

ХАОС В ДИНАМИКЕ МАЯТНИКА ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

*В. В. Вечеславов**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 14 ноября 2003 г.

Продолжено исследование хаотического слоя маятника, находящегося под воздействием несимметричного высокочастотного возмущения достаточно общего вида. Найдены аналитические выражения для амплитуд возникающих во втором порядке гармоник возмущения и получены оценки их вкладов в амплитуду отвечающего за образование динамического хаоса сепаратрисного отображения. Подтвержден установленный ранее факт наличия областей первичных частот, где именно эти вторичные гармоники полностью определяют размеры хаотического слоя. Отмечены существенные особенности механизма формирования хаоса вблизи нулей интегралов Мельникова–Арнольда по сравнению с уже изученным случаем симметричного возмущения.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

1. ВВЕДЕНИЕ

Фазовое пространство типичных (т. е. неинтегрируемых) нелинейных гамильтоновых систем оказывается разделенным на хаотическую и регулярную компоненты. Механизмом, ответственным за образование динамического хаоса, является, как известно, взаимодействие нелинейных резонансов. Обычно один из резонансов считается основным и вблизи него выбираются начальные условия, а остальные рассматриваются как возмущение. Наиболее интересной (а часто и неожиданной) оказалась динамика в окрестности сепаратрис основного резонанса — особых траекторий, отделяющих области с вращающейся (вне резонанса) и колеблющейся (внутри резонанса) фазой.

Долгое время считалось, что хаос всегда возникает именно вблизи сепаратрис, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействие резонансов здесь всегда существенно. Оказалось, что это верно всегда только для систем с аналитическим потенциалом, фурье-амплитуды которого убывают экспоненциально. Возмущение расщепляет каждую сепаратрису на две отдельные ветви, которые заполняют узкую область и образуют хаотический слой [1–4]. Напомним, что в возникающем на месте

расщепленных сепаратрис хаотическом слое следует различать три части: верхнюю (фаза x вращается сверху, $p > 0$), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза x вращается снизу, $p < 0$).

В случае гладкого потенциала со степенным законом убывания фурье-амплитуд ситуация может оказаться качественно иной. Поразительные примеры нерасщепленных сепаратрис (как целых, так и дробных резонансов) и отсутствия в их окрестности хаотического слоя в кусочно-линейных системах приведены и обсуждаются в работах [5–7]. Следует особо подчеркнуть, что сами системы при этом остаются неинтегрируемыми и их сепаратрисы сохраняются в условиях сильного локального хаоса (см. рис. 4 в работе [6]).

Выяснилось также, что на процесс образования хаоса существенно влияет характер самого возмущения, в первую очередь, его спектральный состав. Уместно кратко напомнить здесь историю этого вопроса.

Система с двумя симметричными гармониками возмущения высокой частоты впервые была исследована Чириковым [1]. Он показал, что амплитуда сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя с ростом частоты убывают экспоненциально и что все три части слоя имеют одинаковую ширину.

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

В недавней работе [8] для той же самой симметричной системы рассматривалась низкочастотная асимптотика, и было найдено, что в этом пределе амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с ростом частоты, а ширина слоя вообще от нее не зависит. Обе эти асимптотики устроены относительно просто, и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Такие инварианты первых трех порядков, соответствующие резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, построены для стандартного отображения Чирикова в работе [9] и для одночастотного сепаратрисного отображения — в [10]. Достаточно полное представление о структуре хаотического слоя маятника при симметричном возмущении во всем диапазоне частот получено недавно в работе [11].

Несимметричное возмущение впервые, насколько нам известно, рассматривалось в работах [12, 13], где исследовался гамильтониан маятника при воздействии на него двух гармоник

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t). \quad (2)$$

Амплитуды этих гармоник, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$, считались малыми, а частоты (по сравнению с принятой за единицу частотой малых колебаний маятника) — высокими, $|\Omega_1|, |\Omega_2| \gg 1$.

Как известно, помимо первичных (явно входящих в гамильтониан) гармоник в возмущении возникают также вторичные гармоники порядка $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ на сумме и разности первичных частот, которые при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ оказываются много слабее первичных (см. пример ниже).

