ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 2 (8), стр. 268–287

ВЫСШИЕ ПОПРАВКИ К АСИМПТОТИКЕ ЛИПАТОВА В ТЕОРИИ φ^4

Д. А. Лобаскин, И. М. Суслов[*]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 2004 г.

Высокие порядки теории возмущений могут быть вычислены методом Липатова [1]. Для большинства теорий поля асимптотика Липатова имеет функциональную форму $c\,a^N\Gamma(N+b)$ (N — порядок теории возмущений), а относительные поправки к ней имеют вид ряда по степеням $1/N$. Далекие коэффициенты этого ряда могут быть вычислены в рамках процедуры, аналогичной липатовской, и определяются вторым инстантоном рассматриваемой теории поля. Проведено количественное вычисление этих коэффициентов для n-компонентной теории φ^4 в предположении, что второй инстантон является: а) комбинацией элементарных инстантонов, б) сферически-несимметричной локализованной функцией. Отработаны методика двухинстантонных вычислений и техника интегрирования по вращениям несимметричного инстантона в координатном пространстве.

PACS: 03.65.-w, 11.10.Hi, 71.23.An

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно Липатову [1], высокие порядки теории возмущений определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Типичная асимптотика коэффициентов Z_N разложения некоторой величины $Z(g)$ по константе связи g,

$$Z(g) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N g^N, \tag{1}$$

имеет вид

$$Z_N = c\,S_0^{-N}\Gamma(N+b), \quad N\to\infty, \tag{2}$$

где S_0 — инстантонное действие, b, c — некоторые константы. Поправки к асимптотике Липатова (2) имеют вид регулярного разложения по $1/N$,

$$Z_N = cS_0^{-N}\Gamma(N+b) \times \\ \times \left\{1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \ldots + \frac{A_K}{N^K} + \ldots\right\}, \tag{3}$$

и их вычисление дает дополнительную информацию о коэффициентной функции Z_N. Недавно одним из авторов [2] показано, что ряд в (3) факториально расходится и типичная асимптотика коэффициентов A_K при $K\to\infty$ имеет вид

$$A_K = \tilde{c}\left(\ln\frac{S_1}{S_0}\right)^{-K}\Gamma\left(K + \frac{r'-r}{2}\right), \tag{4}$$

где S_0 и S_1 — значения действия для первого и второго инстантонов рассматриваемой теории поля, а r и r' — соответствующее им число нулевых мод; инстантоны предполагаются перенумерованными в порядке возрастания соответствующего им действия. Целью настоящей работы является получение замкнутых результатов для асимптотики A_K в n–компонентной теории φ^4 с действием

$$S\{g,\varphi\} = \int d^dx\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}[\nabla\varphi_\alpha(x)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}m^2\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha^2(x) + \frac{1}{4}g\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha^2(x)\right)^2\right\}, \tag{5}$$

где d — размерность пространства. Первоначально имелось в виду вычисление константы в формуле (4), но в ходе работы обнаружилась необходимость коррекции ее функционального вида при наличии мягких мод.

[*]E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

К сожалению, полная информация о высших инстантонах теории φ^4 отсутствует. Как известно [3], минимальным действием S_0 обладает безузловой сферически-симметричный инстантон, найденный аналитически при $d = 1$, 4 и численно при $d = 2$, 3 [4]. Очевидно, существуют конфигурации с действием $2S_0$, $3S_0$ и т. д., соответствующие нескольким бесконечно удаленным элементарным инстантонам; при $d = 1$ ими исчерпывается весь инстантонный спектр. Высшие сферически-симметричные инстантоны являются высоколежащими[1)] при $d = 2$, 3 и отсутствуют при $d = 4$. Поиск инстантонов без сферической симметрии предпринимался группой Елеонского [5]: при $d = 2$ найдены два инстантона с действием выше, чем у третьего сферически-симметричного; при $d = 3$ нетривиальных инстантонов не обнаружено. В работах [6] аналитически найдена серия несимметричных инстантонов при $d = 4$, начинающаяся[2)] с $8S_0$. В работе [7] предложен численный алгоритм нахождения «главной последовательности» инстантонов; его реализация показывает[3)], что низшие инстантоны этой последовательности распадаются на элементарные. Таким образом, наиболее вероятным кандидатом на роль второго инстантона теории φ^4 является комбинация двух элементарных инстантонов, и основное содержание работы основано на этом предположении. Но поскольку существование несимметричного инстантона с действием, меньшим $2S_0$, нельзя считать исключенным, в разд. 8 приведены формальные результаты для этого случая.

Как обсуждается ниже, результат (4) справедлив в условиях применимости «закона равнораспределения», когда все флуктуационные моды могут быть четко разделены на нулевые и колебательные (разд. 2). Для двухинстантонных конфигураций с неизбежностью существует мягкая мода, соответствующая изменению расстояния между элементарными инстантонами и сводящаяся к колебаниям в неаналитическом минимуме. В результате при $d = 1$, 2, 3 в правой части формулы (4) возникают логарифмические, а при $d = 4$ — даже степенные поправки.

Перевальные вычисления для двухинстантонных конфигураций обсуждались в работах [8–12] в связи с асимптотикой Липатова для задач с вырожденным вакуумом (таких как КХД). Основная трудность здесь состоит в появлении плохо определенных интегралов, интерпретация которых проводилась в [8–12] на уровне эвристических рецептов и, по признанию самих авторов, не была достаточно последовательной. При вычислении асимптотики A_K эта проблема поворачивается новой стороной и требует аккуратного рассмотрения. Поэтому мы начинаем с обсуждения дисперсионного соотношения Богомольного–Паризи [13, 14], которое является источником плохо определенных выражений (разд. 3). На его основе устанавливается общая связь поправок к асимптотике с высшими инстантонами (разд. 4), эвристически указанная в [2]. Далее выводится правило комбинирования инстантонов (разд. 5) и формулируется общая схема вычислений при наличии мягких мод (разд. 6), которая затем применяется к теории φ^4 (разд. 7). В разд. 8 приводятся результаты для случая несимметричного второго инстантона.

В работе исследуются функциональные интегралы вида

$$Z_M(g) = \int D\varphi\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)\ldots\varphi_{\alpha_M}(x_M) \times \\ \times \exp\left(-S\{g,\varphi\}\right), \quad (6)$$

через которые выражаются M-точечные функции Грина

$$G_M(g) = \frac{Z_M(g)}{Z_0(g)}. \quad (7)$$

Для асимптотики коэффициентов A_K, соответствующих функции $G_M(g)$, при $d = 1$ получен результат

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{(\pi/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{3}{2\ln 2}\right)^{n/2} \times \\ \times \Gamma\left(K + \frac{n}{2}\right)(\ln 2)^{-K}\left[\ln K + C\right], \quad (8)$$
$$C = C_E + \ln\left(\frac{6}{\ln 2}\right) + \frac{\psi(1/2) - \psi(n/2)}{2},$$

где C_E — постоянная Эйлера, $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Для $d = 2$ с логарифмической точностью имеем

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{19.7}\frac{(0.702)^n}{\Gamma(n/2)} \times \\ \times \Gamma\left(K + \frac{n+1}{2}\right)(\ln 2)^{-K}\ln^2 K \quad (9)$$

и аналогично для $d = 3$ —

$$A_K = -\frac{2^{-M/2}}{2.12}\frac{(0.704)^n}{\Gamma(n/2)} \times \\ \times \Gamma\left(K + \frac{n+2}{2}\right)(\ln 2)^{-K}\ln^3 K. \quad (10)$$

1) Второй сферически-симметричный инстантон имеет действие $6.6S_0$ при $d = 2$ и $6.3S_0$ при $d = 3$.

2) Указанное в работе [2] значение $27/16S_0$ является ошибочным.

3) Е. Р. Подоляк, частное сообщение.

Значения параметра B в формуле (11)

n	$B \cdot 10^4$	
	$M = 2$	$M = 4$
0	-9.05	-8.72
1	0	0
2	3.25	1.45
3	4.55	1.50

При $d = 4$ результаты зависят от координат, входящих в функции Грина, и довольно громоздки (см. разд. 7); они несколько упрощаются при переходе в импульсное представление и выборе импульсов p_i, соответствующих симметричной точке ($p_i \sim p$):

$$A_K = B \exp\left(\nu \ln \frac{\mu}{p}\right) \times \times \Gamma\left(K + \frac{n+4}{2} + \nu\right) (\ln 2)^{-K}, \quad (11)$$

где μ — точка нормировки заряда, $\nu = (n+8)/3$, а значения константы B приведены в таблице. В скалярном случае ($n = 1$) главный вклад в асимптотику исчезает и следует ожидать поведения, соответствующего следующему порядку по $1/K$:

$$A_K = \text{const} \cdot \exp\left(\nu \ln \frac{\mu}{p}\right) \times \times \Gamma\left(K + \frac{n+4}{2} + \nu - 1\right) (\ln 2)^{-K}. \quad (11')$$

Результаты для логарифма вакуумного интеграла $Z_0(g)$ формально получаются из формул (8)–(11) путем подстановки $M = 0$ и введения дополнительного множителя $1/2$ в их правые части. В частности, для энергии основного состояния ангармонического осциллятора ($d = 1$, $n = 1$) получим

$$A_K = -\frac{\ln K + 2.74}{3.78} \Gamma\left(K + \frac{1}{2}\right) (\ln 2)^{-K}, \quad (12)$$

что можно сопоставить с результатами Бендера и Ву [15] (рис. 1); в отличие от работы [2], это сопоставление проводится без подгоночных параметров.

Для несимметричного инстантона (разд. 8) мягкие моды отсутствуют и структуру результата можно предвидеть заранее, исходя из формулы (4). Для первого инстантона теории φ^4 в число нулевых мод входят d трансляционных, $n-1$ вращательных (связанных с изменением направления векторного поля

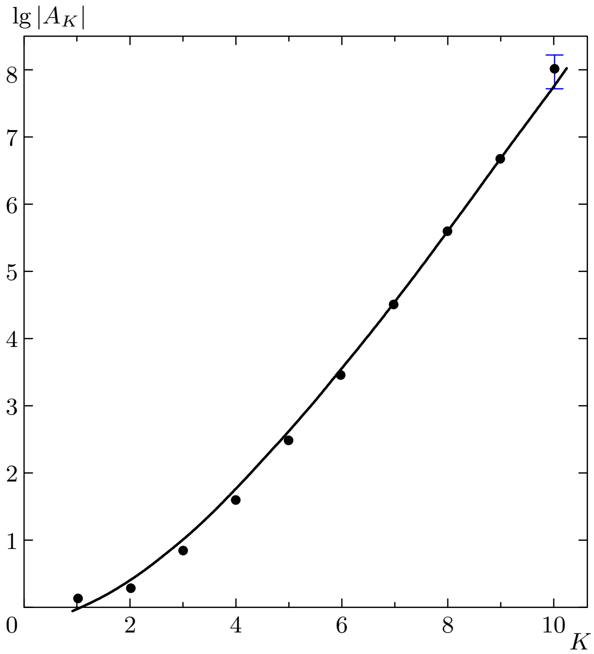

Рис. 1. Сопоставление асимптотической формулы (12) (сплошная кривая) с коэффициентами A_K, численно найденными в [15] (точки)

φ) и (при $d = 4$) одна дилатационная, соответствующая изменению радиуса инстантона[4)]. Для второго инстантона из-за низкой симметрии появляются дополнительно $d(d-1)/2$ мод, связанных с поворотами в координатном пространстве, поэтому

$$A_K = \tilde{c} \left[\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right)\right]^{-K} \Gamma\left(K + \frac{d(d-1)}{4}\right). \quad (13)$$

Последние моды ранее не рассматривались, что делает вычисление константы $\tilde{c}$ (разд. 8) методически нетривиальным. Разработанная техника интегрирования по этим модам представляет интерес для квантовой электродинамики, где уже первый инстантон является несимметричным [16].

2. СТРУКТУРА ПЕРЕВАЛЬНОГО ВКЛАДА. ЗАКОН РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В дальнейшем будем использовать сокращенные обозначения для интеграла (6),

$$Z(g) = \int D\varphi \, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(M)} \exp\left(-S\{g, \varphi\}\right), \quad (14)$$

[4)] Для двухинстантонной конфигурации число нулевых мод удваивается ($r' = 2r$), что в силу (4) дает вклад $r/2$ в аргумент гамма-функции, равный $(n-1+d)/2$ для $d < 4$ (формулы (8)–(10)) и $(n+4)/2$ при $d = 4$ (формула (11)).

