_2 — первый исчезающий коэффициент разложения β-функции)

Намеченная программа была выполнена для указанных теорий в работах [9, 10] путем интерполяции асимптотики Липатова с известными значениями первых коэффициентов разложения и привела к результатам $\alpha = 0.96 \pm 0.01$ для теории φ^4 [9] и $\alpha = 1.0 \pm 0.1$ для квантовой электродинамики [10]. Тем самым (в пределах неопределенности результатов) самосогласованное исключение ренормалонных сингулярностей оказывается возможным. Более того, сопоставление с существующими аналитическими оценками указывает в обоих случаях на точное равенство $\alpha = 1$ [9, 10]. Так или иначе, β-функции в этих теориях являются знакопостоянными[3)], и условие отсутствия в них ренормалонных сингулярностей совпадает с условием их внутренней непротиворечивости.

В случае квантовой хромодинамики $\alpha = -12 \pm 3$ [11], а инстантонные особенности лежат на положительной полуоси. Предположение об отсутствии ренормалонных сингулярностей является самосогласованным для листа римановой поверхности, получаемого аналитическим продолжением с отрицательных g (при изменении знака g меняется знак аргумента борелевского образа и особенности переходят на отрицательную полуось); этого достаточно для обоснования использованной в [11] процедуры определения[4)] индекса α. Для установления связи с физическим листом требуется решение вопроса о правильной интерпретации борелевского интеграла при положительных g (его

[3)] Для теории φ^4 имеется в виду четырехмерный случай, в котором только и актуальна проблема ренормалонов.

[4)] Заметим, что асимптотика $\beta(g) \propto g^\alpha$ не гарантирует степенного поведения борелевского образа $B(z) \propto z^\alpha$ во всех направлениях в комплексной плоскости (например, $B(z) = \beta_2(1 - \cos z)$ для модельной β-функции (5)). В связи с этим подчеркнем, что в работах [9–11] индекс α определялся непосредственно по асимптотике борелевского образа, а предположение о ее степенном характере подвергалось специальному тестированию.

интерпретация в смысле главного значения не всегда правильна [12]).

Единственной теорией поля, в которой существование ренормалонных сингулярностей считается твердо установленной, является $O(n)$-симметричная сигма-модель в пределе $n \to \infty$ [6]. В этом случае однопетлевая β-функция оказывается точной и $\beta(g) \propto g^2$ при всех g: следовательно, $\alpha = 2$ и самосогласованное исключение ренормалонов оказывается невозможным. Однако в четырехмерном случае эта теория внутренне противоречива.

Любопытно, что, согласно сформулированному критерию, обрыв ряда для β-функции на любом конечном числе членов немедленно создает реномалонные сингулярности. Это демонстрирует невозможность решения проблемы ренормалонов в рамках петлевого разложения [13].

Заметим, что возможность существования ренормалонных сингулярностей делает функциональные интегралы плохо определенными. Классическое определение функционального интеграла через теорию возмущений является дефектным ввиду расходимости разложения в ряд по константе связи; для его конструктивного суммирования нужно знать аналитические свойства в борелевской плоскости, которые являются неопределенными, пока не установлено, существуют ли ренормалонные сингулярности. Можно сомневаться и в корректности определения функционального интеграла как многомерного интеграла на решетке: решеточная теория может принципиально отличаться от континуальной, так как ренормалонные вклады определяются областью сколь угодно больших импульсов. Возникает тупиковая ситуация: решение проблемы ренормалонов требует исследования функциональных интегралов, а последние плохо определены из-за нерешенности проблемы ренормалонов. Предлагаемая схема самосогласованного исключения ренормалонных сингулярностей является, по-видимому, единственным возможным выходом из положения. При этом континуальная теория по определению понимается как предел решеточных теорий.

