

# КОЛЛЕКТИВНЫЕ МОДЫ В КВАЗИДВУМЕРНЫХ ПРОВОДНИКАХ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

*О. В. Кириченко, В. Г. Песчанский\*, Д. И. Степаненко*

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина  
Национальной академии наук Украины  
61103, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 8 июня 2004 г.

Теоретически исследовано распространение электромагнитных и спиновых волн в слоистых проводниках с квазидвумерным законом дисперсии носителей заряда в присутствии внешнего магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}_0$ . В слоистых проводниках дрейфовая скорость электрона  $\mathbf{v}_D$  вдоль направления  $\mathbf{B}_0$  является осциллирующей функцией угла между магнитным полем и нормалью к слоям. При некоторых ориентациях магнитного поля относительно слоев проводника скорость  $\mathbf{v}_D$  близка к нулю. Для этих направлений бесстолкновительное поглощение отсутствует и возможно распространение слабозатухающих волн даже в условиях сильной пространственной дисперсии. В коротковолновом пределе возможно существование коллективных мод с частотами в окрестности резонансов при произвольной ориентации волнового вектора  $\mathbf{k}$  относительно  $\mathbf{B}_0$ . Аналогичные типы возбуждений в квазиизотропных металлах возможны, лишь когда вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен направлению внешнего магнитного поля.

PACS: 72.15.Nj

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время активно исследуются слоистые структуры, обладающие металлическим типом проводимости и сильной анизотропией электропроводности. К их числу относятся большое семейство органических проводников на основе тетрагидрофурана, диалкогениты переходных металлов, графит и др. В этих веществах в отсутствие внешнего магнитного поля электропроводность вдоль слоев  $\sigma_{\parallel}$  на несколько порядков превышает электропроводность поперек слоев  $\sigma_{\perp}$ . Резкая анизотропия кинетических коэффициентов слоистых проводников является следствием квазидвумерности их электронного энергетического спектра. Максимальная скорость движения электронов с энергией Ферми  $\varepsilon_F$  вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к слоям,  $v_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , много меньше характерной скорости движения электронов в плоскости слоев,  $v_F$ , а их энергия слабо зависит от проекции импульса  $p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$  и может быть представлена в виде быстросходящегося ряда

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(p_x, p_y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(p_x, p_y, \eta) \cos \frac{np_z}{p_0}. \quad (1)$$

Функции  $\varepsilon_n(p_x, p_y, \eta)$  существенно убывают с ростом их номера, наибольшая из них  $\varepsilon_1(p_x, p_y, \eta) \sim \eta \varepsilon_F$ . Здесь  $\eta = (\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel})^{1/2}$  — параметр квазидвумерности проводника,  $p_0 = \hbar/a$ ,  $\hbar$  — постоянная Планка. Формула (1) соответствует приближению сильной связи, когда мало перекрытие электронных оболочек атомов, принадлежащих различным слоям, и расстояние  $a$  между ними значительно превышает межатомное расстояние внутри слоя. Поверхность Ферми (ПФ)  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$  для носителей заряда с законом дисперсии (1) является открытой со слабой гофрировкой вдоль оси  $p_z$ , при этом она может быть многолистной и состоять из топологически различных элементов, например, цилиндров и плоскостей. В дальнейшем будем полагать, что ПФ слоистого проводника представляет собой слабогофрированную цилиндр, все сечения которого плоскостью  $p_B = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}_0)/B_0 = p_z \cos \vartheta + p_x \sin \vartheta = \text{const}$  замкнуты при  $\pi/2 - \vartheta > \eta$ , где  $\mathbf{B}_0 = (B_0 \sin \vartheta, 0, B_0 \cos \vartheta)$  — индукция внешнего магнитного поля. Многочислен-

\*E-mail: vpeschansky@ilt.kharkov.ua

ные экспериментальные исследования магнитных осцилляций показывают, что такова ПФ у значительной части органических проводников на основе тетраафульвалена [1–3].

В нормальных металлах, помещенных в магнитное поле, при низких температурах могут существовать различные слабозатухающие коллективные моды бозевого типа — электромагнитные, звуковые и спиновые волны. Исследованию электромагнитных и спиновых волн в квазиизотропных металлах посвящено большое количество работ, обзор результатов изложен в монографиях [4, 5] и др. В настоящей работе рассмотрены коллективные моды в слоистых проводниках с квазидвумерным электронным энергетическим спектром. Волновые процессы в слоистых проводниках отличаются рядом особенностей, связанных с топологией ПФ. При некоторых ориентациях магнитного поля относительно слоев проводника проекция скорости электрона на направление  $\mathbf{B}_0$ , усредненная за период движения по циклотронной орбите, является пренебрежимо малой величиной. Для этих направлений  $\mathbf{B}_0$  бесстолкновительное поглощение отсутствует и возможно распространение слабозатухающих волн даже в условиях сильной пространственной дисперсии.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ

Кинетические свойства системы фермионов в электромагнитном поле описываются уравнением для матрицы плотности и системой уравнений Максвелла. Рассмотрим квазиклассический случай  $\hbar\omega_B \lesssim T \ll \eta\varepsilon_F$ , когда квантование уровней энергии носителей заряда в магнитном поле не оказывает существенного влияния на величину намагниченности  $\mathbf{M}$  и квантовая осциллирующая часть намагниченности не превышает ее парамагнитную часть. Здесь  $\omega_B$  — циклотронная частота электронов проводимости,  $T$  — температура. В этих условиях матрица плотности в квазиклассическом приближении представляет собой оператор в пространстве спиновых переменных и квазиклассическую функцию, зависящую от координат и импульсов. Уравнение для одночастичной матрицы плотности имеет вид

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [\hat{\varepsilon}, \hat{\rho}]_S + \frac{1}{2} \{ \hat{\varepsilon}, \hat{\rho} \} + \frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\varepsilon} \} + e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left( \left[ \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[ \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \right) = \hat{I}_{coll}, \quad (2)$$

где  $[\hat{\varepsilon}, \hat{\rho}]_S$  — коммутатор матриц в пространстве спиновых переменных,  $\{ \hat{\varepsilon}, \hat{\rho} \}$  — классическая скобка Пуассона,  $\hat{I}_{coll}$  — оператор столкновений,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^\sim(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}^\sim(\mathbf{r}, t)$  — высокочастотное поле. Оператор

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\beta} - \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \quad (3)$$

представляет собой сумму энергии квазичастицы в одноэлектронном приближении в магнитном поле и энергии квазичастицы за счет эффектов межэлектронного взаимодействия, которую в рамках теории ферми-жидкости Ландау — Силина [6, 7] можно записать в виде

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \mathbb{L}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \delta \hat{\rho}(\mathbf{p}', \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}', t). \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbb{L}(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{p}', \hat{\boldsymbol{\sigma}}') = L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (5)$$

— корреляционная функция Ландау,  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $\mu_0$  — магнитный момент электрона проводимости,  $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули,  $\delta \hat{\rho}$  — неравновесная добавка к матрице плотности. Зависящее от операторов спина слагаемое в правой части (5) соответствует обменному взаимодействию электронов.