и нормировать его на аналогичный интеграл с $M=0$, $g=0$, включая множитель $Z_0^{-1}(0)$ в символ $D\varphi$. Используя свойства однородности действия[5)], характерные для теории φ^4,

$$S\{g,\varphi\} \to \frac{S\{\phi\}}{g} \quad \text{при} \quad \varphi \to \frac{\phi}{\sqrt{g}}, \tag{15}$$

и вводя перевальную конфигурацию условием $S'\{\phi_c\}=0$, имеем вблизи перевала

$$Z(g) = g^{-M/2} \int D\varphi\, \phi_c^{(1)} \ldots \phi_c^{(M)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{S\{\phi_c\}}{g} - \frac{1}{2}(\delta\varphi, S''\{\phi_c\}\delta\varphi)\right), \tag{16}$$

($\delta\varphi = \varphi - \varphi_c$, $\varphi_c = \phi_c g^{-1/2}$), что при отсутствии нулевых мод приводит к результату

$$Z(g) = \text{const}\cdot g^{-M/2} \exp\left(-\frac{S\{\phi_c\}}{g}\right). \tag{17}$$

Мы используем введенную в [2] символическую запись, обозначая штрихом и двумя штрихами первую и вторую функциональные производные, понимаемые соответственно как вектор и линейный оператор, тогда как переменные φ_i, входящие в символ $D\varphi$, считаются компонентами вектора φ.

Коэффициенты разложения Z_N определяются интегралом

$$Z_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i}\frac{Z(g)}{g^{N+1}} = \int_C \frac{dg}{2\pi i g} \times \\ \times \int D\varphi\, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(M)} \exp\left(-\frac{S\{\phi\}}{g} - N\ln g\right), \tag{18}$$

где контур C охватывает точку $g=0$ в положительном направлении. Согласно Липатову [1], при больших N интеграл может быть вычислен методом перевала. Вводя перевальную конфигурацию условиями

$$S'\{\phi_c\}=0, \quad g_c = \frac{S\{\phi_c\}}{N} \tag{19}$$

и проводя разложение вблизи нее, имеем

$$Z_N = e^{-N} g_c^{-N-M/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int D\varphi\, \phi_c^{(1)} \ldots \phi_c^{(M)} \times \\ \times \exp\left(\frac{Nt^2}{2} - \frac{1}{2}(\delta\varphi, S''\{\phi_c\}\delta\varphi)\right), \tag{20}$$

где $g = g_c + i g_c t$, что при отсутствии нулевых мод дает

$$Z_N = \text{const}\cdot S\{\phi_c\}^{-N}\Gamma\left(N + \frac{M}{2}\right).$$

Фактически в функциональном интеграле всегда имеются нулевые моды, для корректного интегрирования по которым вводятся коллективные переменные λ_i (такие как центр инстантона, его ориентация и т. д.), которые формальным образом определяются для произвольной конфигурации φ и являются ее функционалами, $\lambda_i = f_i\{\varphi\}$; последние можно считать однородными по φ со степенью однородности равной нулю [2]. Введем под интеграл (14) разложение единицы

$$1 = \prod_{i=1}^{r}\int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i - f_i\{\varphi\}\right) = \\ = \prod_{i=1}^{r}\int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i - f_i\{\varphi_c\} - (f'\{\varphi_c\},\delta\varphi)\right) = \\ = \prod_{i=1}^{r}\int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i - f_i\{\phi_c\} - \sqrt{g}(f'\{\phi_c\},\delta\varphi)\right), \tag{21}$$

где r — число нулевых мод. Используя степени свободы, соответствующие нулевым модам, выберем инстантон из условия $\lambda_i = f_i\{\phi_c\}$, после чего ϕ_c становится функцией λ_i, т. е. $\phi_c \equiv \phi_\lambda$. Тогда несложные вычисления приводят к следующим результатам (см. подробнее в [2]):

$$Z(g) = c_g\, g^{-(M+r)/2}\exp\left(-\frac{S\{\phi_c\}}{g}\right), \tag{22}$$

$$c_g = \sqrt{\frac{\det S''\{0\}}{\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}}}\frac{(2\pi)^{-r/2}}{\det[f'\{\phi_c\}]_P} \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i\, \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)}, \tag{23}$$

$$Z_N = c\, S\{\phi_c\}^{-N}\,\Gamma\left(N + \frac{M+r}{2}\right), \tag{24}$$

$$c = \frac{S\{\phi_c\}^{-(M+r)/2}}{(2\pi)^{1+r/2}}\sqrt{-\frac{\det S''\{0\}}{\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}}} \times \\ \times \frac{1}{\det[f'\{\phi_c\}]_P}\int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i\, \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)}, \tag{25}$$

где $f'\{\phi_c\}$ — оператор, матрица которого составлена из столбцов $f_i'\{\phi_c\}$, индексы P и P' отмечают

5) Аналогичные свойства однородности имеются в других теориях поля, и с небольшими модификациями нижеследующий анализ применим и к ним.

соответственно проектирование на подпространство нулевых мод и подпространство, дополнительное к нему[6)]. Выражение (24) согласуется с приведенной выше функциональной формой асимптотики Липатова (2).

Согласно (24), на каждую степень свободы, соответствующую нулевым модам, приходится 1/2 в аргументе гамма-функции. Это напоминает классический закон равнораспределения и при ближайшем рассмотрении в точности ему соответствует. Действительно, классическая статистическая сумма Z определяется конфигурационным интегралом от $\exp(-H/T)$ и при увеличении числа колебательных степеней свободы r_{osc} на единицу происходит замена $Z \to ZT^{1/2}$, что дает дополнительный вклад 1/2 в теплоемкость [17]. Интересующий нас интеграл (14) определяется экспонентой $\exp(-S\{\phi\}/g)$, и константа связи g играет роль температуры. Увеличение на единицу числа нулевых мод r соответствует уменьшению на единицу r_{osc} и дает замену $Z \to Zg^{-1/2}$ (см. (22)); при вычислении асимптотики Липатова множитель $g^{-1/2}$ оценивается в перевальной точке $g_c \sim 1/N$ (см. (19)), что приводит к замене $Z_N \to Z_N N^{1/2}$ и добавлению 1/2 в аргумент гамма-функции.

Закон равнораспределения может нарушаться при наличии мягких мод, которые связаны с приближенными симметриями системы. Тогда некоторые степени свободы в первом приближении выглядят как нулевые моды, но при более точном рассмотрении соответствуют движению в потенциальном рельефе, который может не сводиться к квадратичному минимуму. Примерами мягких мод являются дилатации в массивной четырехмерной или $(4-\epsilon)$-мерной теории φ^4 [18, 19] и изменение расстояния между элементарными инстантонами в двухинстантонной конфигурации (см. ниже).

3. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ И ПРАВИЛО ПОВОРОТА

Ввиду факториального роста коэффициентов Z_N, ряд (1) имеет нулевой радиус сходимости. Это связано с тем, что точка $g = 0$ является точкой ветвления и для выделения регулярной ветви $Z(g)$ следует провести разрез от 0 до ∞ в комплексной плоскости g. Его удобно провести вдоль луча

$$g = |g| \operatorname{sign} S_0, \tag{26}$$

на котором борелевская сумма ряда (1) является плохо определенной[7)]. Используя формулу Коши и записывая ее в форме дисперсионного соотношения, имеем

$$Z(g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{Z(\tilde g)}{\tilde g - g}\, d\tilde g = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty\cdot \operatorname{sign} S_0} \frac{\Delta Z(\tilde g)}{\tilde g - g}\, d\tilde g, \tag{27}$$

$$\Delta Z(g) = Z(g + i0 \operatorname{sign} S_0) - Z(g - i0 \operatorname{sign} S_0), \tag{28}$$

где контур C охватывает точку $\tilde g = g$, а затем деформируется так, чтобы проходить вокруг разреза. Раскладывая (27) в ряд по g, имеем для коэффициентов разложения

$$Z_N = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty\cdot \operatorname{sign} S_0} \frac{\Delta Z(g)}{g^{N+1}}\, dg. \tag{29}$$

Между асимптотикой Z_N при $N \to \infty$ и скачком на разрезе при $g \to 0$ имеется соотношение

$$\Delta Z(g) = 2\pi i c \left(\frac{S_0}{g}\right)^b \exp\left(-\frac{S_0}{g}\right) \longleftrightarrow Z_N = c S_0^{-N} \Gamma(N + b), \tag{30}$$

которое легко получить из формулы (29), либо вычисляя скачок на разрезе борелевской суммы ряда (1). Следующий шаг состоит в отождествлении $\Delta Z(g)$ с результатом перевального вычисления интеграла $Z(g)$ вблизи той же конфигурации ϕ_c, что и в методе Липатова,

$$\Delta Z(g) = [Z(g)]_{saddle\text{-}point\ \phi_c}. \tag{31}$$

Соотношения (30), (31) предложены Богомольным [13] и Паризи [14] и составляют основу подхода к вычислению высоких порядков, альтернативного методу Липатова; они позволяют легко найти асимптотику Z_N, если результат перевального вычисления $Z(g)$ уже известен. Соотношение (31) можно обосновать для обычного интеграла с помощью красивого рассуждения, принадлежащего

[6)] В формулах (32) и (48) работы [2] пропущена степень -1 у $\det[f'\{\phi_c\}]_P$ и $\det[f'\{\psi_c\}]_P$. В некоторых случаях эти детерминанты зависят от коллективных переменных и должны быть внесены в интеграл по $d\lambda_i$.

[7)] В теории φ^4 действие $S_0 < 0$ и разрез проводится вдоль отрицательной полуоси.

Ланжеру [12, 20], но оно никогда не доказывалось в общем виде; к тому же оно плохо определено и требует правильной интерпретации.

Для обоснования соотношения (31) нужно установить правило перестановки интегрирований по g и φ, которое мы выведем на примере обычного интеграла:

$$Z(g) = \int\limits_0^\infty d\varphi \exp(-\varphi^2 - g\varphi^4), \tag{32}$$

$$Z_N = \int\limits_C \frac{dg}{2\pi i g} \int\limits_0^\infty d\varphi \exp(-\varphi^2 - g\varphi^4 - N\ln g). \tag{33}$$

Расходящийся ряд (1) получается в результате регулярного разложения по g экспоненты в (32) и последующей перестановки суммирования и интегрирования; прямое же разложение $Z(g)$ в ряд не вполне корректно, так как соответствует тейлоровскому разложению в заведомо сингулярной точке. Поэтому в выражении (33) правильно интегрировать сначала по g (находя коэффициенты разложения $\exp(-g\varphi^4)$), а затем по φ; контур C может быть выбран круговым, так что он проходит перевальную точку $g_c = -1/N$ в вертикальном направлении (рис. 2*а*). Перестановка порядка интегрирования не вполне тривиальна ввиду наличия у $Z(g)$ разреза вдоль луча (26). Ограничим интегрирование по области больших φ обрезающим множителем, чтобы отодвинуть разрез на величину Δ от нуля, и деформируем контур, как на рис. 2*б*. При расширении контура и снятии обрезания возникает обход разреза в отрицательном направлении; нетрудно видеть, что это соответствует формуле (29)[8].

В зависимости от порядка интегрирования перевальная точка g_c проходится либо в вертикальном (рис. 2*а*), либо в горизонтальном (рис. 2*б*) направлении. Известно, что она должна проходиться в направлении наискорейшего спуска: так каково же это направление — вертикальное или горизонтальное?

В интеграле (33) перевал имеет место при $\varphi_c = \sqrt{2N}$, $g_c = -1/N$ и квадратичная форма, возникающая при разложении вблизи него ($\varphi = \varphi_c + \delta\varphi$, $g = g_c + itg_c\sqrt{2/N}$), может быть записана в виде

$$-(\delta\varphi)^2 - (t - i\sqrt{2}\delta\varphi)^2 \quad \text{или} \quad t^2 + (\delta\varphi + i\sqrt{2}t)^2. \tag{34}$$

[8] На первый взгляд, возможен другой способ рассуждений, состоящий в том, чтобы предварительно деформировать контур C так, чтобы он охватывал отрицательную полуось и разрез возникал внутри него — это дает обход разреза в положительном направлении. При этом имеется в виду, что разрез «прорастает» из нуля в бесконечность; это соответствует тейлоровскому разложению в сингулярной точке и поэтому некорректно.

