

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ПОЛИНОМИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

*M. H. Журавлев, N. V. Островская**

*Московский государственный институт электронной техники
103498, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 октября 2003 г.

С помощью обобщенного метода моментов проведено усреднение уравнения Гинзбурга–Ландау с полиномиальной нелинейностью пятой степени в окрестности солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера. Проведен качественный анализ полученной динамической системы. В результате такого подхода найдены новые солитонные решения, ветвящиеся от известного точного солитонного решения. Выводы качественного анализа сопоставлены с результатами прямого численного решения уравнения Гинзбурга–Ландау.

PACS: 02.30.Jr, 05.45.-a, 05.45.Yv, 42.65.Tg, 42.81.Dp

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения, подобные уравнению Гинзбурга–Ландау

$$i\psi_t + \sigma\psi_{xx} + N[|\psi|]\psi = 0 \quad (1)$$

(где t, x — независимые переменные, $\psi(x, t)$ — комплекснозначная функция, σ — действительный параметр, $N[|\psi|]$ — полиномиальный оператор вида $c_1 + c_2|\psi|^2 + c_3|\psi|^4$, c_1, c_2, c_3 — комплексные параметры) возникают при описании широкого круга физических явлений в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости, гидромеханике. При $\sigma = 1/2$ и $N = |\psi|^2$ уравнение Гинзбурга–Ландау (УГЛ) обращается в нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью, которое относится к классу вполне интегрируемых и имеет, в частности, солитонные решения.

В настоящее время для УГЛ (1) найдено несколько семейств аналитических решений (см., например, [1, 2]). Среди них имеются семейства локализованных решений с фиксированной и произвольной амплитудами — так называемые диссипативные солитоны. Вместе с тем появились сообщения о полученных численно солитоноподобных решениях УГЛ,

выходящих за рамки найденных классов и обладающих весьма необычными свойствами (см., например, [3]). Необычность этих решений в первую очередь можно связать с периодичностью некоторых их характеристик — ширины, амплитуды, положения центра масс. Было бы естественно попытаться упорядочить процесс нахождения таких решений с помощью качественного анализа какой-либо динамической системы, полученной усреднением исходного уравнения. Общим недостатком и общим достоинством всех методов усреднения является то, что динамика начального распределения сводится к динамике некоторого ограниченного числа параметров начального условия. В данной работе мы остановились на обобщенном методе моментов [4], несомненным преимуществом которого по сравнению с другими методами является возможность отдельного рассмотрения динамики амплитуды и ширины солитонного решения невозмущенной задачи.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В той форме, в которой оно используется в нелинейной оптике, уравнение Гинзбурга–Ландау с полиномиальной нелинейностью пятой степени имеет вид

*E-mail: ost@miee.ru

$$i\psi_t + \sigma\psi_{xx} + \eta|\psi|^2\psi = i\delta\psi + i\epsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{xx} + i\mu|\psi|^4\psi - \nu|\psi|^4\psi, \quad (2)$$

где $\delta, \beta, \epsilon, \mu$ и ν — действительные постоянные (которые не обязательно малы), ψ — комплексное поле. В частном случае оптического волокна физический смысл этих величин следующий: ψ — комплексная огибающая электрического поля; δ, ϵ, μ — параметры, в зависимости от знака характеризующие процессы поступления либо диссипации энергии; β — коэффициент спектральной фильтрации; ν — коэффициент при квадратичной поправке к нелинейному показателю преломления. Параметр σ характеризует дисперсию второго порядка: $\sigma = +1/2$ соответствует аномальной дисперсии, $\sigma = -1/2$ — нормальной; $\eta = 1$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$i\psi_t + \sigma\psi_{xx} + \eta|\psi|^2\psi = R[\psi], \quad (3)$$

где

$$R = i\delta\psi + i\epsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{xx} + i\mu|\psi|^4\psi - \nu|\psi|^4\psi.$$

Если в правой части стоит нуль, то мы получаем обычное нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. Первые два интеграла НУШ (энергия и количество движения) имеют вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi\psi_x^* - \psi^*\psi_x) dx. \quad (4)$$

Следуя [4], введем два первых момента функции ψ :

$$D_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx, \quad D_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 |\psi|^2 dx, \quad (5)$$

где x_c — координата центра масс распределения ψ :

$$x_c = D_1/I_1.$$

Уравнения, описывающие эволюцию по переменной t этих четырех характеристик функции ψ , имеют вид

$$\frac{dI_1}{dt} = i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi R^* - \psi^* R) dx,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = -i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_x R^* + \psi_x^* R) dx, \quad (6)$$

$$\frac{dD_1}{dt} = 2i\sigma I_2 - i \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi R^* - \psi^* R) dx,$$

$$\frac{dD_2}{dt} = -2i\sigma M_1 - i \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 (\psi R^* - \psi^* R) dx,$$

где

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) dx.$$

Систему (6) дополняет тождество

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi\psi_t^* - \psi_t\psi^*) dx &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma|\psi_x|^2 - \mu|\psi|^4) dx + \\ &+ i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi R^* + \psi^* R) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) позволяют получить уравнения эволюции каких-либо пяти параметров точного решения НУШ.

Возьмем в качестве опорного солитонное решение НУШ в виде

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\text{ch}[B^{-1}(x - x_c)]} \exp i[\varphi(t) + C(x - x_c)]. \quad (8)$$

Здесь A — амплитуда солитона, B — его ширина, x_c — координата центра масс, C — волновое число. Когда $R \equiv 0$, параметр A в формуле (8) произволен, а два других связаны с ним:

$$A = B^{-1}, \quad \varphi(t) = A^2 t / 2.$$

Кроме того, для неподвижного солитона НУШ, центр масс которого лежит на оси, проходящей через начало координат, $C = 0$ и $x_c = 0$.

Для распределения (8) имеем

$$I_1 = 2A^2 B, \quad I_2 = -2i A^2 BC,$$

$$D_1 = 2x_c A^2 B, \quad D_2 = \frac{1}{6} \pi^2 A^2 B^3, \quad (9)$$

$$M_1 = 0.$$

Полагая, что в окрестности решения параметры являются непрерывными функциями переменной t , из (9) получаем, что

$$\begin{aligned} C' &= I_2' \frac{i}{2A^2B} - I_1' \frac{C}{2A^2B}, \\ x_c' &= D_1' \frac{1}{2A^2B} - I_1' \frac{x_c}{2A^2B}, \\ A' &= I_1' \frac{3}{8AB} - D_2' \frac{3}{2\pi^2 AB^3}, \\ B' &= D_2' \frac{3}{\pi^2 A^2 B^2} - I_1' \frac{1}{4A^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины I_1' , I_2' , D_1' , D_2' находим непосредственным вычислением интегралов (6), что для $\psi(x, t)$ вида (8) дает

$$I_1' = 4B \left(\delta A^2 + \frac{2}{3}\epsilon A^4 + \frac{8}{15}\mu A^6 \right) - 4\beta A^2 \left(\frac{1}{3B} + BC^2 \right),$$

$$\begin{aligned} I_2' = -4iA^2B &\left[\left(C\delta - \frac{1}{B^2}\beta C - \beta C^3 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{3}\epsilon CA^2 + \frac{8}{15}\mu CA^4 - \pi^2\beta CB^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1' = A^2 &\left(4\sigma BC + 4\delta x_c B - \frac{4\beta x_c}{3B} - 4\beta x_c BC^2 \right) + \\ &+ \frac{8}{3}\epsilon x_c A^4 B + \frac{32}{15}\mu x_c A^6 B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2' = \frac{1}{3}A^2B^3 &\left[\delta\pi^2 + 2\epsilon \left(\frac{1}{3}\pi^2 - 2 \right) A^2 + \right. \\ &\left. + 2\mu A^4 \left(\frac{4}{15}\pi^2 - 2 \right) - \beta \frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{3}\pi^2 - 8 \right) - \beta\pi^2 C^2 \right]. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (10), приходим к следующим уравнениям для параметров A , B , C , x_c функции (8):

$$\begin{aligned} A' = -A\beta &\left(\frac{1}{3B^2} + \frac{4}{\pi^2 B^2} + C^2 \right) + A\delta + \\ &+ 2\epsilon A^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right) + 2\mu A^5 \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{\pi^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$B' = \frac{4}{\pi^2}B \left(2\beta \frac{1}{B^2} - \epsilon A^2 - \mu A^4 \right), \quad (12)$$

$$C' = -\frac{4}{3}\frac{1}{B^2}\beta C, \quad (13)$$

$$x_c' = 2\sigma C. \quad (14)$$

Несколько отдельно стоит уравнение для фазовой функции φ , которое замыкает систему относительно пяти рассматриваемых параметров возмущенного решения. Оно выводится из интегрального тождества (7):

$$\varphi' = \sigma C^2 - \sigma \frac{1}{3B^2} + \frac{2}{3}\eta A^2 + \frac{8}{15}\nu A^4 - \beta \frac{C}{B}. \quad (15)$$

Уравнения (11)–(14) не содержат φ . Это позволяет исследовать систему без учета уравнения (15), а затем решать его отдельно. Еще одной особенностью полученных уравнений является то, что параметр ν не входит в первые четыре уравнения. В связи с этим все описанные ниже численные эксперименты с исходным уравнением мы проводили при нулевом значении этого параметра.

3. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Точки покоя динамической системы (11)–(14) удовлетворяют условию одновременного обращения в нуль правых частей всех уравнений системы. Из уравнений (13), (14) сразу следует, что стационарные точки существуют лишь при $C = 0$, $x_c = \text{const}$. Это значит, что вблизи решения НУШ для пробной функции вида (8) могут существовать лишь неподвижные солитоноподобные решения УГЛ, сохраняющие свойство симметрии. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь уравнения относительно амплитуды солитона A и его ширины B :

$$\begin{aligned} A' = -A &\frac{1}{B^2}\beta \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \right) + A\delta + \\ &+ 2\epsilon A^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right) + 2\mu A^5 \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{\pi^2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$B' = \frac{4}{\pi^2}B \left(2\beta \frac{1}{B^2} - \epsilon A^2 - \mu A^4 \right). \quad (17)$$

Для понижения степени многочленов, стоящих в правой части уравнений, домножим уравнение (16) на $2A$, а уравнение (17) — на $2B$ и введем новые переменные $u = A^2$, $v = B^2$. Получим

$$u' = -2\beta a_0 \frac{u}{v} + 2u(\delta + 2\epsilon a_1 u + \mu a_2 u^2), \quad (18)$$

$$v' = 4\beta b - 2bu(\epsilon + \mu u), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}, & a_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}, \\ a_2 &= 2 \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{\pi^2} \right), & b &= \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

3.1. Задача без учета спектральной фильтрации ($\beta = 0$)