Переменные электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{B}^\sim(\mathbf{r}, t)$  поля определяются из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}^\sim &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^\sim}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B}^\sim = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

дополненных материальным уравнением для плотности тока, индуцированного в среде,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= e \text{Sp}_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \hat{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, t) \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}} + \\ &+ c\mu_0 \text{rot } \text{Sp}_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \boldsymbol{\sigma} \hat{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Для углов  $\vartheta$  между векторами  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{n}$ , не слишком близких к  $\pi/2$ , а именно,  $\pi/2 - \vartheta \gg \eta$ , замкнутые электронные орбиты в импульсном пространстве почти неразличимы при различных значениях проекции импульса на направление магнитного поля, а площадь  $S(\varepsilon, p_B)$  сечения ПФ плоскостью  $p_B = \text{const}$  и компоненты скорости  $\mathbf{v} = \partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p}$

электронов проводимости в плоскости слоев  $v_x, v_y$  слабо зависят от  $p_B$ . Это означает, что энергия квазичастиц в одноэлектронном приближении, корреляционная функция Ландау и циклотронная частота могут быть разложены в асимптотический ряд по параметру квазидвумерности  $\eta$ , причем главный член асимптотики не зависит от  $p_B$ . В нулевом приближении по  $\eta$  функции  $L(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  и  $S(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  могут быть представлены в виде рядов Фурье

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(\varepsilon_F) e^{in(\varphi-\varphi')},$$

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\varepsilon_F) e^{in(\varphi-\varphi')}. \quad (8)$$

В качестве переменных в  $\mathbf{p}$ -пространстве выбраны интегралы движения носителей заряда в магнитном поле,  $\varepsilon$  и  $p_B$ , а также фаза скорости электрона,  $\varphi = \omega_B t_1$ , где  $t_1$  — время движения по траектории  $\varepsilon = \varepsilon_F, p_B = \text{const}$ . Из-за симметрии  $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{p}', \hat{\boldsymbol{\sigma}}') = \mathbb{L}(\mathbf{p}', \hat{\boldsymbol{\sigma}}', \mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$  относительно перестановки аргументов коэффициенты в (4) связаны соотношениями  $L_{-n} = L_n, S_{-n} = S_n$ . Учет следующих членов разложения корреляционной функции по степеням  $\eta$  приводит лишь к пренебрежимо малым поправкам к спектру коллективных мод.

Вместо матричного уравнения (2) удобно перейти к системе из четырех уравнений для функции распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \text{Sp}_{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\rho}$$

и спиновой плотности

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma} \hat{\rho}).$$

Одно из уравнений получится, если применить операцию взятия следа по спиновым переменным к матричному уравнению для  $\hat{\rho}$ , а три других — если операцию  $\text{Sp}$  применить к исходному уравнению (2), умноженному на  $\boldsymbol{\sigma}$ . Функция  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  вместе со вторым слагаемым правой части (7) описывает парамагнитные спиновые волны, предсказанные Силиным [8] и обнаруженные экспериментально Данифером и Шульцем [9] в щелочных металлах.

Для малых отклонений электронной системы от равновесного состояния функции  $f$  и  $\mathbf{g}$  можно представить в виде сумм равновесных частей и малых неравновесных добавок,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\varepsilon) - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{g}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Здесь  $f_0(\varepsilon)$  — фермиевская функция,  $\mathbf{g}_0(\varepsilon) = -\mu \mathbf{B}_0 (\partial f_0 / \partial \varepsilon)$ . Интеграл от  $\mu_0 \mathbf{g}_0(\varepsilon)$  по элементарной ячейке в  $\mathbf{p}$ -пространстве представляет собой намагниченность  $\mathbf{M}_0 = \chi_0 \mathbf{B}_0$  в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}_0$ ,  $\chi_0 = \mu_0 \mu \nu(\varepsilon_F)$  — статическая парамагнитная восприимчивость,  $\nu(\varepsilon_F)$  — плотность состояний на уровне Ферми. Неравновесная добавка к функции распределения удовлетворяет линеаризованному уравнению Больцмана

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) (\psi + \langle L\psi \rangle) + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \hat{I}_{coll}^{(1)}, \quad (9)$$

а кинетическое уравнение для возмущения спиновой плотности в случае, когда векторы  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\mathbf{B}_0$  перпендикулярны, согласно [8] имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) (\boldsymbol{\xi} + \langle S\boldsymbol{\xi} \rangle) - \\ - \frac{2\mu}{\hbar} [\mathbf{B}_0 \times (\boldsymbol{\xi} + \langle S\boldsymbol{\xi} \rangle)] - \\ - \mu_0 \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{B}^{\sim}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2\mu\mu_0}{\hbar} [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}^{\sim}] = \hat{I}_{coll}^{(2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где угловые скобки означают усреднение по поверхности Ферми:

$$\langle L\psi \rangle \equiv \int \frac{2d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \left( -\frac{\partial f_0(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \right) L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t).$$

Интегралы столкновений  $\hat{I}_{coll}^{(1)}, \hat{I}_{coll}^{(2)}$  определяют характерные времена релаксации импульса  $\tau_1$  и спиновой плотности  $\tau_2$ , ( $\tau_2 \gg \tau_1$ ). В дальнейшем будем рассматривать процессы, соответствующие области частот

$$\omega \gg \tau^{-1} = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1},$$

в которой асимптотика спектра коллективных мод вообще не зависит от конкретного вида интеграла столкновений,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор.

Система уравнений (6)–(10) описывает собственные колебания электромагнитного поля и спиновой плотности в слоистых проводниках с произвольными энергетическим спектром и корреляционной функцией.

### 3. ЦИКЛОТРОННЫЕ ВОЛНЫ

Характерным как для твердотельной, так и для газовой плазмы типом возмущений являются так

называемые циклотронные волны. Эти волны с частотами в окрестности циклотронного резонанса  $\omega \approx n\omega_B$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  распространяются преимущественно перпендикулярно внешнему магнитному полю в условиях нелокальной связи плотности тока и электрического поля. В настоящем разделе ограничимся одноэлектронным приближением без учета ферми-жидкостного взаимодействия носителей заряда.