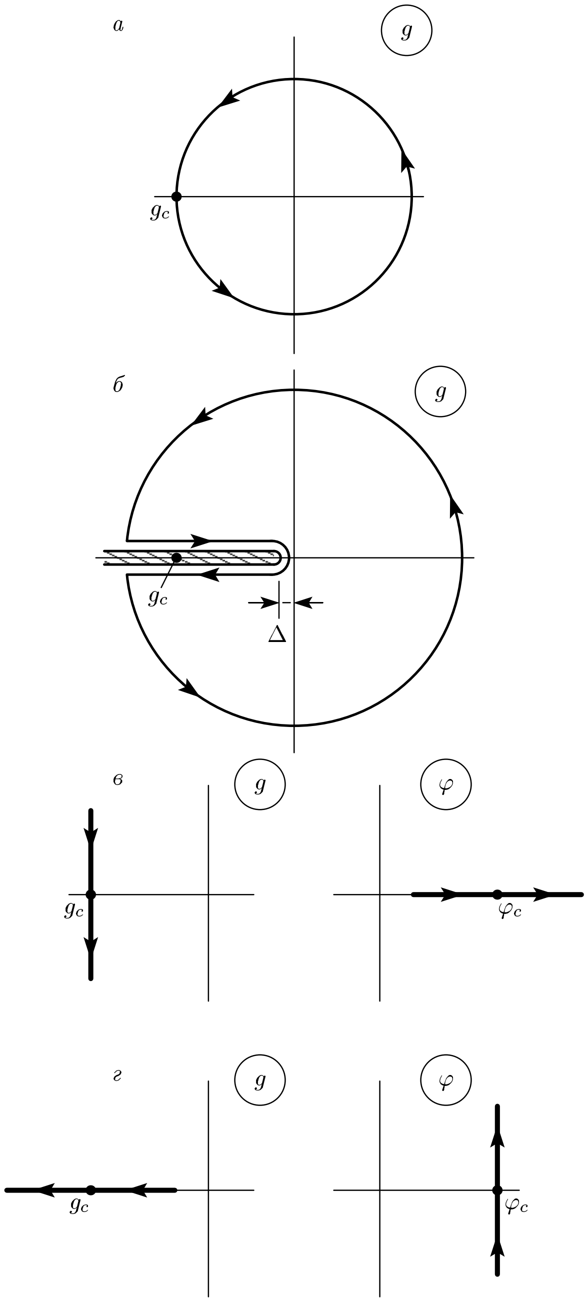

Рис. 2. *а*) Контур интегрирования по g в выражении (33) может быть выбран круговым, если интегрирование по g проводится первым; *б*) контур интегрирования по g при измененном порядке интегрирования; *в, г*) контуры интегрирования по g и φ поворачиваются в противоположных направлениях при перестановке порядка интегрирования

Если первым проводится интегрирование по g, то сдвиг переменной t приводит к хорошо определенному гауссову интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left[-(\delta\varphi)^2 - (t - i\sqrt{2}\delta\varphi)^2\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left[-(\delta\varphi)^2 - t^2\right]. \qquad (35)$$

Если же первым проводится интегрирование по φ, то возникает «плохой» интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\left[(\delta\varphi + i\sqrt{2}t)^2 + t^2\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\left[(\delta\varphi)^2 + t^2\right]. \qquad (36)$$

Повернем контуры интегрирования по t и φ в (36) на один и тот же угол в противоположных направлениях, $t \to t\mathrm{e}^{-i\alpha}$, $\delta\varphi \to \delta\varphi\mathrm{e}^{i\alpha}$, что не меняет детерминанта квадратичной формы, которым определяется гауссов интеграл. При $\alpha = \pi/2$ интеграл (36) превращается в (35) и происходит переход от рис. 2*в* к рис. 2*г*: вертикальное интегрирование по g становится горизонтальным, как этого требует формула (29), а скачок на разрезе $\Delta Z(g)$ получается из исходного интеграла $Z(g)$ путем поворота контура относительно перевальной точки φ_c на угол $\pi/2$ в положительном направлении.

Установленное «правило поворота» легко переносится на общий случай. Главный вклад в интеграл (18) происходит от конфигурации ϕ_c, соответствующей максимуму подынтегрального выражения. Поэтому квадратичная форма в экспоненте (20) должна приводиться к сумме квадратов, что возможно при

$$-N \det S''\{\phi_c\} > 0. \qquad (37)$$

Но в этом случае интеграл (16) для $Z(g)$ является плохо определенным: в нем имеется «плохое» гауссово интегрирование, которое должно пониматься в смысле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{x^2} \to i \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad (38)$$

после чего интеграл (16) определяет скачок на разрезе $\Delta Z(g)$. «Плохое» интегрирование можно считать единственным ввиду возможности одновременного изменения знака перед квадратами двух переменных. Из сказанного ясно, что корень из детерминанта в (23) должен пониматься как

$$\left(\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}\right)^{-1/2} \to i \left|\det[S''\{\phi_c\}]_{P'}\right|^{-1/2}, \qquad (39)$$

после чего результаты (22) и (24) удовлетворяют соотношению (30).

Правило поворота решает проблему интерпретации скачка на разрезе $\Delta Z(g)$ в рамках гауссова приближения, тогда как при наличии мягких мод требуется дополнительный анализ (разд. 6).

4. СВЯЗЬ ПОПРАВОК К АСИМПТОТИКЕ С ВЫСШИМИ ИНСТАНТОНАМИ

Выделяя из коэффициентов Z_N асимптотику Липатова, имеем в соответствии с (3)

$$Z_N = cS_0^{-N}\Gamma\left(N + \frac{M+r}{2}\right) F\left(\frac{1}{N}\right), \qquad (40)$$

и коэффициенты A_K могут быть выражены через функцию $F(\epsilon)$:

$$A_K = \int\limits_C \frac{d\epsilon}{2\pi i} \frac{F(\epsilon)}{\epsilon^{K+1}}. \qquad (41)$$

Подставляя (18) в (40), полагая $\epsilon = 1/N$ и делая замену $g \to \epsilon S_0 g$, имеем для A_K точное выражение

$$A_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int \frac{d\epsilon}{2\pi i\epsilon} \int \frac{dg}{2\pi i g} \times \\ \times \int D\varphi \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(M)} \epsilon^{(M+r-1)/2} \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{\epsilon}\left[1 - \ln g - \frac{S\{\phi\}}{S_0 g}\right] - K\ln\epsilon\right\}_{\phi=\varphi\sqrt{\epsilon g S_0}}, \qquad (42)$$

которое при больших K может быть оценено методом перевала. Перевальная конфигурация определяется условиями

$$S'\{\psi_c\} = 0, \quad g_c = \frac{S'\{\psi_c\}}{S_0}, \quad \epsilon_c = \frac{\ln g_c}{K}, \qquad (43)$$

и после разложения вблизи нее экспонента принимает вид

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\delta\varphi, S''\{\psi_c\}\delta\varphi) - \frac{t^2}{\epsilon_c} - K\tau^2\right]\right\}, \qquad (44)$$

где $g - g_c = ig_c t$, $\epsilon - \epsilon_c = i\epsilon_c\tau$. В качестве ψ_c нельзя брать конфигурации $\psi_c = 0$ и $\psi_c = \phi_c$, так как при этом $g_c = 0$ или $\epsilon_c = 0$, что соответствует не перевалу, а сингулярности. Перевальная точка соответствует максимуму подынтегрального выражения при условии

$$\frac{K}{\epsilon_c} \det S''\{\psi_c\} > 0, \qquad (45)$$

и в качестве ψ_c нужно взять первый из высших инстантонов, для которого $\det S''\{\psi_c\} > 0$; обычно это условие выполнено уже для второго инстантона, что и будет предполагаться в дальнейшем. Вычисление интеграла (42) дает формулу (4), где

$$\tilde{c} = \frac{(\ln S_1/S_0)^{(r-r')/2}\, S_1^{-(M+r')/2}}{c\,(2\pi)^{2+r'/2}\det[f'\{\psi_c\}]_P} \times \\ \times \sqrt{\frac{\det S''\{0\}}{\det[S''\{\psi_c\}]_{P'}}} \int \prod_{i=1}^{r'} d\lambda_i\, \psi_\lambda^{(1)} \ldots \psi_\lambda^{(M)} \qquad (46)$$

и $S_1 = S\{\psi_c\}$ (см. подробнее в [2]).

Дисперсионное соотношение (разд. 3) позволяет установить связь поправок к асимптотике с высшими инстантонами в общем виде, без использования специфики теории φ^4. Пусть коэффициенты A_K растут при больших K по факториальному закону:

$$A_K = \tilde{c}\tilde{a}^K \Gamma(K + \tilde{b}) \qquad (47)$$

с $\tilde{a} > 0$; тогда борелевская сумма ряда в (3) плохо определена при $N > 0$ и коэффициентная функция Z_N имеет разрез, скачок на котором определяется по правилу (30)

$$\Delta Z_N = c S_0^{-N}\Gamma(N+b)\cdot 2\pi i\tilde{c}\left(\frac{N}{\tilde{a}}\right)^{\tilde{b}} \exp\left(-\frac{N}{\tilde{a}}\right). \qquad (48)$$

С другой стороны, этот скачок может быть определен аналогично (31) как вклад перевальной конфигурации ψ_c в липатовский интеграл (18). Принимая для этого вклада функциональную форму, аналогичную (2),

$$\Delta Z_N = i c_1 S_1^{-N}\Gamma(N + b_1) \qquad (49)$$

и отождествляя (48) и (49), имеем

$$\tilde{a} = \left(\ln\frac{S_1}{S_0}\right)^{-1}, \quad \tilde{b} = b_1 - b, \\ \tilde{c} = \frac{c_1}{2\pi c}\left(\ln\frac{S_1}{S_0}\right)^{b-b_1}. \qquad (50)$$

В результате нахождение параметров асимптотики A_K сводится к хорошо отработанной процедуре: достаточно вычислить перевальные вклады (2) и (49) в липатовский интеграл (18) от двух конфигураций, ϕ_c и ψ_c. Результат (46) легко следует из (50), если учесть, что выражение (49) получается из (25) путем замены $\phi_c \to \psi_c$, $r \to r'$, а $(-\det[S''\{\psi_c\}]_{P'})^{-1/2}$ понимается как $i\,|\det[S''\{\psi_c\}]_{P'}|^{-1/2}$ в соответствии с правилом поворота.

Формулы (50) решают проблему вычисления асимптотики A_K в условиях применимости закона равнораспределения; для этого все флуктуационные моды вблизи классических конфигураций ϕ_c и ψ_c должны четко разделяться на нулевые и колебательные. При этом $b_1 - b = (r' - r)/2$ независимо от специфики теории φ^4: вклад типа $M/2$ в аргументе гамма-функции, происходящий от предэкспоненты в (14), в других теориях поля может иметь другую величину, но он одинаков для первого и второго инстантонов. При наличии мягких мод ситуация более сложная и рассматривается в дальнейших разделах[9)].

5. ПРАВИЛО КОМБИНИРОВАНИЯ ИНСТАНТОНОВ

Проанализируем, как, зная вклад в функциональный интеграл (14) от одного инстантона, построить вклад двухинстантонной конфигурации. Согласно разд. 2, вклад в $Z_M(g)$ от перевальной конфигурации ϕ_c имеет структуру

$$Z_M^{(1)}(g) = c_0 g^{-(M+r)/2}\exp\left(-\frac{S_0}{g}\right) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)}, \qquad (51)$$

где $c_0 = c_0\{\phi_c\}$ и $S_0 = S\{\phi_c\}$ являются функционалами от ϕ_c. Вклад двухинстантонной конфигурации определяется аналогичным выражением с заменой ϕ_c на $\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$. Если ввести взаимодействие инстантонов S_{int} соотношением

$$S\{\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}\} = S\{\phi_\lambda\} + S\{\phi_{\lambda'}\} + S_{int}\{\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}\} \qquad (52)$$

и учесть удвоение числа коллективных переменных, то получим сумму членов вида

$$Z_{LL'} = c_1 g^{-M/2-r}\exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i d\lambda_i' \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(L)} \cdot \phi_{\lambda'}^{(1)} \ldots \phi_{\lambda'}^{(L')} \times \\ \times \exp\left(-\frac{S_{int}\{\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}\}}{g}\right) \qquad (53)$$

с $L + L' = M$. При малых g экспонента ограничивает взаимодействие инстантонов условием

9) Соотношения типа (50) справедливы и в этом случае (с учетом возможного изменения функциональной формы выражений (47) и (49)), но они практически бесполезны из-за плохой определенности возникающих интегралов.

