

ПЕРЕНОС СИЛЬНО КОМПТОНИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*С. А. Вагнер**

*Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 мая 2004 г.

Для сильно комптонизованного излучения в нерелятивистской плазме проводится вычисление тормозного источника комптонизованных фотонов с параметрически точным учетом поглощения и нелинейного характера индуцированного испускания. Сформулированы уравнения радиационной гидродинамики, верные в пределе сильного комптоновского обмена энергией между плазмой и излучением. В этих условиях получена формула для диссипации энергии. Для оптически толстой области найдено уравнение, описывающее пространственное изменение фактора экспоненциального спада спектра излучения.

PACS: 44.40.+a, 95.30.Jx

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы взаимодействия интенсивного излучения с веществом имеют большое прикладное и фундаментальное значение. Среди них важное место занимают проявления обратного комптоновского эффекта. Например, на лабораторных масштабах он может быть существенным для оценки энергетических потерь на излучение при ударном сжатии тела до высоких плотностей. В космических условиях этот эффект становится заметным и для разреженных сред за счет больших масштабов. Он оказывает влияние на спектр излучения, называемое комптонизацией. Первое сообщение об усилении мощности тормозного механизма излучения и о характере спектра в условиях сильной комптонизации было сделано в работе Компанейца [1]. В последующей литературе комптонизация спектра изучалась в однородном случае (см., например, обзор [2]) и нашла широкое применение при интерпретации астрофизических наблюдений. В ряде публикаций проводилось также обобщение кинетического уравнения Компанейца для неоднородной плазмы (см., например, [3] и ссылки там) и рассматривались решения этого уравнения в различных случаях (см., например, [4, 5] и ссылки там). Однако эти решения все еще не позволяют ни находить светимость плазмы, имеющей область сильной комптонизации, ни опи-

сывать комптоновский обмен энергией для самосогласованного отыскания температуры плазмы.

В условиях сильной комптонизации часть спектра, вносящая основной вклад в плотность потока энергии, имеет виновский вид и может быть охарактеризована плотностью числа фотонов этой части спектра. В пространственно неоднородном случае наличие параметров, полностью характеризующих спектр излучения, требует уравнения, описывающего их пространственное изменение. В частности, это необходимо для вычисления потерь на излучение, так как они определяются не только тормозным механизмом, но и оптической толщиной излучающей среды, а также распределением ее температуры. Уравнение непрерывности числа фотонов в системе уравнений радиационной гидродинамики в условиях доминирования комптоновского рассеяния сформулировано в работе [6]. Однако параметрически точное выражение для источника числа фотонов до сих пор не публиковалось. Такое выражение подразумевает учет как поглощения, так и нелинейного характера индуцированного испускания. Необратимое энерговыделение в неоднородной плазме с сильно комптонизованным излучением в общем виде не рассматривалось вовсе.

Основной целью настоящей работы является вычисление эффективного источника числа фотонов, порождаемого тормозными процессами в нерелятивистской плазме. Эта величина и вычисляемая с ее помощью плотность числа фотонов используются в

*E-mail: s_wagner@mail.ru

формуле для полного энергосвечения в комптонизованной области, которая получается из уравнений радиационной гидродинамики в режиме сильного комптоновского обмена энергией.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной работе рассматривается рентгеновское излучение, имеющее непрерывный спектр и создаваемое тепловым тормозным механизмом в локально-равновесной плазме с температурой T , плотностью электронной компоненты n_e и нерелятивистской скоростью течения \mathbf{u} . Это излучение может быть описано локально числом заполнения неполяризованных фотонов в пространстве импульсов \mathbf{p} в точке наблюдения \mathbf{r} в системе отсчета, сопутствующей каждой равновесной малой части плазмы. Дополнительные условия для этих величин формулируются далее посредством параметров, характеризующих перенос излучения. Они обычно реализуются в астрофизических применениях [7].

