

АТОМНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТЕКЛОВАНИЯ ЧИСТОГО ЖЕЛЕЗА

A. B. Евтеев, A. T. Косилов, E. V. Левченко*

*Воронежский государственный технический университет
394026, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 13 февраля 2004 г.

В рамках метода молекулярной динамики на модели железа с парным потенциалом межатомного взаимодействия Пака–Доямы показано, что в основе структурной стабилизации аморфной фазы чистого железа в процессе закалки из расплава лежит образование перколоационного кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров, в вершинах и в центрах которых расположены атомы.

PACS: 61.43.Bn

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее актуальных и нерешенных задач физики аморфного состояния является установление принципиальных различий между атомной структурой расплава и металлического стекла. Это связано с тем, что существующие дифракционные методы изучения структуры неупорядоченных материалов дают лишь одномерную усредненную картину распределения атомов в виде структурных функций [1], а предложенные модели ближнего порядка на основе случайной плотной упаковки атомов (модель Бернала и др.) или координационных многогранников (модель на основе многогранников Франка–Каспера и др.) одинаково успешно применяются для описания взаимного расположения атомов как в жидких, так и в аморфных металлах [2–5], оставляя при этом открытым вопрос об индивидуальных особенностях их структурной организации.

Существенный прогресс в формировании модельных представлений о структуре жидкого и аморфного состояний металлических систем, а также атомных механизмов их взаимных превращений может быть достигнут на пути проведения компьютерных экспериментов в рамках метода молекулярной динамики с использованием высокоеффективных, хорошо оптимизированных алгоритмов и адекватных потенциалов межатомного взаимодействия.

Для детального изучения структуры конденсированных сред необходим анализ координацион-

ных многогранников атомов системы и установление геометрических законов, лежащих в основе их взаимного пространственного расположения. Для кристаллов эта задача существенно упрощается — трансляционная инвариантность сужает объем изучаемого объекта до элементарной ячейки, в которой атомы занимают фиксированные позиции, находясь на определенных расстояниях друг от друга. Для структурно-неупорядоченных конденсированных сред, таких как расплавы и аморфные твердые тела, отсутствие трансляционной инвариантности создает сложную мозаику локальных атомных конфигураций, корректное систематическое изучение которых можно провести лишь на пути построения компьютерной модели структуры исследуемого объекта и анализа координационных многогранников всех ее атомов.

Приведенные ниже результаты статистико-геометрического и кластерного анализа структуры молекулярно-динамической модели железа с парным межатомным потенциалом Пака–Доямы [6] в процессе закалки из жидкого состояния являются развитием сформулированных в работе [7] модельных представлений о структуре чистых аморфных металлов и атомных механизмах ее формирования.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Вначале была построена молекулярно-динамическая модель жидкого железа при $T = 2300$ К с плотностью $7800 \text{ кг}/\text{м}^3$ (плотность задавалась в соответствии с данными для α -Fe [8] с учетом поправ-

*E-mail: evteev@vmail.ru

ки порядка 1 % на аморфизацию). В качестве исходной структуры была взята случайная плотная упаковка атомов. Взаимодействие между атомами описывали с помощью эмпирического парного потенциала Пака – Доямы, который имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\phi(r) = & -0.188917(r - 1.82709)^4 + \\ & + 1.70192(r - 2.50849)^2 - 0.198294 \text{ эВ},\end{aligned}\quad (1)$$

где r выражено в Å. Радиус обрезания потенциала (расстояние, при котором потенциал и его первая производная плавно обращаются в нуль) равен $r_c = 3.44 \text{ \AA}$. Параметры этого потенциала определены из данных по упругим свойствам α -Fe. Использование его при моделировании жидкого и аморфного железа [9–11], а также его сплавов с металлоидами [12, 13] обеспечивает хорошее согласие расчетных и экспериментальных структурных характеристик. Модель содержала 100000 атомов в основном кубе с периодическими граничными условиями. Атомам в начальный момент времени сообщались скорости согласно распределению Максвелла. Методика молекулярно-динамического расчета состояла в численном интегрировании уравнений движения с временным шагом $\Delta t = 1.523 \cdot 10^{-15} \text{ с}$ по алгоритму Верле [14]. Система выдерживалась при указанной температуре в течение 3000 временных шагов (изотермические условия). Затем температурное ограничение снималось, и в системе на протяжении 3000 временных шагов при постоянной внутренней энергии (адиабатические условия) устанавливалось тепловое равновесие.