$S_{int}\{\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}\} \lesssim g$, поэтому в предэкспоненте им можно пренебречь. Тогда естественно ожидать, что $c_1 = c_0^2$, для того чтобы выражение (53) при $S_{int} \equiv 0$ было просто произведением правых частей (51) с $M = L$ и $M = L'$. Малые значения S_{int} соответствуют удаленным инстантонам[10)], что позволяет пренебречь перекрестными членами, содержащими одновременно ϕ_λ и $\phi_{\lambda'}$. Тогда в сумме по L, L' остаются два члена с $L = M$, $L' = 0$ и $L = 0$, $L' = M$, которые, очевидно равны. Возникающий множитель 2 сокращается с комбинаторным множителем $1/2!$, который нужно ввести ввиду того, что конфигурации, различающиеся перестановкой инстантонов, учитываются дважды. В результате двухинстантонный вклад имеет вид

$$Z_M^{(2)}(g) = c_0^2 g^{-M/2-r} \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i d\lambda_i' \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{S_{int}\{\lambda, \lambda'\}}{g}\right), \quad (54)$$

где учтено, что при фиксированной форме инстантонов $S_{int}\{\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}\}$ зависит лишь от λ и λ'. При $M = 0$ конфигурации с $L = M$, $L' = 0$ и $L = 0$, $L' = M$ совпадают и результат определяется формулой (54) с дополнительным множителем $1/2$ в правой части; это замечание относится и ко всем дальнейшим выражениям.

Формула (54) дает возможность записать выражение для двухинстантонного вклада по известному результату (51) для одноинстантонного: дополнительно требуется лишь информация о взаимодействии инстантонов на больших расстояниях. Правило комбинирования инстантонов получается вполне естественным, но следует обсудить некоторые тонкие моменты, ускользающие при эвристическом выводе.

Введение констрэйнта. Фактически замена ϕ_c на $\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$ не вполне корректна, так как линейная комбинация инстантонов не является точным решением уравнения $S'\{\phi\} = 0$. Поэтому при разложении вблизи этой конфигурации возникают линейные по $\delta\phi$ члены, требующие аккуратного исключения[11)].

Введем коллективную переменную z, характеризующую расстояние R между инстантонами и формальным образом определенную для произвольной инстантонной конфигурации, $z = f\{\phi\}$. Идея состоит в поиске экстремума действия при дополнительном условии (констрэйнте) $f\{\phi\} = \mathrm{const}$, т. е. при фиксированном расстоянии между инстантонами, и последующем интегрировании по этому расстоянию. Тогда инстантон определяется уравнением

$$S'\{\phi_c\} - \mu f'\{\phi_c\} = 0 \quad (55)$$

(μ — множитель Лагранжа), а интегрирование по z вводится путем внесения под функциональный интеграл разложения единицы,

$$1 = \int dz\, \delta(z - f\{\phi\}) = \\ = \int dz\, \delta\left(z - f\{\phi_c\} - (f'\{\phi_c\}, \delta\phi)\right). \quad (56)$$

Выбирая инстантон из условия $z = f\{\phi_c\}$, получим

$$Z(g) = \int D\varphi\, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(M)} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{S\{\phi_c\} + (S'\{\phi_c\}, \delta\phi) + (\delta\phi, S''\{\phi_c\}\delta\phi)/2}{g}\right\} \times \\ \times \int dz\, \delta\left(-(f'\{\phi_c\}, \delta\phi)\right) \quad (57)$$

и линейные по $\delta\phi$ члены в экспоненте устраняются δ-функцией ввиду условия (55). В качестве $f\{\phi\}$ удобно взять величину $S_{int}\{\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}\}$, так как тогда уравнение (55) имеет комбинацию инстантонов $\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$ в качестве точного решения при $\mu = 1$ (ср. с (52)).

В предэкспоненте взаимодействием инстантонов можно пренебречь, и выделение нулевых мод проводится так же, как если бы они были независимыми. Единственная тонкость состоит в том, что вместо нулевых мод

$$\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\phi_{\lambda'}}{\partial x_1}, \quad (58)$$

соответствующих трансляциям инстантонов вдоль прямой, проходящей через их центры и принятой за ось x_1, нужно брать их линейные комбинации

$$\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi_{\lambda'}}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\phi_\lambda}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_{\lambda'}}{\partial x_1}, \quad (59)$$

соответствующие трансляции пары как целого и изменению расстояния между компонентами пары. При этом в произведение (21) не вводится δ-функция, соответствующая второй моде (59), так как ее роль играет (56). Эта модификация не имеет значения, так как $\det[f'\{\phi_c\}]_P$ в (23), (25) фактически определяется матрицей Грамма, построенной на нулевых модах (разд. 8) и не зависит от

[10)] См. уточнение в разд. 7 для $d = 4$.

[11)] Взаимодействие инстантонов существенно зависит от конкретного выбора формы двухинстантонной конфигурации и при небрежном выборе легко получить неверные результаты (ср. работы [8–12] между собой).

выбора функционалов $f_i\{\varphi\}$. Поэтому окончательный результат (44) соответствует формальной замене $\phi_c \to \phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$.

Факторизация детерминантов. При выводе формулы (54) принято, что $c_1 = c_0^2$, или

$$c_0\{\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}\} = c_0\{\phi_\lambda\}\, c_0\{\phi_{\lambda'}\}. \tag{60}$$

Чтобы пояснить это соотношение, заметим, что оператор $S''\{\phi_c\}$ в скалярном случае имеет вид оператора Шредингера (разд. 8).

$$S''\{\phi_c\} = -\Delta + m^2 - 3\phi_c^2(x), \tag{61}$$

и при замене $\phi_c \to \phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$ вместо одной потенциальной ямы возникают две удаленные друг от друга. Поэтому собственные значения оператора $S''\{\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}\}$ суть двухкратно вырожденные собственные значения оператора $S''\{\phi_c\}$ и

$$\det S''\{\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}\} = \left[\det S''\{\phi_c\}\right]^2 \tag{62}$$

при условии, что произведение собственных значений сходится. Для оператора $S''\{\phi_c\}$ такой сходимости нет и очень существенна нормировка интеграла (14) на величину $Z_0(0)$, в результате которой возникает комбинация

$$\frac{\det S''\{\phi_c\}}{\det S''\{0\}} = \det\frac{S''\{\phi_c\}}{S''\{0\}}, \tag{63}$$

где оператор $S''\{\phi_c\}/S''\{0\}$ имеет дискретный спектр [21] и сходимость произведения собственных значений обеспечивается несложной перенормировкой (см. подробнее в [4]). Множители, выделяемые из (63) в процессе перенормировки и при исключении нулевых мод, при замене $\phi_c \to \phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$ возводятся в квадрат из-за эквивалентности двух инстантонов. Факторизация $\det[f'\{\phi_\lambda + \phi_{\lambda'}\}]_P$, аналогичная (62), связана с тем, что нулевые моды рассматриваются в приближении невзаимодействующих инстантонов.

Заметим, что факторизация (60) несправедлива при комбинировании топологических инстантонов, связывающих вырожденные, но неэквивалентные вакуумы [8, 12]. В этом случае эффективный потенциал, входящий в оператор Шредингера типа (61), не имеет вида двух изолированных потенциальных ям: между ямами возникает потенциальный барьер, из-за которого взаимодействие инстантонов оказывается дальнодействующим.

Вычитание вклада идеального газа. При переходе к функции Грина результат (54) принимает вид

$$G_M^{(2)}(g) = c_0^2 g^{-M/2-r} \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i d\lambda_i' \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)} \times \\ \times \left[\exp\left(-\frac{S_{int}\{\lambda,\lambda'\}}{g}\right) - 1\right], \tag{64}$$

т. е. происходит вычитание вклада невзаимодействующих инстантонов аналогично тому, как это имеет место в случае вириального разложения [17]. Действительно, запишем функцию Грина в виде

$$G_M(g) = \frac{Z_M(g)}{Z_0(g)} = \\ = \frac{Z_M^{(0)}(g) + Z_M^{(1)}(g) + Z_M^{(2)}(g) + \ldots}{1 + Z_0^{(1)}(g) + Z_0^{(2)}(g) + \ldots}, \tag{65}$$

где верхние индексы «0», «1», «2»,... отмечают вклады, происходящие от перевальных конфигураций[12)] $\phi = 0$, $\phi = \phi_c$, $\phi = \phi_\lambda + \phi_{\lambda'}$ ... и имеющие порядок 1, $\exp(-S_0/g)$, $\exp(-2S_0/g)$ .... Для удобства в этом выражении нормировка функциональных интегралов осуществляется не на $Z_0(0)$, а на $Z_0^{(0)}(g)$, что несущественно в главном порядке по g. Вклад в $G_M(g)$ порядка $\exp(-2S_0/g)$ имеет вид

$$Z_M^{(2)}(g) - Z_M^{(1)}(g) Z_0^{(1)}(g) - Z_M^{(0)}(g) Z_0^{(2)}(g), \tag{66}$$

где последний член мал при $M > 0$ в меру множителя $g^{M/2}$. Легко видеть, что второй член соответствует (54) с $S_{int} \equiv 0$, что и дает -1 в (64). Аналогично, при логарифмировании вакуумного интеграла,

$$\ln Z_0^{(0)}(g) = \ln\left[1 + Z_0^{(1)}(g) + Z_0^{(2)}(g) + \ldots\right] = \\ = Z_0^{(1)}(g) + Z_0^{(2)}(g) - \frac{1}{2}\left[Z_0^{(1)}(g)\right]^2 + \ldots, \tag{67}$$

последний член приводит к вычитанию вклада невзаимодействующих инстантонов в выражении для $Z_0^{(2)}(g)$; при этом существенно наличие дополнительного множителя $1/2$ в выражениях с $M = 0$.

[12)] Такое «разложение по инстантонам» в случае обычного интеграла получается путем деформации контура интегрирования таким образом, что он представляется в виде суммы интегралов по контурам C_0, C_1, C_2 ..., где каждый из контуров C_i проходит перевальную точку z_i в направлении наискорейшего спуска и уходит концами на бесконечность.

6. ВЫСШИЕ ПОПРАВКИ К АСИМПТОТИКЕ ПРИ НАЛИЧИИ МЯГКИХ МОД

Проанализируем выражение (64) в случае степенного взаимодействия инстантонов на больших расстояниях:

$$S_{int}\{\lambda, \lambda'\} = \frac{a(\lambda, \lambda')}{R^\alpha}. \tag{68}$$

Вводя в (64) разложение единицы,

$$1 = \int_0^\infty dz\, \delta\left(z - \frac{S_{int}\{\lambda, \lambda'\}}{2S_0}\right) + \int_0^\infty dz\, \delta\left(z + \frac{S_{int}\{\lambda, \lambda'\}}{2S_0}\right), \tag{69}$$

и учитывая, что интегрирование по коллективным переменным включает в себя интеграл $\int R^{d-1} dR$, получим

$$\int \prod_{i=1}^{r} d\lambda_i d\lambda'_i \phi_\lambda^{(1)} \ldots \phi_\lambda^{(M)} \delta\left(z \pm \frac{S_{int}\{\lambda, \lambda'\}}{2S_0}\right) = \frac{A^\pm}{z^{1+\nu}}, \tag{70}$$

где $\nu = d/\alpha$. В результате выражение (64) приобретает функциональную форму

$$G^{(2)}(g) = B\left(\frac{2S_0}{g}\right)^{(M+2r)/2} \times \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) F\left(\frac{2S_0}{g}\right), \tag{71}$$

где

$$F(x) = A^+ I^+(x) + A^- I^-(x), \tag{72}$$

$$I^\pm(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1+\nu}} \left(e^{\pm xz} - 1\right). \tag{73}$$

В дальнейшем считаем, что $\nu \geq 0$, так как отрицательные значения ν соответствуют нефизическому росту взаимодействия с расстоянием. При $\nu \geq 1$ вычитание единицы не обеспечивает сходимости интеграла в (73). Такие значения ν соответствуют медленно спадающему взаимодействию, для которого вириальное разложение неприменимо; взаимодействие для больших R должно быть модифицировано в духе дебаевской экранировки, что и приведет к обрезанию интеграла при малых z. Характер обрезания не имеет значения, так как интеграл $I^-(x)$ может быть вычислен путем дифференцирования по параметру x, и для $F(x)$ формально получим

$$F(x) = \Gamma(-\nu)\left[A^- x^\nu + A^+ (-x)^\nu + O(x^{[\nu]})\right], \tag{74}$$

где $[\ldots]$ — целая часть числа. Практический интерес представляют значения g вблизи разреза, где $x = 2S_0/g > 0$ и выражение (74) плохо определено из-за плохой определенности интеграла $I^+(x)$. Его интерпретация зависит от постановки задачи, два варианта которой мы рассмотрим ниже.

