

ОСОБЕННОСТИ РЕФРАКЦИИ НЕОБЫКНОВЕННОГО ЛУЧА В ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ СРЕДЕ С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

Е. В. Аксенова^{a}, А. Ю. Вальков^{b**}, А. А. Каретников^a,
А. П. Ковшик^{a***}, В. П. Романов^{a****}, Е. И. Рюмцев^a*

^a Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Петродворец, Санкт-Петербург, Россия

^b Санкт-Петербургский институт внешнеэкономических связей, экономики и права
191104, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 17 мая 2004 г.

Теоретически и экспериментально исследованы эффекты рефракции необыкновенного луча в геликоидальных системах с большим по сравнению с длиной волны шагом спирали. Показано, что при достаточно больших углах падения по отношению к оси спирали происходит отражение (поворот) необыкновенного луча от определенного слоя внутри среды. Для обыкновенного луча система оптически изотропна и поворота луча нет. Используя приближение геометрической оптики, удалось при учете потерь света на рассеяние внутри жидкого кристалла описать экспериментальные зависимости интенсивностей прошедшего и отраженного (испытывшего поворот) лучей.

PACS: 61.30.-v, 42.25.Lc, 42.70.Df, 41.85.Ct

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных особенностей жидких кристаллов (ЖК) являются их необычные оптические свойства. Это, прежде всего, анизотропия как одноосная, так и двухосная, очень большая оптическая активность, селективное отражение света, необычно сильное рассеяние света и т. д. [1]. Большой интерес с оптической точки зрения представляют одномерно-периодические жидкие кристаллы. К ним относятся, прежде всего, холестерические жидкие кристаллы (ХЖК). Эти жидкие кристаллы являются локально одноосными, причем оптическая ось равномерно вращается вдоль оси холестерика, образуя спиральную (геликоидальную) структуру. Для случая нормального падения, т. е. при распространении света вдоль оси спирали, получено точное решение волнового уравнения [1, 2]. В случае наклонного падения для систем с шагом холестерической

спирали P порядка длины световой волны λ разработаны приближенные методы [3], основанные на теореме Флоке и методах теории дифракции, эффективность которых подтверждена в многочисленных экспериментальных работах.

Холестерики с шагом спирали, большим по сравнению с длиной световой волны, и слабо закрученные нематики исследованы менее подробно, хотя первые результаты для случая нормального падения — так называемый адиабатический режим Могена — получены достаточно давно [4]. В последнее время эта проблема стала особенно актуальной в связи с широким применением твист-ячеек в устройствах отображения информации. Свойства таких сред меняются плавно на масштабе λ и оказываются возможным использовать методы типа ВКБ. Для задачи о распространении электромагнитных волн в локально изотропных средах с плавными неоднородностями проблема рассмотрена в работе [5], а для ХЖК с большим шагом в случае наклонного падения света — в [6]. В этом случае свет также распространяется в адиабатическом режиме — имеют две нормальные волны, локально обыкновенная и

*E-mail: aksev@mail.ru

**E-mail: alexvalk@mail.ru

***E-mail: akovshik@paloma.spbu.ru

****E-mail: V.Romanov@pobox.spbu.ru

локально необыкновенная, векторы поляризаций которых определяются направлениями оптической оси и волнового вектора в данной точке. При этом сохраняется компонента волнового вектора, поперечная к оси спирали, а его длина (волновое число) определяется из локального дисперсионного уравнения [6, 7].

Поскольку в геликоидальных ЖК направление директора меняется от точки к точке, траектории лучей в таких средах имеют сложный характер. Здесь возникают два типа задач. Один из них состоит в определении распределения директора в ячейках ЖК по результатам оптических измерений. Такие исследования проводились, например, в работах [8]. В частности, восстанавливалась структура поля директора в гибридных ячейках нематических жидких кристаллов (НЖК) по измерениям интенсивности отраженного света в окрестности точки полного внутреннего отражения. Другой тип проблем состоит в изучении распространения и рассеяния света в ячейках ЖК с заданной структурой [3]. Именно такая задача рассматривается в данной статье.

В настоящей работе исследовано распространение обыкновенного и необыкновенного лучей в твист-ячейках ЖК, для которых период структуры много больше длины световой волны. Показано, что при распространении необыкновенного луча под большими углами к оси спирали холестерика имеет место поворот луча внутри среды и уход его из среды аналогично полному внутреннему отражению, но в отличие от последнего отражение происходит внутри, а не на поверхности образца. Этот эффект исследован нами теоретически и обнаружен экспериментально. В рамках приближения геометрической оптики проведен детальный анализ полученных экспериментальных данных.

Работа построена следующим образом. Раздел 2 посвящен теоретическому описанию распространения света в ХЖК с большим шагом спирали. В частности, в разд. 2.1 приводятся общие соотношения геометрической оптики ХЖК, а в разд. 2.2 обсуждается форма траектории и эффект поворота необыкновенного луча. В разд. 3 приводится описание эксперимента и его результатов. В разд. 4 проводится сравнение теории и эксперимента с учетом влияния экстинкции в ХЖК. В Заключение обсуждаются возможные дополнительные факторы, влияющие на интенсивность проходящего и отраженного лучей в окрестности точки поворота. В Приложении приводятся формулы для расчета экстинкции в ХЖК с большим шагом спирали.

2. ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ТВИСТ-ЯЧЕЙКАХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

2.1. Приближение геометрической оптики

Рассмотрим плоскопараллельную твист-ячейку ЖК (НЖК или ХЖК) с шагом спирали $P \gg \lambda$, толщиной d . Введем декартову систему координат xuz с осью z , направленной по нормали к ограничивающим плоскостям, $0 \leq z \leq d$. Будем предполагать, что ось спирали направлена по оси z , а вектор директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ перпендикулярен этой оси и однороден в плоскости xu :

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{n}(z) = (\cos(q_0 z + \phi_0), \sin(q_0 z + \phi_0), 0). \quad (2.1)$$

Здесь $q_0 = \pi/P$, ϕ_0 — начальная фаза. В этой формуле период $\mathbf{n}(z)$ равен $2P$. Однако, поскольку в ХЖК и НЖК направления \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ эквивалентны, реальный период спирали ЖК равен P .

Волновое уравнение для электромагнитного поля в такой среде имеет вид

$$(\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(z)) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — вектор напряженности электрического поля, $k_0 = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме, $\hat{\varepsilon}(z)$ — тензор диэлектрической проницаемости, который в холестерике (а также в планарно закрученном нематике) имеет вид [1]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(z) = \varepsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_{\alpha}(z) n_{\beta}(z), \quad (2.3)$$

$\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$; ε_{\parallel} , ε_{\perp} — диэлектрические проницаемости вдоль и поперек $\mathbf{n}(z)$.

В силу однородности системы в плоскостях xu удобно перейти к гармоникам Фурье $\mathbf{E}(\mathbf{k}_{\perp}, z)$ по поперечным переменным $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$.

Зафиксируем значение поперечного волнового вектора \mathbf{k}_{\perp} и будем искать решение волнового уравнения (2.2) внутри среды в приближении геометрической оптики:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0(z) \mathbf{e}(z) \times \exp \left(i \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp} + i \int_0^z k_z(z') dz' \right), \quad (2.4)$$

где $E_0(z)$ и $k_z(z)$ — скалярные функции, $\mathbf{e}(z)$ — единичный вектор, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = 1$, которые можно трактовать, соответственно, как локальные значения амплитуды, z -компоненты полного волнового вектора $\mathbf{k}(z) = (\mathbf{k}_{\perp}, k_z(z))$ и вектора поляризации квазиплоской волны.

Условием применимости приближения геометрической оптики (2.4) является набор неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(z)}{dz} &\ll E_0(z)k_z(z), \\ \left| \frac{de(z)}{dz} \right| &\ll k_z(z), \quad \frac{dk_z(z)}{dz} \ll k_z^2(z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

для всех z , $0 \leq z \leq \min(P, d)$. Первые два из этих неравенств означают плавность изменения амплитуды поля и вектора поляризации на масштабе длины волны $\lambda \sim k^{-1} \sim k_z^{-1}$, а третье неравенство — плавность изменения компоненты $k_z(z)$ волнового вектора $\mathbf{k}(z)$ на этом масштабе. Отметим, что поскольку

$$\frac{dk_z(z)}{dz} \sim \frac{k_z(z)}{P},$$

третье неравенство соответствует условию

$$k_z(z)P \gg 1. \quad (2.6)$$

Как следует из формул (2.5), (2.6), в рамках приближения геометрической оптики компонента $k_z(z)$ для каждого z не должна быть очень малой.