Полагая пространственно-временную зависимость всех переменных величин в виде  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , из уравнений Максвелла (6) нетрудно получить дисперсионное уравнение, определяющее спектр  $\omega(\mathbf{k})$  собственных колебаний электромагнитного поля:

$$\det \left[ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$$

— тензор диэлектрической проницаемости,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ &\times \int dp_B \frac{m^* \omega_B^{-1}}{1 - \exp \frac{2\pi i}{\omega_B} (\omega - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi)} \int_0^{2\pi} d\varphi v_i(\varphi) \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 v_j(\varphi - \varphi_1) \exp \left( i \frac{\tilde{\omega}}{\omega_B} \varphi_1 - iR(\varphi, \varphi_1) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

— тензор проводимости,

$$R(\varphi, \varphi_1) \equiv \frac{1}{\omega_B} \int_{\varphi - \varphi_1}^{\varphi} d\varphi' \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi'),$$

$m^*$  — циклотронная эффективная масса носителей заряда,

$$\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi'), \quad \tilde{\omega} = \omega + i0.$$

Если волновой вектор  $\mathbf{k} = (k \sin \phi, 0, k \cos \phi)$  находится в плоскости  $xz$ , то, раскрывая определитель, получим

$$A \left( \frac{kc}{\omega} \right)^4 + B \left( \frac{kc}{\omega} \right)^2 + C = 0, \quad (13)$$

где

$$A = \varepsilon_{xx} \sin^2 \phi + 2\varepsilon_{xz} \sin \phi \cos \phi + \varepsilon_{zz} \cos^2 \phi,$$

$$\begin{aligned} B &= -\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - (\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xy}^2) \cos^2 \phi - \\ &- (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) \sin^2 \phi + \varepsilon_{xz}^2 + 2(\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yy}) \times \\ &\times \sin \phi \cos \phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \det [\varepsilon_{ij}] = \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy}^2 + \\ &+ 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz}^2, \end{aligned}$$

$\phi$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ .

В случае сильной пространственной дисперсии,  $kr_0 \gg 1$ ,  $\eta kr_0 \sim 1$ , где  $r_0 = v_F/\omega_B$  — лармовский радиус электрона проводимости, интегралы по  $\varphi, \varphi_1$  в формуле (12) вычисляются по методу стационарной фазы [10], причем, если  $\omega \sim \omega_B$ , то стационарные точки определяются из уравнений  $v_x(\varphi) = 0$ ,  $v_x(\varphi - \varphi_1) = 0$ . Легко заметить, что максимальной из компонент тензора  $\sigma_{ij}$  будет  $\sigma_{yy}$ , пропорциональная  $(kr_0)^{-1}$ , разложение компонент  $\sigma_{xj}$  ( $j = x, y, z$ ) по степеням  $(kr_0)^{-1}$  начинается с членов более высокого порядка малости, компоненты  $\sigma_{z\alpha}$  ( $\alpha = x, y$ ) пропорциональны  $\eta$ , а  $\sigma_{zz} \propto \eta^2$ . В основном приближении по малым параметрам  $(kr_0)^{-1}$  и  $\eta$  получим из (13) следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{yy}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{e^2 m^* \omega_B^{-1}}{2\pi^2 \hbar^3} \times \\ &\times \int dp_B \frac{1}{1 - \exp \left( 2\pi i \frac{\tilde{\omega} - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi}{\omega_B} \right)} \times \\ &\times \sum_\alpha \kappa(\varphi^{(\alpha)}) \left\{ \left| \det \left( R''_{\varphi\varphi_1} \left( \varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)} \right) \right) \right| \right\}^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\omega_B} \varphi_1^{(\alpha)} - iR \left( \varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)} \right) + i \frac{\pi}{4} s \right] \times \\ &\times v_y(\varphi^{(\alpha)}) v_y(\varphi^{(\alpha)} - \varphi_1^{(\alpha)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Суммирование проводится по всем стационарным точкам  $\varphi^{(\alpha)} = (\varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)})$ ,  $\kappa(\varphi^{(\alpha)}) = 1$ , если стационарная точка находится внутри области интегрирования  $0 < \varphi^{(\alpha)} < 2\pi$ ,  $0 < \varphi_1^{(\alpha)} < 2\pi$  и  $\kappa(\varphi^{(\alpha)}) = 1/2$ , если она расположена на границе области,  $s = \text{sign} R''_{\varphi\varphi_1} \left( \varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)} \right) = \nu_+(R''_{\varphi\varphi_1}) - \nu_-(R''_{\varphi\varphi_1})$ , где  $\nu_+(R''_{\varphi\varphi_1})$  и  $\nu_-(R''_{\varphi\varphi_1})$  — числа соответственно положительных и отрицательных собственных

значений матрицы  $R''_{\varphi\varphi_1} \equiv \partial^2 R(\varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)})/\partial\varphi\partial\varphi_1$ . Зависимость циклотронной частоты от  $p_B$  следует учитывать только в выражении  $k_x v_x/\omega_B$  в показателе экспоненты при условии, что  $\eta k v_F \sim \omega_B$ , поэтому мы вынесли  $m^* \omega_B^{-1}$  из-под знака интеграла.

Вне области значений  $\omega, \mathbf{k}$ , соответствующей условию

$$|\omega - n\omega_B| > \max |\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi|, \quad (16)$$

подынтегральное выражение в формуле (15) имеет полюс и после интегрирования по  $p_B$  дисперсионное уравнение приобретает мнимую часть, ответственную за сильное поглощение волны. В слоистых проводниках дрейфовая скорость  $\mathbf{v}_B = \langle \mathbf{v} \rangle_\varphi$  электронов вдоль магнитного поля осциллирует с изменением угла  $\vartheta$  между магнитным полем и нормалью к слоям. Для некоторых направлений  $\mathbf{B}_0$  относительно слоев проводника значение  $\mathbf{v}_B$  близко к нулю и затухание Ландау в магнитном поле отсутствует. При этом затухание волны определяется столкновительными процессами и существование коллективных мод возможно даже при условии  $\eta k v_F \gtrsim \omega_B$ . В области значений  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  таких, что  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_m \gg \omega_B$ ,  $\omega \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_m$ , где  $\mathbf{v}_m$  — максимальное значение скорости в направлении  $\mathbf{k}$ , существуют решения дисперсионного уравнения (14) в области резонанса

$$\omega = n\omega_B + \Delta\omega, \quad (17)$$

где  $n\omega_B$  — частота, соответствующая циклотронному резонансу,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , а  $|\Delta\omega|$  находится в интервале  $0 < |\Delta\omega| < \omega_B$ .