Далее систему в изохорических условиях охлаждали со скоростью $4.4 \cdot 10^{12} \text{ К/с}$. Циклическая процедура закалки сводилась к ступенчатому снижению температуры на $\Delta T = 20 \text{ К}$ ($T_i = (115 - i)\Delta T$, где T_i — температура «окружающей среды» на i -м цикле), поддержанию этой температуры в системе на протяжении $1000\Delta t$ и последующему отжиго в адиабатических условиях в течение $2000\Delta t$. Таким образом, продолжительность одного цикла составляла $3000\Delta t$ или $4.569 \cdot 10^{-12} \text{ с}$. Усреднение термодинамических характеристик системы (T — температуры, U — потенциальной энергии, PV — произведение давления на объем) проводилось в течение последних $1000\Delta t$ каждого цикла. Следует отметить, что температура T системы, находящейся в адиабатических условиях, и температура T_i «окружающей среды» строго не совпадают между собой. После каждого цикла систему методом статической релаксации переводили в состояние с $T = 0$, представляя возможность атомам занять равновесные

положения в локальных потенциальных ямах. Для статически релаксированных моделей рассчитывались потенциальная энергия (U_0), произведение давления на объем (P_0V) и проводился структурный анализ. Такая процедура позволяла определять степень структурной релаксации модели с понижением температуры.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Как видно на рис. 1, в процессе охлаждения потенциальная энергия и произведение давления на объем изменяются непрерывно, однако производные от указанных термодинамических величин при температуре «окружающей среды» $T_i \sim 1180 \text{ К}$ начинают довольно резко уменьшаться. На температурных зависимостях потенциальной энергии и произведения давления на объем после статической релаксации при той же температуре наблюдается точка перегиба, о чем свидетельствует максимум на производных этих зависимостей (рис. 1). Было также установлено, что при $T_i < 1180 \text{ К}$ резко уменьшается величина среднего суммарного смещения атомов, что характерно при смене механизма перемещения атомов от безактивационного (для диффузии атомов в жидкости) к активационному (для диффузии атомов в твердом теле) [15].

Статистико-геометрический анализ структуры молекулярно-динамических моделей жидкого и аморфного железа на основе многогранников Вороного [2–5] показал, что соответственно 70 и 80 % всех атомных конфигураций описываются многогранниками Вороного, имеющими различные сочетания только четырех-, пяти- и шестиугольных граней. При этом более 90 % всех атомов моделей как жидкого, так и аморфного железа имеют геометрическое координационное число от 12 до 15. Напомним, что отдельный многогранник Вороного можно описать совокупностью чисел n_q , равных числу граней, имеющих q сторон ($n_3 - n_4 - n_5 - \dots$) [2–5]. Приведенную совокупность чисел можно использовать также для описания координационных многогранников. В этом случае n_q указывает количество вершин, в которых сходятся q ребер. Полученные результаты позволили вывести 28 топологически разрешенных координационных многогранников типа $(0 - n_4 - n_5 - n_6)$ с координационными числами от 12 до 15.

Если в многограннике Вороного числа вершин, ребер, граней обозначить соответственно V_V , E_V , F_V , то согласно теореме Эйлера между ними существует следующее соотношение:

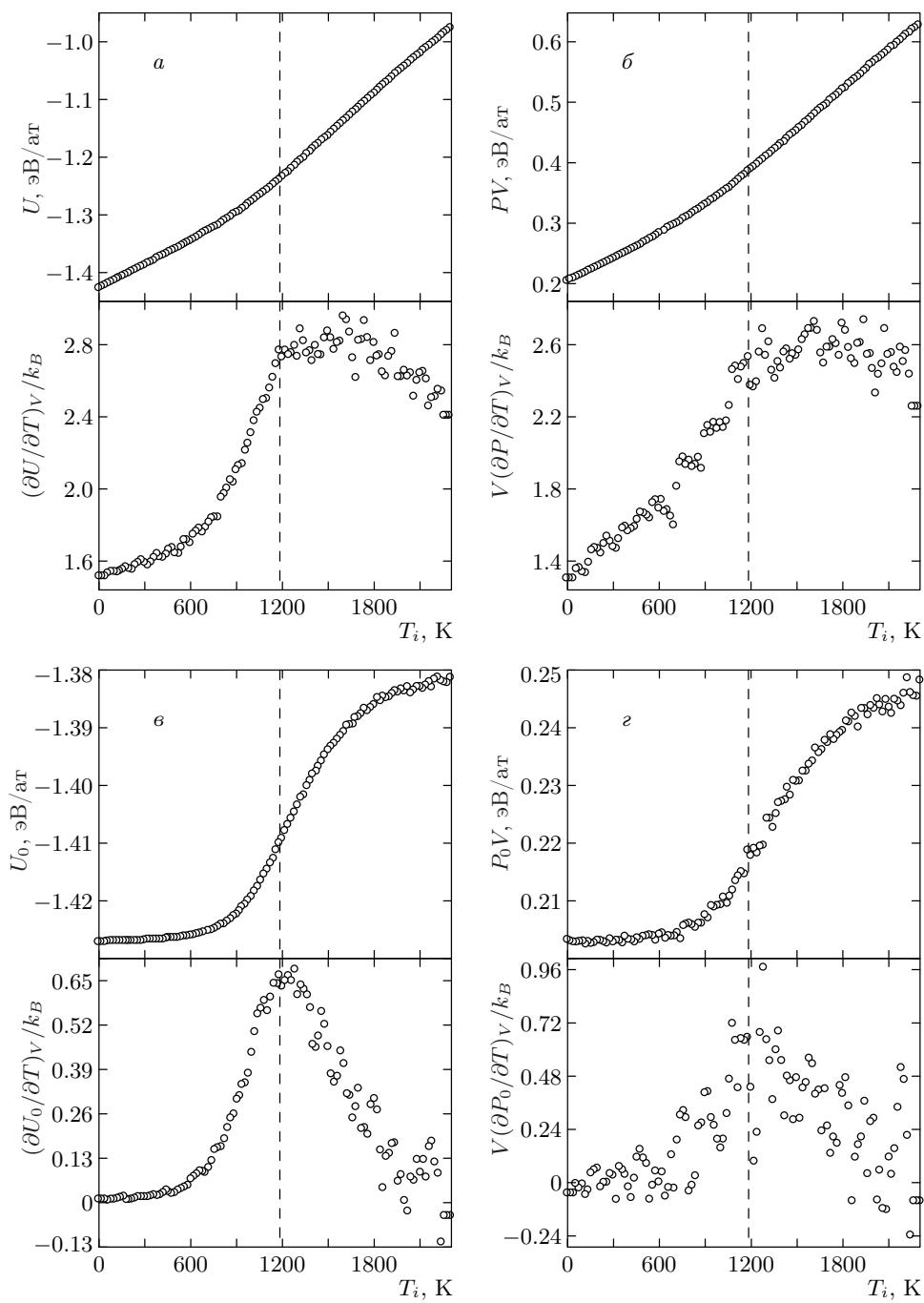


Рис. 1. Зависимость термодинамических функций модели железа и их производных от температуры «окружающей среды» T_i в условиях охлаждения из расплава со скоростью $4.4 \cdot 10^{12}$ К/с: *a* — потенциальная энергия U , *б* — произведение давления на объем, PV , *в* — потенциальная энергия после статической релаксации U_0 , *г* — произведение давления на объем после статической релаксации, $P_0 V$

$$V_V - E_V + F_V = 2. \quad (2)$$

Поскольку для образования вершины многогранника Вороного достаточно пересечения трех плоскостей, а вероятность образования вершины на пересечении четырех и более плоскостей из-за геометрических искажений в аморфной структуре слишком мала, для многогранника Вороного атомов аморфной структуры справедливо равенство

сечении четырех и более плоскостей из-за геометрических искажений в аморфной структуре слишком мала, для многогранника Вороного атомов аморфной структуры справедливо равенство

$$2E_V = 3V_V, \quad (3)$$

которое означает, что каждое ребро соединяет две вершины, а в каждой вершине сходятся по три ребра. Для координационного многогранника количество вершин, ребер и граней соответственно равно $V_C = F_V$, $E_C = E_V$, $F_C = V_V$, поэтому из соотношения (3) следует, что в координационных многогранниках, построенных для атомов аморфной структуры, могут присутствовать только треугольные грани.

Уравнение Эйлера (2) с учетом соотношения (3) можно представить в виде

$$3F_V - E_V = 6. \quad (4)$$

Далее для многогранника Вороного типа $(0-n_4-n_5-n_6)$ из уравнения (4) с учетом того, что

$$F_V = n_4 + n_5 + n_6, \quad (5)$$

$$E_V = \frac{1}{2}(4n_4 + 5n_5 + 6N_6), \quad (6)$$

получим соотношение

$$n_5 = 2(6 - n_4). \quad (7)$$

Поскольку n_4 и n_5 должны быть целыми положительными числами, то, согласно выражению (7), их значения ограничены и связаны попарно между собой. Численное значение n_6 для каждой такой пары и заданного координационного числа из интервала $12 \leq F_V \leq 15$ можно найти, используя соотношение (5).

В таблице приведены 28 топологически разрешенных координационных многогранников типа $(0-n_4-n_5-n_6)$, удовлетворяющих условию $12 \leq n_4 + n_5 + n_6 \leq 15$, а также их доля в моделях жидкого и аморфного железа при температурах «окружающей среды» 2300 К и 0 К. Жирным шрифтом выделены характерные как для жидкого, так и для аморфного состояния 14 основных типов координационных многогранников, доля которых больше 1 %. Остальные координационные многогранники являются термодинамически нестабильными.