Подставляя (2.4) в волновое уравнение (2.2) в главном порядке по большому параметру $k_z(z)P \sim \sim P/\lambda$ получаем уравнение эйконала:

$$\mathbf{k}(z) \times \mathbf{k}(z) \times \mathbf{e}(z) + k_0^2 \hat{\varepsilon}(z) \mathbf{e}(z) = 0. \quad (2.7)$$

При фиксированном направлении волнового вектора $\mathbf{t} = \mathbf{k}/k$ и фиксированном значении z однородная система линейных уравнений (2.7) для одноосного тензора диэлектрической проницаемости (2.3) имеет два хорошо известных решения, соответствующих обыкновенной (o) и необыкновенной (e) волнам [9]:

$$k^{(o)} = k_0 n^{(o)}, \quad k^{(e)} = k_0 n^{(e)}. \quad (2.8)$$

Здесь $n^{(o)}$ и $n^{(e)} = n^{(e)}(\mathbf{t})$ — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей,

$$n^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad n^{(e)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta}}, \quad (2.9)$$

θ — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{k} , векторы поляризации $\mathbf{e}^{(o)} = \mathbf{e}^{(o)}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{e}^{(e)} = \mathbf{e}^{(e)}(\mathbf{t})$ определяются условиями

$$\mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{k}, \quad \hat{\varepsilon} \mathbf{e}^{(e)} \perp \mathbf{k} \quad (2.10)$$

и тем, что вектор $\mathbf{e}^{(e)}$ лежит в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{n} . Из уравнений (2.10), (2.3) находим направления единичных векторов поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$:

$$\mathbf{e}^{(o)} \parallel \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}^{(e)} \parallel \mathbf{n}(\mathbf{k} \hat{\varepsilon} \mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \hat{\varepsilon} \mathbf{n}). \quad (2.11)$$

В отличие от обычной постановки задачи о распространении волны в однородной анизотропной среде, когда фиксировано направление волнового вектора \mathbf{t} , а направление оптической оси \mathbf{n} не зависит от z , в нашей системе фиксирована поперечная компонента \mathbf{k}_{\perp} волнового вектора, а оптическая ось $\mathbf{n}(z)$ вращается в пространстве. В этом случае волновые векторы \mathbf{k} и векторы поляризации \mathbf{e} являются функциями координаты z и двумерного вектора \mathbf{k}_{\perp} . Для обыкновенной волны из первого уравнения (2.8) получаем

$$k_z^{(o)}(\mathbf{k}_{\perp}, z) \equiv k_z^{(o)}(k_{\perp}) = \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_0^2 - k_{\perp}^2}. \quad (2.12)$$

Для необыкновенной волны

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}(z) \cdot \mathbf{k}^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)}{k^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)} = \frac{\mathbf{n}(z) \cdot \mathbf{k}_{\perp}}{k^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)}, \quad (2.13)$$

поэтому второе соотношение (2.8) представляет собой уравнение для компоненты $k_z^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)$. Решая это уравнение, получаем

$$k_z^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z) = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} k_0^2 - k_{\perp}^2 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} (\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{n}(z))^2}. \quad (2.14)$$

Векторы поляризации $\mathbf{e}^{(o)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)$, $\mathbf{e}^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)$ при этом могут быть найдены по формулам (2.11), в которых следует положить $\mathbf{n} = \mathbf{n}(z)$ и, соответственно, $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(o)}(\mathbf{k}_{\perp})$ или $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z)$, где $\mathbf{k}^{(o)} = (\mathbf{k}_{\perp}, k_z^{(o)}(k_{\perp}))$, $\mathbf{k}^{(e)} = (\mathbf{k}_{\perp}, k_z^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp}, z))$.

Обратим внимание, что в рамках используемого нами приближения геометрической оптики (2.4) независимость поперечной компоненты волнового вектора \mathbf{k}_{\perp} от z эквивалентна закону Снеллиуса. Действительно, если выбрать ось y системы координат xuz вдоль фиксированного вектора \mathbf{k}_{\perp} , то \mathbf{t} принимает вид $\mathbf{t}(z) = (0, \sin \chi(z), \cos \chi(z))$, где $\chi(z)$ — угол между волновым вектором и осью z , зависящий от значения z . Следовательно, $n^{(e)}(\mathbf{t}) = n^{(e)}(\mathbf{t}(z)) = n^{(e)}(z)$. Тогда для необыкновенной волны из (2.8) получаем $k_{\perp} = k_0 n^{(e)} \sin \chi(z)$. Таким образом, условие постоянства \mathbf{k}_{\perp} соответствует обычной формуле Снеллиуса:

$$n^{(e)}(z) \sin \chi(z) = \text{const}. \quad (2.15)$$

Для обыкновенной волны это условие также соответствует закону Снеллиуса, $n^{(o)}(z) \sin \chi(z) = \text{const}$, но здесь согласно (2.9), (2.12) обе величины $n^{(o)}(z)$ и $\chi(z)$ не зависят от z и этот закон тривиален.

Для нахождения амплитуды поля $E_0(z)$ в приближении геометрической оптики необходимо учесть в волновом уравнении члены следующего

порядка по малому параметру λ/P . Получающееся при этом «уравнение переноса» [10] для амплитуды поля $E_0(z)$ эквивалентно закону сохранения энергии $\text{div } \mathbf{S} = 0$ для вектора Пойнтинга [9],

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi k_0} [\mathbf{k} |E|^2 - \mathbf{E} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{k})]. \quad (2.16)$$

Для волн (2.4) $\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{S}(z)$,

$$\mathbf{S}(z) = \frac{c |E_0(z)|^2}{8\pi k_0} [\mathbf{k}(z) - \mathbf{e}(z) (\mathbf{k}(z) \cdot \mathbf{e}(z))]. \quad (2.17)$$

Таким образом, в нашем случае закон сохранения энергии принимает вид $\text{div } \mathbf{S} = \partial_z S_z(z) = 0$, т. е. компонента $S_z(z)$ не зависит от z . В результате из (2.17) находим закон изменения амплитуды поля:

$$|E_0(z)|^2 = C_0 \frac{k_0}{k_z(z) - e_z(z) \mathbf{k}(z) \cdot \mathbf{e}(z)}, \quad (2.18)$$

где C_0 — произвольная постоянная. Подставляя выражения (2.11)–(2.14) в (2.18), окончательно получаем

$$|E_0(z)|^2 = C_0 \begin{cases} \frac{k_0}{k_z^{(o)}(k_\perp)}, & \text{для } (o)\text{-луча,} \\ \frac{k_0^2 \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a (\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{n}(z))^2}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) k_0 \varepsilon_\perp^2}, & \text{для } (e)\text{-луча.} \end{cases} \quad (2.19)$$

В заключение этого раздела отметим, что члены следующего порядка по малому параметру λ/P в волновом уравнении дают поправку к фазе волны (2.4). Условие малости этой поправки дает ограничение на длину трассы волны в неоднородной среде [10, 11],

$$|z| \lambda \ll P^2, \quad (2.20)$$

которое является дополнительным к неравенствам (2.5) условием применимости приближения геометрической оптики.

2.2. Эффект поворота необыкновенного луча

Обсудим условия, при которых свет может распространяться в среде при заданном значении \mathbf{k}_\perp . Согласно (2.12), условие распространения обыкновенной волны имеет вид $\sqrt{\varepsilon_\perp} k_0 \geq k_\perp$. Поскольку волновой вектор $\mathbf{k}^{(o)}$ не зависит от z , волна в среде будет распространяться прямолинейно во всей области $0 \leq z \leq d$. Вектор поляризации этой волны $\mathbf{e}^{(o)}(z)$, в соответствии с (2.11), будет зависеть от z ,

поскольку его направление определяется локальным вектором директора $\mathbf{n}(z)$. Амплитуда волны, согласно (2.19), будет оставаться постоянной.

Условия распространения необыкновенной волны существенно отличаются, поскольку продольная компонента волнового вектора $k_z^{(e)}$ зависит от z . Согласно уравнению (2.14), если при всех углах $\phi(z)$ между векторами \mathbf{k}_\perp и $\mathbf{n}(z)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon_\parallel k_0^2 - k_\perp^2 > \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp} k_\perp^2 \cos^2 \phi(z), \quad (2.21)$$

то необыкновенная волна будет распространяться в среде при любых z . Это условие соответствует неравенству $k_\perp^2 < \min(\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel) k_0^2$.

Если при всех значениях угла $\phi(z)$ выполняется обратное неравенство, что соответствует условию $k_\perp^2 > \max(\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel) k_0^2$, то волна в среде распространяться не будет.