В этом случае динамическая система примет вид

$$u' = 2u(\delta + 2\epsilon a_1 u + \mu a_2 u^2), \quad (20)$$

$$v' = -2buv(\epsilon + \mu u). \quad (21)$$

Система легко разрешима. Она имеет частное решение

$$u = 0, \quad v = c, \quad \varphi = -\frac{\sigma}{3c}t + \varphi_0$$

и общий интеграл

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| + \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2} \times \\ &\times \int \frac{du}{(u - u_1)^2 - \Delta_1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$P_1 = \mu a_2 u^2 + 2\epsilon a_1 u + \delta, \quad u_1 = -\frac{\epsilon a_1}{\mu a_2},$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{\epsilon a_1}{\mu a_2} \right)^2 - \frac{\delta}{\mu a_2},$$

c — постоянная интегрирования. Окончательный вид решения зависит от конкретного соотношения параметров, а именно:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| + \\ &+ \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2 |\Delta_1|^{1/2}} \arctg \frac{(u - u_1)}{|\Delta_1|^{1/2}}, \quad \Delta_1 < 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| - \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2} \times \\ &\times \frac{1}{u - u_1}, \quad \Delta_1 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| + \frac{1}{2\Delta_1^{1/2}} \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2} \times \\ &\times \ln \left| \frac{u - u_1 - \Delta_1^{1/2}}{u - u_1 + \Delta_1^{1/2}} \right|, \quad \Delta_1 > 0, \end{aligned} \quad (25)$$

причем последнее уравнение распадается на ветви:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| + \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2 \Delta_1^{1/2}} \times \\ &\times \operatorname{Arth} \frac{u - u_1}{\Delta_1^{1/2}}, \quad (u - u_1)^2 < \Delta_1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b} \ln v + c &= \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| + \frac{\epsilon(a_2 - a_1)}{\mu a_2^2 \Delta_1^{1/2}} \times \\ &\times \operatorname{Arcth} \frac{u - u_1}{\Delta_1^{1/2}}, \quad (u - u_1)^2 > \Delta_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Линии $u = u_{\pm}$, где $u_{\pm} = u_1 \pm \Delta_1^{1/2}$ являются общими асимптотами этих ветвей.

В случае $\mu = 0$ решение приобретает вид

$$-\frac{1}{b} \ln v + c = \frac{1}{2a_2} \ln |P_1| \quad (28)$$

или

$$v = c(2\epsilon a_1 u + \delta)^{-b/2a_2}. \quad (28a)$$

Оно представляет собой однопараметрическое семейство степенных функций с отрицательным показателем. Семейство обладает двумя асимптотами:

$$u = -\delta/2\epsilon a_1, \quad v = 0.$$

Остановимся на некоторых свойствах фазового портрета системы (20), (21). Прежде всего, в силу определения функций u и v , он расположен на фазовой плоскости uv в области $u \geq 0, v > 0$. Именно эту область везде далее будем называть областью фазового портрета. На фазовом портрете всегда существует одна особая линия $u = 0$. Она соответствует тривиальному решению исходного уравнения (2) (солитону с нулевой амплитудой и произвольной шириной), или «фону» солитона. Точки этой особой линии будем называть «тривиальными особыми точками». Отметим также, что начальные условия задачи должны укладываться на линию $uv = 1$ (линию солитонов НУШ), так как при выводе уравнений существенно использовался тот факт, что опорная функция является точным решением НУШ. Это значит, что реально реализуемы не все траектории, а лишь те из них, которые имеют с линией солитонов НУШ общие точки.

1. Случай $\mu = 0$. При $\mu = 0$ на оси $v = 0$ расположена особая точка типа седло с координатой $u_0 = -\delta/2\epsilon a_1$ (решение (28a)). При $\delta = 0, \epsilon \neq 0$ она совпадает с началом координат. При $\delta \neq 0, \epsilon = 0$ особой точки нет. Эти седловые точки соответствуют солитонам конечной амплитуды и «нулевой» ширины. Назовем их «вырожденными». Хотя они не принадлежат области допустимых значений функций u и v и не имеют физического смысла (физически им соответствует коллапс солитона), они важны для понимания топологии фазового портрета и последующей интерпретации результатов прямого численного решения уравнения (2). Соответствующие фазовые портреты представлены на рис. 1 (вертикальная ось

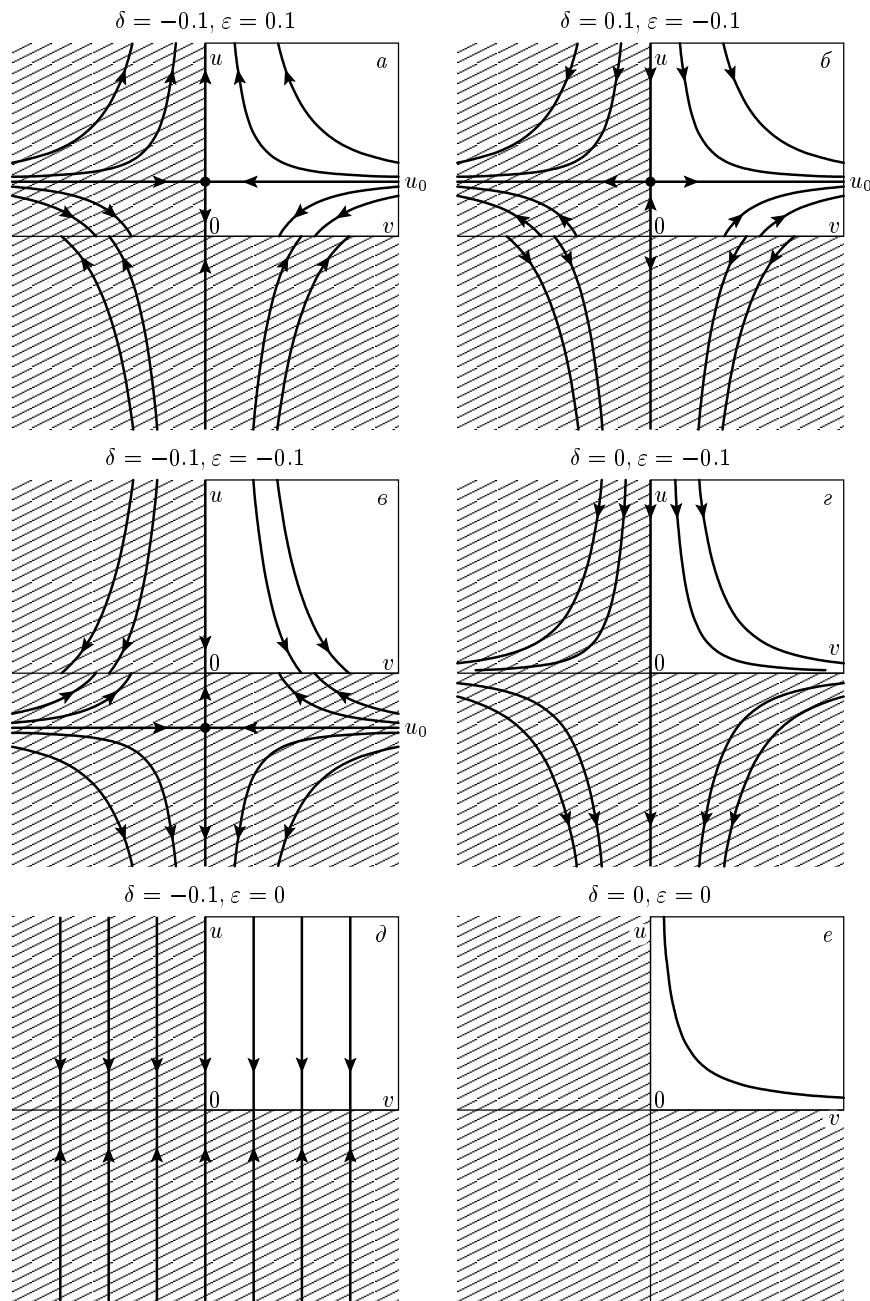


Рис. 1. Фазовые портреты динамической системы при $\mu = 0, \beta = 0$ (кубическое УГЛ)

соответствует переменной u , горизонтальная — переменной v). В случае, когда параметры ϵ и μ имеют разные знаки, седло расположено в верхней полуплоскости и горизонтальная сепаратриса попадает в область фазового портрета (первый квадрант фазовой плоскости), причем при $\delta < 0, \epsilon > 0$ она входит в особую точку, а при $\delta > 0, \epsilon < 0$ выходит из нее. В первом случае направление траекторий выше сепаратрисы указывает на рост амплитуды первоначаль-

ного импульса с одновременным самосжатием (антидиссипативно-компрессионный тип динамики), а ниже сепаратрисы траектории оканчиваются на особой линии $u = 0$ (диссипативно-компрессионный тип динамики импульса, устойчивость фона) (рис. 1a). При $\delta > 0, \epsilon < 0$ конфигурация фазового портрета сохраняется, но направление траекторий меняется на противоположное, что связано с инвариантностью динамической системы (20), (21) относительно

преобразования

$$\begin{aligned}\delta &\rightarrow -\delta, \quad \epsilon \rightarrow -\epsilon, \\ \mu &\rightarrow -\mu, \quad t \rightarrow -t.\end{aligned}$$

При этом траектории, выходящие из особой линии $u = 0$, асимптотически приближаются к сепаратрисе $u = u_0$ снизу (неустойчивость фона); траектории, проходящие через точки выше сепаратрисы, асимптотически приближаются к ней сверху. В обоих случаях переменная v неограниченно возрастает (соответственно антидиссипативно-дисперсионный и диссипативно-дисперсионный типы динамики) (рис. 1б). В данной системе баланс диссипативных процессов и процессов накачки при $\mu = 0$ невозможен.

При δ и ϵ одного знака седловая особая точка расположена в нижней полуплоскости, т. е. не попадает в область фазового портрета. Таким образом, при положительных δ и ϵ все траектории первого квадранта асимптотически приближаются к вертикальной сепаратрисе (динамика импульса антидиссипативно-компрессионного типа), при отрицательных δ и ϵ все траектории оканчиваются на особой линии (диссипативная динамика) (рис. 1б). Это означает, что в первом случае в системе присутствуют только процессы накачки энергии, вызывающие неограниченный рост первоначального возбуждения, во втором случае в системе идут только процессы рассеяния энергии, которые приводят к полному исчезновению первоначального импульса.

При $\delta = 0$ седловая особая точка попадает в начало координат, а особая линия совпадает с сепаратрисой, разделяющей два семейства гиперболических траекторий одного направления. Фазовый портрет системы для $\epsilon < 0$ приведен на рис. 1г. Тип динамики в данном случае можно определить как диссипативно-дисперсионный при $\epsilon < 0$ и антидиссипативно-компрессионный при $\epsilon > 0$.

При $\delta \neq 0, \epsilon = 0$ траектории системы становятся вертикальными линиями, входящими либо выходящими из особой линии $u = 0$ в зависимости от знака δ (рис. 1д).

При $\delta = 0$ и $\epsilon = 0$ область фазового портрета представляет собой плоскость, состоящую из особых точек. Из этого множества следует исключить точки, не принадлежащие линии солитонов НУШ. Таким образом, фазовый портрет в данном случае ограничивается особой линией $uv = 1$ и изолированной особой точкой $(0,0)$ (рис. 1е).