Из таблицы видно, что в процессе закалки расплава наиболее интенсивно происходит увеличение (порядка 4 %) доли атомов, для которых координационный многогранник $(0-0-12-0)$ — икосаэдр, а многогранник Вороного — додекаэдр (рис. 2). Здесь необходимо отметить, что из всех координационных многогранников, встречающихся в плотноупакованных структурах (как упорядоченных,

так и неупорядоченных), икосаэдр является наиболее компактным и энергетически стабильным. Так, например, энергия изолированного икосаэдра (координационное число 12), рассчитанная с использованием парного потенциала Пака–Доямы, составляет -0.79 эВ/ат. Для сравнения, энергии изолированных координационных многогранников ГЦК- и ОЦК-решеток (кубооктаэдр, координационное число 12 и ромбододекаэдр, координационное число 14) составляют соответственно -0.69 эВ/ат и -0.73 эВ/ат. Однако наличие у икосаэдра осей пятого порядка делает его несовместимым с трансляционной симметрией, и, следовательно, формирование аморфной структуры чистых металлов на основе таких координационных многогранников затрудняет процесс атомной перестройки при кристаллизации, создавая предпосылки для стабилизации аморфного состояния. Поэтому основное внимание было уделено изучению закономерностей эволюции в процессе закалки структурных элементов с икосаэдрической симметрией.

Как показано на рис. 3, в исходной модели жидкости доля атомов, находящихся в центрах икосаэдов, составляет 4.315 %, а общая доля атомов, задействованных в построении икосаэдов, равна 38.813 %. Каждому икосаэду в среднем принадлежит около 9 атомов. По мере понижения температуры в процессе закалки число икосаэдов растет, а в наиболее структурно отрелаксированной модели при 0 К эти величины достигают соответственно значений 8.033 % и 59.024 %. Каждому икосаэду в среднем принадлежит примерно 7 атомов, что свидетельствует об увеличении числа атомов, принадлежащих одновременно нескольким икосаэдрам, т. е. увеличивается доля взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдов. Точки перегиба на этих кривых, соответствующие максимальной скорости роста числа икосаэдов, как и на зависимостях потенциальной энергии и произведения давления на объем после статической релаксации, находятся при $T_i \sim 1180$ К.

Интересно отметить, что число атомов, находящихся в центре икосаэдов, которые не имеют взаимопроникающих контактов, в процессе закалки практически не изменяется, тогда как число пар взаимопроникающих икосаэдов существенно увеличивается.

На рис. 4а приведены парные функции радиального распределения $g_{II}(r)$ атомов, находящихся в центре икосаэдов, рассчитанные при температурах «окружающей среды» 2300, 1500, 1300, 1200, 1100 и 0 К. Следует отметить, что вид этих функций прак-

Распределение для модели железа топологически разрешенных в жидким и аморфном состояниях координационных многогранников типа $(0 - n_4 - n_5 - n_6)$ с координационными числами, удовлетворяющими условию $12 \leq V_C \leq 15$. Первое число указывает долю координационных многогранников в расплаве при $T_i = 2300$ К, второе — в аморфном состоянии после закалки при $T_i = 0$. Жирным шрифтом выделены координационные многогранники, доля которых больше 1% как в расплаве, так и в аморфном состоянии

V_C	12	13	14	15
$(0 - 0 - 12 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 0 - 12 - 0)$ $4.315 \rightarrow 8.033$	$(0 - 0 - 12 - 1)$ 0	$(0 - 0 - 12 - 2)$ $2.180 \rightarrow 4.933$	$(0 - 0 - 12 - 3)$ $1.218 \rightarrow 2.589$
$(0 - 1 - 10 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 1 - 10 - 1)$ 0	$(0 - 1 - 10 - 2)$ $10.144 \rightarrow 13.183$	$(0 - 1 - 10 - 3)$ $4.882 \rightarrow 7.105$	$(0 - 1 - 10 - 4)$ $3.569 \rightarrow 4.820$
$(0 - 2 - 8 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 2 - 8 - 2)$ $3.001 \rightarrow 1.961$	$(0 - 2 - 8 - 3)$ $2.521 \rightarrow 1.620$	$(0 - 2 - 8 - 4)$ $9.783 \rightarrow 10.981$	$(0 - 2 - 8 - 5)$ $3.962 \rightarrow 4.432$
$(0 - 3 - 6 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 3 - 6 - 3)$ $1.137 \rightarrow 0.391$	$(0 - 3 - 6 - 4)$ $9.867 \rightarrow 9.215$	$(0 - 3 - 6 - 5)$ $5.337 \rightarrow 4.284$	$(0 - 3 - 6 - 6)$ $2.617 \rightarrow 2.076$
$(0 - 4 - 4 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 4 - 4 - 4)$ $0.433 \rightarrow 0.131$	$(0 - 4 - 4 - 5)$ $1.108 \rightarrow 0.548$	$(0 - 4 - 4 - 6)$ $3.940 \rightarrow 3.068$	$(0 - 4 - 4 - 7)$ $1.149 \rightarrow 0.796$
$(0 - 5 - 2 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 5 - 2 - 5)$ $0.044 \rightarrow 0.003$	$(0 - 5 - 2 - 6)$ $0.469 \rightarrow 0.259$	$(0 - 5 - 2 - 7)$ $0.006 \rightarrow 0$	$(0 - 5 - 8)$ $0.159 \rightarrow 0.088$
$(0 - 6 - 0 - n_6)$ Доля, %	$(0 - 6 - 0 - 6)$ $0.001 \rightarrow 0$	$(0 - 6 - 0 - 7)$ $0.002 \rightarrow 0$	$(0 - 6 - 0 - 8)$ $0.158 \rightarrow 0.252$	$(0 - 6 - 0 - 9)$ $0.001 \rightarrow 0$
Всего, %	$8.754 \rightarrow 10.519$	$24.111 \rightarrow 24.825$	$26.286 \rightarrow 30.623$	$12.675 \rightarrow 14.801$