И, наконец, в случае, когда

$$\min(\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel) k_0^2 \leq k_\perp^2 \leq \max(\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel) k_0^2,$$

реализуется промежуточная ситуация, при которой неравенство (2.21) выполняется только для некоторого интервала углов $\phi(z)$. В этом случае существует угол $\phi(z_t)$, при котором неравенство (2.21) превращается в равенство. Это соответствует обращению компоненты $k_z^{(e)}$ в нуль. При дальнейшем уменьшении угла $\phi(z)$ компонента $k_z^{(e)}$ становится мнимой и волна начинает экспоненциально затухать. В точке z_t происходит смена знака $k_z^{(e)}$ и, соответственно, смена направления распространения волны вдоль оси z , т. е. точка z_t представляет собой точку поворота луча. В определенном смысле данный эффект аналогичен эффекту полного внутреннего отражения от некоторой плоскости внутри среды.

Вектор поляризации необыкновенной волны $\mathbf{e}^{(e)}(z)$ адиабатически подстраивается под локальные значения волнового вектора и директора согласно формуле (2.11).

В окрестности точки $z = z_t$ неравенства (2.5) нарушаются и описание в рамках геометрической оптики становится неприменимым. Здесь мы попадаем в область каустики, причем внутри области согласно уравнению (2.19) амплитуда поля стремится к бесконечности, так как $k_z^{(e)}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_t$. Для описания этой области требуется проводить анализ волнового уравнения (2.2) для поля (2.4), разлагая $\hat{\varepsilon}(z)$ в окрестности точки поворота. Для скалярных волн эффект поворота волны и поведение поля в окрестности точки поворота подробно описаны, например, в книгах [11]. Этот анализ показывает, в частности,

что после прохождения точки поворота поле не только меняет знак компоненты $k_z^{(e)}$, но и приобретает дополнительный фазовый сдвиг $\exp(-i\pi/2)$.

Рассмотрим вопрос о форме траекторий обыкновенного и необыкновенного лучей в ХЖК с большим шагом спирали. Траектория луча определяется как линия, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением групповой скорости волны. В нашем случае удобнее вместо вектора групповой скорости использовать вектор Пойнтинга \mathbf{S} , совпадающий с ним по направлению [9]. В изотропной среде $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ и траекторию обычно описывают с помощью волнового вектора. В анизотропной среде в общем случае $\mathbf{S} \nparallel \mathbf{k}$ и описание траектории следует проводить с помощью вектора Пойнтинга. Параметризуя траекторию луча в виде $(\mathbf{r}_\perp(z), z)$ и записывая условие параллельности в данной точке касательной луча вектору Пойнтинга волны $(\mathbf{S}_\perp(z), S_z(z))$, получим уравнение для траектории $\mathbf{r}_\perp(z)$ в виде

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp(z)}{dz} = \frac{\mathbf{S}_\perp(z)}{S_z(z)}. \quad (2.22)$$

Для обыкновенного луча из (2.10) следует, что $\mathbf{k}^{(o)} \cdot \mathbf{e}^{(o)}(z) = 0$, и из (2.17) получаем, что $\mathbf{S}^{(o)} \parallel \mathbf{k}^{(o)}$ и не зависит от координаты z . Поэтому правая часть уравнения (2.22) не меняется, и мы получаем, что траектория обыкновенного луча прямолинейна и совпадает по направлению с волновым вектором $\mathbf{k}^{(o)}$.

Для необыкновенного луча вектор $\mathbf{S}^{(e)}(z)$ меняется по направлению при изменении z , причем $\mathbf{S}^{(e)}(z) \nparallel \mathbf{k}^{(e)}(z)$, поэтому его траектория более сложная. Для ее нахождения заметим, прежде всего, что в произвольной анизотропной среде вектора \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{S} лежат в одной плоскости, $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{k}\hat{\epsilon}\mathbf{E} = 0$ [9]. С учетом симметрии тензора $\hat{\epsilon}$ последнее равенство можно переписать в виде $\mathbf{e}\hat{\epsilon}\mathbf{k} = 0$, т. е. $\mathbf{e} \perp \hat{\epsilon}\mathbf{k}$. Из формулы (2.3) следует соотношение

$$\hat{\epsilon}\mathbf{k} = \varepsilon_\perp \mathbf{k} + \varepsilon_a(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}, \quad (2.23)$$

которое означает, что в одноосной анизотропной среде вектор $\hat{\epsilon}\mathbf{k}$ является линейной комбинацией векторов \mathbf{n} и \mathbf{k} . Заметим теперь, что согласно (2.11) для необыкновенной волны вектор $\mathbf{e}^{(e)}$ также является линейной комбинацией векторов \mathbf{n} и \mathbf{k} . В результате мы получаем, что векторы $\mathbf{e}^{(e)}$, $\mathbf{S}^{(e)}$ и $\hat{\epsilon}\mathbf{k}^{(e)}$ лежат в одной плоскости, образованной векторами \mathbf{n} и $\mathbf{k}^{(e)}$, причем $\mathbf{e} \perp \hat{\epsilon}\mathbf{k}$ и $\mathbf{e} \perp \mathbf{S}$. Поэтому в одноосных анизотропных средах, к которым локально принадлежат рассматриваемые системы, $\mathbf{S}^{(e)} \parallel \hat{\epsilon}\mathbf{k}^{(e)}$.

Таким образом,

$$\frac{\mathbf{S}_\perp(z)}{S_z(z)} = \frac{(\hat{\epsilon}(z)\mathbf{k}^{(e)}(z))_\perp}{(\hat{\epsilon}(z)\mathbf{k}^{(e)}(z))_z}, \quad (2.24)$$

и уравнение траектории (2.22) с учетом (2.23) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp(z)}{dz} = \frac{\mathbf{n}(z)k_\perp \cos \phi(z)\varepsilon_a + \mathbf{k}_\perp \varepsilon_\perp}{k_z^{(e)}(z)\varepsilon_\perp}. \quad (2.25)$$

Интегрируя (2.25), получаем траекторию луча в явном виде:

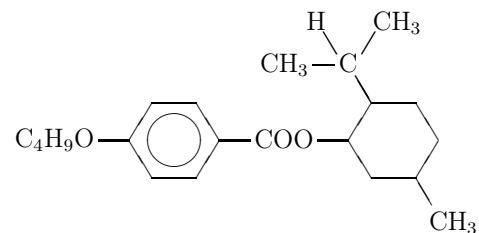
$$\mathbf{r}_\perp(z) = \frac{\varepsilon_a k_\perp}{\varepsilon_\perp} \int_0^z \frac{\mathbf{n}(z') \cos \phi(z')}{k_z^{(e)}(z')} dz' + \mathbf{k}_\perp \int_0^z \frac{dz'}{k_z^{(e)}(z')}. \quad (2.26)$$

Правая часть (2.26) сводится к элементарным функциям и неполному эллиптическому интегралу первого рода. Результаты численных расчетов траекторий приведены на рис. 1. Из рисунка видно, что при определенных углах падения необыкновенный луч должен испытывать поворот внутри жидкого кристалла и возвращаться в среду, из которой он попал в него. Видно, что траектория необыкновенного луча в такой среде не будет плоской ни внутри, ни вне волнового канала. Однако средний по периоду вектор Пойнтинга будет лежать в плоскости $z\mathbf{k}_\perp$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Доказательство существования эффекта поворота мы проводили, измеряя параметры лучей вне образца и интерпретируя результаты в рамках геометрической оптики.

Исследуемая система представляла собой смесь нематического жидкого кристалла ЖКМ1466 производства НИОПИК и киральной добавки, в качестве которой использовалось оптически активное соединение со структурной формулой



Оно было синтезировано в Вильнюсском университете (Литва). Поверхности призм, граничащие с жидким кристаллом, обрабатывались таким образом, чтобы получить планарную ориентацию на каждой из поверхностей.