Уже первые численные эксперименты с системой (1), (2) позволили обнаружить тот удивительный на первый взгляд факт, что именно эти слабые вторичные гармоники возмущения при определенных условиях полностью определяют амплитуду сепаратрисного отображения и размер хаотического слоя [12, 13]. В работе [13] рассмотрен пример системы (1), (2) с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075$, $\Omega_1 = 13$, $\Omega_2 = -10$, причем образующаяся на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ вторичная гармоника имела в возмущении амплитуду [12] $\varepsilon \approx 4.5 \cdot 10^{-5}$, что приблизительно в 1700 раз меньше амплитуд первичных гармоник. Однако ее вклад в амплитуду отвечающего за образование хаоса сепаратрисного отображения верхней

части слоя превысил суммарный вклад от первичных гармоник почти в 400 раз. Размеры отдельных частей слоя оказались при этом существенно различными. Это есть следствие упоминавшейся выше экспоненциальной зависимости ширины слоя от частоты при $\Omega \gg 1$, что и позволяет слабым, но низкочастотным вторичным гармоникам решающим образом влиять на образование хаоса. Недавно эта важная роль вторичных гармоник на сумме частот была подтверждена и для гладких систем [14].

Возникающая в возмущении вторичная гармоника на сумме частот имеет вид

$$\varepsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right], \quad (3)$$

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 > 0$$

и порождает в сепаратрисном отображении гармонику той же частоты $\Delta\Omega_+$ с амплитудой

$$W_+ = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \times \\ \times \frac{\exp(\pi\Delta\Omega_+/2)}{\text{sh}(\pi\Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2). \quad (4)$$

На разности частот в возмущении появляются две симметричные гармоники

$$\varepsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)],$$

$$\varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{1}{\Delta\Omega_-^2}, \quad (5)$$

$$\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1 > 0,$$

которые создают в сепаратрисном отображении гармонику частоты $\Delta\Omega_-$ с амплитудой

$$W_- = -\frac{\pi\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\text{ch}(\pi\Delta\Omega_-/2)} \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (6)$$

В настоящей работе мы продолжим изучение обстоятельств образования хаоса в случае двух высоких частот, но рассмотрим возмущение более сложного по сравнению с (2) вида:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(m_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(m_2 x - \Omega_2 t), \quad (7)$$

где m_1 и m_2 — произвольные положительные целые числа. Напомним, что именно эти параметры возмущения m_1 и m_2 определяют структуру (в частности, число нулей) интегралов Мельникова–Арнольда. Именно в окрестности этих нулей динамический хаос формируется с особенностями, которые обсуждаются в разд. 3.

2. АМПЛИТУДЫ ВТОРИЧНЫХ ГАРМОНИК

Рассмотрим гамильтониан маятника (1) с единственной гармоникой возмущения

$$V(x, t) = \varepsilon \cos\left(\frac{n}{2}x - \Omega t\right) \tag{8}$$

и положительными параметрами n, Ω . Эта гармоника также является резонансом, на фазовой плоскости она располагается выше основного резонанса маятника, и потому ее удобно назвать верхней гармоникой.

Как показал Чириков [1], амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя, порожденная верхней гармоникой возмущения (8), связана соотношением

$$W_T(\Omega, n) = \varepsilon \Omega A_n(\Omega) \tag{9}$$

с интегралами Мельникова–Арнольда

$$A_n(\Omega > 0) = \frac{2\pi}{(n-1)!} \frac{\exp(\pi\Omega/2)}{\operatorname{sh}(\pi\Omega)} \times \\ \times (2\Omega)^{n-1} [1 + f_n(\Omega)], \tag{10}$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_{n+1} = f_n - (1 + f_{n-1}) \frac{n(n-1)}{4\Omega^2}, \tag{11} \\ n \geq 3.$$

Параметр n будем называть индексом интеграла Мельникова–Арнольда.