2. Случай $\mu \neq 0$. В этом случае в системе могут появиться стационарные точки, отличные от триви-

альных и вырожденных. Они находятся из условия одновременного обращения в нуль функций

$$P_1(u) = \mu a_2 u^2 + 2\epsilon a_1 u + \delta \quad (29)$$

и

$$Q_1(u) = \epsilon + \mu u. \quad (30)$$

Отсюда сразу следует, что такие стационарные точки существуют только в том случае, когда параметры ϵ и μ имеют разные знаки. При анализе системы возможны следующие ситуации.

1) $\Delta_1 < 0$. В этом случае $P_1(u)$ не обращается в нуль ни при каких δ, ϵ, μ . Нетривиальных и вырожденных особых точек нет. Единственная особая линия — это линия $u = 0$. Фазовые кривые описываются уравнением (23). Баланс накачки, потеря и дисперсии невозможен.

2) $\Delta_1 = 0$. Кроме тривиальных особых точек всегда есть вырожденные особые точки с координатами $(0, u_0)$ типа седло-узел (см. ниже рис. 3г). Других особых точек нет. Фазовые кривые описываются уравнением (24).

3) $\Delta_1 > 0$. Здесь возникает качественно иная ситуация. Когда один из корней уравнения (29),

$$u_{\pm} = u_1 \pm \Delta_1^{1/2},$$

совпадает с единственным корнем уравнения (30),

$$u_1 = -\epsilon/\mu,$$

на фазовой плоскости возникает особая линия,

$$u = -\epsilon/\mu.$$

Кроме того, имеется еще вырожденная особая точка, соответствующая второму корню. Окажутся ли корни в области допустимых значений функций u и v , зависит от конкретных соотношений физических параметров задачи. Фазовые кривые описываются уравнением (25). В случае несовпадения корней на вертикальной оси возникают вырожденные особые точки с координатами $(0, u_+)$ и $(0, u_-)$, где u_+, u_- — корни уравнения $\mu a_2 u^2 + 2\epsilon a_1 u + \delta = 0$. Какие из них попадут в верхнюю полуплоскость, очевидно, зависит от знаков корней, т. е. от соотношения физических параметров уравнения. Условием возникновения нетривиальных особых точек является следующее соотношение между параметрами:

$$\mu = \frac{2\epsilon^2}{15\delta}, \quad \epsilon\mu < 0. \quad (31)$$

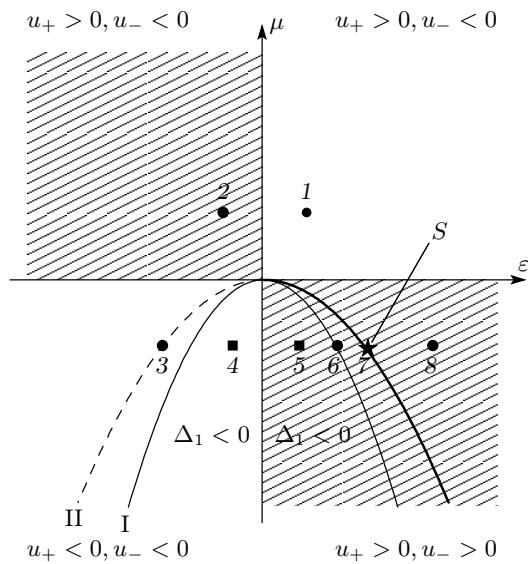


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма при $\beta = 0$ на плоскости $\mu\epsilon$ для $\delta < 0$, u_{\pm} — корни квадратного трехчлена P_1 , I — линия рождения сложной особой точки ($\mu = a_1^2\epsilon^2/a_2\delta$), II — линия существования нетривиальных особых точек ($\mu = 2\epsilon^2/15\delta$); цифрами 1–7 обозначены точки типичной топологии фазовых портретов, S — солитон

Условие $\epsilon\mu < 0$ гарантирует попадание особой линии в область фазового портрета исследуемой задачи.

В силу симметрии системы (20), (21) произвольной точке $A(\epsilon_0, \mu_0)$ плоскости $\mu\epsilon$ при $\delta < 0$ соответствует сопряженная точка $A'(-\epsilon_0, -\mu_0)$ при $\delta > 0$. Во взаимно сопряженных точках конфигурации фазового портрета тождественны и отличаются лишь направлением фазовых траекторий. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма динамической системы (20), (21) для $\delta < 0$. Штриховкой выделены квадранты, в которых возможны нетривиальные особые точки. Линии $\mu = a_1^2\epsilon^2/a_2\delta$ (линия рождения особой точки) и $\mu = 2\epsilon^2/15\delta$ (линия существования нетривиальных особых точек) делят плоскость $\mu\epsilon$ на области типичной топологии фазовых портретов.

На рис. 3 приведены фазовые портреты системы в характерных точках бифуркационной диаграммы рис. 2. В первом и втором квадрантах плоскости параметров в точках 1 и 2, $\Delta_1 > 0$, корни трехчлена $P_1(u)$ существуют и имеют разные знаки. Особые точки $(0, u_-)$ и $(0, u_+)$ являются вырожденными седловыми точками, причем в область фазового портрета попадает лишь точка $(0, u_+)$ (рис. 3 a , b). Выше линии $u = u_+$ тип динамики импульса антидиссипативно-компрессионный, ниже — диссипативно-компрессионный (ср. с рис. 1 a). При

этом в сопряженных точках 1' и 2' типы динамики диссипативно-дисперсионный и антидиссипативно-дисперсионный, подобно рис. 1 b . В третьем квадранте, левее линии I (линии $\Delta_1 = 0$), $u_- < 0$, $u_+ < 0$, т. е. вырожденные особые точки не попадают в область фазового портрета; правее линии I имеем $\Delta_1 < 0$ и вырожденных особых точек нет. Соответствующие фазовые портреты приведены на рис. 3 c , g (ср. с рис. 1 c).

Сложнее выглядит процесс перестройки фазово-го портрета с параметрами из четвертого квадранта бифуркационной диаграммы. Левее линии I имеем $\Delta_1 < 0$, т. е. трехчлен $P_1(u)$ не имеет корней, а значит, нет и вырожденных особых точек (точка 5, рис. 3 d). В точке 6, лежащей на линии $\Delta_1 = 0$, происходит бифуркация рождения сложной особой точки типа седло-узел (рис. 3 j) [5]. Правее этой линии $P_1(u)$ имеет два положительных корня, а седло-узел распадается на две простые особые точки — седло и узел (рис. 3 e). Далее, в точке 7, лежащей на линии II, рождается особая линия $u = u_+$. При $\delta < 0$ любая траектория, проходящая через точки, лежащие выше этой линии, и через точки в промежутке между линиями $u = u_-$ и $u = u_+$, оканчивается на этой линии (рис. 3 k). Именно при такой комбинации па-раметров в исходном уравнении (2) можно ожидать существования устойчивого солитонного решения.

Интересно отметить, что особая линия представляет собой структурно неустойчивый (негрубый) объект. При малом «шевелении» параметров этот объект распадается. Это важно, поскольку константы a_0, a_1, a_2, b содержат слагаемые, пропорциональные $1/\pi^2$, т. е. на первый взгляд существование солитонов при найденных значениях параметров выглядит весьма проблематично. На рис. 3 u и рис. 3 z при-веденены фазовые портреты системы в левой и правой окрестностях точки 7, соответственно. На рис. 3 u точка $(0, u_+)$ является узлом, а на рис. 3 z — седлом. Общей особенностью этих фазовых портретов является крайне медленная динамика фазовых траек-торий в области сепаратрисы $u = u_+$ и крайне узкая (численно неотличимая) щель между верхними и нижними значениями переменной u в ее окрестно-сти. Фактически можно считать, что фазовые траек-тории устремляются к конечным значениям не при строго фиксированной связи между параметрами δ, ϵ, μ , а в некоторой размытой области. За предела-ми этой области параметров поведение траекторий соотвествует предсказываемому теорией в окрест-ности сепаратрисы (рис. 3 m).

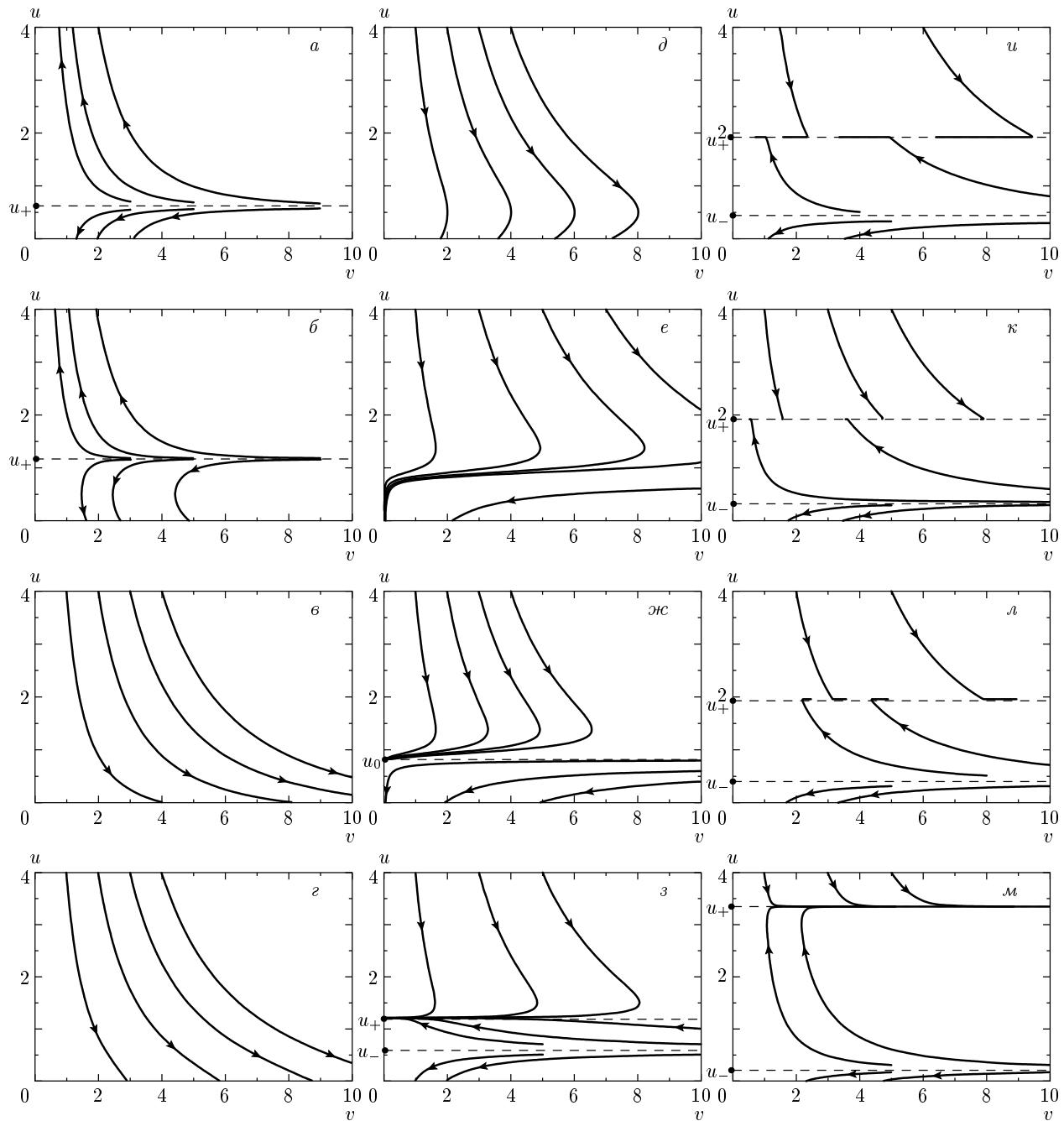


Рис. 3. Фазовые портреты динамической системы (20), (21) при $\delta = -0.1$ в характерных точках бифуркационной диаграммы рис. 2. Особая линия на рис. κ и горизонтальные сепаратрисные траектории, связанные с вырожденными особыми точками $(0, u_+)$ и $(0, u_-)$, обозначены штрихами; вертикальные сепаратрисы совпадают с вертикальной осью координат. a — $\mu = 0.2, \epsilon = 0.1$ (точка 1); β — $\mu = 0.2, \epsilon = -0.1$ (точка 2); γ — $\mu = -0.2, \epsilon = -0.387$ (точка 3); z — $\mu = -0.2, \epsilon = -0.1$ (точка 4); δ — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.1$ (точка 5); e — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.274$ (левая окрестность точки 6); ηc — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.277$ (точка 6); ϑ — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.3$ (правая окрестность точки 6); u — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.380$ (левая окрестность точки 7); κ — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.38722$ (точка 7); λ — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.388$ (правая окрестность точки 7); m — $\mu = -0.2, \epsilon = 0.6$ (точка 8)