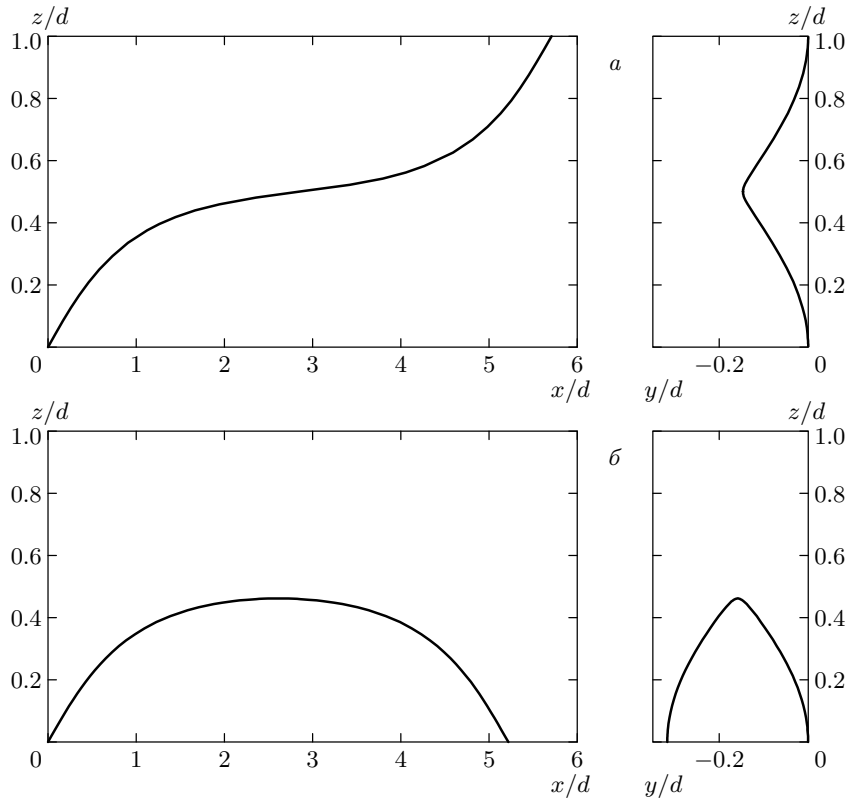


Рис. 1. Проекция траекторий лучей в ячейке на плоскостях xz, yz при двух углах входа χ в ЖК: a — необыкновенный прошедший луч ($\chi = 63.2^\circ$), $б$ — необыкновенный луч, испытавший поворот ($\chi = 63.5^\circ$). При расчетах положено $\sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1.51$, $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1.69$, угол $\phi_0 = -\pi/2$ в формуле (2.1). Ось x выбрана вдоль \mathbf{k}_{\perp}

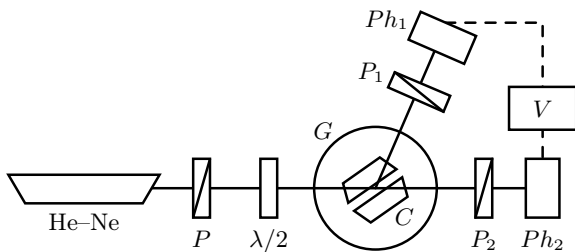


Рис. 2. Оптическая схема установки: He-Ne — гелий-неоновый лазер, P, P_1, P_2 — поляризаторы, $\lambda/2$ — полуволновая пластинка, Ph_1, Ph_2 — фотоприемники, V — цифровой вольтметр В7-35, G — поворотный столик с системой отсчета углов, C — кювета с жидким кристаллом

Оптическая схема установки представлена на рис. 2. Источником света служил He-Ne-лазер с длиной волны $\lambda = 632.8$ нм. Линейно поляризованный луч света после поляризатора P проходил через полуволновую пластинку, позволяющую изменять направление плоскости поляризации, и попа-

дал на входную грань призмы. Измерялись интенсивности I_1 и I_2 света, попадающего в фотоприемники Ph_1 и Ph_2 , в зависимости от угла падения света на ЖК при двух поляризациях падающего света, соответствующих обыкновенному или необыкновенному лучу на входе в жидкий кристалл. С помощью поляризаторов P_1 и P_2 , стоящих перед фотоприемниками, выделялись лучи тех же поляризаций, что и падающий свет.

Была приготовлена специальная кювета, показанная на рис. 3. Тонкий плоскопараллельный слой жидкого кристалла (1) помещался между двумя трапецеидальными стеклянными призмами (2, 3) с углами при основании, равными $\gamma_0 = 70^\circ$. Такая форма призмы давала возможность вводить падающий луч в ЖК под достаточно большими углами падения α . Было изготовлено два образца толщиной $d = 8$ мкм и $d = 100$ мкм. Оси легкого ориентирования директора на обеих поверхностях были перпендикулярны плоскости рисунка. Концентрация оптически активной добавки подбиралась так, чтобы величина шага спирали P была близка к толщине слоя

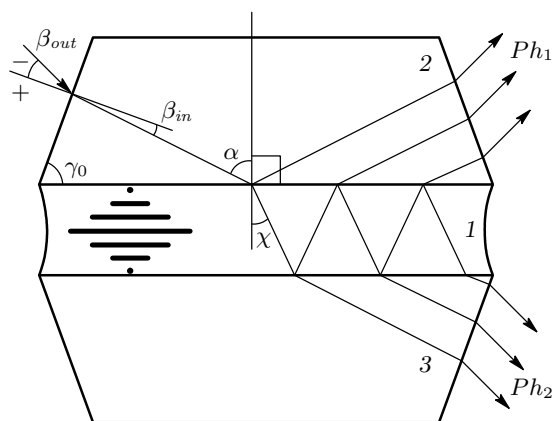


Рис. 3. Ячейка с жидким кристаллом и схематический ход лучей: 1 — планарно закрученный ЖК, 2, 3 — стеклянные призмы высотой 12 мм с длиной большего основания 37 мм и углом при основании $\gamma_0 = 70^\circ$, β_{out} , β_{in} — углы падения и преломления луча на входной грани призмы, α — угол падения на ЖК

d^1). В результате в ячейке возникала планарная закрученная структура, в которой директор был ортогонален плоскости рисунка на ориентирующих поверхностях и параллелен плоскости рисунка в центре слоя, т. е. совершал один оборот.

Параметры $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$ в приготовленных смесях для длины световой волны $\lambda = 632.8$ нм были равны $\sqrt{\varepsilon_\perp} = 1.51$, $\sqrt{\varepsilon_\parallel} = 1.69$ и практически не отличались от значений соответствующих параметров нематической матрицы. Это обусловлено тем, что концентрация закручивающей добавки была мала — для первого образца она составляла приблизительно 2%, а для второго — приблизительно 0.07%. Показатель преломления стеклянных призм $n_p = 1.644$. Таким образом, его значение лежит между значениями $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$, причем n_p примерно втрое ближе к $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$, чем к $\sqrt{\varepsilon_\perp}$.

Входящий, прошедший и отраженный лучи были расположены в плоскости рис. 3. Угол падения луча на жидкий кристалл α связан с углом падения на входную грань призмы, β_{out} , соотношениями

$$\alpha = \gamma_0 \pm \beta_{in}, \quad n_p \sin \beta_{in} = \sin \beta_{out}, \quad (3.1)$$

где выбор знака (\pm) показан на рис. 3 и определяется расположением падающего луча вне образца от-

¹ Шаг спирали определялся независимо двумя методами — путем наблюдения текстуры Гранжана в клине Кано, а также методом дифракции монохроматического света на конфокальной структуре.

носителю внешней нормали к входной грани призмы. Угол преломления луча внутри ЖК обозначен как χ . Из (3.1) следует, что угол α может меняться в пределах от $\gamma_0 - \arcsin(1/n_p) \approx 32.54^\circ$ до 90° .

Обсудим сначала, как должна распределиться интенсивность падающего света между фотоприемниками Ph_1 и Ph_2 , если не принимать во внимание эффект поворота необыкновенного луча.

Из закона Снеллиуса для преломления обыкновенного луча на границе стекло–ЖК получаем

$$n_p \sin \alpha = n^{(o)} \sin \chi = \sqrt{\varepsilon_\perp} \sin \chi \leq \sqrt{\varepsilon_\perp}. \quad (3.2)$$

Таким образом, имеется ограничение на угол падения $\alpha < \alpha_* = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p)$ и при $\alpha > \alpha_*$ обыкновенный луч в жидкий кристалл не входит. Подставляя значения n_p и $\sqrt{\varepsilon_\perp}$, получаем, что $\alpha_* \approx 66.7^\circ$ является углом полного внутреннего отражения обыкновенного луча на границе стекло–ЖК.

Для необыкновенного луча закон Снеллиуса с учетом (2.9) принимает вид

$$n_p \sin \alpha = n^{(e)}(\theta) \sin \chi = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \sin \chi, \quad (3.3)$$

так как на границе угол $\theta = 90^\circ$ (рис. 3). Правая часть в этом равенстве при изменении χ от 0° до 90° меняется в интервале от 0 до $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Аналогично, левая часть при изменении α меняется в интервале от 0 до n_p . В силу условия $n_p < \sqrt{\varepsilon_\parallel}$ при любом значении угла α существует такой угол χ ,

$$\chi = \arcsin \frac{n_p \sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}, \quad (3.4)$$

что равенство (3.3) будет выполнено. Это означает, что полного внутреннего отражения на границе стекло–ЖК не будет происходить ни при каких углах падения α .

Таким образом, можно было бы ожидать, что необыкновенный луч при всех углах падения испытывает отражение и преломление, т. е. интенсивность света, принимаемая обоими фотоприемниками, меняется плавно в зависимости от α , причем интенсивность прошедшего света I_2 должна значительно превышать интенсивность отраженного света I_1 . Для обыкновенного луча можно ожидать, что при $\alpha < \alpha_*$ присутствует как отраженный, так и преломленный лучи, а при $\alpha > \alpha_*$ — только отраженный луч.