Учтем в формуле (1) для закона дисперсии носителей заряда лишь нулевое и первое слагаемые. Пренебрегая анизотропией в плоскости слоев и полагая  $\varepsilon_1(p_x, p_z)$  постоянной величиной, равной  $\eta v_F p_0$  ( $v_F = \sqrt{2\varepsilon_F/m}$ ,  $m = \text{const}$  — эффективная масса в плоскости слоев), запишем энергию квазичастицы в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - \eta v_F p_0 \cos \frac{p_z}{p_0}. \quad (18)$$

Компоненты скорости электрона проводимости, соответствующие закону дисперсии (18), удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt_1} &= \frac{eB_0}{mc} \cos \vartheta v_y, \\ \frac{dv_y}{dt_1} &= \frac{eB_0}{mc} (-v_y \cos \vartheta + v_z \sin \vartheta), \\ v_z &= \eta v_F \sin \left( \frac{p_B}{p_0 \cos \vartheta} - \frac{m v_x}{p_0} \text{tg} \vartheta \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Асимптотические (с точностью до членов порядка  $\eta$ ) решения системы (19) легко находятся с помощью стандартных методов нелинейной механики [11]:

$$\begin{aligned} v_x(t_1) &= v_x^{(0)}(t_1) + v_x^{(1)}(t_1), \\ v_x^{(0)}(t_1) &= v_\perp \cos \omega_B(\beta) t_1, \\ v_x^{(1)}(t_1) &= \eta v_F \text{tg} \vartheta J_0(\alpha) \sin \beta - \eta v_F \text{tg} \vartheta \times \\ &\times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n(\alpha) \sin(\beta - n\pi/2)}{n^2 - 1} \cos n\omega_B(\beta) t_1, \\ v_z(t_1) &= \eta v_F \sin(\beta - \alpha \cos \omega_B(\beta) t_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\omega_B(\beta) = \omega_B^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{2} \eta \text{tg} \vartheta J_1(\alpha) \cos \beta \right)$$

— циклотронная частота квазичастиц с энергией (18) в поле  $\mathbf{B}_0 = (B_0 \sin \vartheta, 0, B_0 \cos \vartheta)$ ,  $\omega_B^{(0)} = (|e|B_0/mc) \cos \vartheta$ ,  $\alpha = (m v_F/p_0) \text{tg} \vartheta$ ,  $\beta = p_B/p_0 \cos \vartheta$ ,  $J_n(\alpha)$  — функции Бесселя, начальная фаза выбрана так, что  $v_y(0) = 0$ ,

$$v_\perp = v_F \left( 1 - \frac{v_x^{(1)}(0)}{v_F} + \frac{\eta p_0}{m v_F} \cos(\beta - \alpha) \right)$$

— амплитуда первой гармоники  $v_x(t)$ , определяемая из условия

$$m v_x^2(0)/2 + \eta v_F p_0 \cos(p_z(0)/p_0) = \varepsilon_F.$$

Для электронов с законом дисперсии (18) компонента тензора проводимости  $\sigma_{yy}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(\omega, k) &= i \frac{e^2 \nu(\varepsilon_F) v_F^2}{\omega_B k_x r_0} \left\langle \text{ctg} \frac{\pi}{\omega_B} (\tilde{\omega} - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi) - \right. \\ &\left. - \frac{\sin \left( R \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) - \frac{\pi}{\omega_B} \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi \right)}{\sin \frac{\pi}{\omega_B} (\tilde{\omega} - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi)} \right\rangle_\beta. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\nu(\varepsilon_F) = p_0 m / \pi \hbar^3$  — плотность состояний квазичастиц с энергией (18),

$$\langle \dots \rangle_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \dots$$

Усредняя компоненты скорости электрона по периоду движения по циклотронной орбите получим

$$\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi = \eta v_F J_0(\alpha) (k_x \text{tg} \vartheta + k_z) \sin \beta. \quad (22)$$

Для тех направлений  $\mathbf{B}_0$ , когда  $\alpha$  равно одному из нулей  $\alpha_i = (m v_F/p_0) \text{tg} \vartheta_i$  функции Бесселя  $J_0(\alpha)$ ,

среднее  $\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_\varphi \propto \omega^2$  и дисперсионное уравнение приобретает вид

$$1 + 2 \frac{(kr_0)^{-3}}{\sin \phi} \left( \frac{\omega_p v_F}{\omega_B^{(0)} c} \right)^2 \frac{\omega}{\omega_B^{(0)}} \times \frac{\left( \cos \frac{\pi \tilde{\omega}}{\omega_B^{(0)}} - \langle \sin R(\vartheta_i) \rangle_\beta \right)}{\sin \frac{\pi \tilde{\omega}}{\omega_B^{(0)}}} = 0, \quad (23)$$

где

$$R(\vartheta_i) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi)}{\omega_B(\beta_i)} d\varphi = 2 \frac{k_x v_\perp}{\omega_B(\beta_i)} - \pi \eta \frac{k_z v_F}{\omega_B^{(0)}} H_0(\alpha_i) \cos \beta_i + \eta \frac{k_x v_F}{2\omega_B^{(0)}} \operatorname{tg} \vartheta_i \cos \beta_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(\alpha_i)}{n(n+1)(2n+1)}, \quad (24)$$

где

$$H_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin(\alpha \cos \varphi)$$

— функция Струве,  $\beta_i = p_B/p_0 \cos \vartheta_i$ ,  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$  — плазменная частота,  $n_0 = p_0 m^2 v_F^2 / 2\pi \hbar^3$  — плотность носителей заряда.

В случае

$$\frac{1}{(kr_0)^3} \left( \frac{\omega_p v_F}{\omega_B^{(0)} c} \right)^2 \gg 1,$$

который легко реализуется в проводниках с плотностью носителей заряда порядка единицы на атом, решение уравнения (23) можно представить в виде (17), где

$$\Delta\omega = \omega_B^{(0)} \left( \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{\pi} \arcsin \langle \sin R(\vartheta) \rangle_\beta \right). \quad (25)$$

В обратном предельном случае,

$$\frac{1}{(kr_0)^3} \left( \frac{\omega_p v_F}{\omega_B^{(0)} c} \right)^2 \ll 1,$$

спектр циклотронных волн определяется выражением

$$\omega = n\omega_B^{(0)} \left( 1 - 2 \frac{(kr_0)^{-3}}{\pi \sin \phi} \left( \frac{\omega_p v_F}{\omega_B^{(0)} c} \right)^2 \left( 1 - (-1)^n \langle \sin R(\vartheta) \rangle_\beta \right) \right). \quad (26)$$

В слоистых проводниках для определенных направлений внешнего магнитного поля относительно слоев возможно распространение электромагнитных волн с частотами в окрестности циклотронного резонанса при произвольной ориентации векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Как следует из соотношений (25), (26), в условиях сильной пространственной дисперсии имеет место осцилляционная зависимость частот циклотронных волн от проекции волнового вектора  $k_x$  на плоскость слоев.