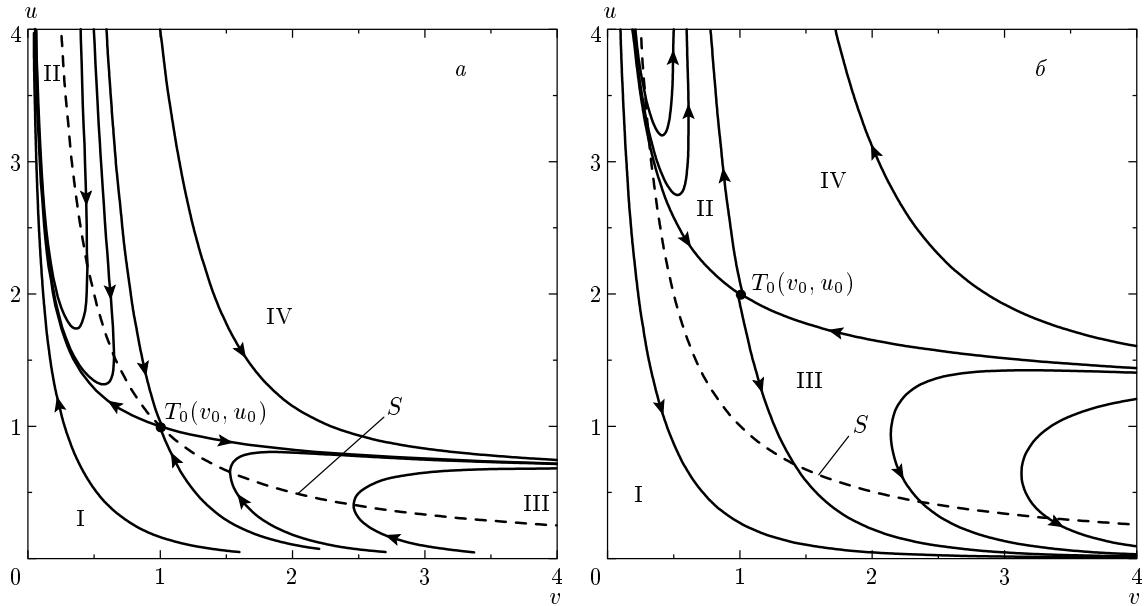


Рис. 4. Фазовые портреты динамической системы при $\beta \neq 0, \mu = 0$: а — $\delta = 0.1, \epsilon = -0.2, \beta = -0.1; \delta = -\delta = -0.1, \epsilon = 0.1, \beta = 0.1$. Штриховая линия S — линия солитонов НУШ (начальные условия)

3.2. Учет спектральной фильтрации ($\beta \neq 0$)

В этом случае общей особенностью фазового портрета системы (18), (19) является то, что линия $v = 0$, включая начало координат, не принадлежит области фазового портрета (поскольку правая часть уравнения (18) содержит член, пропорциональный v^{-1}). Но для уравнения

$$\frac{du}{dv} = \frac{-\beta a_0 u + uv(\delta + 2\epsilon a_1 u + \mu a_2 u^2)}{v[2\beta b - buv(\epsilon + \mu u)]}$$

точка $O(v = 0, u = 0)$ является особой точкой типа седло с сепаратрисами $u = 0, v = 0$. Таким образом, на фазовом портрете системы линии $u = 0$ и $v = 0$ также будут предельными.

1. Случай $\mu = 0$. В этом случае система (18), (19) принимает вид

$$u' = -2\beta a_0 \frac{u}{v} + 2u(\delta + 2\epsilon a_1 u), \quad (32)$$

$$v' = 4\beta b - 2uv\epsilon. \quad (33)$$

В отличие от системы (20), (21), у нее нет особых линий и вырожденных особых точек на осях. В области $u > 0, v > 0$ возможно существование особой точки седлового типа с координатами $(-2\delta/\epsilon, -\beta/\delta)$. Эта особая точка попадает в первый квадрант при $\delta > 0, \epsilon < 0, \beta < 0$ либо при $\delta < 0, \epsilon > 0, \beta > 0$.

При других комбинациях знаков параметров особая точка лежит за пределами области фазового портрета и динамика локализованного распределения при любых соотношениях их величины относится либо к диссипативно-дисперсионному типу с падением амплитуды до нуля, либо к антидиссипативно-компрессионному, который заканчивается коллапсом.

Фазовые портреты динамической системы с седловой особой точкой приведены на рис. 4а, б. Сепаратрисы разбивают квадрант на четыре области. При $\delta > 0$ тип динамики в каждой из подобластей следующий:

I — область между осями координат и сепаратрисами, антидиссипативная динамика;

II — область между сепаратрисами выше особой точки, антидиссипативная динамика;

III — область между сепаратрисами ниже особой точки, динамика дисперсионного типа;

IV — все остальное правее и выше сепаратрис, динамика дисперсионного типа.

Интересно, что при одной и той же амплитуде выше некоторого порога динамика более широкого импульса имеет дисперсионный характер, а более узкого — антидиссипативный. Ниже порога динамика всегда антидисперсионная. Существование щели между нижней ветвью сепаратрисы и осью $u = 0$ означает неустойчивость фона антидисперсионного

типа. В случае $\delta < 0$ направления сепаратрис и траекторий меняется на противоположное.

Так же как и раньше, конкретный тип динамики зависит еще и от взаимного расположения линии солитонов НУШ и сепаратрис седла, которое в свою очередь регулируется соотношением параметров δ, β, ϵ .

2. Случай $\mu \neq 0$. В случае, когда система вида (18), (19) является полной динамической системой, особые точки представляют собой корни выражений, стоящих в правых частях уравнений системы

$$P_2 = -2\beta a_0 \frac{u}{v} + 2u(\delta + 2\epsilon a_1 u + \mu a_2 u^2), \quad (34)$$

$$Q_2 = 4\beta b - 2buv(\epsilon + \mu u). \quad (35)$$

Выразив v из уравнения (35) и подставив в (34), приходим к уравнению

$$11\mu u^2 + 15\epsilon u + 30\delta = 0 \quad (36)$$

и к следующим выражениям для координат особых точек:

$$u_{\pm} = \frac{-15\epsilon \pm \Delta_2^{1/2}}{22\mu}, \quad v_{\pm} = \frac{2\beta}{u_{\pm}(\epsilon + \mu u_{\pm})}, \quad (37)$$

где

$$\Delta_2 = (15\epsilon)^2 - 1320\mu\delta.$$

Отсюда следуют условия существования особых точек:

$$u_{\pm} \neq 0, \quad u_{\pm} \neq -\epsilon/\mu, \quad \Delta_2 > 0.$$

Эти три условия следует пополнить условиями

$$u_{\pm} > 0, \quad v_{\pm} > 0.$$

Условие $\Delta_2 > 0$ разделяет все точки трехмерного (δ, ϵ, μ) -пространства поверхностью эллиптического конуса $15\epsilon^2 - 88\delta\mu = 0$ (I) на два подпространства, одно из которых содержит, а другое не содержит особых точек (соответственно, вне и внутри конуса). При фиксированном $\delta \neq 0$ в зависимости от знаков δ и β можно построить четыре бифуркационные диаграммы, отражающие распределение особых точек на плоскостях $\epsilon\mu$, секущих коническую поверхность (рис. 5). Линия I на диаграммах — линия пересечения конической поверхности и плоскости $\delta = \text{const}$ (парабола $\mu = 15\epsilon^2/88\delta$), линия II (парабола $\mu = 2\epsilon^2/15\delta$) — линия смены знака координаты v_+ либо v_- одной из особых точек. Уравнение этой линии получено из условия перехода через нуль знаменателя в выражении для v_{\pm} (37). Интересно,

что оно совпадает с условием существования особой линии в случае $\beta = 0$ (см. разд. 3.1). В области между параболами I и II при $\delta\mu < 0$ система имеет две особые точки, T_+ и T_- .

Нетрудно показать (см. Приложение Б), что особые точки системы (18), (19) во всей области их существования относятся к седловому типу, а в щели между параболами I и II, кроме того, имеются особые точки типа узел, устойчивый при $\delta < 0, \beta > 0$ и неустойчивый при $\delta > 0, \beta < 0$. Согласно теореме об индексе, такой характер особых точек исключает существование предельных циклов динамической системы, а значит, возвращаясь к первоначальной формулировке задачи, можно утверждать, что от солитона НУШ не ветвятся монофазные t -периодические решения УГЛ (без чирпа).