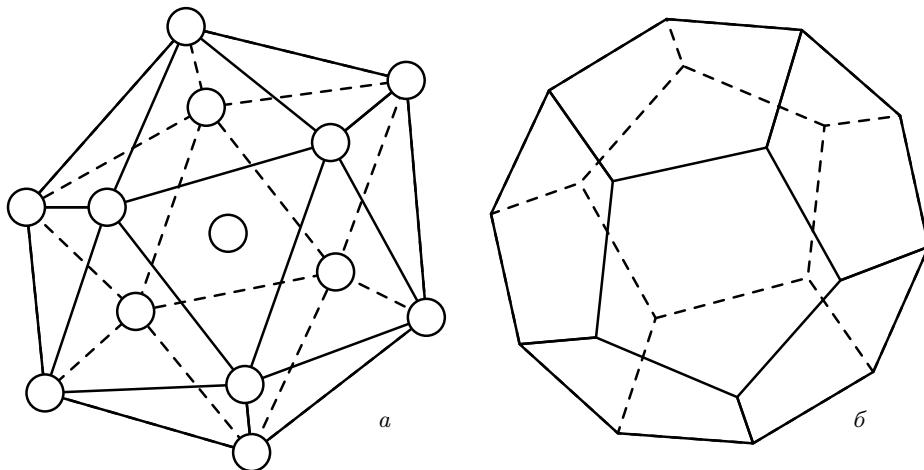


Рис. 2. Координационный многогранник икосаэдр (*a*) и его многогранник Вороного додекаэдр (*b*)

тически не зависит от температуры. Первый пик $g_{II}(r)$ соответствует контакту взаимопроникающих икосаэдров, второй — контакту икосаэдров по граням и ребрам, а третий (расщепленный) — контакту

икосаэдров по вершинам.

Для изучения закономерностей структурной организации икосаэдрических координационных многогранников при охлаждении модели железа в рам-

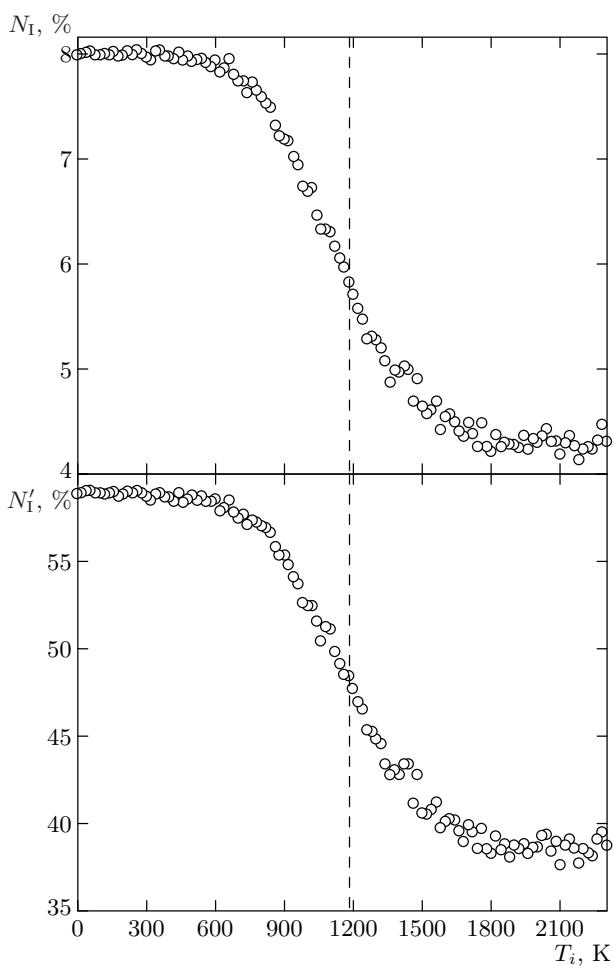


Рис. 3. Зависимость от температуры «окружающей среды» T_i числа атомов N_I , находящихся в центрах икосаэдров, и общего числа атомов N'_I , за действованных в построении икосаэдров. Скорость охлаждения составляет $4.4 \cdot 10^{12}$ К/с