Угловое распределение излучения зависит от томсоновского рассеяния с коэффициентом на единицу длины

$$k_T = \sigma_T n_e,$$

где σ_T — сечение томсоновского рассеяния. С коэффициентом k_T связана также оптическая толщина τ , определяемая выражением

$$d\tau = k_T dl$$

и дающая долю рассеянного излучения на пути dl вдоль рассматриваемого направления. В дальнейшем считается, что для всех существенных размеров $\tau \gg 1$. Тогда кинетическое описание излучения сводится к усредненному по направлениям \mathbf{p} числу заполнения фотонов $n(t, \mathbf{r}, p)$, которое подчиняется кинетическому уравнению

$$\hat{L}n = \frac{1}{c} \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)^C + \frac{1}{c} \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)^B. \quad (1)$$

Для движущейся с нерелятивистской скоростью \mathbf{u} плазмы левая часть (1) может быть записана как [8]

$$\hat{L}n = \frac{1}{c} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}}{c} n - \frac{1}{3k_T} \nabla n \right\} - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^3 \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{3c} n \right\}. \quad (2)$$

Слагаемые, связанные с пространственным изменением, описывают снос излучения течением и его

диффузию. Слагаемое, связанное с изменением в импульсном пространстве, описывает влияние эффекта Доплера на спектр излучения. Для ясности имеет смысл подчеркнуть, что операции дифференцирования ∇ в выражении для \hat{L} проводятся при постоянном p . В частности, при использовании ниже другой переменной $q = pc/T(\mathbf{r})$ подразумевается, что они преобразуются как

$$\nabla = \nabla|_q - \left(\frac{\nabla T}{T} \right) q \frac{\partial}{\partial q}. \quad (3)$$

Слагаемые правой части (1) представляют интегралы столкновений для комптоновского рассеяния и тормозных процессов. Для температуры плазмы $T \ll m_e c^2$, где m_e — масса электрона, c — скорость света, комптоновский интеграл столкновений приобретает вид [1]

$$\left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)^C = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 J^C$$

с плотностью радиального потока в пространстве импульсов, равной

$$J^C = ck_T p^2 \left(\frac{n(1+n)}{m_e c} + \frac{T}{m_e c^2} \frac{\partial n}{\partial p} \right).$$

Первое слагаемое приводит к охлаждению, второе — к нагреву излучения со стороны электронной компоненты плазмы. В астрофизической литературе действие обратного комптоновского эффекта при оптической толщине $\tau \gg 1$ обычно характеризуют параметром

$$Y_C = \frac{4T}{m_e c^2} \tau^2,$$

представляющим собой относительную долю энергии, получаемой излучением от электронной компоненты плазмы. По порядку величины он также может быть истолкован как отношение в (1) слагаемого, отвечающего за комптоновский нагрев, к слагаемому, описывающему пространственную диффузию.

Вклады испускания и поглощения в тормозном интеграле столкновений могут быть записаны с помощью одной величины — эффективного коэффициента тормозного поглощения k_B на единицу длины:

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)^B = k_B n_P [(1+n) - ne^q] \equiv k_B [n_P - n].$$

Последнее равенство подразумевает, что равновесным является планковское число заполнения

$n_P = (e^q - 1)^{-1}$. Для фотонов с энергией $pc \lesssim T$ в плазме с температурой $T \gg I_H$, где I_H — потенциал ионизации атома водорода, эффективный коэффициент тормозного поглощения [9] равен

$$k_B = \varkappa \frac{\phi(q)}{q^2}, \quad \phi(q) = \frac{1 - e^{-q}}{q} e^{q/2} K_0\left(\frac{q}{2}\right), \quad (4)$$

где $K_0(s)$ — функция Макдональда. Для столкновений электронов с ионами каждого сорта a с плотностью n_a и зарядом $z_a e$ величина

$$\varkappa = \left(\sum_a z_a^2 n_a \right) n_e \sigma_T \frac{(hc)^3 (T I_H)^{1/2}}{2\pi^5/2 T^4}.$$

Далее для уравнения (1) будет рассматриваться только задача нахождения n в отсутствие несобственного источника фотонов в области больших энергий, т. е. с граничным условием

$$p^2 \left(\frac{p}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) n + J^C \right) = o(1) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Граничные условия по пространственной переменной \mathbf{r} в данной работе не используются. Предполагается, что в рассматриваемых пространственных областях они не оказывают влияния на собственные пространственные и энергетические масштабы изменений $n(t, \mathbf{r}, p)$. Выполнение аналогичного условия подразумевается и для зависимости от времени характеристик плазмы n_e , T и \mathbf{u} . Другими словами, рассматривается только квазистационарный предел как для (1), так и для гидродинамических движений.