#### 4. ФЕРМИ-ЖИДКОСТНЫЕ МОДЫ

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в электронной ферми-жидкости вдоль нормали к слоям. Кинетическое уравнение в линейном приближении (9) по слабому возмущению электронной системы электрическим полем волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

преобразуется к интегральному уравнению

$$\psi + \langle L\psi \rangle = \hat{R} \{ e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - i\omega \langle L(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}') \rangle \}, \quad (27)$$

где

$$\hat{R}\{g\} = \frac{1}{\omega_B} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' g(\varphi') \times \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\omega_B} (\varphi' - \varphi) + i \frac{1}{\omega_B} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(\varphi') - \mathbf{r}(\varphi)) \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{r}(\varphi') - \mathbf{r}(\varphi) = - \int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi'' \mathbf{v}(\varphi'').$$

Воспользуемся модельным представлением корреляционной функции Ландау в виде

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \quad (29)$$

которое вполне удовлетворительно описывает фермижидкостные эффекты в распространении электромагнитных волн при  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ .

С помощью этого выражения перенормированную поправку к функции распределения  $\Psi = \psi + \langle L\psi \rangle$  можно записать в виде

$$\Psi = \psi + e\Lambda v_k \chi_k, \quad (30)$$

где  $\chi_k = \langle v_k \psi \rangle / e$ .

Приравняв выражения (30) и (27), получаем

$$\psi = \sum_k \{ e\hat{R}(v_k)E_k - i\omega\Lambda\hat{R}(v_k)\chi_k - e\Lambda v_k\chi_k \}. \quad (31)$$

Умножив соотношение (31) на  $v_j$  и усреднив по поверхности Ферми, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\chi_j$ :

$$\begin{aligned} \chi_j + \Lambda \sum_k \langle v_j v_k \rangle \chi_k + i\omega\Lambda \sum_k \langle v_j \hat{R}(v_k) \rangle \chi_k = \\ = \sum_k \langle v_j \hat{R}(v_k) \rangle E_k. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставив решение этой системы уравнений в выражение для плотности тока  $\mathbf{j} = \langle e\mathbf{v}\Phi \rangle$ , которое с учетом (29) принимает вид

$$j_i = e^2 \sum_k \langle v_i \hat{R}(v_k) \rangle (E_k - i\omega\Lambda\chi_k), \quad (33)$$

найдем связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ .

Таким образом, уравнения (31) вместе с уравнениями Максвелла для компонент Фурье

$$E_x = \zeta j_x, \quad E_y = \zeta j_y, \quad j_z = 0 \quad (34)$$

образуют систему из шести линейных алгебраических уравнений относительно функций  $E_j$  и  $\chi_j$ :

$$\begin{aligned} e^2\chi_j + e^2\Lambda \sum_k \langle v_i v_k \rangle \chi_k + i\omega\Lambda \sum_k \sigma_{ik}\chi_k - \sigma_{ik}E_k = 0, \\ \sum_k \sigma_{zk}(E_k - i\omega\Lambda\chi_k) = 0, \\ E_x - \zeta \sum_k \sigma_{xk}(E_k - i\omega\Lambda\chi_k) = 0, \\ E_y - \zeta \sum_k \sigma_{yk}(E_k - i\omega\Lambda\chi_k) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\zeta = \frac{4\pi i\omega}{k^2 c^2 - \omega^2},$$

величины  $\sigma_{ik} = e^2 \langle v_i \hat{R}(v_k) \rangle$  совпадают с компонентами тензора электропроводности в газовом приближении. Условие существования нетривиального решения этой системы уравнений (равенство нулю ее детерминанта) представляет собой дисперсионное уравнение для волн. В результате несложных вычислений его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \zeta(\tilde{\sigma}_{xx} + \Lambda_x \tilde{\sigma}_{xy} B_{xy}) + \frac{i\omega}{e^2} \Lambda_x \tilde{\sigma}_{xx} \right] \times \\ \times \left[ 1 - \zeta(\tilde{\sigma}_{yy} + \Lambda_y \tilde{\sigma}_{yx} B_{xy}) + \frac{i\omega}{e^2} \Lambda_y \tilde{\sigma}_{yy} \right] - \\ - \left[ \zeta \tilde{\sigma}_{yx} - \frac{i\omega}{e^2} \Lambda_x \tilde{\sigma}_{yx} - \Lambda_x B_{xy} \right] \times \\ \times \left[ \zeta \tilde{\sigma}_{xy} - \frac{i\omega}{e^2} \Lambda_y \tilde{\sigma}_{xy} - \Lambda_y B_{xy} \right] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$B_{\alpha\beta} = \langle v_\alpha v_\beta \rangle - \Lambda \frac{\langle v_\alpha v_z \rangle \langle v_z v_\beta \rangle}{1 + \Lambda \langle v_z^2 \rangle},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha z} \sigma_{z\beta}) / \sigma_{zz}, \quad \Lambda_\alpha = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda B_{\alpha\alpha}}, \\ \alpha, \beta = x, y. \end{aligned}$$

Своеобразное поведение слоистого проводника связано с тем, что скорости носителей заряда в плоскости слоев значительно превышают проекцию их скорости на нормаль к слоям (ось  $z$ ). Анизотропия в плоскости слоев не влияет существенно на эффекты, обусловленные спецификой квазидвумерного энергетического спектра такого проводника, и мы не будем ее учитывать. В этом случае  $B_{xy} = 0$ ,  $\Lambda_x = \Lambda_y$  и легко убедиться, что уравнение (36) удовлетворяется, если

$$\begin{aligned} k^2 c^2 - \omega^2 - 4\pi\omega \left\{ \frac{\omega}{e^2} \Lambda_x - \right. \\ \left. - i \frac{\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy})^2 + 4\tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{yx}}}{2(\tilde{\sigma}_{xx}\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{\sigma}_{yx})} \right\}^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что величины  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = x, y$ ) определяются в основном компонентами  $\sigma_{\alpha\beta}$ , поскольку компоненты  $\sigma_{ik}$ , содержащие индекс  $z$ , малы в силу малости параметра квазидвумерности  $\eta$ .

Представим для простоты закон дисперсии носителей заряда в виде (18). Вычислив с помощью уравнения движения заряда в магнитном поле (20) величины  $\sigma_{ik}$ , нетрудно убедиться, что при  $\vartheta \ll 1$  уравнение (37) принимает вид

$$\begin{aligned} k^2 c^2 - \omega^2 - \\ - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega\lambda - \sqrt{(\tilde{\omega} \mp \omega_B^{(0)})^2 - (k\eta v_F J_0(\alpha))^2}} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь  $\lambda = \Lambda_x v_F^2 \langle 1 \rangle / 2$  — безразмерная величина, характеризующая фермижидкостное взаимодействие между электронами.