Замена в (8) Ω на $-\Omega$ превращает верхнюю гармонику в нижнюю, и при вычислении ее вклада в амплитуду сепаратрисного отображения верхней части слоя надо в формуле (9) использовать существенно иное выражение:

$$A_n(\Omega < 0) = (-1)^n A_n(|\Omega|) \exp(-\pi|\Omega|). \tag{12}$$

Следует особо подчеркнуть, что при выводе соотношений (9)–(12) в работе [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений и они справедливы при любой величине Ω из интервала $0 < |\Omega| < \infty$. Заметим также, что мы будем иметь дело с интегралами (10) четных индексов n , поскольку в рассматриваемое нами возмущение (7) входят только целые значения параметров m_1 и m_2 .

Вернемся к соотношению (7) и получим оценки неизвестных заранее амплитуд вторичных гармоник. Следуя работе [12], сделаем в (1), (7) замену переменных, введя вместо координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе $x_s(t) = 4 \arctg e^t, p_s(t) = 2 \sin x_s(t)$:

$$y(t) = x(t) - x_s(t), \quad u(t) = p(t) - p_s(t), \tag{13}$$

и с помощью производящей функции

$$F_2(u, x, t) = [p_s(t) - u][x - x_s(t)]$$

построим новый гамильтониан

$$H(y, u, t) = \frac{u^2}{2} + \cos y \cos x_s(t) - \\ - \sin y \sin x_s(t) + y \sin x_s(t) + \\ + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k [\cos(m_k y) \cos(m_k x_s(t) - \Omega_k t) - \\ - \sin(m_k y) \sin(m_k x_s(t) - \Omega_k t)]. \tag{14}$$

Учитывая слабость возмущения, полагаем $|y(t)| \ll 1$, проводим в (14) замены $\cos(my) \rightarrow \rightarrow 1 - (my)^2/2, \sin(my) \rightarrow my$ и находим уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y \left[\cos x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t) \right] + \\ + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t).$$

Обозначим через Δy_ε разность между левой и правой частями этого уравнения:

$$\Delta y_\varepsilon = \frac{d^2 y}{dt^2} - y \left[\cos x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t) \right] - \\ - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t). \tag{15}$$

Нас интересует только вынужденное (исчезающее при $\varepsilon = 0$) решение y_ε , которое удобно находить последовательными приближениями, стремясь свести Δy_ε к нулю [12]. После двух приближений имеем

$$y_\varepsilon^{(2)}(t) \approx - \sum_{k=1}^2 \frac{\varepsilon_k m_k}{(m_k p_s - \Omega_k)^2} \sin(m_k x_s - \Omega_k t) - \\ - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left\{ \left[\frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} \right] \times \right. \\ \times \frac{\sin(m_+ x_s - \Delta \Omega_+ t)}{(m_+ p_s - \Delta \Omega_+)^2} + \\ \left. + \left[\frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin(m_- x_s - \Delta \Omega_- t)}{(m_- p_s - \Delta \Omega_-)^2} \right\} + \dots, \tag{16}$$

где не выписаны второстепенные члены и по аналогии с (3), (4) для частот введены обозначения для суммы и разности параметров возмущения $m_+ = m_1 + m_2, m_- = m_2 - m_1$.

На основании неравенства $|\Omega_{1,2}| \gg p_{s,max} \approx 2$ и для упрощения дальнейших формул опустим в содержащих эти частоты знаменателях формулы (16) члены mp_s . Точно так же, но уже без всяких оснований, поступим со знаменателями, содержащими суммы и разности частот, рассчитывая в окончательных зависимостях поправить дело введением эмпирических числовых коэффициентов (см. разд. 3).