Фазовый портрет системы с двумя особыми точками при значениях параметров $\delta = -0.1, \epsilon = 0.36, \mu = -0.2, \beta = 0.05$ приведен на рис. 6а, б (ср. с фазовым портретом для $\beta = 0$ на рис. 3и, где на оси $v = 0$ расположены две особые точки — седло и устойчивый узел). Следует отметить, что при фиксированном μ и значении ϵ , лежащем на линии I рождения особой точки, она имеет тип седло–узел, который с ростом параметра ϵ распадается на узел и седло. Устойчивый узел $T(v_-, u_-)$ соответствует устойчивому солитонному решению исходной задачи (см. ниже рис. 11а). Причем в область притяжения узла попадают не все траектории, берущие начало на линии солитонов НУШ (штриховая линия S на рис. 6а), а лишь лежащие выше сепаратрисы седла T_+ . Взаимное расположение линии солитонов НУШ и точки T_+ зависит не только от параметров δ, ϵ, μ , но и от параметра β . При фиксированной тройке параметров накачки/потерь δ, ϵ, μ при изменении параметра β (а вместе с ним и координаты v_+) может оказаться, что линия S находится за пределами бассейна притяжения узла. Поскольку уравнение линии солитонов НУШ имеет вид

$$uv = 1,$$

условием попадания по крайней мере части линии S в бассейн узла является неравенство

$$u_+ < 1/v_+,$$

что в итоге приводит к следующему соотношению между параметрами:

$$\beta < \frac{7\epsilon + \Delta_2^{1/2}}{44}. \quad (38)$$

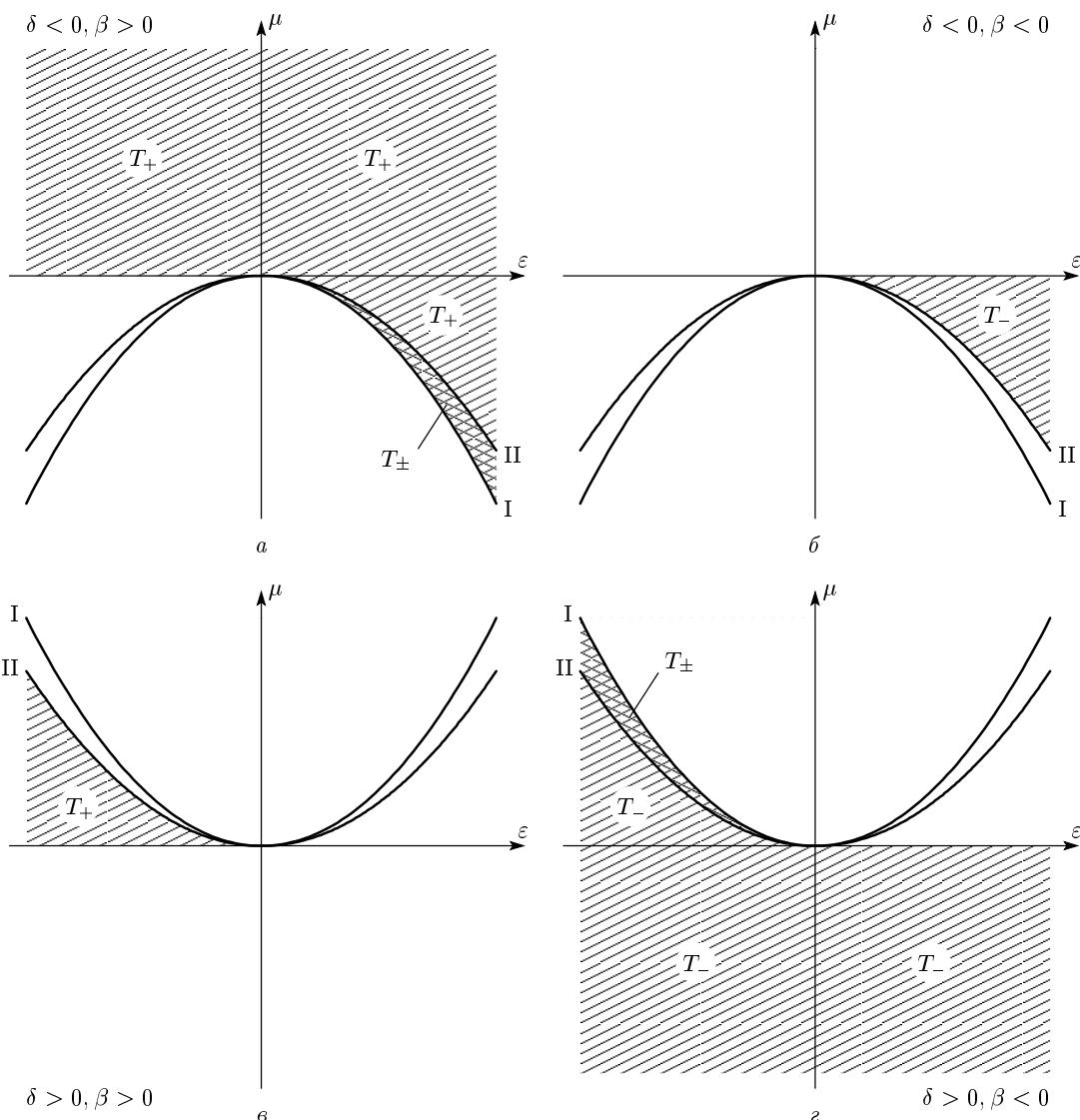


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы при $\beta \neq 0$ в зависимости от знаков β и δ . В заштрихованных областях система имеет седловую особую точку T_+ либо T_- ; в области между параболами I и II у системы две особых точки. В незаштрихованных областях особых точек нет

При $\delta\mu \neq 0$ линия, ограничивающая сверху область допустимых параметров ϵ, β , представляет собой верхнюю половину правой ветви гиперболы

$$\frac{(\epsilon')^2}{a^2} - \frac{(\beta')^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a^2 = 6\delta\mu, \quad b^2 = 2\delta\mu/3,$$

канонические координаты ϵ', β' повернуты относительно координат ϵ, β на угол

$$\phi = \arcsin 1/\sqrt{50}.$$

Слева и справа эта область ограничена линиями

$$\epsilon = \epsilon_I, \quad \epsilon = \epsilon_{II},$$

где

$$\epsilon_I = \sqrt{\frac{88}{15}}\delta\mu, \quad \epsilon_{II} = \sqrt{\frac{15}{2}}\delta\mu.$$

Угол между асимптотами гиперболы

$$\alpha = 2a/b = 2 \operatorname{arctg} 3,$$

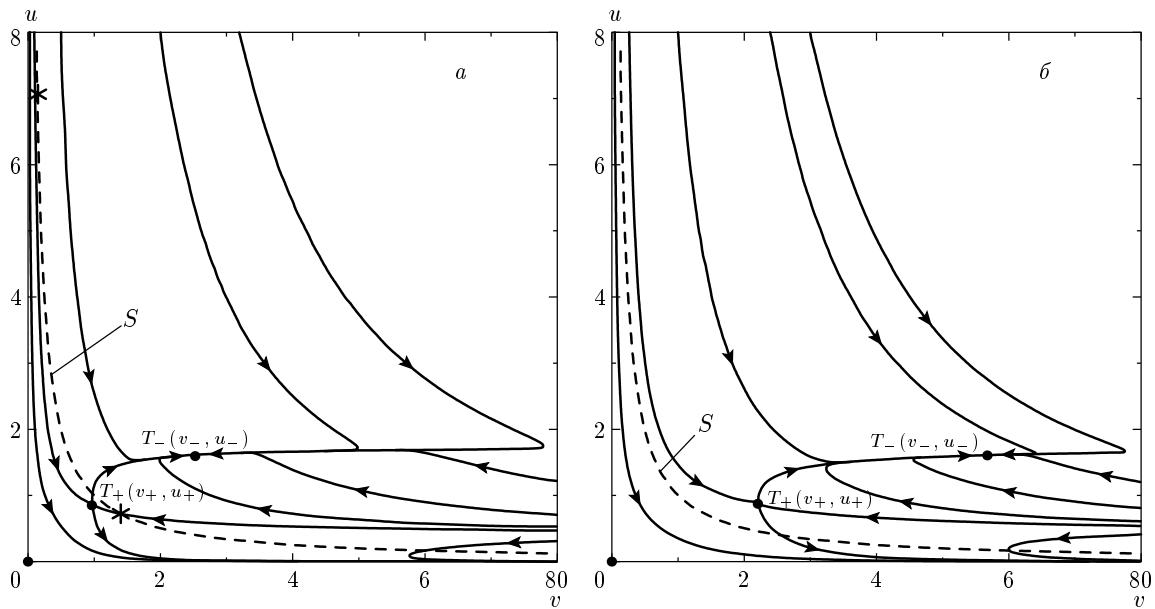


Рис. 6. Фазовые портреты системы с двумя особыми точками T_+ и T_- типа седло и устойчивый узел при $\beta \neq 0$. Штриховая линия S — линия солитонов НУШ. Звездочками обозначены предельные значения начальных условий, приводящих к формированию солитона. Значения параметров: a — $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.36$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.05$; b — $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.36$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.18$

так же как и угол поворота координат ϕ , не зависит от параметров, в отличие от координат вершины

$$x_0 = \sqrt{\frac{7}{75}\delta\mu}, \quad y_0 = \sqrt{\frac{1}{75}\delta\mu}.$$

При $\delta\mu = 0$ гипербола вырождается в прямую $\beta = (1/2)\epsilon$, уравнение которой совпадает с уравнением одной из асимптот, а интервал существования по ϵ стягивается в единственную точку, совпадающую с началом координат. На рис. 7 представлена область параметров ϵ, β , допускающая попадание в бассейн притяжения узла T_- при $\delta = -0.1$, $\mu = -0.2$. При этих значениях δ и μ имеем $\epsilon_I = 0.34254\dots$, $\epsilon_{II} = 0.38730\dots$, $\beta_{max} = 0.1229$.

Из приведенного анализа следует, что β_{max} не достигает асимптоты $\beta = (1/2)\epsilon$ ни при каких значениях параметров. В терминах исходной задачи это значит, что несмотря на то что монофазное стационарное решение при $\beta > \beta_{max}$ существует, оно не может быть достигнуто при начальных условиях в виде солитона НУШ. Это же относится и к точному монофазному решению, о котором сообщается в работе [6] (см. рис. 6б). Линия S солитонов НУШ расположена ниже сепаратрис седла T_+ , так что при любых начальных значениях амплитуда локализованного решения устремляется к нулю.

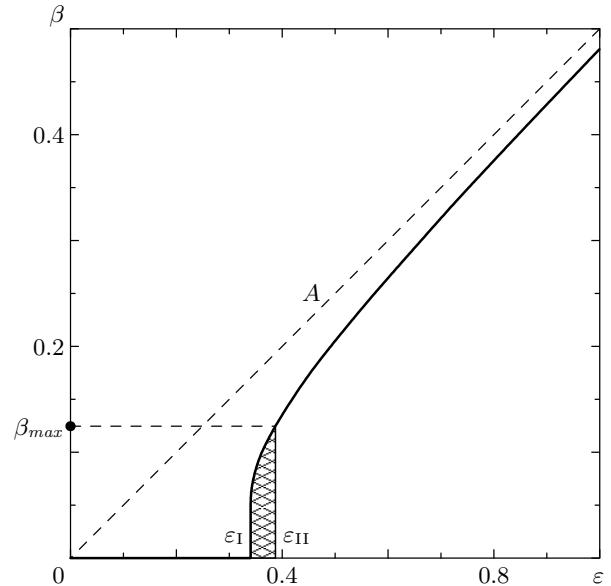


Рис. 7. Область достижимости устойчивого солитонного решения на плоскости параметров (ϵ, β) (заштрихована), ϵ_I — левая граничная точка значений ϵ , при которых существует устойчивый узел, ϵ_{II} — правая, параметры δ и μ фиксированы

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УГЛ

Для проверки выводов качественного анализа динамической системы было проведено математическое моделирование эволюции начального распределения поля, имеющего форму точного решения уравнения Шредингера с кубической нелинейностью:

$$\psi(t=0, x) = \frac{q}{\operatorname{ch}[q(x - x_c)]},$$

где $q = \text{const}$, $x_c = (x_N - x_0)/2$ — координата центра масс распределения. Уравнение (2) решалось методом конечных разностей. Методика расчета описана в Приложении Б. В вычислительных экспериментах мы ограничились следующими значениями параметров:

$$\delta = -0.1, \quad \mu = -0.1, -0.2 - 0.5, \quad \nu = 0.$$

Численное решение УГЛ дало следующие результаты.