Выбор характерного масштаба в уравнении (1) зависит от рассматриваемого вопроса. Если происходит аккреция (натекание) плазмы в некоторую внутреннюю область и требуется определить выходящую светимость, то характерные внутренние пространственные масштабы определяются равенством по порядку величины диффузионных и сносовых слагаемых в (2). Для течений с линиями тока, имеющими не слишком сложную топологию, например, сферически- или аксиально-симметричную, такое равенство достигается на некоторой поверхности. Тогда геометрические размеры этой поверхности R для каждого из направлений распространения излучения и будут характерными масштабами. При этом соответствующая оптическая толщина $\tau \sim k_T R$, а значения характеристик плазмы должны браться на указанной поверхности. Если же требуется исследовать локальный спектр излучения, характерными будут непосредственно локальные размеры распределений n_e , \mathbf{u} и T . Например, в случае сферического истечения и степенных радиальных зависимостей этих величин характерным будет значение

радиуса (расстояния до центра симметрии) в рассматриваемой точке. В данной работе принимается, что условия $\tau \gg 1$ и $Y_C \gg 1$ выполнены как для глобальных характерных масштабов задачи, так и локально в некоторой пространственной области.

В связи с этим представляется удобным привести (1) к безразмерным уравнениям:

$$-q^4 \left(\frac{\partial n}{\partial q} + n + n^2 \right) = j, \quad (6)$$

$$\frac{\partial j}{\partial q} = -q^2 \hat{\zeta} n + \xi (n_P - n) \phi(q), \quad (7)$$

таким что оператор

$$\hat{\zeta} = \frac{m_e c^2}{k_T T} \hat{L}$$

имеет порядок $\zeta \sim 1/Y_C \ll 1$. Относительная роль тормозных процессов в (7) описана параметром

$$\xi = \frac{\varkappa m_e c^2}{k_T T}.$$

Неравенство $\xi \ll 1$ есть последнее условие, накладываемое на характеристики плазмы в данной работе.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ИСТОЧНИК ФОТОНОВ

3.1. Предварительные оценки

При $q \ll 1$ приведенная в (4) функция ϕ имеет вид

$$\phi(q) = \ln \frac{4\eta_E}{q} [1 + O(q)], \quad \eta_E = 0.561459 \dots$$

Поэтому из оценок производных $q\partial/\partial q \sim 1$ в уравнениях (6) и (7) можно заключить, что поглощение становится существенным для $q \sim \xi^{1/2}$, причем $n \sim \xi^{-1/2}$ и $j \sim \xi$. Действительно, поскольку для $q \ll \xi^{1/2}$ поглощение уже доминирует, число заполнения должно приближаться к своему равновесному планковскому значению $n_P \approx 1/q$ и по порядку величины остается тем же и для $q \sim \xi^{1/2}$.

Дальнейшее сравнение слагаемых в (7) в диапазоне $\xi^{1/2} \ll q \ll (\xi/\zeta)^{1/3}$ показывает, что увеличение комптонизирующего потока j возможно за счет действия тормозного источника:

$$\frac{\partial j}{\partial q} \sim \xi \frac{1}{q} \ln \frac{4\eta_E}{q}.$$

Отсюда

$$j \sim \xi \frac{1}{2} \ln^2 \frac{4\eta_E}{\sqrt{\xi}}.$$

Именно этот поток играет роль эффективного источника наряду с собственно тормозным. Он уменьшается при $q \gg (\xi/\zeta)^{1/3}$, расходясь на пространственный уход излучения.