Возвращаясь к системе (1), (7), положим в ней $x = x_s(t) + y_\varepsilon^{(2)}(t)$. Поскольку движение происходит вблизи невозмущенной сепаратрисы, используем замены $\cos(my) \rightarrow 1$, $\sin(my) \approx my_\varepsilon^{(2)}$ и перепишем выражение для возмущения (7) в виде

$$V(y, t) \approx -y_\varepsilon^{(2)} \left[\sin x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t) \right]. \quad (17)$$

Подставив (16) в (17), убеждаемся, что низкочастотные гармоники на сумме и разности частот (только они представляют интерес) могут проникнуть в возмущение двумя путями. Один из них реализуется при взаимодействии суммы в (16) с первичными гармониками в (17). Это приводит к появлению в возмущении гармоник как на сумме частот,

$$\varepsilon_+ \cos(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t), \quad (18)$$

$$\varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[\frac{m_2}{\Omega_1^2} + \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right],$$

так и на их разности,

$$\varepsilon_- \cos(m_- x_s - \Delta\Omega_- t), \quad (19)$$

$$\varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[\frac{m_2}{\Omega_1^2} - \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right].$$

Второй путь — взаимодействие членов, пропорциональных $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, в (16) с $\sin x_s$ в (17). Здесь возникают по две вторичных гармоники возмущения на сумме частот,

$$\frac{\varepsilon_+}{2 \Delta\Omega_+^2} [\cos((m_+ - 1)x_s - \Delta\Omega_+ t) - \cos((m_+ + 1)x_s - \Delta\Omega_+ t)], \quad (20)$$

где значение ε_+ дается формулой (18), и на разности частот,

$$\frac{\varepsilon_-}{2 \Delta\Omega_-^2} [\cos((m_- - 1)x_s - \Delta\Omega_- t) - \cos((m_- + 1)x_s - \Delta\Omega_- t)], \quad (21)$$

где значение ε_- дается формулой (19).

Знание амплитуд вторичных гармоник в возмущении позволяет с помощью соотношения (9) записать их приведенные амплитуды $W^* = W/\varepsilon_1 \varepsilon_2$ в сепаратрисном отображении через интегралы Мельникова–Арнольда (10):

$$W_\pm^* = \frac{W_\pm}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \tilde{\varepsilon}_\pm \left[\Delta\Omega_\pm A_{2m_\pm}(\Delta\Omega_\pm) + \frac{A_{2m_\pm-2}(\Delta\Omega_\pm) - A_{2m_\pm+2}(\Delta\Omega_\pm)}{2\Delta\Omega_\pm} \right], \quad (22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\pm = \frac{a_\pm m_1 m_2}{2} \left[\frac{m_2}{\Omega_1^2} \pm \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (23)$$

Здесь в нижних индексах верхние знаки относятся к сумме частот, нижние — к разности, и в зависимости (23) введены подгоночные эмпирические коэффициенты a_+ и a_- . Практика применения формулы (22) показала, что главная роль в ней принадлежит первому члену в квадратных скобках.

В следующем разделе приводятся результаты численной проверки формул (22), (23) и отмечают некоторые любопытные детали образования хаотической компоненты.

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Сепаратрисное отображение, впервые введенное в работе [15], описывает поведение движущейся вблизи сепаратрисы динамической системы и в случае маятника имеет вид

$$\bar{w} = w + \sum_l W_l \sin(\Omega_l t_\pi), \quad (24)$$

$$\bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|w|}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

где $w = H(x, p, t) - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии, t_π — моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия $x = \pi$. Под знаком суммы должны быть перечислены все существенные для исследуемой части хаотического слоя гармоники как первичные (явно входящие в возмущение (7)), так и вторичные (которых в (7) нет).

При несоизмеримых частотах Ω_l моменты t_π отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если же частоты кратны некоторой опорной частоте Ω_0 , то последнее соотношение в (24) можно (но не обязательно) переписать в виде

$$\bar{\psi}_\pi = \psi_\pi + \Omega_0 \ln \frac{32}{|w|}, \quad \psi_\pi = \Omega_0 t_\pi \bmod 2\pi. \quad (25)$$

Итерации сепаратрисного отображения, как известно, являются самым быстрым способом определения размеров отдельных частей хаотического слоя, и это оправдывает усилия, направленные на его построение.

Нам предстоит сравнить между собой величины теоретически и численно найденных амплитуд сепаратрисного отображения, и уместно кратко напомнить алгоритм численного построения этого отображения (подробности — в работе [12]).