ках теории протекания был проведен кластерный анализ. На рис. 4б приведены зависимости числа икосаэдров N_I^{max} в наибольшем по размеру кластере с расстояниями между соседями, меньшими либо равными r , от величины r для температур «окружающей среды» 2300, 1500, 1300, 1200, 1100 и 0 К. Как видно на рис. 4б, при $T_i > 1200$ К порог переколяции наблюдается правее штриховой вертикальной линии, разделяющей область взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров от области изолированных икосаэдров. Следовательно, при $T_i > 1200$ К переколяционный кластер из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров не образуется. Прямыми наблюдениями за поведением атомов, находящихся в центрах икосаэд-

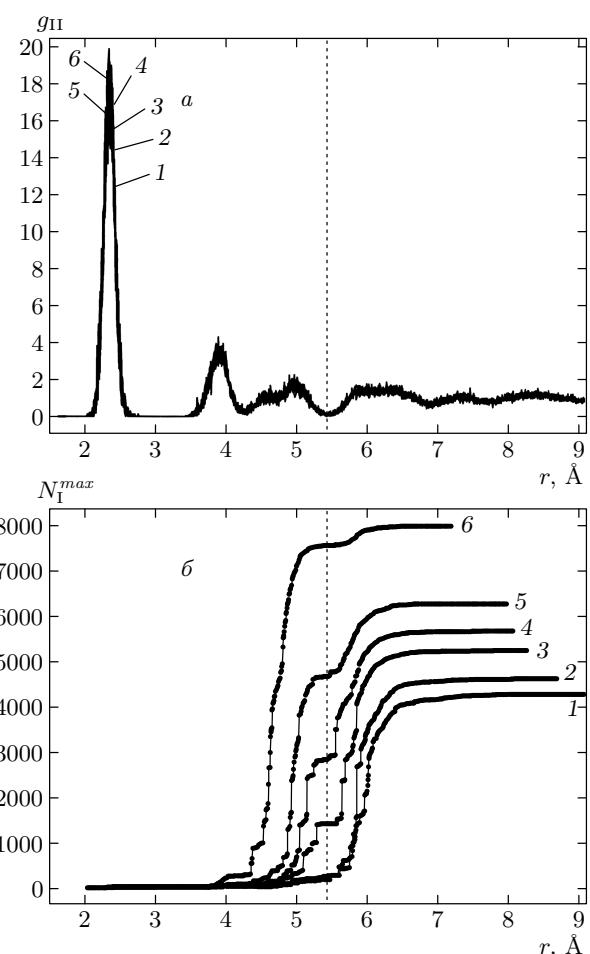


Рис. 4. Парная функция радиального распределения $g_{II}(r)$ атомов, находящихся в центрах икосаэдров, — а и число N_I^{max} таких атомов в наибольшем по размеру кластере с расстояниями между соседями, меньшими либо равными r — б. Штриховая вертикальная линия разделяет области взаимопроникающих и контактирующих между собой (слева) и изолированных (справа) икосаэдров. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соответствуют температурам «окружающей среды» 2300, 1500, 1300, 1200, 1100 и 0 К. Скорость охлаждения составляет $4.4 \cdot 10^{12}$ К/с

ров, было установлено, что в этом случае образуются изолированные друг от друга конечные кластеры из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров, которые непрерывно изменяют свою форму и размер по мере понижения температуры. При охлаждении в процессе закалки ниже 1200 К порог переколяции смещается левее штриховой вертикальной линии (рис. 4б) в область взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров, при этом происходит образование и после-

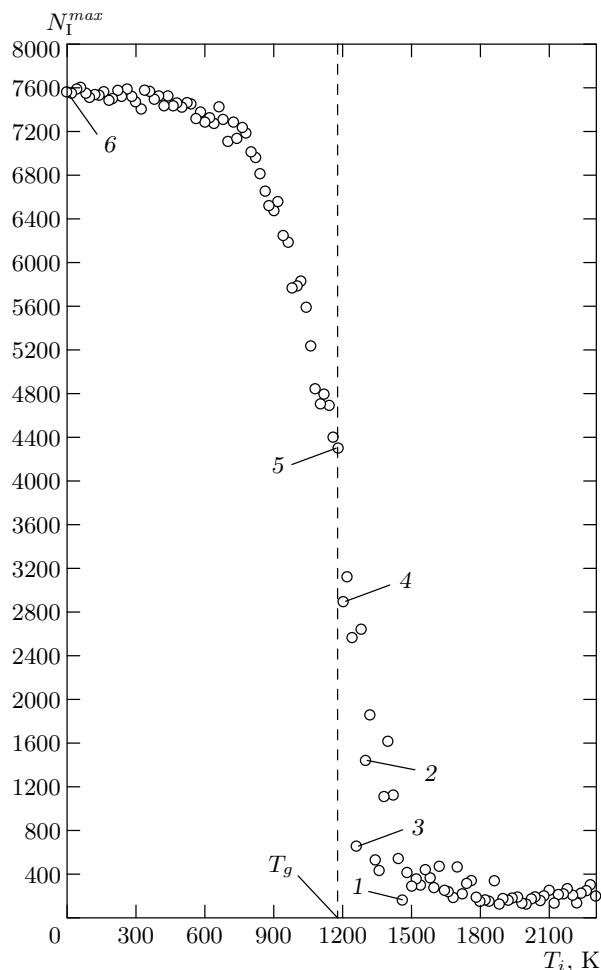


Рис. 5. Зависимость размера наибольшего кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров $N_{\text{max}}^{\text{max}}$ от температуры «окружающей среды» T_i . Штриховая вертикальная линия соответствует температуре стеклования T_g . Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют температурам «окружающей среды» 1460, 1300, 1260, 1200, 1180, 0 К и номерам проекций кластеров на рис. 6. Скорость охлаждения составляет $4.4 \cdot 10^{12}$ К/с