3.2. Излучение в области сильной комптонизации

Более точные соотношения возникают, если построить низший порядок разложений по $\xi \ll 1$ и $\zeta \ll 1$ равномерно по q и n . Из вида (6) и (7) ясно, что на масштабе $q \sim 1$ и при любом n такое разложение должно просто совпадать с разложением по степеням правой части (7). Другими словами,

$$j(q) = j_0 + j_1(q) + \dots \quad (8)$$

с

$$j_1(q) = \int_q^{q_0} dq_1 q_1^2 \hat{\zeta} n_0(q_1; j_0) - \xi \int_q^{q_0} dq_1 [n_P(q_1) - n_0(q_1; j_0)] \phi(q_1)$$

и

$$n = n_0(q; j_0) + n_1(q; A_1; j_0) + \dots \quad (9)$$

с

$$n_1(q; A_1; j_0) = u(q; j_0) \left(A_1 + \int_q^{q_1} dq_2 \frac{j_1(q_2)}{u(q_2; j_0) q_2^4} \right).$$

В этих разложениях функция $n_0(q; j)$ обозначает решения уравнения (6) при постоянном j , которое является уравнением нулевого приближения. Функция $u(q; j)$ в (9) обозначает решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u[1 + 2n_0(q; j)] = 0,$$

соответствующего уравнению для первой поправки $n_1(q; A_1; j)$, получаемому из (6).

Однако для применения граничного условия (5) требуется выяснить, насколько такое разложение справедливо в области $q \gg 1$. При $j_0 \neq 0$ легко установить асимптотическое поведение функций

$$n_0(q; j_0) = -j_0 q^{-4} [1 + O(1/q)], \\ u(q; j_0) = e^{-q} [1 + O(1/q)], \quad q \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что разложение (9), с одной стороны, оказывается равномерным при $q \rightarrow \infty$ и тем самым допускающим применение к себе внешних граничных условий, а с другой стороны, не удовлетворяющим данному конкретному условию (5). Таким образом, необходимо выбрать $j_0 = 0$ и положить $q_0 = \infty$ в разложении (8).

Решая уравнение (6) с $j = 0$, нетрудно убедиться, что

$$n_0(q; j_0)|_{j_0=0} = (A_0^{-1} e^q - 1)^{-1}, \\ u(q) = e^q (e^q - A_0)^{-2}.$$

Для дальнейшего исследования равномерности нужно оставить в (9) ведущие при $q \gg 1$ слагаемые. Поскольку эти слагаемые содержат $\hat{\zeta}$, необходимо обратиться к явному виду (2) оператора \hat{L} с учетом (3). Таким способом находится

$$n = A_0 \left[1 + \frac{m_e c^2}{3k_T^2 T} \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 q + O(\ln q) \right] e^{-q} + \dots,$$

что свидетельствует о неравномерности разложения ввиду вклада пространственных изменений при $q \sim 1/\zeta$. Тем не менее можно ожидать, что согласование с равномерным по \mathbf{r} и удовлетворяющим (5) разложением n при $q \gg 1$ приведет к отысканию q_1 . Для конечного результата работы эта величина не потребуется. Поэтому в следующем разделе только кратко демонстрируется существование указанного разложения.

3.3. Экспоненциальная асимптотика спектра

Для построения удовлетворяющего (5) разложения нужно учесть уже установленный экспоненциальный вид n при $q \gg 1$. Другими словами, необходимо сделать подстановку $n = \exp(-g)$ в исходное уравнение (1) и провести разложение по $1/g \ll 1$, полагая также $p \partial g / \partial p \sim g$ и $|R \nabla g| \sim g$. Эта процедура дает уравнение низшего приближения:

$$-\frac{1}{3k_T} (\nabla g)^2 = -\frac{p^2 k_T}{m_e c} \frac{\partial g}{\partial p} \left(1 - \frac{T}{c} \frac{\partial g}{\partial p} \right), \quad (10)$$

которое балансирует слагаемые порядка g^2 и p^2 . Оно имеет решение специального вида

$$g = p\beta(\mathbf{r})c - \ln A, \quad A = \text{const}, \quad (11)$$

называемое полным интегралом. При этом функция β подчиняется уравнению

$$\frac{1}{3k_T^2} (\nabla \beta)^2 = \beta^2 \frac{(1/\beta) - T}{m_e c^2}. \quad (12)$$

Поскольку граничное условие (5) может быть удовлетворено только для действительных $\beta > 0$, из (12) следует более сильное требование $1/\beta > T$. Различные решения этого уравнения различаются, например, распределением β на некоторой замкнутой поверхности. В рамках обычной постановки задачи, когда требуется вычислить наблюдаемый вдали от источников спектр выходящего излучения, такой поверхностью может быть сфера большого радиуса. В частности, для сферически-симметричного течения и монотонного убывания температуры плазмы $T(r)$ с увеличением расстояния r до центра симметрии решение $\beta(r)$ уравнения (12) однозначно определяется условием $1/\beta \rightarrow T$ при $r \rightarrow 0$, приводя к определенному значению $\beta(\infty)$ на больших радиусах.