Прежде всего на линии симметрии $x = \pi$ с высокой точностью отыскивается центральная гомоклиническая точка p_{fb} как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки гарантированно в исследуемой части слоя выбирается узкий по импульсу интервал $x = \pi$, $p_{fb} < p < p_{fb} + \delta p$, из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не наберется требуемое число периодов N . Для каждого периода определяется отклонение от сепаратрисы по энергии:

$$w = 32 \exp(-T), \tag{26}$$

где T — интервал времени между двумя последовательными прохождениями положения устойчивого равновесия $x = \pi$. Определяя изменение $\delta w = \bar{w} - w$ энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени t_π , можно построить сепаратрисное отображение (24) $(\delta w)_k, t_{\pi,k}, k = 1, 2, \dots, N - 1$. Для определенности будем всегда исследовать верхнюю часть слоя. Именно внешние части (верхняя и нижняя) представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и возникновении глобального хаоса.

В настоящей работе рассматривается возмущение (7) с фиксированными параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 3 \tag{27}$$

при различных значениях первичных частот Ω_1 и Ω_2 . Заметим, что вклад в амплитуды сепаратрисного отображения первичных гармоник определяется, согласно (9), интегралами Мельникова–Арнольда с индексами $n_1 = 2m_1 = 2$ и $n_2 = 2m_2 = 6$, соответственно, в то время как для вторичных гармоник эти индексы равны на разности частот $n_- = 2(m_2 - m_1) = 4$ и на их сумме $n_+ = 2(m_1 + m_2) = 8$.

По-видимому, самым главным и важным результатом в исследовании возмущения общего вида (7) явилось подтверждение того установленного в работах [12, 13] факта, что существуют достаточно широкие области параметров, где именно вторичным гармоникам принадлежит решающий вклад в образование хаоса. Рассмотрим систему (1), (7), (27) с частотами $\Omega_1 = 15, \Omega_2 = -12$. Они соизмеримы и в качестве опорной частоты в (25) можно принять $\Omega_0 = 3.0$. Построение сепаратрисного отображения по описанному выше алгоритму позволяет найти амплитуды этих частот в сепаратрисном отображении для верхней части слоя:

$$W(3) \approx 1.35 \cdot 10^{-4}, \quad W(15) \approx 2.09 \cdot 10^{-7}, \tag{28}$$

$$W(-12) \approx 6.18 \cdot 10^{-7}.$$

В рассмотренном случае вклад вторичной гармоники на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ существенно (на порядки) превышает вклады от первичных гармоник и само отображение верхней части слоя можно с высокой точностью считать одночастотным, но с низкой частотой $\Omega = 3$. Возникает впечатление, что две слабые первичные гармоники возмущения породили в сепаратрисном отображении мощную вторичную гармонику и на этом их участие в формировании хаоса закончилось.

Из формул (10), (11) следует, что, начиная с $n = 3$ (и выше), интегралы (10) вместе с множителем в квадратных скобках проходят через нуль со сменой знака. Интеграл A_2 вообще не имеет нулей, A_4 имеет единственный нуль в точке $\Omega_1^{(4)} = \sqrt{2}$, A_6 — два нуля в точках $\Omega_1^{(6)} \approx 1.1514 \dots, \Omega_2^{(6)} \approx 2.9452 \dots$, A_8 — три нуля в точках $\Omega_1^{(8)} \approx 1.0248 \dots, \Omega_2^{(8)} \approx 2.4495 \dots$ и $\Omega_3^{(8)} \approx 4.5771 \dots$ и т. д. Удобно, как и в отношении гармоник возмущения, различать первичные и вторичные интегралы (10). Отметим, что в нашем случае все четыре (два первичных и два вторичных) интеграла отличаются друг от друга количеством нулей.

В качестве примера на рис. 1 показано поведение первичного интеграла $A_2(\Omega)$ и вторичного $A_8(\Omega)$, а также найденных по (9) соответствующих им приведенных амплитуд $W_T^* = W/\varepsilon$ сепаратрисных отображений (все величины отложены по модулю). Этот рисунок, в частности, иллюстрирует поведение упоминавшихся выше теоретических асимптотических зависимостей $W_T^*(\Omega)$ — линейный рост при $\Omega \ll 1$ и экспоненциальный спад при $\Omega \gg 1$.