дующий рост пронизывающего всю структуру переколяционного кластера только из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров.

На рис. 5 показано изменение размера наибольшего кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров с расстояниями между соседями меньшими, либо равными $r = 5.46 \text{ \AA}$ (положение штриховой вертикальной линии на рис. 4б) при понижении температуры в процессе закалки, а на рис. 6. приведены проекции на одну из граней расчетной ячейки такого кластера

при температурах «окружающей среды» 1460, 1300, 1260, 1200, 1180 и 0 К. На рис. 5 и 6, видно, что при $T_i < 1460$ К резко увеличиваются флуктуации размера наибольшего кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров; при $T_i < 1180$ К наблюдается его максимальный рост (за счет объединения крупных кластеров) и при $T_i < 1180$ К — монотонное увеличение до насыщения за счет присоединения малых по размеру кластеров и одиночных икосаэдров.

Выявленные закономерности самоорганизации икосаэдрической субструктурой при стекловании хорошо коррелируют с температурными зависимостями основных термодинамических характеристик модели (рис. 1), которые обнаруживают некоторые признаки фазового перехода второго рода [16] и объясняют их поведение на микроскопическом уровне. Периодические граничные условия не позволяют точно определить температуру стеклования T_g (температуру, при которой образуется переколяционный кластер из взаимопроникающих контактирующих между собой икосаэдров) модели, так как переколяционный кластер по своей сути является бесконечной структурой, несоизмеримой с расчетной ячейкой. Можно лишь говорить о некотором интервале, в котором находится температура стеклования. Так, для рассматриваемой модели железа температура стеклования, как видно из рис. 5, находится в интервале $T_g = 1180 \pm 80$ К. Однако интуитивно можно ожидать, что увеличение размера расчетной ячейки будет препятствовать образованию переколяционного кластера и, следовательно, точка стеклования будет смещаться в сторону меньших температур. В модели железа при 0 К наибольший по размеру кластер имеет фрактальную размерность $D = 2.99$ и состоит из 7559 взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров, в построении которых участвует 54.485 % всех атомов модели. В пересчете на объем 1 мм^3 эта величина уменьшается примерно до 52.5 %.

Уменьшение скорости охлаждения модели расплава железа до $6.6 \cdot 10^{11}$ К/с приводит к ее кристаллизации [17, 18].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты можно сформулировать в виде следующего принципиального положения, раскрывающего физическую природу стеклования чистого железа.