При $\zeta \ll 1$ разница $1/\beta - T$ становится малой. Поэтому, исключая ее в разложении

$$\exp(-g) = A \exp\left(-\frac{pc}{T}\right) \left\{1 + \left(\frac{c}{T} - c\beta\right)p + \dots\right\}$$

с помощью (12), можно видеть совпадение с последним разложением предыдущего раздела. Результативное согласование, приводящее к определению q_1 в (9), требует следующего приближения. При этом как $\ln A$, так и постоянные интегрирования в (12) должны рассматриваться уже как функции $\ln p$, которые позволят подстановке $n = \exp(-g)$ сбалансировать в (1) слагаемые первой степени g и p . Однако эта процедура уже находится за рамками данной работы, которая ограничена областью $\zeta \ll 1$.

3.4. Зависимость источника фотонов от тормозного параметра

Для учета действия тормозного источника осталось рассмотреть в (9) предел $q \ll 1$. Это приводит к выражениям

$$j(q) = j_1 + O(q\zeta) - \xi \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{4\eta_E}{q} - \frac{\pi^2}{12} + O\left(q \ln^2 \frac{4\eta_E}{q}\right) - f_1(A_0) \right] + \dots, \quad (13)$$

$$n = \frac{A_0}{1 - A_0 + q} + \frac{A_1}{(1 - A_0 + q)^2} + O(q) + \frac{j(q) + O(\xi \ln(4\eta_E/q))}{3q^3} + \dots \quad (14)$$

Здесь

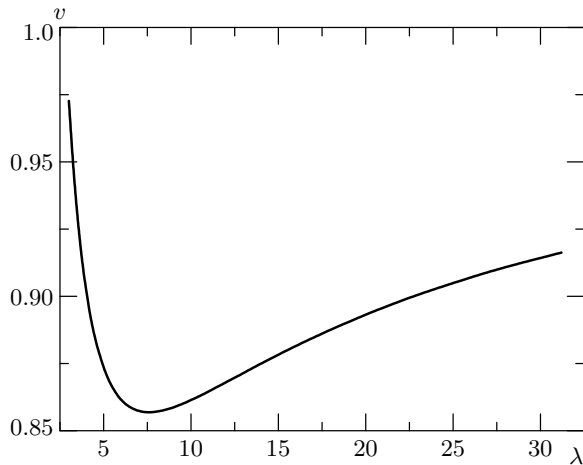
$$f_1(A_0) = \int_0^\infty \frac{dq}{q} \frac{e^q - 1}{A_0^{-1}e^q - 1} e^{-q/2} K_0\left(\frac{q}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\ln^2(3 + 2\sqrt{2})] A_0 [1 + O(A_0)], & A_0 \ll 1, \\ \frac{1}{2} \ln^2 \frac{4\eta_E}{1 - A_0} + \frac{\pi^2}{12} + O(1 - A_0), & 1 - A_0 \ll 1, \end{cases}$$

$$j_1 = \int_0^\infty dq q^2 \hat{\zeta} \frac{1}{A_0^{-1}e^q - 1}$$

— искомый эффективный источник числа фотонов. Соответствующая размерная величина имеет вид

$$J_r = \frac{ck_T T}{m_e c^2} \frac{8\pi T^3}{(hc)^3} j_1 = 2 \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} c \hat{\zeta} \frac{1}{A_0^{-1} \exp(pc/T) - 1}. \quad (15)$$