1. Случай $\beta = 0, \mu = 0, \epsilon \neq 0, \delta \neq 0, \nu = 0$. Как было установлено выше, в этом случае динамическая система (20), (21) может иметь лишь особую линию $u = 0$ и вырожденную седловую точку $(0, u_0)$, где $u_0 = -\delta/2\epsilon a_1$. Численное решение исходного УГЛ подтверждает этот вывод. При $\delta < 0$, $q < u_0$ амплитуда начального локализованного возбуждения с ростом t стремится к нулю, начальный импульс исчезает (преобладание диссипативных процессов). В случае $q > u_0$ амплитуда стремительно нарастает до тех пор, пока возможен счет (преобладание процессов накачки, антидиссипация) (ср. с рис. 1a).

При $\delta > 0$ динамическая система (20), (21) предсказывает дисперсионную динамику начального возбуждения — неограниченный рост ширины возбужденной области и ограниченность амплитуды (рис. 1б). На рис. 8 приведены результаты численного решения УГЛ при тех же значениях параметров, что на рис. 1б. Между обоими рисунками видна отличная корреляция: так же, как и на фазовом портрете, ширина возбужденной области растет, а максимальная амплитуда не превышает некоторой пороговой величины. Очевидно, что в силу особенностей огрубления, сложная регулярная структура возбужденной области не находит отражения на фазовом портрете. На рис. 8б приведено «фотоизображение» функции $|\psi(x, t)|$ (интенсивность света обратно пропорциональна амплитуде функции). Отчетливо вид-

на пространственно-временная регулярность структуры решения. Рябь при больших значениях t обусловлена влиянием границ. Амплитуда и фаза этого решения в фиксированный момент времени $t = 30$ приведены на рис. 9.

2. Случай $\beta = 0, \mu \neq 0, \epsilon \neq 0, \delta \neq 0, \nu = 0$. Для $\delta > 0$ результаты численного решения УГЛ вполне укладываются в ту картину динамики, которую дает качественный анализ системы (20), (21). Для $\delta < 0, \mu > 0$ (I, II квадранты плоскости параметров ϵ, μ , см. рис. 2) динамика начального условия также соответствует качественной теории. То же мы имеем для значений параметров из III квадранта. В IV четверти при $\epsilon = \sqrt{a_2 \delta \mu}/a_1$, в полном соответствии с качественной теорией, мы наблюдали долгоживущее локализованное решение солитонного типа, которое не разрушалось в течение всего времени счета. Амплитуда и фазовая функция этого солитона приведены на рис. 10. В области больших амплитуд фазовая функция близка к прямой линии, что соответствует опорной функции (8), не учитывющей фазовую модуляцию. Амплитуда солитона в точке максимума приблизительно равна 1.39 (ср. со значением $u_+ (= A^2) \approx 1.93$ для динамической системы). Интересно, что солитон при прямом численном решении УГЛ возникает в достаточно широком интервале значений ϵ (при $\delta = -0.1, \mu = -0.2$ этот интервал составлял $0.31 \div 1.79$), причем квадрат амплитуды солитона близок к значению u_+ (координате седловой точки фазового портрета). С ростом параметра ϵ при фиксированных δ и μ амплитуда и ширина такого солитона растут. Следует отметить связь между этими солитонами и характером поведения фазовых траекторий системы, описанным выше.

За пределами значения $\epsilon = 1.79$ динамика начального условия носит характер, предсказываемый качественной теорией (диссипативный для малых амплитуд и дисперсионный для больших, подобный тому, что приведен на рис. 8).

Согласно классификации [6], найденные солитоны представляют собой солитоны с фиксированной амплитудой, поскольку их амплитуда однозначно определяется параметрами исходного уравнения. Вместе с тем, область существования этих солитонов отлична от области существования солитонов с фиксированной амплитудой для полиномиального УГЛ пятой степени, аналитически найденных в названной работе. При $\beta = 0, \nu = 0$ последние существуют при $\epsilon = \pm 3\sqrt{3}$ и произвольном μ . Очевидный вывод состоит в том, что найденные в работе [6] солитоны с фиксированной амплитудой, а также со-

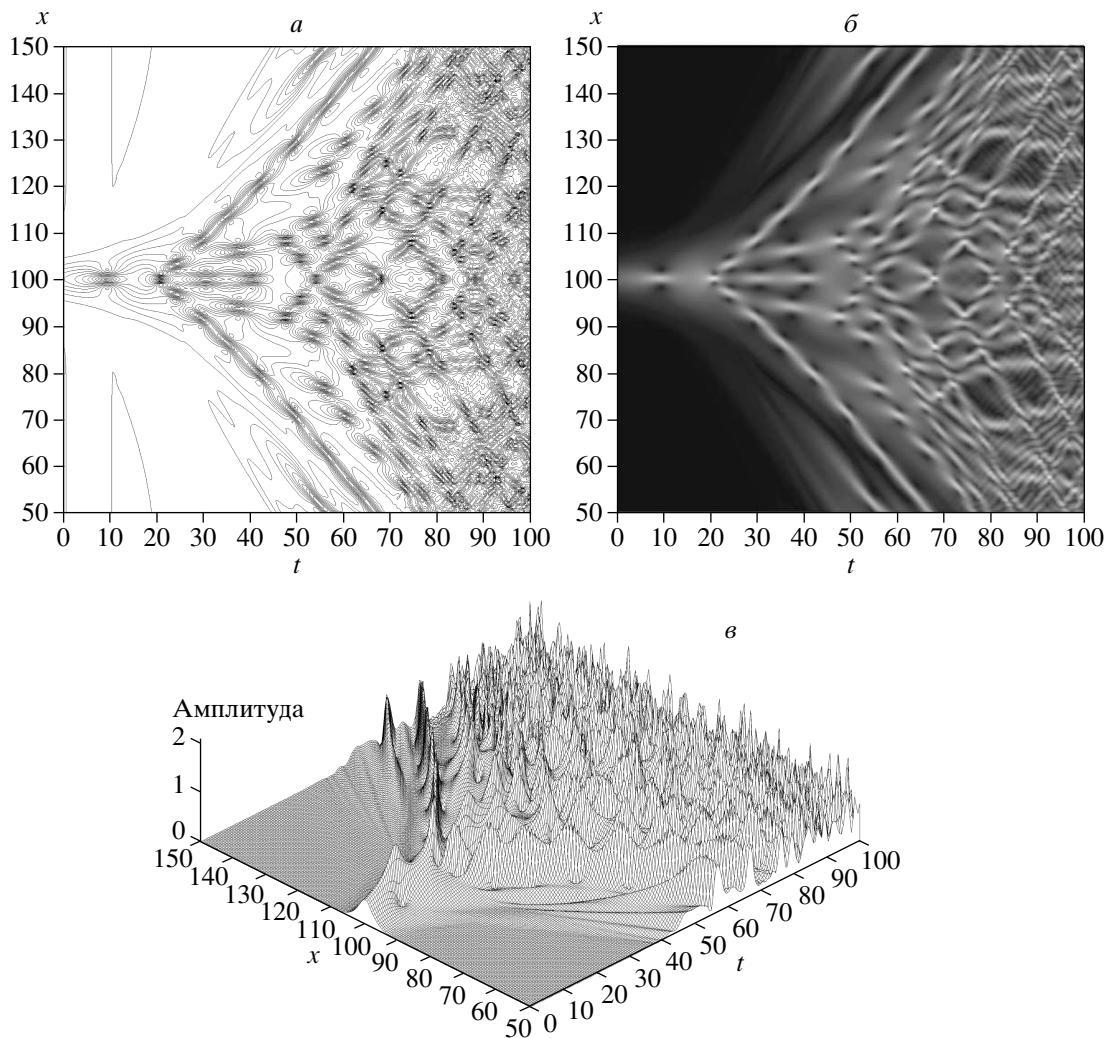


Рис. 8. Антидиссипативно-дисперсионная динамика первоначального распределения при $\delta = 0.1$, $\epsilon = -0.1$, $\mu = 0$, $\beta = 0$, $\nu = 0$; амплитуда начального условия в центре симметрии $|\psi(0, x_c)| = 0.5$: *a* — линии уровня функции $|\psi(t, x)|$; *б* — фотоизображение (интенсивность цвета в точке обратно пропорциональна $|\psi(t, x)|$); *в* — трехмерный вид поверхности $|\psi(t, x)|$

литоны с произвольной амплитудой при сделанных предположениях на вид пробной функции (8) не могут быть получены. Это естественно, поскольку их существенной особенностью является зависимость фазовой функции от переменной x (чирп).

3. Случай $\beta \neq 0$, $\mu = 0$, $\epsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\nu = 0$. Результаты прямого численного решения УГЛ и в этом случае находятся в соответствии с выводами качественного анализа: от солитона НУШ не ветвится никаких новых монофазных локализованных решений УГЛ. Динамика начального условия при $\delta < 0$ носит диссипативный либо антидиссипативный характер, при $\delta > 0$ дисперсионный либо антидисси-

павтивный и зависит от величины β и амплитуды начального условия согласно взаимному расположению линии солитонов НУШ и седла.

4. Случай $\beta \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\epsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\nu = 0$. И в этом общем случае выводы качественного анализа находятся в хорошем соответствии с результатами численного решения УГЛ. Во всем интервале значений от ϵ_1 до ϵ_{11} при $\delta = -0.1$, $\mu = -0.1$, -0.2 , -0.5 мы наблюдали формирование солитонного решения. На рис. 11 *a* показаны амплитуда и фаза солитонного решения УГЛ с параметрами $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.36$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.08$. На бифуркационной диаграмме рис. 5 *a* эти параметры соответствуют точке меж-

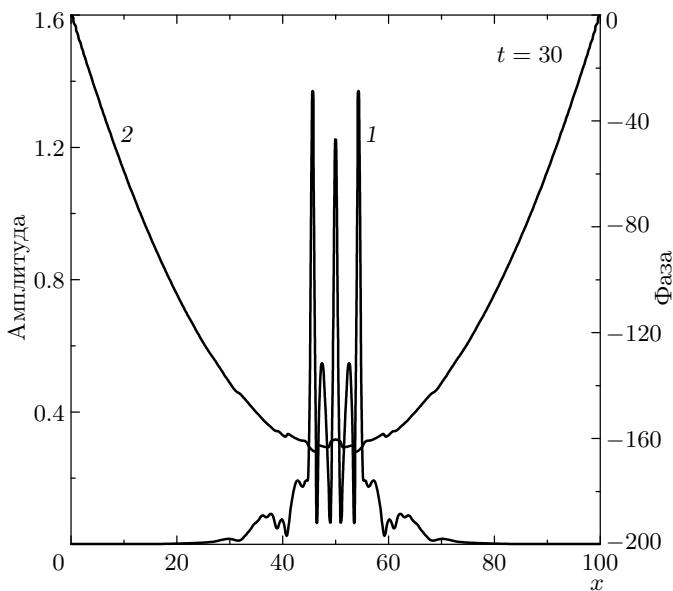


Рис. 9. Амплитуда 1 и фаза 2 функции $\psi(x, t)$ в момент времени $t = 30$. Параметры уравнения: $\delta = 0.1$, $\epsilon = -0.1$, $\mu = 0$, $\beta = 0$