5. В общем случае некоторый класс ренормалонных диаграмм выделяется условием, что новые вершины вставляются в один и тот же элемент (линию или вершину) исходной скелетной диаграммы. Такое определение позволяет проанализировать условия существования главного ренормалонного вклада: если новые вершины с равной вероятностью вставляются в m различных элементов, то соответствующий вклад имеет порядок $[(N/m)!]^m \sim N! m^{-N}$ и содержит лишнюю малость m^{-N}[5]. Рассмотренный выше интеграл (2) в случае электродинамики соответствует суммированию класса диаграмм, получаемых всевозможными вставками в одну фотонную линию. Аналогичный интеграл для теории φ^4 соответствует всевозможным петлевым вставкам к одной вершине, причем рассматривается область интегрирования, в которой все импульсы получаемой четыреххвостки имеют один и тот же порядок величины. В общем случае ренормалонный интеграл имеет вид

$$\int d^4 k\, k^{-2n} \Gamma(g_0, k)\,, \qquad (17)$$

где $\Gamma(g_0, k)$ — вершина с M внешними линиями, из которых M' линий несут большой импульс порядка k. Зависимость от k определяется уравнением Каллана–Симанчика

$$\left[-\frac{\partial}{\partial \ln k^2} + \beta(g_0)\frac{\partial}{\partial g_0} + \gamma(g_0)\right]\Gamma(g_0, k) = 0\,, \qquad (18)$$

где $\gamma(g_0)$ зависит от M и M'. Общее решение уравнения (18) есть

$$\begin{gathered}\Gamma(g_0, k) = \exp F_1(g_0)\Phi\left(F(g_0) + \ln\frac{k^2}{m^2}\right), \\ F_1(g) = -\int dg \frac{\gamma(g)}{\beta(g)},\end{gathered} \qquad (19)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция. Если z_c — особая точка функции $\Phi(z)$, то особенности по переменной g_0 определяются уравнением (14). Функция $\Phi(z)$ выражается через $R(g_0) \equiv \Gamma(g_0, m)$,

$$\Phi(z) = R(F^{-1}(z)) \exp\left\{-F_1\left(F^{-1}(z)\right)\right\}, \qquad (20)$$

и особенности функции $F^{-1}(z)$ являются особенностями функции $\Phi(z)$. Поэтому найденное выше условие существования ренормалонов является достаточным и в общем случае. Дополнительные возможности их возникновения связаны с особыми точками функций $F_1(g)$ и $R(g)$. Если одна из них сингулярна в точке g_c, то $z_c = F(g_c)$ есть особая точка функции $\Phi(z)$. Функции $F_1(g)$ и $R(g)$ представляются борелевскими интегралами типа (16) и имеют $g = 0$ и $g = \infty$ в качестве точек ветвления, однако это не приводит к особенностям функции $\Phi(z)$ в конечных точках, так как

$$F(0) = \infty, \quad F(\infty) = \infty \quad (\text{для } \alpha \le 1)\,.$$

[5] Фактически в этом случае имеется m независимых интегрирований типа (17), для каждого из которых условие отсутствия ренормалонных вкладов совпадает с установленным ниже.

Особенности же при конечных g могут быть самосогласованно исключены для функций $F_1(g)$ и $R(g)$ аналогично тому, как это сделано выше для β-функции. В результате поведение функции $\beta(g)$ на бесконечности определяет существование или отсутствие ренормалонов и в общем случае.

6. Из изложенного выше ясно, что использование информации только из ренормгруппы дает возможность установить необходимые и достаточные условия существования ренормалонов, но не позволяет сделать никаких однозначных выводов. Сопоставим это с ренормгрупповым анализом Паризи [8], который лежит в основе всех современных работ ренормалонного направления [6]. Если, следуя [8], предположить, что импульсная зависимость борелевских образов отличается от однопетлевого результата лишь медленно меняющимся множителем, то такой анзац формально удовлетворяет уравнениям, если разложить по градиентам медленно меняющуюся функцию и ограничиться локальным приближением. Однако для исследования устойчивости решения следует продолжить разложение по градиентам и получить уравнение типа диффузии. Решение устойчиво, если соответствующий коэффициент диффузии положителен, что в общем случае не имеет места. Степень разрушения решения Паризи определяется довольно тонкими свойствами β-функции, что коррелирует с утверждениями настоящей работы.