Выражение (14) показывает, что разложение (9) может вновь терять справедливость, но теперь уже при $q \rightarrow 0$. Для отыскания j_1 необходимо согласовать (13) и (14) с асимптотическим поведением при $q \gg \xi^{1/3}$ такого решения уравнений (6) и (7), которое удовлетворяло бы условию равновесия $n \rightarrow n_p$ при $q \rightarrow 0$. В принципе, такое решение может быть реализовано численно. Выполнение трех указанных условий при наличии двух постоянных A_0 и j_1 привело бы к учету дополнительной функциональной зависимости j_1 от A_0 . Однако роль такого учета зависит от соотношения масштабов изменения по переменной q . Разложение (14) демонстрирует возможность масштабов $1 - A_0$ и $[j_1(1 - A_0)/A_0]^{1/3}$. Оценки, проведенные в разд. 3.1, установили наличие масштаба $\xi^{1/2}$, а также соотношение $j_1 \sim \xi$. Между тем соотношения $\xi^{1/2} \gtrsim [\xi(1 - A_0)/A_0]^{1/3}$ или $\xi^{1/2} \gtrsim (1 - A_0)$ заведомо предполагают $1 - A_0 \ll 1$, что соответствует малым отклонениям от планковского числа заполнения. Но в этом случае вычисление источника фотонов не имеет смысла, поскольку все характеристики излучения уже оказываются известны. Если же $\xi^{1/2} \ll [\xi(1 - A_0)/A_0]^{1/3}$ (что также охватывает и почти планковские числа заполнения), то существенной областью интегрирования оказывается $\xi^{1/2} \lesssim q \ll [\xi(1 - A_0)/A_0]^{1/3}$. Тогда можно сделать замену $j(q) = \xi u$, $q = \xi^{1/2} x$, $n(q) = \xi^{-1/2} w$ в уравнениях (6) и (7) и перейти к низшему порядку разложения по ξ и ζ . Таким образом, получается система уравнений



Остаточная зависимость эффективного источника фотонов от тормозного параметра λ

$$-x^4 \left(\frac{dw}{dx} + w^2 \right) = u(x),$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{x} - w \right) \ln \frac{4\eta E}{x\sqrt{\xi}}$$

для окончательного интегрирования с условиями

$$u(x) \rightarrow f + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{4\eta E}{x\sqrt{\xi}}, \quad w(x) \rightarrow w_0$$

при $x \gg 1$ и

$$w \rightarrow \frac{1}{x}$$

при $x \ll 1$.

При этом влияние задания величины

$$w_0 = \xi^{1/2} \frac{A_0}{1 - A_0} \ll 1$$

на значения f и, следовательно, искомого источника $j_1 = \xi[f - f_1(A_0)]$ оказывается несущественной малой поправкой к случаю $w_0 = 0$.

Результаты могут быть представлены в виде выражения

$$f = 0.5\lambda^2 v(\lambda, w_0) - \frac{\pi^2}{12}, \quad \lambda \equiv \ln \frac{4\eta E}{\xi^{1/2}},$$

где функция $v(\lambda, w_0) \approx v(\lambda, 0)$ является сравнительно медленной. Она показана на рисунке. Для сравнения полезно отметить, что вычисления [1] соответствуют выбору $f = 0.5\lambda^2$.

4. РАДИАЦИОННАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПРИ СИЛЬНОМ КОМПТОНОВСКОМ ОБМЕНЕ ЭНЕРГИЕЙ

В астрофизике большое место занимают задачи, связанные с истечением межзвездного вещества из компактных объектов или, наоборот, с его аккрецией на них. Необходимая точность расчета сопровождающего эти процессы излучения и его взаимодействия с веществом часто может быть достигнута путем использования одних только интегральных характеристик излучения — плотности энергии E , давления P , плотности потока энергии \mathbf{F} , а также комптоновской температуры T_r . В частности, в оптически тонком случае $\tau \ll 1$ расчет спектра излучения сводится, по существу, к простому суммированию действия источников. Таким же образом и независимо от информации о спектре, могут в этом случае находиться \mathbf{F} , E , P , а также ET_r . В общем случае для этих величин, исходя из закона сохранения для тензора энергии-импульса, оказывается возможным сформулировать систему уравнений, аналогичных гидродинамическим (см., например, [10]). В условиях доминирования многократного рассеяния $\tau \gg 1$ имеет место изотропия углового распределения излучения, которая приводит к соотношению $P = E/3$. При $Y_C \ll 1$, когда можно пренебречь влиянием обратного комптоновского эффекта, это соотношение замыкает систему уравнений для \mathbf{F} , E и P . Отыскание других характеристик излучения, в частности, комптоновской температуры T_r , все же может потребовать обращения к кинетическому уравнению [11].