Если за понятием вторичного интеграла на сумме частот $A_8(\Omega_+)$ стоит какая-то реальность, то в

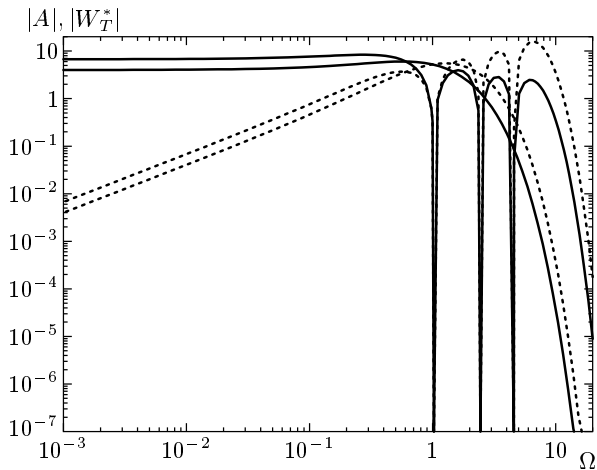


Рис. 1. Модули интегралов Мельникова–Арнольда A_2, A_8 (сплошные линии) и отвечающие им по формуле (9) приведенные теоретические амплитуды $W_T^* = W_T/\varepsilon$ (пунктирные)

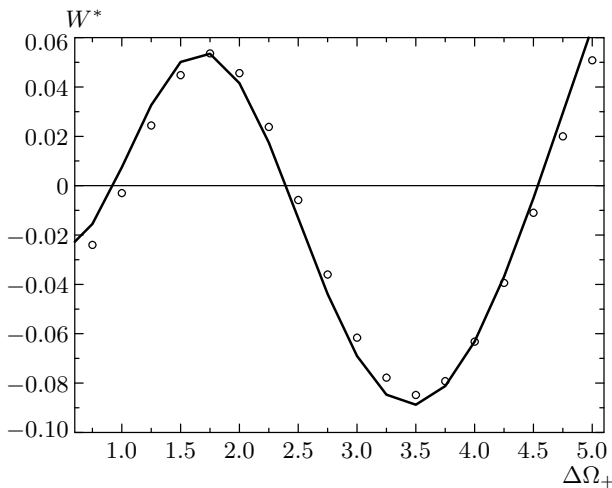


Рис. 2. Приведенная амплитуда вторичной гармоники на сумме первичных частот сепаратрисного отображения при $\Omega_1 = 14.0, \Omega_2 = \text{var}$. Сплошная линия построена по формулам (22), (23) при значении подгоночного коэффициента $a_+ \approx 0.25$, кружки — данные численного расчета отображения (24)

зависимости амплитуды сепаратрисного отображения $W^*(\Delta\Omega_+)$ от частоты должны проявиться характерные только для этого интеграла три нуля. Так оно и оказывается на самом деле. На рис. 2 рассмотрен случай $\Omega_1 = 14.0, \Omega_2 = \text{var}$, где теоретический расчет по формулам (22), (23) представлен сплошной линией, а найденные экспериментально с

помощью сепаратрисного отображения (24) величины изображены кружками. Видно, что обе зависимости трижды проходят через нуль практически там, где и должны быть. Значение подгоночного параметра при этом оказалось равно $a_+ \approx 0.25$, хотя природа его не ясна.

Именно в окрестности нулей интегралов Мельникова–Арнольда в поведении вторичных гармоник сепаратрисного отображения обнаружилось серьезное отличие от исследованного в работе [8] случая симметричного возмущения. В [8] было найдено, что во всей области средних частот сепаратрисное отображение содержит две гармоники — одинарную и двойную (ее дает вторичная гармоника на разности частот). В нулях интегралов (10) одинарная гармоника проходит через нуль со сменой знака, но амплитуда отображения остается конечной из-за присутствия двойной частоты. В работе [11] получены формулы резонансных инвариантов двойной частоты специально для исследования окрестностей нулей этих интегралов.