Результаты измерений показаны на рис. 4 для обыкновенного и необыкновенного лучей. Как видно на рис. 4, существует угол $\alpha_* \approx 66.7^\circ$, одинаковый для обоих типов лучей, такой что при $\alpha < \alpha_*$

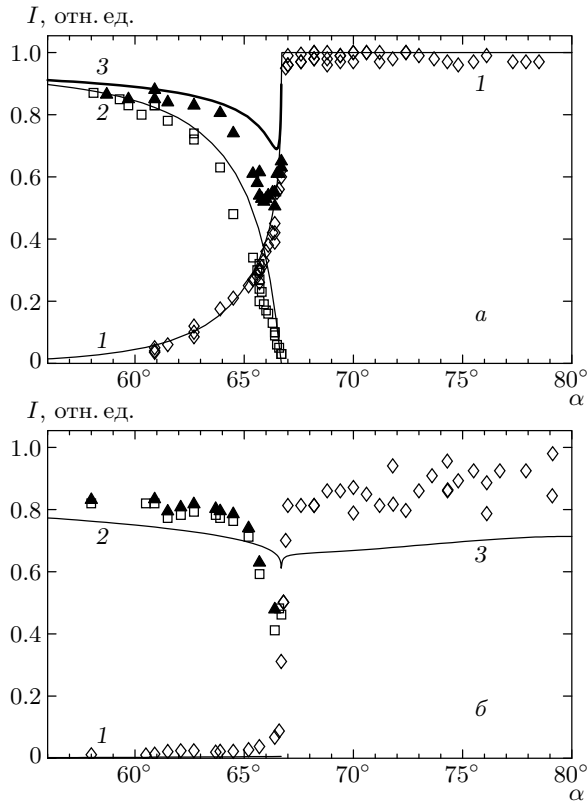


Рис. 4. Угловая зависимость интенсивности отраженного и прошедшего света для обыкновенного (а) и необыкновенного (б) лучей. Экспериментальные данные: \diamond — интенсивность отраженного света, \square — интенсивность прошедшего света, \blacktriangle — суммарная интенсивность. Сплошными линиями показаны теоретические кривые: 1 — интенсивность отраженного света I_1 , 2 — интенсивность прошедшего света I_2 , рассчитанная по формулам (4.4) (а), (4.8) (б), 3 — суммарная интенсивность $I_1 + I_2$ (а), интенсивность отраженного света I_1 , рассчитанная по формуле (4.9) (б). Величины нормированы на интенсивность падающего света

свет попадает в оба фотоприемника Ph_1 и Ph_2 , а при $\alpha > \alpha_*$ — только в приемник Ph_1 . Приведенные на рис. 4 результаты относятся к образцу толщиной $d = 100$ мкм. Для образца толщиной 8 мкм картина качественно такая же, но с менее выраженными изменениями интенсивности в окрестности $\alpha \lesssim \alpha_*$. Таким образом, для обыкновенного луча экспериментально наблюдаемая картина качественно согласуется со сделанными предсказаниями, а для необыкновенного луча — нет.

Противоречие устраняется, если мы примем во внимание описанный в разд. 2.2 эффект поворота необыкновенного луча. Согласно результатам этого

раздела, необыкновенная волна с достаточно большим значением k_\perp (т. е. при достаточно большом угле падения α) не может проникнуть внутрь ЖК далее определенного слоя, на котором $k_z = 0$. После достижения этого слоя компонента k_z меняет знак. Фактически, эта волна выйдет из слоя ЖК с тем же значением поперечной компоненты волнового вектора \mathbf{k}_\perp , но с противоположным значением продольной компоненты k_z , т. е. будет выглядеть как отраженная. Как мы видели в разд. 2.2, поворот луча в случае $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$ возникает для волн с k_\perp , удовлетворяющим условию $\varepsilon_\perp k_0^2 < k_\perp^2 \leq \varepsilon_\parallel k_0^2$. Если учесть, что $k_\perp = k^{(e)} \sin \chi$, то с учетом закона Снеллиуса (3.3) имеем

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}}{n_p} < \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}{n_p}.$$

Поскольку $\sqrt{\varepsilon_\parallel} > n_p$ и $\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p \equiv \sin \alpha_*$, получаем, что эффект поворота необыкновенного луча возникает в области углов $\alpha_* < \alpha \leq 90^\circ$, что мы и наблюдали в эксперименте.

Физически совпадение предельных углов α_* для обыкновенного и необыкновенного лучей можно пояснить следующим образом. Если по мере распространения необыкновенного луча вглубь среды его показатель преломления (2.9) уменьшается, то в силу постоянства компоненты k_\perp волнового вектора это приводит к уменьшению компоненты волнового вектора $k_z^{(e)}$ вдоль луча. Минимальный угол α , при котором начинается эффект поворота, соответствует условию обращения $k_z^{(e)}$ в нуль на плоскости внутри ЖК, у которой показатель преломления $n^{(e)}$ минимален. В нашем случае $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$, поэтому минимальное значение $n^{(e)}$ равно $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и совпадает с показателем преломления обыкновенного луча $n^{(o)}$. Таким образом, минимальный угол α , при котором начинается эффект поворота необыкновенного луча, в точности совпадает с углом полного внутреннего отражения α_* обыкновенного луча.

4. ВЛИЯНИЕ ЭКСТИНКЦИИ

Проанализируем более детально угловую зависимость $I_{1,2}$ для обоих типов лучей.

Рассмотрим сначала случай падающего обыкновенного луча. Первый эффект, определяющий плавное убывание интенсивности проходящего луча I_2 и возрастание интенсивности отраженного луча I_1 при $\alpha \rightarrow \alpha_*$ в области $\alpha < \alpha_*$, связан с перераспределением энергии между преломленным и отраженным на границе ЖК–стекло лучами. Интенсивности

прошедшего в среду, I_{tr} , и отраженного, I_{rf} , лучей описываются формулами Френеля [9]:

$$I_{rf} = I_0 R_{\parallel}, \quad I_{tr} = I_0(1 - R_{\parallel}), \quad (4.1)$$

где I_0 — интенсивность падающего света,

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\chi - \alpha)}{\operatorname{tg}^2(\chi + \alpha)} \quad (4.2)$$

— коэффициент отражения для луча с поляризацией, лежащей в плоскости падения.

При приближении α к α_* коэффициент отражения возрастает, стремясь в пределе $\alpha \rightarrow \alpha_*$ к единице, поэтому в окрестности α_* становится необходимым учет многократных отражений света на обеих границах ЖК–стекло (рис. 3).

Заметим также, что при $\alpha \rightarrow \alpha_*$ из (3.2) имеем $\chi \rightarrow 90^\circ$, следовательно, распространение преломленного луча внутри ЖК при $\alpha \approx \alpha_*$ близко к скользящему. При этом длина пути

$$l^{(o)} = d \frac{\sin \alpha_*}{\sqrt{\sin^2 \alpha_* - \sin^2 \alpha}}, \quad (4.3)$$

проходимого лучом между двумя последовательными отражениями внутри ЖК, может быть достаточно большой, и становятся существенны потери света на рассеяние в ЖК (экстинкция). Общие формулы для коэффициента экстинкции в твист-ячейке ЖК с большим шагом спирали приведены в Приложении. По формулам (П.2), (П.4) был проведен расчет угловой зависимости коэффициентов экстинкции обыкновенного, $\sigma^{(o)}(\theta)$, и необыкновенного, $\sigma^{(e)}(\theta)$, лучей для рассматриваемого ЖК. Результаты приведены на рис. 5. Для нематической матрицы в данном ЖК известно отношение модулей Франка $K_{33}/K_{11} \approx 0.95$ и величина $K_{11} \sim 10^{-6}$ дин. Поэтому для оценок было использовано одноконстантное приближение с $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 10^{-6}$ дин. Область интегрирования в (П.2) обрезалась на углах рассеяния 0.7° , соответствующих апертуре приемника. Обратим внимание, что максимальные значения $\sigma^{(e)}$ (при $\theta \approx 45^\circ$), превосходят в несколько раз характерные значения $\sigma^{(o)}$ (ср. с [12, 13]).