Вклад в асимптотику Липатова. Изучение вклада двухинстантонной конфигурации в асимптотику коэффициентов Z_N актуально для задач с вырожденным вакуумом, в которых одиночный инстантон является топологическим и асимптотика Липатова определяется инстантон-антиинстантонной парой [8–12]. Ввиду (71) скачок на разрезе функции $G(g)$ определяется формулой

$$\Delta G(g) = \pm B\left(\frac{2S_0}{g}\right)^{(M+2r)/2} \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) \times \left[F\left(\frac{2S_0}{g} - i0\right) - F\left(\frac{2S_0}{g} + i0\right)\right], \tag{75}$$

где мы представили $G(g)$ в виде «разложения по инстантонам» $G^{(0)}(g) + G^{(1)}(g) + G^{(2)}(g) + \ldots$ (разд. 4) и учли, что $G^{(0)}(g)$ и $G^{(1)}(g)$ не дают вклада в скачок на разрезе. Неопределенный знак в (75) связан с тем, что разложение по инстантонам требует предварительной деформации контура интегрирования так, чтобы он проходил через все перевальные точки (см. примечание 12): такая деформация в общем случае неоднозначна и приводит к неопределенному знаку $G^{(2)}(g)$ из-за возможности пройти перевальную точку в двух противоположных направлениях. Легко видеть, что хорошо определенный интеграл $I^-(x)$ не дает вклада в (75), а в выражении для $I^+(x)$ можно опустить член с -1. При сдвиге g в нижнюю или верхнюю полуплоскость контур интегрирования по z в интеграле $I^+(x)$ нужно загнуть вверх или вниз (рис. 3*а*); скачок на разрезе определяется разностью интегралов по контурам C^+ и C^- и сводится к вертикальному контуру C (рис. 3*б*).

Чтобы зафиксировать знак в выражении (75), установим его связь с правилом поворота (разд. 3). Заменим $R^{-\alpha}$ в (68) на $R^{-\alpha} + \epsilon R^\alpha$; тогда в экспоненте интеграла $I^+(x)$ возникнет $x(z + \epsilon/z)$ и появится точка перевала $z_c = \sqrt{\epsilon}$, через которую и нужно провести контур C. Направление интегрирования нужно выбрать снизу вверх, чтобы контур C получался из исходного контура C_0 поворотом на угол $\pi/2$ в положительном направлении вокруг точки z_c. При $\epsilon \to 0$ перевал исчезает, но направление контура C сохраняется и соответствует отрицательному знаку в выражении (75). Вычисляя интеграл $I^+(x)$ с помо-

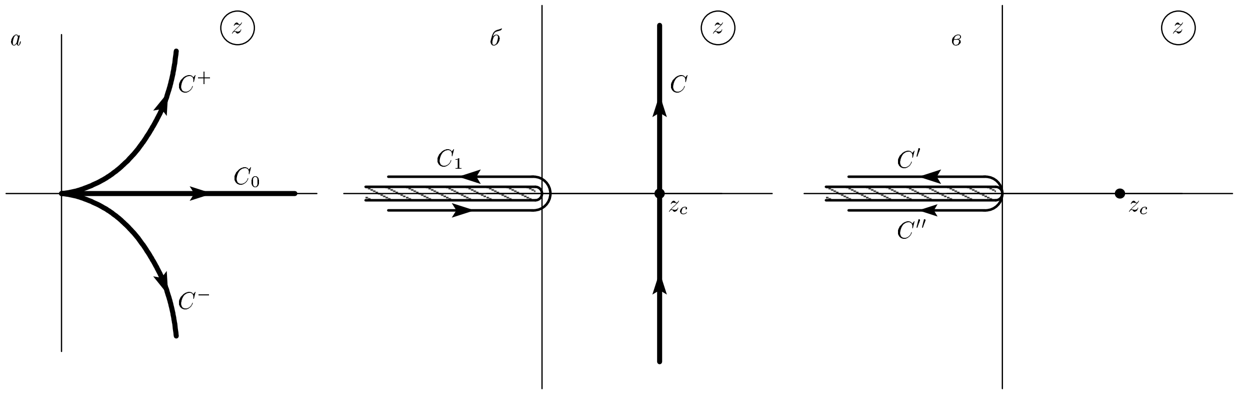

Рис. 3. *а*) Контур интегрирования C_0 в интеграле $I^+(x)$ загибается вверх или вниз при смещении g в комплексную плоскость; *б*) контур интегрирования C определяет скачок на разрезе интеграла $I^+(x)$; для вычисления интеграла он деформируется в положение C_1; *в*) при вычислении асимптотики A_K возникает полусумма интегралов по контурам C' и C''

щью деформации контура C в положение C_1, получим

$$I^+(x) \to \frac{2\pi i}{\Gamma(1+\nu)} x^\nu, \tag{76}$$

что для скачка на разрезе функции $G(g)$ дает

$$\Delta G(g) = 2\pi i \frac{BA^+}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{2S_0}{g}\right)^{M/2+r+\nu} \times \\ \times \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right). \tag{77}$$

Асимптотика Липатова для G_N получается по правилу соответствия (30),

$$G_N = \frac{BA^+}{\Gamma(1+\nu)} (2S_0)^{-N} \Gamma\left(N + M/2 + r + \nu\right), \tag{78}$$

и хорошо определена для всех $\nu > -1$. Выражение (76) соответствует рецепту, правильно сформулированному Богомольным и Фатеевым [9], хотя фактически их способ рассуждений приводит к результату с противоположным знаком[13].

Асимптотика коэффициентов A_K. Аналогично (42) имеем точное выражение для коэффициентов A_K, соответствующих величине $G(g)$:

$$A_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi} c} \int \frac{d\epsilon}{2\pi i \epsilon} \int \frac{dg}{2\pi i g} \epsilon^{(M+r-1)/2} G(g) \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{S_0 \epsilon}{g} + 1\right) - K \ln \epsilon\right\}. \tag{79}$$

[13] Такой же неправильный знак возникал в работе Балицкого [22] при вычислении асимптотики Липатова в КХД и был исправлен в обзоре Захарова [23] исходя из физических соображений.

Подставляя в качестве $G(g)$ величину $G^{(2)}(g)$ из (71) и вычисляя интегралы по g и ϵ в перевальном приближении, получим

$$A_K = \pm \frac{B}{c\,(2\pi)^2 (\ln 2)^{r/2}} \times \\ \times \Gamma\left(K + \frac{r}{2}\right) (\ln 2)^{-K} F\left(\frac{K}{\ln 2}\right). \tag{80}$$

Вертикальные контуры интегрирования по g и ϵ соответствуют «плохим» гауссовским интегралам (ср. с (44)) и согласно разд. 3 должны быть одновременно повернуты в горизонтальное положение. Знак в (80) оказывается неопределенным по той же причине, что и выше. Для его фиксации заменим $R^{-\alpha}$ на $R^{-\alpha} + \epsilon R^\alpha$ и рассмотрим перевальную конфигурацию в области параметров, где $S_{int} > 0$, что соответствует интегралу $I^-(x)$. Для нее $\det S''\{\psi_c\} > 0$ и знак в выражении (80) должен соответствовать арифметическому корню из детерминанта, что дает условие $\pm B > 0$. Формула (80) справедлива, если функция $F(x)$ хорошо определена на действительной оси. В противном случае $F(x)$ должна пониматься как полусумма $F(x+i0)$ и $F(x-i0)$, так как половина перевального вклада происходит от области $\mathrm{Im} g > 0$, а половина — от области $\mathrm{Im} g < 0$. Таким образом,

$$A_K = \frac{|B|}{c\,(2\pi)^2 (\ln 2)^{r/2}} \Gamma\left(K + \frac{r}{2}\right) \times \\ \times (\ln 2)^{-K} \mathrm{Re} F\left(\frac{K}{\ln 2} + i0\right) \tag{81}$$

и подстановка (74) дает

$$A_K = \frac{|B|\Gamma(-\nu)(A^- + A^+\cos\pi\nu)}{c\,(2\pi)^r(\ln 2)^{\nu+r/2}} \times \times \Gamma\left(K + \frac{r}{2} + \nu\right)(\ln 2)^{-K}. \quad (82)$$

Плохо определенный интеграл $I^+(x)$ понимается как полусумма интегралов по контурам C' и C'' (рис. 3*в*):

$$I^+(x) \to \frac{1}{2}\left[I^+(x+i0) + I^+(x-i0)\right] = = \Gamma(-\nu)x^\nu\cos\pi\nu \quad (83)$$

(ср. с (76)). При искусственном создании перевала путем замены $R^{-\alpha}$ на $R^{-\alpha} + \epsilon R^\alpha$ контуры C' и C'' по-прежнему соответствуют направлению наискорейшего спуска и перевальная точка z_c не дает вклада в A_K в соответствии с тем, что для нее $\det S''\{\psi_c\} < 0$ (разд. 4). Мы видим, что при степенном взаимодействии инстантонов (68) в аргументе гамма-функции появляется дополнительный по сравнению с формулой (4) вклад $\nu = d/\alpha$; фактически он актуален только при $d = 4$. При $d < 4$ взаимодействие инстантонов экспоненциальное, что соответствует $\alpha = \infty$ и $\nu = 0$: аргумент гамма-функции согласуется с (4), однако возникают дополнительные логарифмические множители (разд. 7).

Интерпретация интеграла $I^+(x)$ завершает формулировку общей схемы вычислений. Исходя из известного выражения (51) для одноинстантонного вклада строится вклад двухинстантонной конфигурации (64), в котором нужно вычислить взаимодействие инстантонов $S_{int}(\lambda, \lambda')$ в области, где оно мало; введя медленно меняющуюся функцию $F(x)$ согласно (71), можно сразу записать результат (81).