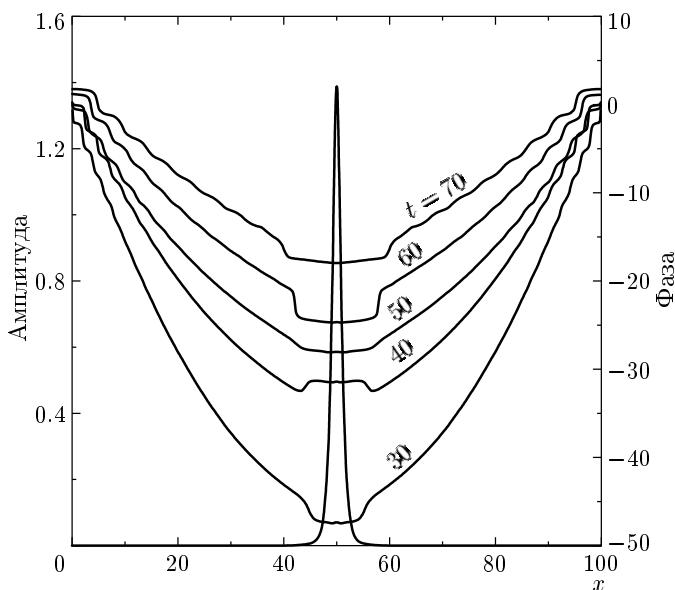


Рис. 10. Амплитуда и фаза солитона для отдельных значений переменной t при $\beta = 0$. Другие параметры уравнения $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.38722$, $\mu = -0.2$, $\nu = 0$

ду параболами I и II, где качественная теория указывает на существование устойчивого узла наряду с седловой особой точкой. Однако так же, как и в случае 2 ($\beta = 0$, $\mu \neq 0$), правая граница области существования солитонного решения лежит значи-

тельно правее величины ϵ_{II} , которую дает качественная теория. В наших расчетах при $\mu = -0.2$ она достигала 1, а при $\mu = -0.5$ величины 1.5. Следует заметить, что фазовые диаграммы при $\epsilon > \epsilon_{II}$ в окрестности линии II имеют такой же характер, как и в случае $\beta = 0$, а именно, крайне медленную динамику траекторий при приближении к сепаратрисе седла. Вместе с тем при прямом численном решении УГЛ с $\epsilon_{II} < \epsilon < \epsilon_{max}$ отчетливо видно, что фазовая функция даже в своей центральной части значительно уклоняется от прямой (рис. 11б). За пределами значений ϵ_{max} в наших расчетах мы наблюдали сложный нерегулярный характер динамики с расширением возбужденной области, но ограниченной амплитудой. Пример такой динамики при $\delta = -0.1$, $\epsilon = 1.01$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.015$ представлен на рис. 12. Развитие дисперсионной неустойчивости происходит достаточно быстро, и на более поздних стадиях бывает трудно выделить влияние, оказываемое границей области счета, однако в начальной стадии развития ее можно отнести к дисперсионному типу, характерному для динамики динамической системы с седловой особой точкой.

Далее при увеличении параметра ϵ динамика локализованного решения проходит ряд сложных модификаций. В конце концов при $\epsilon > 1.8$ мы наблюдали динамику двух расходящихся фронтов, которую также можно отнести к динамике дисперсионного типа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты работы.

- С использованием обобщенного метода моментов для уравнения Гинзбурга–Ландау построена динамическая система, описывающая динамику пяти параметров локализованного распределения поля — амплитуды, ширины, координаты центра масс, фазовой функции и волнового числа.

- Проведен качественный анализ динамической системы для симметричного распределения поля. Определены особые точки и особые линии системы, отвечающей данному случаю. Установлено, что без учета фазовой модуляции динамическая система не имеет периодических решений. Построены бифуркационные диаграммы и определены области существования неподвижных устойчивых солитонных решений. Построены характерные фазовые портреты.

- Установлена хорошая корреляция результатов качественного анализа динамической системы и пря-

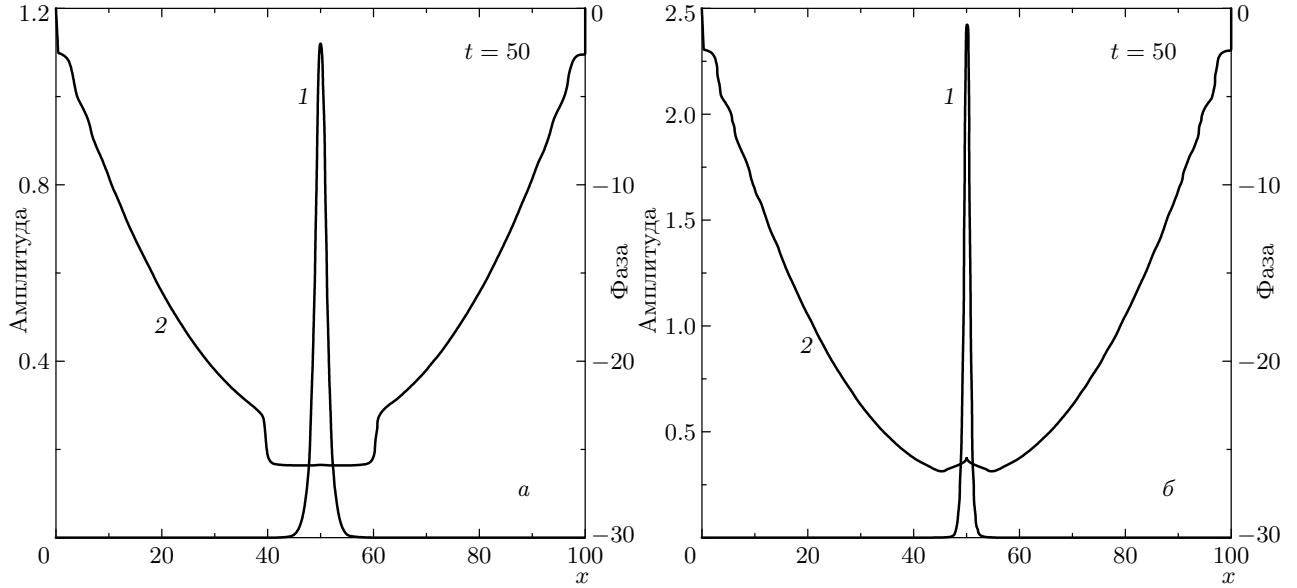


Рис. 11. Амплитуда и фаза устойчивого солитонного решения при $\beta \neq 0$ с различными параметрами: a — $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.36$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.08$ (до линии II); b — $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.99$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.08$ (после линии II)

мого решения УГЛ при одинаковых значениях внешних (физических) параметров.

4. Численным решением исходного уравнения УГЛ обнаружена новая ветвь солитонных решений уравнения, не совпадающих с известными монофазными решениями с фиксированной амплитудой, найденными аналитически в работе [6].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Анализ устойчивости особых точек по первому приближению

Характеристическое уравнение линеаризованной динамической системы (18), (19) имеет вид

$$\lambda^2 - C_{\pm} \lambda + D_{\pm} = 0, \quad (39)$$

где

$$C_{\pm} = \left. \left(\frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial Q_2}{\partial v} \right) \right|_{T_{\pm}(u_{\pm}, v_{\pm})},$$

$$D_{\pm} = \left. \left(\frac{\partial P_2}{\partial u} \frac{\partial Q_2}{\partial v} - \frac{\partial P_2}{\partial v} \frac{\partial Q_2}{\partial u} \right) \right|_{T_{\pm}(u_{\pm}, v_{\pm})}.$$

Дифференцирование выражений P_2 и Q_2 (см. (34), (35)) и учет того, что

$$11\mu u_{\pm}^2 + 15\epsilon u_{\pm} + 30\delta = 0, \quad v_{\pm} = \frac{2\beta}{u_{\pm}(\epsilon + \mu u_{\pm})},$$

приводит к следующим результатам:

$$C_{\pm} = -\frac{60}{11}(d\epsilon u_{\pm} + 16\delta), \quad (40)$$

$$D_{\pm} = -\frac{4b}{11\mu^2} \times \\ \times [(253\delta\mu - 30\epsilon^2)\epsilon u_{\pm} + 60(11\delta\mu - \epsilon^2)\delta]. \quad (41)$$

Оценим знак дискриминанта $\Omega = C_{\pm}^2 - 4D_{\pm}$ уравнения (39). После подстановки C_{\pm} , D_{\pm} и выделения квадратичной части (36), равной нулю, получаем

$$\Omega = \frac{16}{11^3 \mu} [G\epsilon u_{\pm} + H\delta], \quad (42)$$

где

$$G = 11d_1\delta\mu - 15d_2\epsilon^2, \quad H = 11d_0\delta\mu - 30d_2\epsilon^2,$$

$$d_0 = 15^2 \cdot 16^2 + 60 \cdot 11b, \quad d_1 = 15^2 \cdot 32d + 23 \cdot 11b,$$

$$d_2 = 15^2 d^2 + 2 \cdot 11b, \quad d = \frac{13}{3} + \frac{11}{\pi^2}, \quad b = \frac{4}{\pi^2}.$$

Выясним, возможно ли обращение в нуль дискриминанта Ω . Для этого подставим в выражение (42) значение u_{\pm} и избавимся от иррациональности. Получим, что обращение в нуль дискриминанта возможно при условии

$$d_0^2 + z(2d_1^2 - 4d_0d_2 - d_0d_1) + \\ + z^2(4d_2^2 + d_0d_1 - 2d_1d_2) = 0, \quad (43)$$