С учетом многократных отражений и экстинкции получаем при $\alpha < \alpha_*$

$$I_1 = I_0 R_{\parallel} \left[1 + \frac{(a_{(o)} - \gamma_{(o)})^2}{1 - \gamma_{(o)}^2} \left(1 - \gamma_{(o)}^{2M_{(o)} + 2} \right) \right], \quad (4.4)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{a_{(o)}} \frac{(a_{(o)} - \gamma_{(o)})^2}{1 - \gamma_{(o)}^2} \left(1 - \gamma_{(o)}^{2M_{(o)} + 2} \right)$$

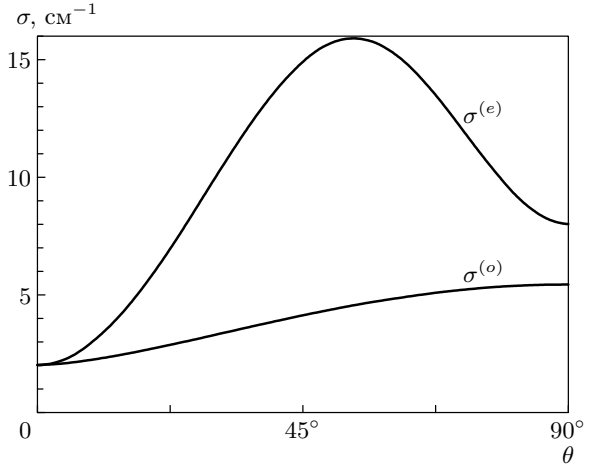


Рис. 5. Угловые зависимости коэффициентов экстинкции обыкновенного и необыкновенного лучей, рассчитанные по формуле (П.2)

и при $\alpha > \alpha_*$

$$I_1 = I_0, \quad I_2 = 0. \quad (4.5)$$

Здесь $\gamma_{(o)} = a_{(o)} R_{\parallel}$,

$$a_{(o)} = \exp \left(-\frac{l^{(o)}}{d} \int_0^d \sigma^{(o)}(\theta(z)) dz \right), \quad (4.6)$$

$\sigma^{(o)}(\theta)$ — коэффициент экстинкции обыкновенного луча, $\theta = \theta(z)$ — угол между директором $\mathbf{n}(z)$ и волновым вектором $\mathbf{k}^{(o)}$,

$$\cos \theta(z) = \frac{\mathbf{n}(z) \cdot \mathbf{k}_{\perp}}{k_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \cos(q_0 z + \phi_0) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_*},$$

$$M_{(o)} \approx 1 + \frac{D \sqrt{\sin^2 \alpha_* - \sin^2 \alpha}}{d \sin 2\alpha}$$

— число отражений обыкновенного луча внутри образца в пределах принимаемой апертуры $D \gg d$ (в нашем эксперименте $D = 4$ мм). В данной геометрии $\phi_0 = -\pi/2$, $\mathbf{k}_{\perp} = (k_{\perp}, 0, 0)$. Мы учли, что для обыкновенной волны траектория прямолинейна, и элемент длины траектории в (П.1) равен $dl = (l^{(o)}/d) dz$.

На рис. 4а сплошные линии соответствуют расчету по формулам (4.4), (4.5) с коэффициентом экстинкции $\sigma^{(o)}$, приведенным на рис. 5. Отметим, что кривые $I_{1,2}(\alpha)$ очень чувствительны к значению коэффициента экстинкции, поэтому согласие теории и

эксперимента, полученное на рис. 4а без каких-либо подгоночных параметров, следует считать достаточно хорошим. Обратим внимание, что сумма интенсивностей отраженного и прошедшего лучей при $\alpha < \alpha_*$ меньше интенсивности отраженного луча при $\alpha > \alpha_*$. Это различие особенно заметно при $\alpha_* - \alpha \sim 1-2^\circ$. Причина такого поведения связана со значительными потерями света на рассеяние в ЖК, когда при углах α , близких к углу полного внутреннего отражения, обыкновенный луч проходит большие расстояния внутри ЖК.

Теперь рассмотрим необыкновенный падающий луч. Отметим некоторые отличия рис. 4б от рис. 4а. Во-первых, в области $\alpha < \alpha_*$, достаточно далекой от α_* , интенсивность I_2 прошедшего необыкновенного луча меньше, чем обыкновенного. Так, как видно на рис. 4, $I_2^{(e)}(56^\circ) \approx 0.8I_0$, а $I_2^{(o)}(56^\circ) \approx 0.9I_0$. Во-вторых, для необыкновенного луча суммарная интенсивность $I_1 + I_2$ при $\alpha < \alpha_*$ в широкой области $\alpha_* - \alpha \gtrsim 1^\circ$ близка к значению интенсивности I_1 при $\alpha > \alpha_*$, в то время как для обыкновенного луча интенсивность I_1 в области $\alpha > \alpha_*$ заметно превосходит значения $I_1 + I_2$ в области $\alpha < \alpha_*$. И наконец, область углов $\alpha < \alpha_*$ на рис. 4б, в которых наблюдается заметное изменение I_1 и I_2 при $\alpha \rightarrow \alpha_*$, в несколько раз уже, чем для обыкновенного луча. Причем в этой области происходит небольшой рост интенсивности I_1 отраженного луча и заметное уменьшение интенсивности прошедшего луча I_2 , в отличие от обыкновенного луча, для которого изменение величин I_1 и I_2 имеет один порядок величины.

Для объяснения этих различий прежде всего напомним, что показатель преломления необыкновенного луча, $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$, в нашей системе почти втрое ближе к показателю преломления стеклянных призм, n_p , чем показатель преломления обыкновенного луча, $\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Отсюда следует, что коэффициент отражения для необыкновенного луча с поляризацией, лежащей поперек плоскости падения [9],²⁾

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\chi - \alpha)}{\sin^2(\chi + \alpha)}, \quad (4.7)$$

при χ из (3.4) примерно на порядок меньше, чем коэффициент отражения обыкновенного луча, R_{\parallel} . Поэтому основным фактором, существенно влияющим на интенсивности I_1 и I_2 для необыкновенного луча, является экстинкция. В частности, в дан-

ном случае сравнительно малую роль играют многократные отражения луча на границах ЖК–стекло и стекло–ЖК. Последнее объясняет отсутствие заметной угловой зависимости интенсивности отраженного луча I_1 в области $\alpha < \alpha_*$.

Таким образом, для интенсивностей прошедшего и отраженного лучей получаем при $\alpha < \alpha_*$

$$I_1 = I_0 R_{\perp} \left[1 + \frac{(a_{1(e)} - \gamma_{1(e)})^2}{1 - \gamma_{1(e)}^2} (1 - \gamma_{1(e)}^{2M_{1(e)} + 2}) \right], \quad (4.8)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{a_{1(e)}} \frac{(a_{1(e)} - \gamma_{1(e)})^2}{1 - \gamma_{1(e)}^2} (1 - \gamma_{1(e)}^{2M_{1(e)} + 2})$$

и при $\alpha > \alpha_*$

$$I_1 = I_0 R_{\perp} + I_0 \frac{a_{2(e)} - \gamma_{2(e)}}{1 - \gamma_{2(e)}} (1 - \gamma_{2(e)}^{M_{2(e)} + 1}), \quad (4.9)$$

$$I_2 = 0.$$

Здесь $\gamma_{j(e)} = a_{j(e)} R_{\perp}$, $j = 1, 2$,

$$a_{1(e)} = \exp \left(- \int_{z=0}^{z=d} \sigma^{(e)}(z) dl^{(e)}(z) \right), \quad (4.10)$$

$$a_{2(e)} = \exp \left(- 2 \int_{z=0}^{z=z_1} \sigma^{(e)}(z) dl^{(e)}(z) \right),$$

$\sigma^{(e)}(\theta)$ — коэффициент экстинкции необыкновенного луча, угол $\theta(z)$ определяется формулой (2.13),

$$dl^{(e)}(z) = \sqrt{1 + \left| \frac{d\mathbf{r}_{\perp}(z)}{dz} \right|^2} dz \quad (4.11)$$

— элемент длины пути, проходимого необыкновенным лучом в ЖК, вычисляемый по формуле (2.25), $M_{j(e)}$ — число отражений необыкновенного луча внутри образца при $\alpha < \alpha_*$ ($j = 1$) и $\alpha > \alpha_*$ ($j = 2$). В рассматриваемом случае $R_{\perp} \ll 1$, поэтому $\gamma_{j(e)} \ll 1$ и в формулах (4.8), (4.9) можно положить $M_{j(e)} = \infty$.

На рис. 4б сплошной линией показан результат расчета по формулам (4.8) и (4.9), в котором использованы значения $\sigma^{(e)}$, приведенные на рис. 5. Здесь также следует подчеркнуть высокую чувствительность кривых $I_2(\alpha)$ при $\alpha < \alpha_*$ и $I_1(\alpha)$ при $\alpha > \alpha_*$ к значению коэффициента экстинкции $\sigma^{(e)}$. Отметим, что при расчетах $\sigma^{(e)}$ проводилось обрезание интеграла (П.2) в области углов рассеяния,

²⁾ Здесь для оценок мы использовали формулу изотропной среды.

меньших 0.7° , что соответствует условию $q \gtrsim 4q_0$ в (П.4). В то же время формула (П.4) справедлива в области $q \gg q_0$. В области $q \lesssim q_0$ флуктуации директора (П.4) имеют не нематико-, а смектико-подобное [14] поведение. Кроме того, в тонких слоях ЖК становятся существенными эффекты взаимодействия молекул ЖК с ориентирующими поверхностями. Это приводит к подавлению флуктуаций вблизи границ, а значит, к уменьшению коэффициента экстинкции. Поэтому значения $\sigma^{(e)}$ на рис. 5, более чувствительные к рассеянию на малые углы, чем $\sigma^{(o)}$, следует рассматривать как оценку. С этим, вероятно, и связано большее расхождение теории и эксперимента для необыкновенного луча (рис. 4б), чем для обыкновенного (рис. 4а).