7. КОЭФФИЦИЕНТЫ A_K В ТЕОРИИ φ^4

7.1. Взаимодействие инстантонов

Действие (5) заменой[14] $\varphi_\alpha(x) = (-g)^{-1/2}\phi_\alpha(x)$ приводится к виду (15). Инстантон представляется в виде $\phi_\alpha(x) = u_\alpha\phi_c(x)$, где u_α — компоненты единичного вектора $\mathbf{u}$, а $\phi_c(x)$ есть решение уравнения

$$-\Delta\phi + m^2\phi - \phi^3 = 0. \quad (84)$$

Используя общий вид двухинстантонной конфигурации,

$$\psi_\alpha(x) = u_\alpha\phi_c(x) + u'_\alpha\phi_c(x+R) \equiv u_\alpha\phi + u'_\alpha\phi_R, \quad (85)$$

для взаимодействия инстантонов имеем

$$S_{int}\{\mathbf{u},\mathbf{u}',R\} = \int d^dx \times \times \left\{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\,\phi^3\phi_R + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')^2\phi^2\phi_R^2 + \frac{1}{2}\phi^2\phi_R^2\right\}, \quad (86)$$

где использовано определение (52) и исключены градиенты с помощью (84). При $d < 4$ можно считать $m = 1$, так как замена $x \to x/m$, $\phi \to \phi m$ исключает массу из (84), после чего она выпадает из всех безразмерных величин. Сферически-симметричное решение уравнения (84) имеет при больших $|x|$ поведение

$$\phi_c(x) = \mathrm{const}\cdot|x|^{-\mu}K_\mu(|x|) = = \mathrm{const}\cdot|x|^{(1-d)/2}e^{-|x|}, \quad (87)$$

где $\mu = (d-2)/2$, $K_\mu(x)$ — функция Мак-Дональда. Подстановка (87) в (86) показывает, что главный вклад определяется первым членом,

$$S_{int}\{\mathbf{u},\mathbf{u}',R\} \approx (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\phi_c(R+\overline{x})\int\phi_c^3(x)d^dx \approx \approx \mathrm{const}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\,R^{(1-d)/2}e^{-R}, \quad (88)$$

где $\bar{x} \sim 1$. При $d = 1$ константу можно вычислить, используя явный вид инстантона $\phi_c(x) = \sqrt{2}/\operatorname{ch}x$,

$$S_{int}\{\mathbf{u},\mathbf{u}',R\} = 16\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\,e^{-R}. \quad (89)$$

В четырехмерном случае основной интерес представляет безмассовая теория, в которой уравнение (84) имеет решение

$$\phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}\rho}{x^2+\rho^2} \quad (90)$$

с произвольным радиусом инстантона ρ. В линейной комбинации (85) следует допускать разные радиусы ρ и ρ_1 для функций ϕ и ϕ_R. Пренебрегая в (88) величиной $\bar{x}$, получим

$$S_{int}\{\mathbf{u},\mathbf{u}',\rho,\rho_1,R\} = 32\pi^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\frac{\rho\rho_1}{R^2+\rho_1^2}, \quad (91)$$

где предполагается, что

$$\rho \ll \rho_1 \sim R, \quad (92)$$

так как именно такие конфигурации представляют интерес для дальнейшего[15].

[14] Дополнительный минус по сравнению с (15) обеспечивает действительность ϕ_c. При этом в (22) и (24) происходят замены $g^{-b} \to (-g)^{-b}$ и $S_0^{-N} \to (-S_0)^{-N}$.

[15] Возможность пренебрежения перекрестными членами в (53) связана в этом случае не с большим расстоянием между инстантонами, а с различной степенью локализации ϕ_λ и $\phi_{\lambda'}$.

7.2. Результаты для $d < 4$

Исходя из известной асимптотики Липатова (формула (79) работы [18]) и используя правило соответствия (30), для одноинстантонного вклада имеем

$$Z_M^{(1)}(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_M x_M) = = ic_0\,(-g)^{-(M+r)/2}\exp\left(-S_0/g\right) \times \times \int d^d x_0\, \phi_c(x_1 - x_0)\ldots\phi_c(x_M - x_0) \times \times \int d^n u\, \delta(|u| - 1) u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_M}, \quad (93)$$

где

$$S_0 = -\frac{I_4}{4}, \quad r = n - 1 + d \quad , \quad I_p = \int d^d x\, \phi_c^p(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\left(\frac{I_6 - I_4}{d}\right)^{d/2} \times \times I_4^{(n-1)/2}\left[-\overline{D}_R(1)\overline{D}_R^{\,n-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1/2} \quad (94)$$

и $\phi_c(x)$ есть решение (84) с $m = 1$; $\overline{D}_R(1)$ и $\overline{D}_R(1/3)$ — перенормированные детерминанты, значения которых приведены ниже. По правилу комбинирования инстантонов запишем выражение для двухинстантоннго вклада:

$$G_M^{(2)}(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_M x_M) = -{c_0}^2(-g)^{-(M+2r)/2} \times \times \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) H(g) \times \times \int d^d x_0\, \phi_c(x_1 - x_0)\ldots\phi_c(x_M - x_0) \times \times \int d^n u\, \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_M},$$

$$H(g) = \int d^n u'\, \delta(|\mathbf{u}'| - 1)\int d^d x_0' \times \times \left\{\exp\left[-\frac{S_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', x_0' - x_0)}{g}\right] - 1\right\}. \quad (95)$$

Последний интеграл ($R \equiv x_0' - x_0$),

$$\int d^d R\left(\exp\left\{-\frac{AR^{(1-d)/2}e^{-R}}{g}\right\} - 1\right) \approx \approx -\frac{\sigma_d}{d}\left(\ln\left|\frac{1}{g}\right|\right)^d, \quad (96)$$

с логарифмической точностью не зависит от A (σ_d — площадь единичной сферы в d-мерном пространстве), поэтому зависимость от $\mathbf{u}'$ отсутствует и $H(g)$ получается из (96) просто умножением на σ_n. Следуя схеме разд. 6, получим результат для A_K:

$$A_K = -c_0\,\frac{2^{-M/2}}{2\pi}\,(I_4\ln 2)^{-r/2}\,\frac{\sigma_n\sigma_d}{d} \times \times \Gamma\left(K + \frac{r}{2}\right)(\ln 2)^{-K}\ln^d K. \quad (97)$$

Используя численные значения [21]

$$\begin{gathered} I_6 = 71.080, \quad I_4 = 23.402, \\ -\overline{D}_R(1) = 135.3, \quad \overline{D}(1/3) = 1.465 \end{gathered} \quad (98а)$$

для $d = 2$ и

$$\begin{gathered} I_6 = 659.87, \quad I_4 = 75.589, \\ -\overline{D}_R(1) = 10.544, \quad \overline{D}(1/3) = 1.4571 \end{gathered} \quad (98б)$$

для $d = 3$, получим формулы (9), (10), приведенные во Введении. При $d = 1$ результат можно получить не с логарифмической, а со степенной точностью по $1/K$. Интеграл (96) при $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'/g > 0$ имеет вид

$$\sigma_1\int_0^\infty dR\left(\exp\left\{-\frac{16(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\,e^{-R}}{g}\right\} - 1\right) = = -2\left(\ln\frac{16(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')}{g} + C_E\right) \quad (99)$$

и интегрирование по $\mathbf{u}'$ дает

$$\operatorname{Re} H(g + i0) = = -2\sigma_n\left(\ln\frac{16}{g} + C_E + \frac{\psi(1/2) - \psi(n/2)}{2}\right). \quad (100)$$

Переходя к выражению для A_K и используя значения параметров [4]

$$\begin{gathered} I_4 = \frac{16}{3}, \quad I_6 = \frac{128}{15}, \\ \overline{D}_R(1) = -\frac{1}{5}, \quad \overline{D}_R\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \end{gathered} \quad (101)$$

получим результат (8).

7.3. Четырехмерный случай

В четырехмерном случае выражение для одноинстантонного вклада отличается от (93) ввиду наличия лишней нулевой моды, связанной с возможностью изменения радиуса ρ инстантона. Оно получается из формулы (113) работы [19] с использованием правила соответствия (30):

$$Z_M^{(1)}(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_M x_M) = \\ = ic_0 (-g)^{-(M+r)/2} \exp(-S_0/g) \times \\ \times \int d^4 x_0 \int \frac{d\rho}{\rho^{M+5}} \exp(\nu \ln \mu\rho) \times \\ \times \phi_c\left(\frac{x_1 - x_0}{\rho}\right) \ldots \phi_c\left(\frac{x_M - x_0}{\rho}\right) \times \\ \times \int d^n u\, \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M}, \quad (102)$$

где $\phi_c(x)$ — инстантонное решение (90) с $\rho = 1$, μ — импульс нормировки заряда[16)],

$$c_0 = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \left(\frac{I_6}{4}\right)^2 J^{1/2} I_4^{(n-1)/2} \times \\ \times \left[-\overline{D}_R(1)\overline{D}_R^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1/2} \times \\ \times \exp\left[-\frac{3}{4}r + \nu\left(-\frac{1}{2}\ln 3 + C_E - \frac{1}{6}\right)\right], \quad (103) \\ r = n + 4, \quad \nu = (n+8)/3, \\ J = \int d^4 x\, 3\phi_c^2(x) \left[\partial\phi_c(x)/\partial\rho\right]^2_{\rho=1}$$

и выражения для S_0 и I_p те же, что в (94). Двухинстантонный вклад имеет вид

$$G_M^{(2)}(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_M x_M) = \\ = -{c_0}^2 (-g)^{-(M+2r)/2} \exp\left(-\frac{2S_0}{g}\right) \times \\ \times \int d^n u\, \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M} \int \frac{d\rho}{\rho^{M+5}} \exp(\nu \ln \mu\rho) \times \\ \times \int d^4 x_0 \phi_c\left(\frac{x_1 - x_0}{\rho}\right) \ldots \phi_c\left(\frac{x_M - x_0}{\rho}\right) \times \\ \times \int d^n u'\, \delta(|\mathbf{u}'| - 1) \int \frac{d\rho_1}{\rho_1^5} \exp(\nu \ln \mu\rho_1) \int d^4 x_0' \times \\ \times \left\{\exp\left[-\frac{S_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \rho, \rho_1, x_0' - x_0)}{g}\right] - 1\right\}. \quad (104)$$

С использованием соотношения[17)]

$$\int_0^\infty \frac{d\rho_1}{\rho_1^5} \exp(\nu \ln \mu\rho_1) \int d^4 R\, \delta\left(z - \frac{\rho\rho_1}{R^2 + \rho_1^2}\right) = \\ = \frac{\pi^2 \exp(\nu \ln \mu\rho)}{(\nu - 1)(\nu - 2) z^{1+\nu}} \quad (105)$$

интегралы по ρ_1 и x_0' в (104) преобразуются к виду

$$\frac{\pi^2 \exp(\nu \ln \mu\rho)}{(\nu - 1)(\nu - 2)} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1+\nu}} \exp\left(-\frac{32\pi^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')}{g} z\right) \quad (106)$$

и возникает интеграл типа (73). Следуя схеме разд. 6, для асимптотики A_K получим

$$A_K = c_0 \frac{2^{-M/2}}{(I_4 \ln 2)^{r/2}} \frac{\pi}{4} \left(\frac{64\pi^2 K}{I_4 \ln 2}\right)^\nu \times \\ \times \sigma_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)} \frac{\Gamma(-\nu)(1 + \cos \pi\nu)}{(\nu - 1)(\nu - 2)} \times \\ \times Q\, \Gamma\left(K + \frac{r}{2}\right) (\ln 2)^{-K}, \quad (107)$$

где величина

$$Q = \int \frac{d\rho}{\rho^{M+5}} \exp(2\nu \ln \mu\rho) \times \\ \times \int d^d x_0 \phi_c\left(\frac{x_1 - x_0}{\rho}\right) \ldots \phi_c\left(\frac{x_M - x_0}{\rho}\right) \times \\ \times \left[\int \frac{d\rho}{\rho^{M+5}} \exp(\nu \ln \mu\rho) \times \right. \\ \left. \times \int d^d x_0 \phi_c\left(\frac{x_1 - x_0}{\rho}\right) \ldots \phi_c\left(\frac{x_M - x_0}{\rho}\right)\right]^{-1} \quad (108)$$

существенно зависит от внешних координат $x_1, \ldots, x_M$. Выражение для нее несколько упрощается, если перейти в импульсное представление и выбрать значения внешних импульсов $\mathbf{p}_i$ порядка p, оценивая их в симметричной точке $(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = p^2(4\delta_{ij} - 1)/3)$,

$$Q = \frac{\int_0^\infty dy\, y^{2M-5+2\nu} K_1^M(y)}{\int_0^\infty dy\, y^{2M-5+\nu} K_1^M(y)} \exp\left(\frac{\nu \ln \mu}{p}\right), \quad (109)$$

где $K_1(y)$ — функция Мак-Дональда. Подстановка численных значений

$$I_4 = \frac{32}{3}\pi^2, \quad I_6 = \frac{128}{5}\pi^2, \quad J = \frac{32}{15}\pi^2, \\ \overline{D}_R(1) = -578, \quad \overline{D}_R(1/3) = 0.872 \quad (110)$$

дает

$$A_K = \frac{2^{-M/2}}{20.2} 0.842^n \frac{\Gamma(-\nu)(1 + \cos \pi\nu)}{(n+2)(n+5)} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)} Q\, \Gamma\left(K + \frac{r}{2} + \nu\right) (\ln 2)^{-K} \quad (111)$$

и численные результаты, приведенные во Введении.