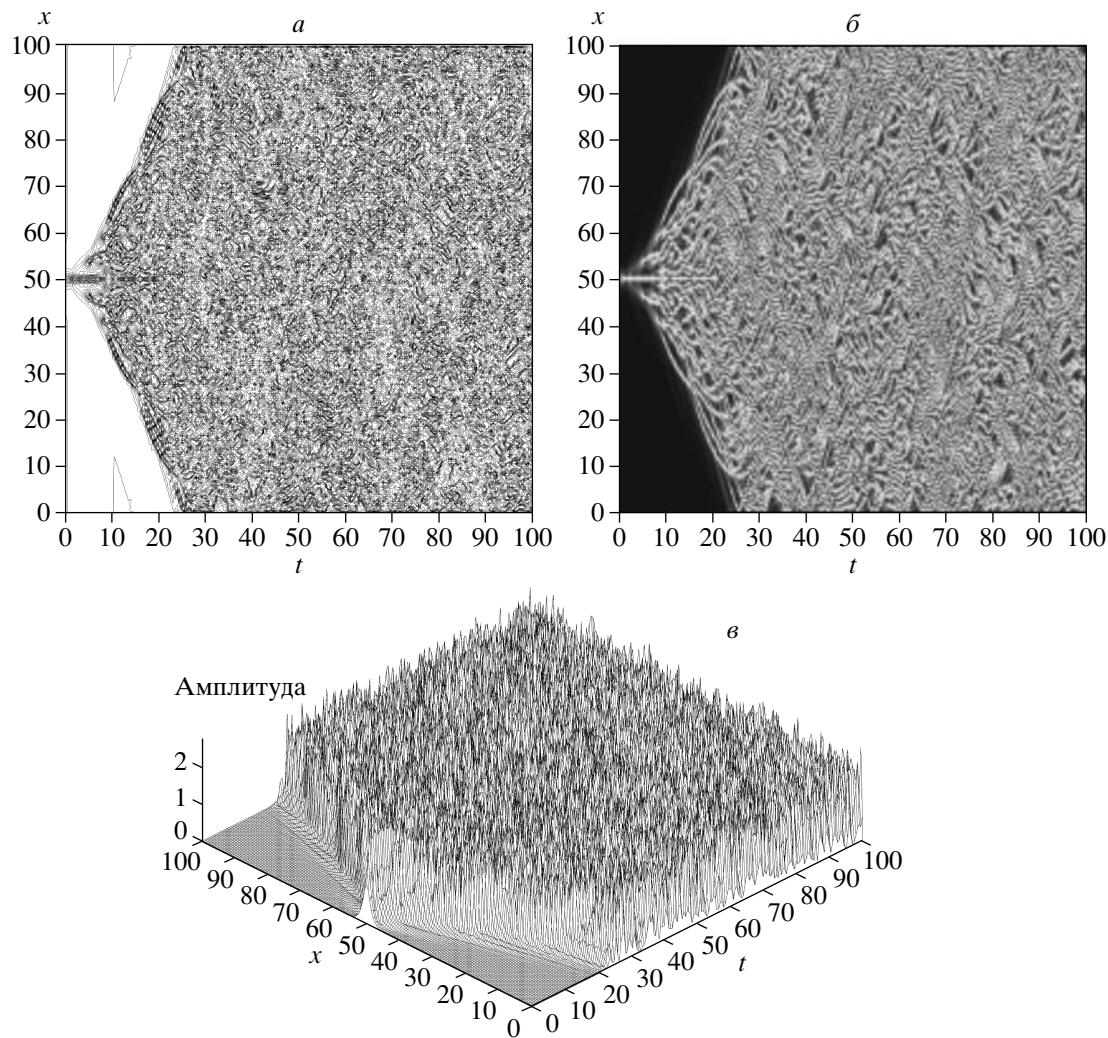


Рис. 12. Хаотическая дисперсионная динамика решения УГЛ: *а* — линии уровня функции $|\psi(x, t)|$; *б* — фотоизображение; *в* — рельеф поверхности. Параметры уравнения: $\delta = -0.1$, $\epsilon = 1.01$, $\mu = -0.2$, $\beta = 0.015$

где $z = 15\epsilon^2/11\delta\mu$. Дискриминант последнего уравнения отрицателен. Поскольку коэффициент при z^2 положителен, квадратный трехчлен в левой части принимает только положительные значения. Это значит, что дискриминант Ω характеристического уравнения (39) как непрерывная функция не меняет знака при всех допустимых значениях δ, ϵ, μ , поэтому достаточно определить этот знак в одной какой-нибудь точке. Этот знак положителен. Последнее означает, что характеристические числа λ особых точек T_{\pm} действительны и, следовательно, в динамической системе (18), (19) возможны особые точки только типа седло и узел.

Перейдем к определению знаков собственных чисел λ . Для этого оценим знак свободного члена D_{\pm}

в характеристическом уравнении (39). Опуская промежуточные выкладки, воспользуемся следующим представлением этого коэффициента:

$$D_{\pm} = \frac{4b\beta}{v_{\pm}}(\epsilon u_{\pm} + 4\delta). \quad (44)$$

Поскольку b — положительная константа, а v_{\pm} всегда положительно, при фиксированном β знак D_{\pm} зависит от знака выражения в скобках. Путем прямой подстановки выражения для u_{\pm} получаем, что поверхностью смены знака коэффициента D_{\pm} является поверхность

$$15\epsilon^2 - 88\delta\mu = 0,$$

которая совпадает с поверхностью, разделяющей область существования и отсутствия точек покоя (см.

разд. 3.2). Таким образом, во всей области существования корней u_{\pm} коэффициент D_{\pm} имеет один и тот же знак. Так же, как и выше, для его определения достаточно знать знак в одной какой-либо точке из области допустимых параметров. Повсюду на плоскости $\epsilon\mu$ этот знак отрицателен, за исключение узкой щели между параболами I и II (см. рис. 5), где, наряду с отрицательным, существует и второе, положительное, значение D_{\pm} . Последнее означает, что во всей допустимой области существования точек покоя это точки седлового типа и, кроме того, при $\delta\mu < 0$ в щели между коническими поверхностями существует дополнительный узел. Причем в случае $\delta < 0, \beta > 0$ точка $T_+(v_+, u_+)$ является седлом ($D_+ < 0$), а точка $T_-(v_-, u_-)$ — узлом ($D_- > 0$). В случае $\delta > 0, \beta < 0$ точка $T_-(v_-, u_-)$ является седлом ($D_- < 0$), а точка $T_+(v_+, u_+)$ — узлом ($D_+ > 0$).

Характер устойчивости узла можно определить, анализируя знак коэффициента C_{\pm} (40):

$$-\frac{30}{11^2\mu}[d\epsilon(-15\epsilon \pm \Delta_2^{1/2}) + 16\delta\mu] \vee 0.$$

Элементарными эквивалентными преобразованиями вопрос сводится к анализу знака выражения

$$15d\epsilon^2(4 - 11d) - 32\delta\mu,$$

которое при $\delta\mu > 0$, очевидно, отрицательное. Таким образом, при $\mu < 0, \delta < 0, \beta > 0$ коэффициент C_- отрицателен, а при $\mu > 0, \delta > 0, \beta < 0$ коэффициент C_+ положителен, что означает устойчивость узла в первом случае и его неустойчивость во втором.

Следует заметить, что, как было сказано выше, на бифуркационной поверхности I рождения точек равновесия имеем $D_{\pm} = 0$, т. е. одно из собственных чисел λ равно нулю. Можно показать, что в этом вырожденном случае сложная точка покоя представляется собой точку типа седло–узел.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Алгоритм численного решения уравнения Гинзбурга–Ландау

Представим УГЛ в следующем общем виде:

$$\psi_t = s_0\psi_{xx} + (s_1 + s_2|\psi|^2 + s_3|\psi|^4)\psi, \quad (45)$$

где ψ — комплекснозначная функция, x, t — независимые переменные, s_0, s_1, s_2, s_3 — комплексные параметры. В обозначениях (2)

$$s_0 = \beta + i\sigma, \quad s_1 = \delta, \quad s_2 = \epsilon + i\eta, \quad s_3 = \mu + i\nu.$$

Для численного решения задачи была использована четырехточечная неявная разностная схема на равномерной сетке

$$\Omega_{h_t, h_x} = \{(t_j, x_i) | t_j = jh_t, j \geq 0; x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N\},$$

где h_t — шаг сетки по переменной t , h_x — шаг сетки по переменной x , j — индекс слоя сетки по переменной t , i — индекс точки на слое.

При построении разностной схемы был учтен квазилинейный характер исходного уравнения. При этом переход со старого слоя на новый осуществлялся методом последовательных приближений, а разностная аппроксимация уравнения (45) имела следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{(\psi_i^{j+1})_{k+1} - (\psi_i^j)_k}{h_t} = \\ = s_0 \frac{(\psi_{i-1}^{j+1})_{k+1} - 2(\psi_i^{j+1})_{k+1} + (\psi_{i+1}^{j+1})_{k+1}}{h_x^2} + \\ + (S_i^{j+1})_k. \end{aligned}$$

Здесь

$$(S_i^{j+1})_k = (s_1 + s_2|\psi_i^{j+1}|_k^2 + s_3|\psi_i^{j+1}|_k^4)(\psi_i^{j+1})_k,$$

k — номер итерации при расчете нового, $(j+1)$ -го слоя ($0 \leq k \leq K$), причем $(\psi_i^{j+1})_0$ принимается равным $(\psi_i^j)_K$.

Поскольку исходная задача формулируется как задача с дополнительными условиями на бесконечности, как обычно в таких случаях, аппроксимация уравнения на границах окна счета приносит некоторые трудности. Общепризнано, что наилучшим выходом было бы задание асимптотик решения в граничных точках. Но поскольку известно, что решение исходного уравнения не единствено, такой подход в данном случае неприемлем. В наших предварительных расчетах были использованы как «жесткие», так и «мягкие» граничные условия, а также периодические граничные условия. При условии достаточно большого окна счета результаты мало отличались друг от друга. В настоящей работе представлены результаты, полученные при периодических граничных условиях, аналогично работе [7]. Полученная в итоге система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} A_0 \left(\psi_N^{j+1} \right)_{k+1} - C_0 \left(\psi_0^{j+1} \right)_{k+1} + \\ + B_0 \left(\psi_1^{j+1} \right)_{k+1} + F_0 = 0, \\ A_i \left(\psi_{i-1}^{j+1} \right)_{k+1} - C_i \left(\psi_i^{j+1} \right)_{k+1} + \\ + B_i \left(\psi_{i+1}^{j+1} \right)_{k+1} + F_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ \left(\psi_N^{j+1} \right)_{k+1} = \left(\psi_0^{j+1} \right)_{k+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{s_0}{h_x^2}, \quad C_i = \frac{2s_0}{h_x^2} + \frac{1}{h_t}, \\ B_i &= \frac{s_0}{h_x^2}, \quad F_i = \frac{1}{h_t} \left(\psi_i^j \right)_K + \left(S_i^{j+1} \right)_k. \end{aligned}$$

Эта система решалась методом циклической комплексной прогонки [8]. Построенная схема имеет порядок аппроксимации $O(h_t + h_x^2)$. Программа отлаживалась на известных точных решениях нелинейного уравнения Гинзбурга–Ландау: солитонах НУШ ($R \equiv 0$) и солитонах УГЛ постоянной и произвольной амплитуды [2]. Алгоритм показал свою работоспособность и надежность. Пользуясь данной техникой расчета, мы повторили результаты работы [3], которые были получены комбинацией метода расщепления и быстрого преобразования Фурье. Результаты, представленные в настоящей работе, получены при $h_t = 0.001$, $h_x = 0.05$. Число итераций при переходе со слоя на слой составляло $K = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики (точные решения)*, Физматлит, Москва (2002).
2. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны. Нелинейные пучки и импульсы*, Физматлит, Москва (2003).
3. J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, and A. Ankiewicz, Phys. Rev. Lett. **85**, 2937 (2000).
4. А. И. Маймистов, ЖЭТФ **104**, 3620 (1993).
5. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, Москва (1990).
6. N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, and J. M. Soto-Crespo, Phys. Rev. E **53**, 1190 (1996).
7. N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and G. Town, Phys. Rev. E **63**, 056602 (2001).
8. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва (1978).