Если выполнено условие

$$\left(\omega \mp \omega_B^{(0)}\right)^2 - (\lambda\omega)^2 < (\eta k v_F J_0(\alpha))^2 < \left(\omega \mp \omega_B^{(0)}\right)^2, \quad (39)$$

то в бесстолкновительном пределе ( $\tau_1 \rightarrow \infty$ ) существуют вещественные решения дисперсионного уравнения (38). Они описывают коллективные моды, которые обусловлены корреляционными эффектами и отсутствуют в газовом приближении. Эти возбуждения существуют при  $k > k_{min} = \omega_p / c\sqrt{\lambda}$ . Магнитное поле снимает вырождение со спектра колебаний электромагнитного поля, что приводит к наличию двух волн с частотами

$$\omega^\pm = \frac{\left((\eta k v_F J_0(\alpha))^2 - \left[(\eta k v_F J_0(\alpha))^2 - \omega_B^{(0)2}\right] (\lambda - \omega_p^2 / k^2 c^2)\right)^{1/2} \pm \omega_B^{(0)}}{1 - (\lambda - \omega_p^2 / k^2 c^2)} \quad (40)$$

Пороговые частоты этих волн  $\omega_{min}^\pm = (\omega_p \eta v_F / c\sqrt{\lambda}) \pm \omega_B^{(0)}$  могут лежать значительно ниже, чем  $\omega_p$ , что делает условия для наблюдения фермижидкостных мод в слоистых проводниках более благоприятными, чем в обычных металлах.

С увеличением угла отклонения магнитного поля от нормали к слоям возрастает влияние зависимости проекции скорости электрона на направление волнового вектора от его фазы на траектории. Если выполнено условие  $\eta k v_F / \omega_B^{(0)} \gg 1$ , то при вычислении  $\sigma_{\alpha\beta}$  можно воспользоваться методом стационарной фазы. При  $\text{tg } \vartheta < \pi p_0 / 2 p_F$  таких точек на электронной орбите может быть две или ни одной. Однако при значительном отклонении магнитного поля от нормали к слоям на орбитах, пересекающих несколько элементарных ячеек импульсного пространства, точек стационарной фазы может быть достаточно много (см. рисунок).

После выполнения интегрирования по  $\varphi$  и  $\varphi'$  выражение для  $\sigma_{\alpha\beta}$  в сильном магнитном поле ( $\omega_B \tau_1 \gg 1$ ) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{\omega_p^2}{4\pi^2 k v_F^2} \times \\ &\times \sum_e \int_0^{2\pi} d\beta \left\{ 1 - \exp \frac{2\pi i}{\omega_B} (\omega - \langle k v_z \rangle_\varphi) \right\}^{-1} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{v_\alpha(\varphi_e) v_\beta(\varphi_e)}{2|v'_z(\varphi_e)|} + \frac{v_\alpha(\pi - \varphi_e) v_\beta(\pi - \varphi_e)}{2|v'_z(\pi - \varphi_e)|} \right] \times \right. \\ &\times \left( 1 + \exp \frac{2\pi i}{\omega_B} (\omega - \langle k v_z \rangle_\varphi) \right) + \\ &\left. + \frac{1}{(|v'_z(\varphi_e) v'_z(\pi - \varphi_e)|)^{1/2}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left[ v_\alpha(\varphi_e) v_\beta(\pi - \varphi_e) \times \right. \\ &\times \exp \left( -i \frac{\tilde{\omega}}{\omega_B} \Delta\varphi + i k \Delta z + i \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi i}{\omega_B} (\omega - \langle k v_z \rangle_\varphi) \right) + \\ &\quad \left. + v_\alpha(\pi - \varphi_e) v_\beta(\varphi_e) \times \right. \\ &\left. \times \exp \left( i \frac{\tilde{\omega}}{\omega_B} \Delta\varphi - i k \Delta z - i \frac{\pi}{2} \right) \right] \left. \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

где  $\varphi_e$  — точки на траектории электрона, в которых  $v_z(\varphi_e) = 0$ ,  $v'_z(\varphi_e) > 0$ ,  $\Delta\varphi_e = \pi - 2\varphi_e$ ,  $\Delta z_e = z(\pi - \varphi_e) - z(\varphi_e)$ .

В формуле (41) величины  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta z$  существенно различны на разных электронных орбитах. При некоторых углах наклона магнитного поля  $\vartheta = \vartheta_i$  электрон почти не дрейфует вдоль волнового вектора и в линейном приближении по параметру квазидвумерности усредненная по периоду величина проекции скорости заряда на нормаль к слоям

$$\langle v_z \rangle_\varphi = \eta v_F J_0(\alpha) \sin \beta$$

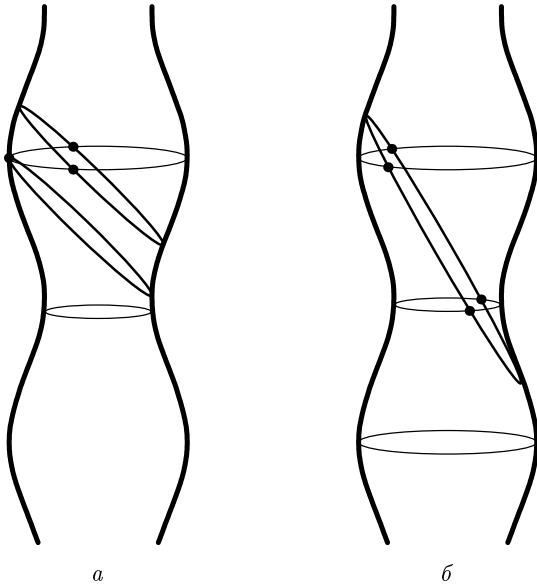
обращается в нуль.