Теперь можно объяснить поведение I_1 и I_2 в областях, далеких от α_* . Меньшие величины I_2 для (e)-луча по сравнению с (o)-лучом связаны с тем, что в интегралы (4.8) и (4.9) вносят существенный вклад области z , в которых велик $\sigma^{(e)}$, т. е. те области, где $\theta(z)$ в (2.13) близок к 45° . В результате даже для сравнительно коротких длин прохода луча в среде, соответствующих углам α , далеким от α_* , экспоненциальные множители в (4.10) становятся отличны от единицы. Областям $\theta(z) \approx 45^\circ$ соответствуют два сравнительно узких участка на интервалах $(0, P/2)$ и $(P/2, P)$. При этом проходящий луч пересекает один такой участок существенного вклада в интеграл при $0 < z < P/2$, а другой — при $P/2 < z < P$. Луч, испытавший поворот, проходит дважды через один такой участок при $0 < z < P/2$, первый раз при прямом распространении, а второй раз — при обратном. Поэтому величина I_2 при $\alpha < \alpha_*$ и величина I_1 при $\alpha > \alpha_*$ имеют примерно одинаковые значения.

В близкой окрестности α_* длина траектории необыкновенного луча начинает увеличиваться и в интегралах (4.8) и (4.9) появляется заметный вклад от участков с небольшими значениями $\sigma^{(e)}$ и с большой длиной. Ширина области $\alpha - \alpha_*$, в которой этот вклад становится подавляющим, существенно меньше, чем для обыкновенного луча, по двум причинам. Во-первых, длина $l^{(e)}$ траектории необыкновенного луча короче, чем длина $l^{(o)}$ траектории обыкновенного, так как $l^{(e)}$ растет при $\alpha - \alpha_* \rightarrow 0$ логарифмически, а $l^{(o)} \sim (\alpha - \alpha_*)^{-1/2}$ в (2.4). Во-вторых, наиболее длинный участок траектории, находящийся в окрестности точки поворота $z_t(\alpha_*) = P/2$, соответствует углу θ между директором $\mathbf{n}(z) \approx \mathbf{n}(P/2)$ и волновым вектором $\mathbf{k}^{(e)} \approx \mathbf{k}_\perp$, близкому к нулю. А поскольку, как видно из рис. 5, величина $\sigma^{(e)}(0) \equiv \sigma^{(o)}(0)$ соответствует минимуму $\sigma^{(o)}(\theta)$,

значения подинтегральной функции в (4.8) и (4.9) на наиболее длинном участке траектории необыкновенного луча меньше значений подинтегральной функции в (4.6) для обыкновенного луча.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим некоторые дополнительные факторы, влияющие на интенсивности проходящего и отраженного необыкновенных лучей в близкой окрестности угла α_* .

Во-первых, как известно, для необыкновенного луча в НЖК имеет место аномально сильное рассеяние на малые углы в необыкновенный луч [1]. В силу этого необыкновенный луч на длинах порядка $(\sigma^{(e)})^{-1} \ll (\sigma^{(o)})^{-1}$ за счет многократного рассеяния трансформируется из когерентного в диффузный с незначительным угловым расширением пучка и сохранением поляризации [15]. Поскольку рассматриваемая система локально близка к НЖК, здесь можно ожидать аналогичный эффект. Согласно экспериментальным данным [15], характерный угловой размер диффузного луча составлял $1^\circ - 1.5^\circ$ при длинах прохода луча в ЖК порядка 0.1 см. Таким образом, примерно при тех же углах α , при которых существенно изменяется I_2 за счет потерь света на рассеяние на большие углы, начинает происходить и значительное расширение углового расхождения луча. В результате при $\alpha_* - \alpha \sim 1^\circ - 1.5^\circ$ в пучке появляется заметная доля лучей, у которых проявляется эффект поворота. Эти лучи после выхода из ЖК выглядят как отраженные. За счет этого в области $\alpha_* - \alpha \sim 1^\circ - 1.5^\circ$ начинает увеличиваться интенсивность I_1 , причем тем заметнее, чем ближе $\alpha_* - \alpha$ к нулю.

Во-вторых, при углах $\alpha > \alpha_*$, но достаточно близких к α_* , на угловую зависимость интенсивностей $I_{1,2}$ может оказывать влияние так называемый эффект просачивания [11, 16]. Он состоит в частичном проникновении волны через запрещенную область, где она экспоненциально затухает вдоль направления z , в соседнюю разрешенную область. Это приводит к уменьшению интенсивности I_1 (часть энергии уходит через запрещенную область) и увеличению интенсивности I_2 (энергия приходит через запрещенную область). Эффект просачивания проявляется тем заметнее, чем меньше ширина запрещенной области. В нашем случае запрещенной является область $z_t < z < P - z_t$ и ее ширина $P - 2z_t$ стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha_*$. Характерный ин-

тервал углов $\Delta\alpha_{per} = \alpha - \alpha_*$, для которых заметен эффект просачивания, определяется неравенством

$$\int_{z_t}^{P/2} \text{Im} k_z^{(e)}(z) dz \lesssim 1. \quad (5.1)$$

Из условия $k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z_t) = 0$ можно найти z_t как функцию α :

$$z_t(\alpha) = q_0^{-1} \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_a} \left(\frac{\varepsilon_\parallel}{n_p^2 \sin^2 \alpha} - 1 \right)}.$$

В частности, $z_t(\alpha_*) = P/2$. Отсюда для $\Delta z_t(\alpha) = z_t(\alpha_*) - z_t(\alpha)$ в пределе $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_* \rightarrow 0$ имеем

$$\Delta z_t(\alpha) \approx \mu q_0^{-1} (\Delta\alpha)^{1/2},$$

где

$$\mu = 2^{1/2} \varepsilon_\parallel^{1/2} \varepsilon_\perp^{-1/4} \varepsilon_a^{-1/2} (n_p^2 - \varepsilon_\perp)^{1/4}.$$

В окрестности точки $z_t = z_t(\alpha)$ в запрещенной области продольная компонента волнового вектора (2.14) имеет вид

$$k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) \approx ik_0 \sqrt{\varepsilon_a} \times \sqrt{2\mu(\Delta\alpha)^{1/2} q_0 (z - z_t) - q_0^2 (z - z_t)^2}. \quad (5.2)$$

Выполняя интегрирование в неравенстве (5.1), получаем

$$\frac{\pi k_0}{4q_0} \mu^2 \sqrt{\varepsilon_a} \Delta\alpha \lesssim 1.$$

Отсюда

$$\Delta\alpha_{per} \sim \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_\parallel P} \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_a}{n_p^2 - \varepsilon_\perp}}.$$

Для экспериментальных значений n_p , ε_\perp и ε_\parallel имеем $\Delta\alpha_{per} \sim 0.2\lambda/P$. Для образца толщиной 100 мкм получим $\Delta\alpha_{per} \sim 0.07^\circ$, для образца толщиной 8 мкм — $\Delta\alpha_{per} \sim 0.9^\circ$.

В-третьих, поскольку при $\alpha = \alpha_*$ точка поворота $z_t(\alpha_*) = P/2$, для компонент волнового вектора $\mathbf{k}^{(e)}$ имеем в этой точке $k_\perp^{(e)} = k_0 \sqrt{\varepsilon_\perp}$, $k_z^{(e)} = 0$. Компонента $\mathbf{k}_\perp^{(o)} = \mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_\perp^{(e)}$, поэтому в этом случае, согласно (2.12), $k_z^{(o)}(k_\perp) = 0$ и $\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{k}^{(o)}$. При этом в точке поворота $\mathbf{n}(P/2) \parallel \mathbf{k}^{(o,e)}$, и моды вырождены — различие между обыкновенной и необыкновенной волнами исчезает. В такой ситуации может возникать эффект взаимной трансформации мод [10] между обыкновенным и необыкновенным лучами. В результате в окрестности точки поворота при $\alpha \approx \alpha_*$ часть энергии необыкновенного луча передается обыкновенному лучу, причем последний распространяется

в узкой окрестности плоскости $z = d/2$ и на внешние поверхности призм не выходит. Характерный интервал углов $\Delta\alpha_{int}$, в котором может происходить взаимная трансформация этих двух лучей, определяется неравенством

$$\left| \mathbf{k}^{(o)} - \mathbf{k}^{(e)} \right| \lesssim q_0 = \pi/P.$$

Поскольку в окрестности поворота $k_z^{(e)} \ll k_\perp$, получаем условие

$$\left| \mathbf{k}_\perp^{(o)}(\alpha_*) - \mathbf{k}_\perp^{(e)}(\alpha) \right| \lesssim q_0,$$

или

$$k_0 n_p \cos \alpha_* \Delta\alpha = k_0 \sqrt{n_p^2 - \varepsilon_\perp} \Delta\alpha \lesssim q_0.$$

Отсюда следует оценка $\Delta\alpha_{int} \lesssim \lambda/P$ или $\Delta\alpha_{int} \sim \sim 0.4^\circ$ для $d = 100$ мкм и $\Delta\alpha_{int} \sim 4.5^\circ$ для $d = 8$ мкм. Подчеркнем, что данная оценка дает лишь область углов, где может проявляться трансформация необыкновенного луча в обыкновенный, а не абсолютные значения такой трансформации. Для расчета последней величины требуется решать волновое уравнение в окрестности $\alpha = \alpha_*$ с учетом взаимодействия мод, что представляет собой отдельную нетривиальную задачу.