При $Y_C \gtrsim 1$ уже нельзя пренебречь комптоновским обменом энергии плазмы и излучения, который выражается через T_r . Результаты предыдущего раздела позволяют сформулировать уравнения радиационной гидродинамики в пределе $Y_C \gg 1$. В частности, там найдено, что в области энергий $pc \sim T$ число заполнения фотонов близко к распределению Бозе-Эйнштейна

$$n_0(p) = \left(A_0^{-1} \exp \frac{pc}{T} - 1 \right)^{-1}.$$

Более того, в низшем порядке разложения по $1/Y_C \ll 1$ эта область вносит основной вклад в плотность энергии излучения:

$$E \approx 2 \int_0^\infty n_0(p) p c \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi T^4}{(hc)^3} \times \begin{cases} 6A_0[1 + O(A_0)], & A_0 \ll 1, \\ \frac{\pi^4}{15} + O(1 - A_0), & 1 - A_0 \ll 1. \end{cases} \quad (16)$$

Вместо величины A_0 , которая дает химический потенциал $\mu_r = T \ln A_0$, может быть удобным использование плотности числа комптонизованных фотонов

$$N \equiv 2 \int_0^\infty n_0(p) \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = N_0 \begin{cases} A_0[1 + O(A_0)], & A_0 \ll 1, \\ 1.202 \dots + O(1 - A_0), & 1 - A_0 \ll 1, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$N_0 \equiv N_0(T) = \frac{16\pi T^3}{(hc)^3}.$$

При этом

$$E = T \begin{cases} 3N \left[1 + O\left(\frac{N}{N_0}\right) \right], & N \ll N_0, \\ \frac{\pi^4}{30} N_0 + O\left(1 - \frac{N}{N_0^*}\right), & 1 - \frac{N}{N_0^*} \ll 1 \end{cases}$$

и

$$\mu_r = T \begin{cases} \ln \frac{N}{N_0} + O\left(\frac{N}{N_0}\right), & N \ll N_0, \\ -0.731 \dots \left(1 - \frac{N}{N_0^*}\right), & 1 - \frac{N}{N_0^*} \ll 1, \end{cases}$$

где $N_0^* = 1.202 \dots N_0$.

Проведя интегрирование в (15), можно получить уравнение производства фотонов:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u} N - \frac{c}{3k_T} \nabla N \right\} = J_r. \quad (18)$$

Для $N \ll N_0$ слагаемым поглощения в J_r можно пренебречь, так что плотность скорости рождения фотонов приобретает вид

$$J_r \approx \frac{4}{\pi^{3/2}} \left(\sum_a z_a^2 n_a \right) n_e \sigma_T c \left(\frac{I_H}{T} \right)^{1/2} f.$$

Интегрируя исходное кинетическое уравнение (1) по $p^3 dp$ от 0 до ∞ , можно убедиться, что плотность энергии (16) также подчиняется уравнению обмена энергии с электронами плазмы:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u} E - \frac{c}{3k_T} \nabla E \right\} + \frac{E}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = Q_{re}. \quad (19)$$

В этом уравнении, в соответствии с разбиением процессов взаимодействия плазмы и излучения в интеграле столкновений, энергообмен также разделяется на тормозной и комптоновский:

$$Q_{re} = Q_{re}^B + Q_{re}^C.$$

При этом комптоновский энергообмен может быть выражен через комптоновскую температуру излучения [12]:

$$Q_{re}^C = n_e \sigma_T c E \frac{4(T - T_r)}{m_e c^2}.$$

Поскольку условие $Y_C \gg 1$ означает доминирование комптоновского обмена энергией над переносом плотности энергии E , в рассматриваемом приближении уравнение (19) дает только значение величины T_r , точнее, ее малого отклонения от T .