В основе структурной организации аморфной

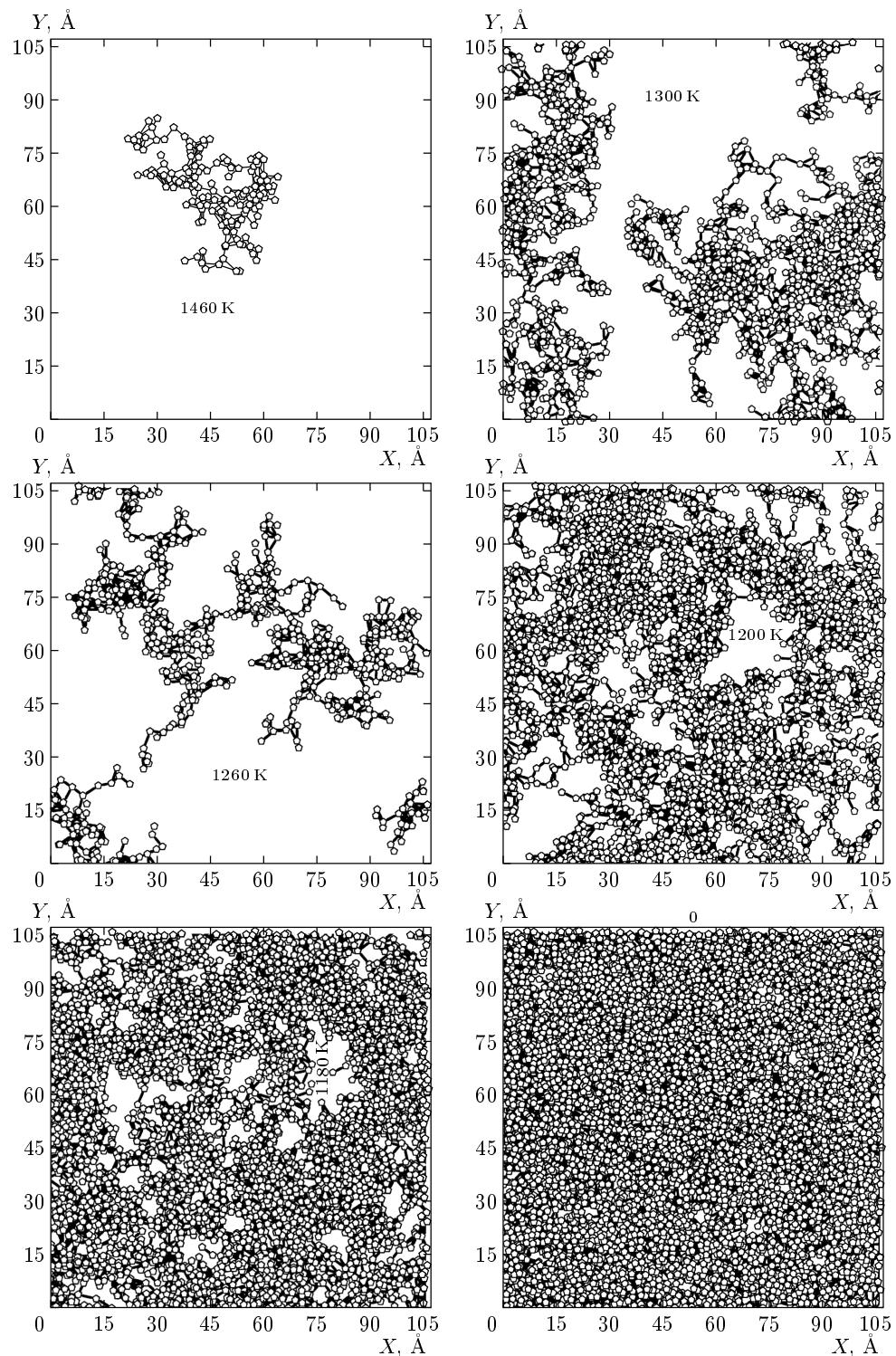


Рис. 6. Проекции на одну из граней расчетной ячейки наибольшего по размеру кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров при различных температурах «окружающей среды»: 1 — 1460 К, 2 — 1300 К, 3 — 1260 К, 4 — 1200 К, 5 — 1180 К и 6 — 0 К

фазы чистого железа лежит образование в точке стеклования и последующий рост переколиционного кластера из взаимопроникающих и контактирующих между собой икосаэдров, в вершинах и в центрах которых расположены атомы. Фрактальный кластер из несовместимых с трансляционной симметрией икосаэдров, в построении которых задействовано более половины всех атомов, играет роль сдерживающего кристаллизацию связующего каркаса и является той фундаментальной основой структурной организации твердого аморфного состояния железа, которая принципиально отличает его от расплава.

Этим положением также впервые вводится представление о субструктуре аморфных металлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Скрышевский, *Структурный анализ жидкостей и аморфных тел*, Высшая школа, Москва (1980).
2. Дж. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, Москва (1982).
3. R. Zallen, *The Physics of Amorphous Solids*, John Wiley & Sons, New York (1983).
4. В. А. Полухин, Н. А. Ватолин, *Моделирование аморфных металлов*, Наука, Москва (1985).
5. В. А. Лихачев, В. Е. Шудегов, *Принципы организации аморфных структур*, Изд-во Санкт-Петербургского университета, Санкт-Петербург (1999).
6. H. M. Pak and M. Doyama, *J. Fac. Eng., Univ. of Tokio B* **30**, 111 (1969).
7. А. В. Евтеев, А. Т. Косилов, Е. В. Левченко, Письма в ЖЭТФ **76**, 115 (2002).
8. К. Дж. Смитлз, *Металлы*, Металлургия, Москва (1980).
9. R. Yamamoto, H. Matsuoka, and M. Doyama, *Phys. Stat. Sol. A* **45**, 305 (1978).
10. Д. К. Белащенко, *ФММ* **60**, 1076 (1985).
11. А. В. Евтеев, А. Т. Косилов, *Расплавы* **1**, 55 (1998).
12. А. В. Евтеев, А. Т. Косилов, *Расплавы* **4**, 82 (2001).
13. A. V. Evteev, A. T. Kosilov, and E. V. Levchenko, *Acta Mater.* **51**, 2665 (2003).
14. L. Verlet, *Phys. Rev.* **159**, 98 (1967).
15. Д. К. Белащенко, *УФН* **169**, 361 (1999).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
17. А. В. Евтеев, А. Т. Косилов, А. В. Миленин, Письма в ЖЭТФ **71**, 294 (2000).
18. А. В. Евтеев, А. Т. Косилов, А. В. Миленин, *ФТТ* **43**, 2187 (2001).