Интегрирование по  $\beta$  знакопеременных последних двух слагаемых приводит к заметному уменьшению их вклада в электропроводность даже при  $\eta k v_F / \omega_B \approx 1$ . В результате при  $\vartheta = \vartheta_i$  в области частот, близких к частоте обращения носителей заряда по замкнутым траекториям в магнитном поле или к кратным ей частотам

$$\omega = n\omega_B^{(0)} + \Delta\omega,$$

можно пренебречь недиагональными компонентами тензора  $\sigma_{\alpha\beta}$ , а для компонент  $\sigma_{\alpha\alpha}$  использовать следующее асимптотическое выражение:





Точки стационарной фазы, где  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$  на электронных орбитах при  $\text{tg } \vartheta < \pi r_0 / 2r_F$  (a) и  $\text{tg } \vartheta > \pi r_0 / 2r_F$  (б). Тонкие линии соединяют точки, где  $kv_z = \omega$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{i\omega_p^2}{4\pi^2 k v_F^2} \sum_e \int_0^{2\pi} d\beta \frac{v_\alpha^2(\varphi_e)}{|v'_z(\varphi_e)|} \text{ctg} \frac{\pi\tilde{\omega}}{\omega_B}. \quad (42)$$

Дисперсионное уравнение при этом принимает достаточно простой вид:

$$k^2 c^2 - \omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega\lambda - i\omega_p^2/4\pi\sigma_{\alpha\alpha}} = 0, \quad \alpha = x, y. \quad (43)$$

При  $|\Delta\omega| > \eta\omega$  дисперсионное уравнение (38) может иметь вещественное решение, описывающее циклотронную волну, а соотношение, связывающее  $\Delta\omega$  и  $k$ , в бесстолкновительном пределе имеет вид

$$\Delta\omega = \frac{n\omega_B^{(0)2}}{C_\alpha \eta k v_F} \left( \lambda - \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2 - n^2 \omega_B^{(0)2}} \right), \quad (44)$$

где

$$C_\alpha = \frac{\pi^2 v_F}{\eta} \left( \sum_e \int_0^{2\pi} \frac{d\beta v_\alpha^2(\varphi_e, \beta)}{|v'_z(\varphi_e, \beta)|} \right)^{-1}.$$

Как следует из формулы (44), в отсутствие фермижидкостных корреляций электронов незатухающая циклотронная волна возможна лишь при

$\Delta\omega < 0$ . Учет фермижидкостных эффектов приводит к расширению окон прозрачности слоистого проводника, и циклотронная волна может распространяться и при  $\Delta\omega > 0$ , т. е. выше частоты циклотронного резонанса.

### 5. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

Парамагнитные спиновые волны представляют собой пространственно-временные возмущения спиновой плотности. Этот тип возбуждений обусловлен обменным взаимодействием между электронами и отсутствует в газе невзаимодействующих частиц. В основном приближении по малому параметру  $\eta$  корреляционная функция Ландау имеет вид (8) и кинетическое уравнение (10) для спиновой плотности можно существенно упростить. Разложим функции  $\Phi = \xi + \langle S\xi \rangle$  и  $\xi$  в ряды Фурье по переменной  $\varphi$ :

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(\varepsilon_F, p_B) e^{in\varphi},$$

$$\xi(\mathbf{p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\varepsilon_F, p_B) e^{in\varphi},$$

воспользовавшись соотношением (8), получим

$$\xi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \bar{\Phi}_n e^{in\varphi}, \quad (45)$$

где

$$\lambda_n = \frac{S_n^\sim}{1 + S_n^\sim},$$

$$\bar{\Phi}_n = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-in\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \Phi(\varepsilon_F, \beta, \varphi) \equiv \langle e^{-in\varphi} \Phi \rangle_{\beta, \varphi},$$

$$S_n^\sim = \nu(\varepsilon_F) S_n.$$

Подставляя выражение (45) в уравнение (10), найдем, что компоненты перенормированной спиновой плотности  $\Phi_\pm = \Phi_{x_1} \pm i\Phi_y \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  электронов проводимости с квазидвумерным законом дисперсии (1) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Phi_\pm}{\partial \varphi} - \frac{i}{\omega_B} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \mp \Omega) \Phi_\pm = i \frac{\mu_0}{\omega_B} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \pm \Omega) B_\pm^\sim - \frac{i\omega}{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \bar{\Phi}_n^{(\pm)} e^{in\varphi} + \frac{1}{\omega_B} I_{coll}^{(2)}(\Phi_\pm). \quad (46)$$

Здесь  $\Phi_{x_1} = \Phi_x \cos \vartheta - \Phi_z \sin \vartheta$ , ось  $x_1$  перпендикулярна оси  $y$  и вектору  $\mathbf{B}_0$ ,  $\Omega = -2\mu B_0/\hbar = \omega_s/(1 + S_0^{\sim})$ ,  $\omega_s = -2\mu_0 B_0/\hbar$  — частота спинового парамагнитного резонанса. Переменное магнитное поле  $B_{\pm}^{\sim} = B_{x_1} \pm iB_y$ , создаваемое спиновыми колебаниями, определяется из уравнения

$$\mathbf{B}^{\sim}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi \left( \mathbf{M}^{\sim}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}^{\sim}(\omega, \mathbf{k})) \right), \quad (47)$$

где  $\mathbf{M}^{\sim}(\omega, \mathbf{k}) = \mu_0 \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}, \omega, \mathbf{k}) \rangle$  — высокочастотная намагниченность.

После простых преобразований уравнение (46) для перенормированной спиновой плотности преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi^{(\pm)} &= \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \times \\ &\times \exp \left( \frac{i}{\omega_B} \int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi'' (\tilde{\omega} \mp \Omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi'')) \right) \times \\ &\times \left( i \frac{\mu_0}{\omega_B} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi') \pm \Omega) B_{\pm}^{\sim} - i \frac{\omega}{\omega_B} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \bar{\Phi}_p^{(\pm)} e^{ip\varphi'} \right). \quad (48) \end{aligned}$$

Умножая уравнение (48) на  $e^{-in\varphi}$  и интегрируя по переменным  $\beta$  и  $\varphi$ , для коэффициентов  $\bar{\Phi}_n^{(\pm)}$  ряда Фурье функции

$$\langle \Phi^{(\pm)} \rangle_{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \Phi^{(\pm)}(\varepsilon_F, \beta, \varphi)$$