В уравнении (19) в неявном виде содержится и необратимое энерговыделение. Чтобы его найти, необходимо ввести плотность энтропии излучения:

$$S_r \equiv 2 \int_0^\infty [(1+n_0) \ln(1+n_0) - n_0 \ln n_0] \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = T \begin{cases} N \left[4 - \ln \frac{N}{N_0} + O\left(\frac{N}{N_0}\right) \right], & N \ll N_0, \\ \frac{2\pi^4}{45} N_0 \left[1 + O\left(1 - \frac{N}{N_0^*}\right) \right], & 1 - \frac{N}{N_0^*} \ll 1. \end{cases}$$

Эта величина подчиняется соотношениям

$$T dS_r = dE - \mu_r dN, \quad \mu_r N = \frac{4}{3} E - T S_r.$$

Используя их, (19) можно переписать в виде уравнения изменения энтропии:

$$T \left\{ \frac{\partial S_r}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{u} - \frac{c}{3k_T} \nabla \right) S_r \right] \right\} = Q_{re} + Q^C - \mu_r J_r, \quad (20)$$

где

$$Q^C = \frac{c}{3k_T} \left[\frac{1}{T} (\nabla T) \cdot (\nabla E) + T \left(\nabla \frac{\mu_r}{T} \right) \cdot (\nabla N) \right].$$

Рассматривая дифференциал

$$d \left(S + \frac{E}{T} \right) = \frac{E}{T^2} dT - \frac{\mu_r}{T} dN,$$

нетрудно установить тождество Максвелла:

$$\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_T = - \left(\frac{\partial (\mu_r/T)}{\partial T} \right)_N.$$

Поэтому величина

$$Q^C = \frac{c}{3kT} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N (\nabla T)^2 + T \left(\frac{\partial(\mu_r/T)}{\partial N} \right)_T (\nabla N)^2 \right]$$

положительна и описывает необратимую диссипацию энергии.

Для плазмы также имеет место уравнение

$$T \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sum_a S_a + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \sum_a S_a \right] \right\} = Q_{er} - \sum_a \mu_a J_a \quad (21)$$

для изменения плотности энтропии $S_a(n_a, T)$ всех компонент с плотностью числа частиц n_a , химическим потенциалом $\mu_a(n_a, T)$ и плотностью скорости рождения числа частиц J_a . Складывая уравнения (20) и (21) с учетом $Q_{er} + Q_{re} = 0$, можно получить уравнение

$$T \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} S - \frac{c}{3kT} \nabla S_r \right] \right\} = Q^C - \mu_r J_r - \sum_a \mu_a J_a \quad (22)$$

для производства полной энтропии с плотностью

$$S = S_r + \sum_a S_a.$$

Именно из уравнений (18) и (22) должны совместно находиться характеристики излучения и температуры плазмы в условиях сильной комптонизации.

В завершение стоит отметить, что отыскание прочих использованных в данном разделе характеристик плазмы требует обычным образом включить в рассмотрение уравнение баланса импульса — для скорости плазмы \mathbf{u} , а также уравнения непрерывности (производства/убыли числа частиц) — для плотности каждой из компонент n_a . Эти уравнения здесь не выписываются, так как они не связаны с комптоновским обменом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены уравнения, которые описывают перенос числа фотонов и определяют плотность

мощности энерговыделения в области сильного комптоновского обмена с неоднородной движущейся плазмой. Совместно с гидродинамическими уравнениями они самосогласованно определяют температуру плазмы.

Автор благодарит С. С. Герштейна за внимание к работе и Ю. М. Белоусова за стимулирующую поддержку.

Работа выполнена при поддержке совместного гранта Министерства образования РФ и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант МО-011-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Компанец, ЖЭТФ **31**, 876 (1956).
2. Л. А. Поздняков, И. М. Соболев, Р. А. Сюняев, в сб. *Итоги науки и техники. Сер. астрономия*, ВИНТИ, Москва (1982), с. 100.
3. D. Psaltis and F. K. Lamb, *Astrophys. J.* **488**, 881 (1997).
4. M. Colpi, *Astrophys. J.* **326**, 223 (1988).
5. P. A. Becker, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **343**, 215 (2004).
6. В. С. Имшенник, Ю. И. Морозов *Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений*, Атомиздат, Москва (1981).
7. G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley and Sons, New York (1979).
8. R. D. Blandford and D. G. Payne, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **194**, 1033 (1981).
9. J. Green, *Astrophys. J.* **130**, 693 (1959).
10. D. Michalás and B. Michalás, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford Univ. Press, Oxford (1984).
11. С. А. Вагнер, ЖЭТФ **107**, 151 (1995).
12. Е. В. Левич, Р. А. Сюняев, *Астрон. ж.* **48**, 461 (1971).