В заключение отметим, что обнаруженная рефракция необыкновенного луча имеет аналоги при распространении волн в средах с плавно меняющимися оптическими и акустическими характеристиками. К таким эффектам относятся тропосферная рефракция [16], возникновение подводного волнового канала в океане [11], эффекты, возникающие при распространении сейсмических волн в земной коре и т. д.

Исследование рефракции в ячейках ЖК представляет самостоятельный интерес для оптики жидких кристаллов. С другой стороны, ячейки киральных ЖК могут служить удобной модельной системой для изучения таких тонких эффектов, как распространение волн внутри волнового канала, просачивание волн из одного волнового канала в другой, взаимодействие мод в окрестности каустики и т. д.

Авторы благодарны В. А. Белякову за обсуждение и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 02-02-16577, 03-02-16173, 03-03-32823) и Министерства Образования РФ (грант № PD02-1.2-297).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициент экстинкции в твист-ячейке с большим шагом спирали

При распространении луча во флуктуирующей среде происходят потери его энергии на рассеяние. Эти потери описываются коэффициентом экстинкции σ , который совпадает с полным сечением рассеяния — проинтегрированной по всем углам рассеяния интенсивности рассеянного излучения, отнесенной к единице объема и единице интенсивности падающей волны.

С учетом экстинкции интенсивность $I(\ell)$ луча, прошедшего путь длиной ℓ в среде, определяется формулой

$$I(\ell) = I(0) \exp \left(- \int_0^\ell \sigma(l) dl \right), \quad (\text{П.1})$$

где dl — элемент длины траектории.

В однородной анизотропной среде имеются два коэффициента экстинкции: $\sigma^{(o)}$ и $\sigma^{(e)}$. В борновском приближении они имеют вид [12, 13, 17]:

$$\sigma^{(i)} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \frac{e_\alpha^{(i)} e_\beta^{(i)}}{n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \times \sum_{s=1,2} \int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} \frac{n^{(s)} e_\mu^{(s)} e_\nu^{(s)}}{\cos^2 \delta^{(s)}} G_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (\text{П.2})$$

Здесь индексы (i) и (s) , относящиеся, соответственно, к падающей и рассеянной волнам, принимают два значения, отвечающие в одноосной среде модам (o) и (e) ; величины $\delta^{(j)}$ — углы между векторами $\mathbf{e}^{(j)}$ и $\hat{\varepsilon}\mathbf{e}^{(j)}$,

$$G_{\alpha\mu\beta\nu} = G_{\alpha\mu\beta\nu}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)})$$

— фурье-образ корреляционной функции флуктуаций директора

$$\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \delta \hat{\varepsilon}^*(\mathbf{r}') \rangle,$$

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha (n_\alpha \delta n_\beta + n_\beta \delta n_\alpha),$$

$\int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}}$ обозначает интегрирование по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{k}^{(s)}/k^{(s)}$.

В геликоидальной среде с большим шагом спирали формула (П.2) сохраняет смысл, если учесть, что величины $\mathbf{e}^{(j)}$, $n^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$, являющиеся функцией угла $\theta^{(j)}(z)$ между векторами $\mathbf{k}^{(j)}$ и $\mathbf{n}(z)$, зависят от z . Корреляционная функция $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в координатном представлении в геликоидальной среде может быть записана как $\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; (z + z')/2)$.

Для рассеяния света существенная область функции \hat{G} по первому аргументу $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \lambda$, что много меньше P — характерного масштаба по аргументу $(z + z')/2$. Такое различие масштабов дает возможность во всех плавных величинах провести замену $(z + z')/2 \approx z \approx z'$, а по разностной переменной $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ выполнить фурье-преобразование с волновым вектором $\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)}(z) - \mathbf{k}^{(i)}(z)$ при фиксированном $z \approx z'$, предполагая выполненным условие $|\mathbf{k}^{(s)}(z) - \mathbf{k}^{(i)}(z)| \gg q_0$ [7, 18].

Фурье-образ корреляционной функции флуктуаций директора

$$g_{\alpha\beta} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \frac{z + z'}{2} \right) = \langle \delta n_\alpha(\mathbf{r}) \delta n_\beta(\mathbf{r}') \rangle \quad (\text{П.3})$$

по переменной $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ для ХЖК с большим шагом спирали в адиабатическом приближении при условии $q \gg q_0$ имеет вид, аналогичный для случая НЖК [1], с учетом плавной «прецессии» директора вдоль оси z :

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, z) = k_B T \sum_{j=1,2} \frac{e_{j\alpha}(\mathbf{q}, z) e_{j\beta}(\mathbf{q}, z)}{(K_{33} - K_{jj})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}(z))^2 + K_{jj}q^2}, \quad (\text{П.4})$$

где K_{jj} , $j = 1, 2, 3$ — модули Франка,

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{q}, z) = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{n}(z)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}(z))}{\sqrt{q^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}(z))^2}},$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{q}, z) = \mathbf{e}_1(\mathbf{q}, z) \times \mathbf{n}(z)$$

(см. [18]).

Это позволяет использовать формулу типа (П.2) с корреляционной функцией (П.4) для расчета вклада в коэффициент экстинкции $\sigma^{(j)}$ ($\theta^{(j)}(z)$) в геликоидальной среде за счет рассеяния на не очень малые углы.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977); P. de Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).
2. С. Чандрасекхар, *Жидкие кристаллы*, Мир, Москва (1980).
3. В. А. Беляков, *Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры*, Наука, Москва (1988).
4. M.C. Mougouin, Bull. Soc. Franc. Miner. Cryst. **34**, 71 (1911).

5. V. S. Liberman and B. Ya. Zel'dovich, *Phys. Rev. E* **49**, 2389 (1994); A. Yu. Savchenko and B. Ya. Zel'dovich, *Phys. Rev. E* **50**, 2287 (1994).
6. А. Ю. Вальков, Р. В. Гринин, В. П. Романов, *Опт. и спектр.* **83**, 239 (1997); E. V. Aksenova, A. Yu. Val'kov, and V. P. Romanov, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **359**, 351 (2001); Е. В. Аксенова, А. Ю. Вальков, В. П. Романов, *Опт. и спектр.* **91**, 1030 (2001).
7. Е. В. Аксенова, А. Ю. Вальков, В. П. Романов, *ЖЭТФ* **125**, 72 (2004).
8. M. Warengem, M. Ismaili, and D. Hector, *J. de Phys. III* **2**, 765 (1992); F. Simoni, F. Bloisi, L. Vicari, M. Warengem, M. Ismaili, and D. Hector, *Europhys. Lett.* **21**, 189 (1993); M. Warengem, M. Ismaili, F. Simoni, F. Bloisi, and L. Vicari, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **251**, 43, 61 (1994); M. Warengem, D. Louvergneaux, and F. Simoni, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **282**, 235 (1996).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2001).
10. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, Москва (1980).
11. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, изд-во АН СССР, Москва (1957); Л. М. Бреховских, О. А. Годин, *Акустика слоистых сред*, Наука, Москва, (1989).
12. E. Miraldi, I. Trossi, and P. Taverna Valabreda, *Nuovo Cimento B* **60**, 165 (1980).
13. А. Ю. Вальков, В. П. Романов, *ЖЭТФ* **90**, 1264 (1986).
14. T. C. Lubensky, *Phys. Rev. A* **6**, 452 (1972).
15. А. Ю. Вальков, Л. А. Зубков, А. П. Ковшик, В. П. Романов, *Письма в ЖЭТФ* **46**, 281 (1984).
16. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
17. D. Langevin and M.-A. Bouchiat, *J. de Phys.* **36**, 197 (1975).
18. E. V. Aksenova, V. P. Romanov, and A. Yu. Val'kov, *J. Math. Phys.* **45**, 2420 (2004).