---

16) Для перехода от затравочного к перенормированному заряду в формулах работы [19] нужно провести замену $\ln \Lambda\rho - \ln 2 + C_E + 1/3 \to \ln \mu\rho - (1/2)\ln 3 + C_E - 1/6$.

17) При выводе формулы (105) выясняется, что основной вклад в интеграл возникает от области $\rho_1 \sim R$. В дальнейшем ρ_1 и R велики в меру параметра $1/g$, тогда как величина ρ оказывается порядка обратного внешнего импульса. Это и оправдывает условие (92).

8. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИНСТАНТОН

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда второй инстантон хорошо локализован в пространстве, но не обладает специальной симметрией. Ввиду отсутствия мягких мод можно воспользоваться схемой разд. 4, согласно которой достаточно вычислить вклад несимметричного инстантона в липатовский интеграл (18). Полагая, как и в разд. 7,

$$\varphi_\alpha(x) = (-g)^{-1/2}\phi_\alpha(x), \quad \phi_\alpha(x) = u_\alpha \phi_c(x), \tag{112}$$

разобьем флуктуации на продольные и поперечные:

$$\begin{aligned} &\delta\varphi_\alpha(x) = \delta\varphi^L(x) u_\alpha + \delta\varphi_\alpha^T(x), \\ &\sum_\alpha \delta\varphi_\alpha^T(x) u_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{113}$$

Тогда аналогично (20) имеем

$$\begin{aligned} Z_N = e^{-N}(-g_c)^{-M/2} g_c^{-N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \times \\ \times \int D\varphi^L \int D\varphi_\alpha^T \, u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M} \, \phi_c(x_1) \ldots \phi_c(x_M) \times \\ \times \exp\left\{ \frac{Nt^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\delta\varphi^L, \hat{M}_L \delta\varphi^L\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(\delta\varphi_\alpha^T, \hat{M}_T \delta\varphi_\alpha^T\right) \right\}, \end{aligned} \tag{114}$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{M}_L = \hat{p}^2 + m^2 - 3\phi_c^2(x), \\ &\hat{M}_T = \hat{p}^2 + m^2 - \phi_c^2(x). \end{aligned} \tag{115}$$

Интегралы по продольным и поперечным флуктуациям факторизуются, и выделение нулевых мод для операторов $\hat{M}_L$ и $\hat{M}_T$ можно проводить независимо. Делая ортогональное преобразование переменных $\delta\varphi$, диагонализующее $\hat{M}_L$ и $\hat{M}_T$, проведем разбиение по схеме

$$\delta\varphi = \delta\varphi' + \delta\tilde{\varphi}, \quad D\varphi = D(\delta\varphi') D(\delta\tilde{\varphi}) \tag{116}$$

для $\delta\varphi^L$ и $\delta\varphi_\alpha^T$, где тильдой и штрихом отмечены подпространство нулевых мод и подпространство, ортогональное ему. Проводя гауссово интегрирование по ненулевым модам, имеем

$$\begin{aligned} Z_N = \frac{(-S\{\phi_c\})^{-(M+r)/2}}{(2\pi)^{1+r/2}} \times \\ \times S\{\phi_c\}^{-N} \Gamma\left(N + \frac{M+r}{2}\right) \sqrt{-\frac{D_0}{D_L'}\left(\frac{D_0}{D_T'}\right)^{n-1}} \times \\ \times \int D(\delta\tilde{\phi}^L) \, \phi_c(x_1) \ldots \phi_c(x_M) \times \\ \times \int D(\delta\tilde{\phi}_\alpha^T) \, u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M}, \end{aligned} \tag{117}$$

где $D_0 = \det S''\{0\}$, $D_L' = \det[\hat{M}_L]_{P'}$, $D_T' = \det[\hat{M}_T]_{P'}$.

Как известно, существование нулевых мод связано с симметрией действия, $S\{\phi\} = S\{\hat{L}\phi\}$, относительно некоторой непрерывной группы преобразований, определяемых оператором $\hat{L}$; тогда если ϕ_c — инстантон (т. е. решение уравнения $S'\{\phi_c\} = 0$), то и $\hat{L}\phi_c$ — тоже инстантон ($S'\{\hat{L}\phi_c\} = 0$). Воспользовавшись инфинитезимальной формой оператора $\hat{L}$, близкого к единичному, $\hat{L}_\epsilon = 1 + \epsilon\hat{T}$, легко заключить, что $\hat{T}\phi_c$ есть нулевая мода оператора $S''\{\phi_c\}$, которая, таким образом, связана с генератором группы $\hat{T}$. В рассматриваемом случае существенны следующие группы преобразований:

а) вращения в векторном пространстве,

$$\hat{L}^T \phi_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}\phi_\beta(x), \tag{118}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — элементы ортогональной матрицы;

б) трансляции

$$\hat{L}^t(x_0)\phi(x) = \phi(x + x_0)\,; \tag{119}$$

в) дилатация при $d = 4$, связанная с масштабной инвариантностью безмассовой четырехмерной теории,

$$\hat{L}^\partial(\ln\rho)\phi(x) = \rho\phi(\rho x)\,; \tag{120}$$

г) повороты в координатном пространстве,

$$\hat{L}^r\{\theta_s\}\phi(x) = \phi(\hat{g}x), \tag{121}$$

где $\hat{g} = \hat{g}\{\theta_s\}$ — ортогональная матрица, заданная углами поворота θ_s.

Преобразование (118) сводится к повороту единичного вектора $\mathbf{u}$ в (112) и порождает нулевую моду

$$h_T(x) = \phi_c(x) \tag{122}$$

оператора $\hat{M}_T$, которая в выражении (114) оказывается $(n-1)$-кратно вырожденной. Ее выделение проводится обычным образом [24] и соответствует следующей замене в формуле (117)

$$\begin{aligned} \int D(\delta\tilde{\phi}_T) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M} \to \\ \to I_2^{(n-1)/2} \int d^n u \, \delta(|u| - 1) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_M}, \end{aligned} \tag{123}$$

где интегралы I_p определены в (94). Инфинитезимальные формы операторов L^t, L^∂, L^r имеют вид

$$\begin{aligned}
&\hat{L}^t(\delta x_0) = 1 + \sum_i \delta x_{0,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv 1 + \sum_i \delta x_{0,i} \hat{T}_i^t, \\
&\hat{L}^\partial(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \left(1 + \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv 1 + \varepsilon \hat{T}^\partial, \\
&\hat{L}^r(\delta\theta_s) = 1 + \sum_s \delta\theta_s \hat{T}_s^r, \\
&\hat{T}_s^r \equiv \hat{T}_{(ij)}^r = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i},
\end{aligned} \tag{124}$$

где каждый из операторов $\hat{T}_s^r$ соответствует вращению в одной из $d(d-1)/2$ плоскостей (x_i, x_j), а индекс s нумерует эти плоскости. Соответственно имеются нулевые моды, принадлежащие оператору $\hat{M}_L$:

$$\begin{aligned}
&h_i^t(x) = \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_i}, \\
&h^\partial(x) = \phi_c(x) + \sum_i x_i \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_i}, \\
&h_s^r(x) \equiv h_{(ij)}^r(x) = x_i \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{125}$$

Наличие поворотных мод $h_s^r(x)$ специфично для сферически-несимметричного инстантона, и ранее они не рассматривались. Нетривиальные моменты связаны с неабелевостью группы преобразований и с неортогональностью базиса, построенного из векторов (125).

Полная группа преобразований определяется оператором

$$\hat{L}\{\theta_s, \ln\rho, x_0\} = \hat{L}^r\{\theta_s\} \hat{L}^\partial\{\ln\rho\} \hat{L}^t\{x_0\}, \tag{126}$$

так что

$$\hat{L} f(x) = \rho f(\hat{g}\rho(x + x_0)). \tag{127}$$

Его инфинитезимальная форма

$$\hat{L}(\delta\mu_i) = 1 + \sum_i \delta\mu_i \hat{T}_i \tag{128}$$

включает в себя в качестве $\hat{T}_i$ все генераторы $\hat{T}_i^t$, $\hat{T}^\partial$, $\hat{T}_s^r$, введенные в (124), а μ_i перечисляет переменные $x_{0,i}$, $\ln\rho$, θ_s.

Следуя схеме разд. 2, введем под интеграл (114) разложение единицы (r_L — число нулевых мод оператора $\hat{M}_L$):

$$\begin{aligned}
1 &= \prod_{i=1}^{r_L} \int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i - \frac{\int d^d x \phi^4(x) f^{(i)}(x)}{\int d^d x \phi^4(x)}\right) = \\
&= (I_4)^{r_L} \prod_{i=1}^{r_L} \int d\lambda_i\, \delta\left(\lambda_i \int d^d x\, 4\phi_c^3(x)\delta\phi(x) - \right.\\
&\qquad \left. - \int d^d x\, 4\phi_c^3(x)\delta\phi(x) f^{(i)}(x)\right),
\end{aligned} \tag{129}$$

где мы несколько конкретизировали вид функционалов $f_i\{\phi\}$ в (21)[18], введя функции координат $f^{(i)}(x)$, провели разложение вблизи перевальной конфигурации и выбрали инстантон из условия

$$\lambda_i = \frac{\int d^d x\, \phi_c^4(x) f^{(i)}(x)}{\int d^d x\, \phi_c^4(x)}. \tag{130}$$

Чтобы выявить произвол в выборе инстантона, представим $\phi_c(x)$ как результат воздействия оператора $\hat{L}^{-1}$ на некоторую фиксированную функцию $\bar{\phi}_c(x)$,

$$\phi_c(x) = \hat{L}^{-1} \bar{\phi}_c(x) = \frac{1}{\rho} \bar{\phi}_c \left(\frac{\hat{g}^{-1} x}{\rho} - x_0\right). \tag{131}$$

Тогда

$$\lambda_i = \frac{\displaystyle\int d^d x\, \bar{\phi}_c^4(x) \rho^{-1} \hat{L}\{\theta_s, \ln\rho, x_0\} f(x)}{\displaystyle\int d^d x\, \bar{\phi}_c^4(x)} \equiv F^{(i)}\{\theta_s, \ln\rho, x_0\}. \tag{132}$$

Разложив $\delta\phi(x)$ по ортонормированным собственным функциям $e_j(x)$ оператора $\hat{M}_L$, имеем

$$\delta\phi(x) = \sum_{j=1}^{r_L} C_j e_j(x) + \ldots = \sum_{j=1}^{r_L} B_j h_j(x) + \ldots, \tag{133}$$

где мы выделили члены, соответствующие подпространству нулевых мод, и переразложили их по функциям (125). Интегрирование $D(\delta\tilde{\phi}^L)$ в (117) есть фактически интегрирование по коэффициентам C_j:

$$\int D(\delta\tilde{\phi}_L) \to \int \prod_{j=1}^{r_L} dC_j = \int (\det\Gamma)^{1/2} \prod_{j=1}^{r_L} dB_j, \tag{134}$$

где Γ — матрица Грамма, построенная на векторах (125). Подставляя (133) в (129) и учитывая, что

$$\int d^d x\, 4\phi_c^3(x) h_j(x) = 0 \tag{135}$$

[18] Фактически результаты не зависят от этого выбора, что проявляется в выпадении функций $f^{(i)}(x)$ из окончательной формулы (141).