получим бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left( \delta_{np} - \lambda_p \frac{\omega}{\omega_B} \langle f_{np}(\beta) \rangle_{\beta} \right) \bar{\Phi}_p^{(\pm)} = \\ &= -\mu_0 B_{\pm}^{\sim} \left\langle \frac{1}{2\pi i} \left\{ 1 - \exp \left( 2\pi i \frac{\tilde{\omega} - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_{\varphi} \mp \Omega}{\omega_B} \right) \right\}^{-1} \times \right. \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\varphi_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\varphi - \varphi_1) \mp \Omega) \times \\ &\quad \times \exp \left( i(p-n)\varphi - ip\varphi_1 + i \frac{\tilde{\omega} \mp \Omega}{\omega_B} \varphi_1 - \right. \\ &\quad \left. \left. - iR(\varphi, \varphi_1) \right) \right\rangle_{\beta}, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{np}(\beta) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ 1 - \exp \left( 2\pi i \frac{\tilde{\omega} - \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_{\varphi} \mp \Omega}{\omega_B} \right) \right\}^{-1} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\varphi_1 \exp \left( i(p-n)\varphi - ip\varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\tilde{\omega} \mp \Omega}{\omega_B} \varphi_1 - iR(\varphi, \varphi_1) \right). \quad (50) \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда Фурье плавной функции  $\nu(\varepsilon_F)S(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  быстро убывают с ростом их номера, поэтому в уравнениях (49) достаточно ограничиться конечным числом членов ряда. Система уравнений (49) вместе с уравнением (47), связывающим переменное магнитное поле и намагниченность, описывает собственные колебания спиновой плотности в слоистых проводниках с произвольными энергетическим спектром и корреляционной функцией. Нетрудно видеть, что для нахождения спектра спиновых волн достаточно использовать соответствующую (49) однородную систему уравнений. Пренебрежем в (49) малым неоднородным слагаемым пропорциональным  $\mu_0 B_{\pm}^{\sim}$ , учитывающим влияние несогласованного поля  $B_{\pm}^{\sim}$ . Дисперсионное уравнение «свободных» колебаний спиновой плотности имеет вид [12]

$$D(\omega^{(0)}, \mathbf{k}) \equiv \det \left[ \delta_{np} - \lambda_p \frac{\omega^{(0)}}{\omega_B} \langle f_{np}(\beta) \rangle_{\beta} \right] = 0. \quad (51)$$

Частота собственных колебаний намагниченности  $\omega$  с точностью до членов, пропорциональных  $\chi_0 \sim \mu_0^2 \nu(\varepsilon_F)$ , совпадает с частотой  $\omega^{(0)}$  «свободных» колебаний спиновой плотности. При этой частоте магнитная восприимчивость имеет резкий максимум, а определитель  $D(\omega, \mathbf{k})$  по порядку величины равен  $\chi_0$ .

Условие отсутствия бесстолкновительного затухания спиновых волн сводится к выполнению неравенства

$$|\omega - n\omega_B \mp \Omega| > \max |\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle_{\varphi}|. \quad (52)$$

Для тех направлений  $\mathbf{B}_0$  относительно слоев проводника, при которых  $\mathbf{v}_B$  близко к нулю, в условиях сильной пространственной дисперсии,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_m \gg \omega_B$ ,  $\omega \mp \Omega \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_m$ , существуют решения дисперсионного уравнения (51) в окрестности резонанса

$$\begin{aligned} \omega &= n_1 \omega_B \pm \Omega + \Delta\omega, \\ \Delta\omega &\ll \omega_B, \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Поправку к резонансной частоте можно записать в виде

$$\Delta\omega = \frac{n_1\omega_B \pm \Omega}{\pi k_x r_0} \gamma_i, \quad (54)$$

где величины  $\gamma_i$  являются корнями уравнения

$$\det \left| \delta_{np} - \lambda_p \gamma_i^{-1} \langle I_{np}(\beta) \rangle_\beta \right| = 0, \quad (55)$$

$$I_{np}(\beta) = \sum_\alpha \kappa(\varphi^\alpha) \frac{\exp \left[ -iR \left( \varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)} \right) - i(n-p)\varphi^{(\alpha)} + ip\varphi_1^{(\alpha)} + i\frac{\pi}{4}s \right]}{\left| \det \left( R''_{\varphi\varphi_1} \left( \varphi^{(\alpha)}, \varphi_1^{(\alpha)} \right) \right) \right|^{1/2}}. \quad (56)$$

Суммирование проводится по всем стационарным точкам, которые определяются из уравнений  $v_x(\varphi) = 0$ ,  $v_x(\varphi - \varphi_1) = 0$ . В формулах (51), (53), (54) под  $\omega_B$  понимается нулевой член разложения циклотронной частоты по степеням  $\eta$ .

В модели, когда энергия электронов проводимости определяется формулой (18), а компоненты скорости — формулами (20), асимптотические выражения для коэффициентов  $f_{np}(\beta)$  равны

$$f_{np}(\beta) = \frac{1}{k_x r_0} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tilde{\omega} \mp \Omega)}{\omega_B} \cos \frac{\pi}{2}(n-p) + \frac{\sin \left( R(\vartheta_i) + \frac{\pi}{2}(n+p) \right)}{\sin \frac{\pi(\tilde{\omega} \mp \Omega)}{\omega_B}} \right) \quad (57)$$

и уравнение (55) преобразуется к виду

$$\det \left| \delta_{np} - \lambda_p \gamma_i^{-1} \left( \cos \frac{\pi}{2}(n-p) + (-1)^{n_1} \left\langle \sin \left( R(\vartheta_i) + \frac{\pi}{2}(n+p) \right) \right\rangle_\beta \right) \right| = 0. \quad (58)$$

В случае, когда корреляционная функция определяется нулевой и первой фурье-гармониками

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = S_0 + 2S_1 \cos(\varphi - \varphi'),$$

уравнение (58) сводится к квадратному уравнению, корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \lambda_0 + 2\lambda_1 + (-1)^{n_1} (\lambda_0 - 2\lambda_1) g \pm \left\{ (\lambda_0 + 2\lambda_1 + (-1)^{n_1} (\lambda_0 - 2\lambda_1) g)^2 + 8\lambda_0\lambda_1(-1 + g^2 + h^2) \right\}^{1/2} \right), \quad (59)$$

где  $g = \langle \sin R(\vartheta_i) \rangle_\beta$ ,  $h = \langle \sin R(\vartheta_i) \rangle_\beta$ .

В коротковолновом пределе для выделенных направлений внешнего магнитного поля существуют спиновые волны с частотами (53), близкими к резонансным частотам  $\omega_r = n\omega_B \pm \Omega$ . Аналогичный тип возбуждений в квазиизотропных металлах имеет место лишь в случае, когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{B}_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Wosnitza, Springer Tracts in Mod. Phys. **134**, 1 (1996).
2. M. V. Kartsovnik and V. N. Laukhin, J. de Phys. I **6**, 1753 (1996).
3. J. Singleton, Rep. Progr. Phys. **63**, 1111 (2000).
4. P. M. Platzman and P. A. Wolf, *Waves and Interactions in Solid State Plasma*, Academic Press, New York and London (1973).
5. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
6. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
7. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 495 (1957).
8. В. П. Силин, ЖЭТФ **35**, 1243 (1958).
9. S. Schultz and G. Dunifer, Phys. Rev. Lett. **18**, 283 (1967).
10. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, Москва, (1987).
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
12. В. Г. Песчанский, Д. И. Степаненко, Письма в ЖЭТФ **78**, 772 (2003).