При несимметричном возмущении двойная частота отсутствует и амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя в нуле интеграла (10) реально оказывается малой, что определяет и малый размер этой части слоя. Например, при частотах $\Omega_1 = 14.0$ и $\Omega_2 = -12.9752$ (величина $\Delta\Omega_+ = 1.0248$ весьма близка к первому нулю вторичного интеграла $A_8(\Omega)$) измерения энергетических размеров отдельных частей слоя по минимальному периоду движения (формула (26)) дали следующий результат:

$$\begin{aligned} w_{tp} &\approx 9.72 \cdot 10^{-7}, & w_{md} &\approx 2.51 \cdot 10^{-2}, \\ w_{bt} &\approx 1.66 \cdot 10^{-2}, \end{aligned} \tag{29}$$

где w_{tp}, w_{md}, w_{bt} — размеры, соответственно, верхней, средней и нижней частей слоя. Верхняя часть (на которую «настроена» вторичная гармоника) оказалась существенно слабее остальных частей. Отметим, что пример сознательного использования вторичных гармоник для уменьшения размера определенной части хаотического слоя приведен в работе [13].

Вторичную гармонику на разности частот в сепаратрисном отображении представляет интеграл $A_4(\Delta\Omega_-)$ с единственным нулем $\Omega_1^{(4)} = \sqrt{2}$. На рис. 3 для случая $\Omega_1 = 13.0, \Omega_2 = \text{var}$ дано сравнение теории (22), (23) (сплошная линия) с численным экспериментом (кружки). Соответствие здесь оказывается хуже, чем в предыдущем случае, но качественное поведение теоретической и экспериментальной зави-

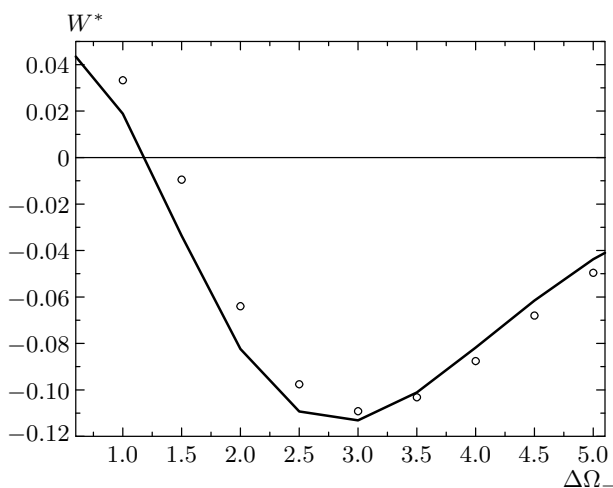


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для разности первичных частот при $\Omega_1 = 13.0$, $\Omega_2 = \text{var}$ и значении подгоночного коэффициента $a_- \approx 0.57$

симостей согласуется. Значение подгоночного параметра $a_- \approx 0.57$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше факты (см. также работы [12, 13]) заставляют признать, что вторичные гармоники на сумме и разности первичных (явно входящих в гамильтониан системы) частот — реальные объекты, при определенных условиях решающим образом участвующие в формировании хаотического слоя. Построение полноценной теории динамического хаоса в гамильтоновых системах требует, по нашему мнению, их дальнейшего детального экспериментального и теоретического исследования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Чириков, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
2. А. Лichtenberg and М. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin (1992).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. В. Г. Гельфрейх, В. Ф. Лазуткин, УМН **56**(3), 339 (2001).
5. S. Bullett, Comm. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
6. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск (2000); E-print archive, nlin.CD/0005048.
7. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ **120**, 740 (2001).
8. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 2003-11, Новосибирск (2003).
9. В. В. Вечеславов, ЖТФ **58**(1), 20 (1988).
10. В. В. Вечеславов, ЖТФ **72**(2), 20 (2002).
11. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **125**, 399 (2004).
12. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **109**, 2208 (1996).
13. В. В. Вечеславов, Письма в ЖЭТФ **63**, 989 (1996).
14. В. В. Вечеславов, ЖТФ **73**(9), 1 (2003).
15. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоенко, ЖЭТФ **54**, 1590 (1965).