В заключение обсудим тонкий момент в доказательстве для теории φ^4, недостаточно освещенный в [7]. Любая величина, определяемая рядом теории возмущений, является функцией затравочного заряда g_B и параметра обрезания Λ. При переходе к перенормированному заряду g возникает функция $F(g,\Lambda)$, содержащая остаточную зависимость от Λ, но в силу перенормируемости имеющая конечный предел

$$\lim_{\Lambda\to\infty} F(g,\Lambda) = F(g). \qquad (21)$$

Аналогичное свойство ожидается для соответствующих борелевских образов:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} B(z,\Lambda) = B(z). \qquad (22)$$

Аналитичность функции $B(z,\Lambda)$ при конечных Λ в комплексной плоскости z с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности была строго доказана ранее [7]. Аналитичность функции $B(z)$ в той же области имеется при условии равномерной сходимости в (22) (теорема Вейерштрасса [14]), которая имеет место в случае ограниченности функции $B(z,\Lambda)$ (принцип компактности регулярных функций [15]). Поэтому конечности предела в (22) достаточно для доказательства[6)] регулярности функции $B(z)$.

К сожалению, конечность пределов в (21), (22) является строго доказанной лишь в рамках теории возмущений, т. е. не для самих функций $F(g,\Lambda)$, $B(z,\Lambda)$, а для коэффициентов их разложения по g и z. Доказательство в [7] предполагает конечность пределов на уровне функций и в этом смысле является неполным. Однако конечность пределов в (21), (22) требуется для фактического существования перенормируемости и должна рассматриваться как необходимое для нее физическое условие. Оно тесно связано с необходимостью доопределения функциональных интегралов, которая отмечалась выше.

Автор признателен Л. Н. Липатову за многочисленные дискуссии по проблеме ренормалонов, в ходе которых возникла идея настоящей работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).

2. *Large-order Behavior of Perturbation Theory*, ed. by J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam (1990).

3. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. N. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A — Physics Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, Vol. 2, Harwood Acad. Press, New York (1980), p. 247.

4. B. Lautrup, Phys. Lett. B **69**, 109 (1977).

[6)] Если функция $B(z)$ имеет особенность в точке z_0, являющейся точкой регулярности для $B(z,\Lambda)$, то функция $B(z,\Lambda)$ неограничена при $\Lambda\to\infty$ на любом контуре, охватывающем точку z_0. Эта неограниченность носит глобальный характер и не связана с возможной расходимостью функции $B(z)$ при $z=z_0$. Фактически, если борелевский образ функции $B(z)$ обращается в бесконечность в изолированных точках комплексной плоскости, то его ограниченность легко обеспечить для актуального случая степенных расходимостей. Пусть, от противного, $B(z)\propto(z-z_0)^{-\gamma}$ в окрестности точки z_0, являющейся точкой регулярности функции $B(z,\Lambda)$. Перейдем к более общему определению борелевского образа, при котором коэффициенты исходного ряда делятся не на $N!$, а на $\Gamma(N+b_0)$; тогда путем увеличения b_0 индекс γ можно сделать отрицательным [7, п. 3.1]. Тем самым функция $B(z)$ становится ограниченной вблизи z_0 и особенность при $z=z_0$ существовать не может. Из регулярности функции $B(z)$ при больших b_0 следует регулярность при произвольных b_0 [7, п. 3.1].

5. G. 't Hooft, in *The Whys of Subnuclear Physics* (Erice, 1977), ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York (1979).

6. M. Beneke, Phys. Rep. **317**, 1 (1999), Sec. 2.4.

7. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).

8. G. Parisi, Phys. Rep. **49**, 215 (1979).

9. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000); ЖЭТФ **120**, 5 (2001).

10. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).

11. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ, **76**, 387 (2002).

12. R. Seznec and J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 398 (1979).

13. F. David, Nucl. Phys. B **209**, 433 (1982); **234**, 237 (1984); **263**, 637 (1986).

14. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977), с. 202.

15. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, Москва (1968), с. 81.