для всех нулевых мод $h_j(x)$, имеем

$$1 = (I_4)^{r_L} \prod_i \int d\lambda_i \times$$
$$\times \delta \left(-\sum_j B_j \int d^d x \, 4\phi_c^3(x) f^{(i)}(x) h_j(x) + \ldots \right). \quad (136)$$

Далее легко показать, что

$$\int d^d x \, 4\phi_c^3(x) h_j(x) f^{(i)}(x) = = -\int d^d x \, \phi_c^4(x) \hat{T}_j f^{(i)}(x) \quad (137)$$

для трансляций и поворотов, тогда как для дилатаций справедлива аналогичная формула с $\hat{T}_j \to \hat{T}_j - 1$. Сделаем в (132) вариацию переменных $\theta_s \to \theta_s + \delta\theta_s$, $\ln\rho \to \ln\rho + \varepsilon$, $x_0 \to x_0 + \delta x_0$ и учтем групповое соотношение

$$\hat{L}\left\{\theta_s + \delta\theta_s, \ln\rho + \varepsilon, x_0 + \delta x_0\right\} = = \hat{L}\left\{\delta\theta'_s, \varepsilon', \delta x'_0\right\} \hat{L}\left\{\theta_s, \ln\rho, x_0\right\}, \quad (138)$$

где штрихованные и нештрихованные приращения не совпадают (из-за неабелевости группы), а связаны линейным преобразованием. Нетрудно показать, что $\varepsilon' = \varepsilon$, $\delta x'_0 = \hat{g}\rho\delta x_0$, а связь $\delta\theta'_s$ с $\delta\theta_s$ определяется соотношением [25]

$$\hat{g}\{\theta_s + \delta\theta_s\} = \hat{g}\{\delta\theta'_s\}\hat{g}\{\theta_s\} \quad \text{или} \quad \delta\theta_s = \sum_{s'} J_{ss'}\{\theta_s\}\delta\theta'_{s'}. \quad (139)$$

Воспользовавшись инфинтезимальной формой оператора $\hat{L}\{\delta\theta'_s, \varepsilon', \delta x'_0\}$, получим из (132)

$$\frac{\int d^d x \, \phi_c^4(x) \hat{T}_j^t f^{(i)}(x)}{\int d^d x \, \phi_c^4(x)} = \frac{1}{\rho} \sum_l g_{jl} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_{0,l}},$$
$$\frac{\int d^d x \, \phi_c^4(x) (\hat{T}^\partial - 1) f^{(i)}(x)}{\int d^d x \, \phi_c^4(x)} = \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \ln\rho}, \quad (140)$$
$$\frac{\int d^d x \, \phi_c^4(x) \hat{T}_s^r f^{(i)}(x)}{\int d^d x \, \phi_c^4(x)} = \sum_{s'} J_{s's}\{\theta_s\} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \theta_{s'}}.$$

Подставляя (137) и (140) в (136) и вставляя полученное разложение единицы в (134), получим

$$\int \prod_j dC_j = \int \prod_i d\lambda_i \frac{\rho^d (\det\Gamma)^{1/2}}{\det\left\|\partial F^{(i)}/\partial\mu_j\right\| \det J\{\theta_s\}} = = \int \prod_j d\mu_j \frac{\rho^d (\det\Gamma)^{1/2}}{\det J\{\theta_s\}} = = \int \frac{\rho^d (\det\Gamma)^{1/2}}{\det J\{\theta_s\}} d^d x_0 \, d\ln\rho \prod_s d\theta_s = = \int \rho^d (\det\Gamma)^{1/2} d^d x_0 \, d\ln\rho \, d\tau_g, \quad (141)$$

где учтено, что величина $\prod_s d\theta_s / \det J\{\theta_s\}$ является определением инвариантной меры интегрирования $d\tau_g$ по группе вращений [25]. Используя (131) и делая замену $x_{0,i} \to x_{0,i}/\rho$, получим искомое правило перехода к коллективным переменным

$$\int D(\delta\tilde{\phi}_L)\phi_c(x_1)\ldots\phi_c(x_M) \to \to \int (\det\Gamma)^{1/2} d^d x_0 \, d\ln\rho \, d\tau_g \, \rho^{-M} \times$$
$$\times \bar{\phi}_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_1 - x_0)}{\rho}\right) \ldots \bar{\phi}_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_M - x_0)}{\rho}\right), \quad (142)$$

справедливое при $d = 4$; результат для $d < 4$ получается, если положить $\rho = 1$ и устранить интегрирование по $\ln\rho$. Выражение для инвариантной меры $d\tau_g$ зависит от способа параметризации матрицы $\hat{g}$ и при использовании эйлеровых углов θ_l^k имеет вид

$$d\tau_g = \prod_{k=1}^{d-1} \prod_{l=1}^{k} \sin^{l-1}\theta_l^k d\theta_l^k, \quad 0 \le \theta_1^k < 2\pi, \quad 0 \le \theta_l^k < \pi \quad (l \ne 1). \quad (143)$$

При введении эйлеровых углов в d-мерном пространстве матрица поворота представляется в виде [26]

$$\hat{g} = \hat{g}^{(d-1)} \ldots \hat{g}^{(2)}\hat{g}^{(1)}, \quad \hat{g}^{(k)} = \hat{g}_1(\theta_1^k)\hat{g}_2(\theta_2^k)\ldots\hat{g}_k(\theta_k^k),$$

где $\hat{g}_i(\theta) \equiv \hat{g}_{i+1,i}(\theta)$, $\hat{g}_{ij}(\theta)$ — матрица поворота на угол θ в плоскости (x_i, x_j). Замена (131) делается также в матрице Грамма, в результате чего она оказывается зависящей от коллективных переменных. Фактически зависимость от ρ факторизуется, $(\det\Gamma)^{1/2} = \rho^{-4}(\det\overline{\Gamma})^{1/2}$ (при $d = 4$), а зависимость от x_0 исключается ввиду возможности перехода к линейным комбинациям строк и столбцов под знаком детерминанта; по-видимому, отсутствует и зависимость от углов поворота[19)].

[19)] При замене $y = \hat{g}x$ генераторы T_i преобразуются друг через друга. При $d = 2$ и $d = 3$ детерминант преобразования равен единице и зависимость $\det\Gamma$ от $\hat{g}$ отсутствует; по-видимому, это верно и в общем случае.

Неортогональность нулевых мод $h_i(x)$ учитывается также при преобразовании детерминантов по Брезану и Паризи (см. обозначения в [4, 19]),

$$\begin{aligned} &\frac{D'_L}{D_0} = \frac{\det\Gamma}{\det G}\overline{D}(1), \quad \overline{D}(1) = \lim_{z\to 1}\frac{D(z)}{(1-z)^{r_L}}, \\ &\frac{D'_T}{D_0} = \frac{I_2}{I_4}\overline{D}\left(\frac{1}{3}\right), \quad \overline{D}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to 1/3}\frac{D(z)}{(1-3z)}, \end{aligned} \tag{144}$$

в результате чего матрица Грамма исчезает из выражения (117), а вместо нее появляется матрица G с элементами

$$G_{ij} = 3\int d^d x h_i(x)\phi_c^2(x)h_j(x), \tag{145}$$

зависимость которой от коллективных переменных такая же, как для Γ. В результате для $d=4$ имеем

$$\begin{aligned} Z_N = {} & \frac{(-S\{\phi_c\})^{-(M+r)/2}}{(2\pi)^{1+r/2}} S\{\phi_c\}^{-N} \times \\ & \times \Gamma\left(N + \frac{M+r}{2}\right)\left[-\overline{D}(1)\overline{D}^{\,n-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1/2} \times \\ & \times I_4^{(n-1)/2}\int d^n u\,\delta(|\mathbf{u}|-1)u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_M} \times \\ & \times \int d^d x_0\, d\ln\rho\, d\tau_g \times \\ & \times (\det\overline{G})^{1/2}\rho^{-4-M}\bar{\phi}_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_1-x_0)}{\rho}\right)\dots \\ & \dots\bar{\phi}_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_M-x_0)}{\rho}\right), \end{aligned} \tag{146}$$

тогда как при $d<4$ нужно положить $\rho=1$ и устранить интегрирование по $\ln\rho$. Перенормировка детерминантов проводится обычным образом [19, 24] путем выделения расходящихся множителей и компенсации их контрчленами. В результате при $d<4$ величины $\overline{D}(1)$ и $\overline{D}(1/3)$ просто заменяются на $\overline{D}_R(1)$ и $\overline{D}_R(1/3)$, тогда как при $d=4$ происходит замена

$$\begin{aligned} & \left[-\overline{D}(1)\overline{D}^{\,n-1}(1/3)\right]^{-1/2} \to \\ & \to \left[-\overline{D}_R(1)\overline{D}_R^{\,n-1}(1/3)\right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp(\nu\ln\mu\rho)\exp\left[-\frac{3}{4}r + \nu\left(\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{\widetilde{I}_4}{I_4}\right)\right], \end{aligned} \tag{147}$$

где

$$\widetilde{I}_4 = \int\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\left\langle\phi_c^2\right\rangle_q^2 \ln q \tag{148}$$

и $\left\langle\phi_c^2\right\rangle_q$ — фурье-компонента функции $\phi_c^2(x)$.

Чтобы перейти к асимптотике A_K (разд. 4), нужно сделать замену $\phi_c \to \psi_c$, $r \to r'$ во всех выражениях и представить (146) в виде (49). Тогда для A_K имеем формулу (47) с параметрами (50), где $S_1 = S\{\psi_c\}$, $b_1 - b = d(d-1)/4$ и

$$\begin{aligned} c_1 = {} & \frac{(-S_1)^{-(M+r')/2}}{(2\pi)^{1+r'/2}}\left[\overline{D}_R(1)\overline{D}_R^{\,n-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1/2} \times \\ & \times I_4^{(n-1)/2}\int d^n u\delta(|\mathbf{u}|-1)u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_M} \times \\ & \times \int d^d x_0\, d\tau_g\, (\det\overline{G})^{1/2}\psi_c\left(\hat{g}^{-1}(x_1-x_0)\right)\dots \\ & \dots\psi_c\left(\hat{g}^{-1}(x_M-x_0)\right) \end{aligned} \tag{149}$$

при $d<4$ и

$$\begin{aligned} c_1 = {} & \frac{(-S_1)^{-(M+r')/2}}{(2\pi)^{1+r'/2}}\left[\overline{D}_R(1)\overline{D}_R^{\,n-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1/2} \times \\ & \times I_4^{(n-1)/2}\exp\left[-\frac{3}{4}r + \nu\left(\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{\tilde{I}_4}{I_4}\right)\right] \times \\ & \times \int d^n u\delta(|\mathbf{u}|-1)u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_M} \times \\ & \times \int d^d x_0\, d\ln\rho\, d\tau_g(\det\overline{G})^{1/2}\rho^{-4-M} \times \\ & \times \exp(\nu\ln\mu\rho)\psi_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_1-x_0)}{\rho}\right)\dots \\ & \dots\psi_c\left(\frac{\hat{g}^{-1}(x_M-x_0)}{\rho}\right) \end{aligned} \tag{150}$$

для $d=4$; здесь $r' = r + d(d-1)/2$. Все входящие сюда величины могут быть вычислены, если известна форма инстантона $\psi_c(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
3. C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. Lett. **38**, 306 (1977).
4. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
5. G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky, N. E. Kulagin at al., Physica D **44**, 168 (1990); Г. Л. Алфимов, Математическое моделирование **2**, 67 (1990); Г. Л. Алфимов, Известия Академии Наук, серия физическая, **60**, 12 (1996).
6. А. Г. Ушверидзе, ЯФ **30**, 845 (1979); **32**, 1446 (1980).

7. G. G. Leptukh and A. G. Ushveridze, J. Phys. A **14**, 3085 (1981).

8. E. Brézin, G. Parisi, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **16**, 408 (1977).

9. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **71**, 93 (1977).

10. E. B. Bogomolny, Phys. Lett. B **91**, 431 (1980).

11. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. N. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A — Physics Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, **2**, 247 (1980), Harwood Academic Press, NY.

12. J. Zinn-Justin, Phys. Rep. **70**, 109 (1981); J. Math. Phys. **22**, 511 (1981); **25**, 549 (1984); Nucl. Phys. B **192**, 125 (1981); **218**, 333 (1983).

13. E. B. Bogomolny, Phys. Lett. B **67**, 193 (1977).

14. G. Parisi, Phys. Lett. B **66**, 167 (1977).

15. C. M. Bender and T. T. Wu, Phys. Rev. D **7**, 1620 (1973).

16. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **76**, 210 (1978).

17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва, (1976).

18. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 1896 (1997).

19. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).

20. J. S. Langer, Ann. Phys. **41**, 108 (1967).

21. E. Brezin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).

22. I. I. Balitsky, Phys. Lett. B **273**, 282 (1991).

23. V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **385**, 452 (1992).

24. И. М. Суслов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).

25. М. Хамермеш, *Теория групп и ее применения к физическим проблемам*, Мир, Москва (1966).

26. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, Москва (1965).