

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ НЕОДНОРОДНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

*М. И. Рязанов, М. Н. Стриханов, А. А. Тищенко**

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2003 г.

Рассмотрено дифракционное излучение при равномерном движении заряда параллельно поверхности идеального проводника, на которой имеется слой диэлектрика переменной толщины, произвольно зависящей от координат. Рассмотрен частный случай слоя с периодически зависящей от одной координаты толщиной. Подробно проанализирована зависимость излучения от профиля отдельной неоднородности периодического слоя при произвольной энергии заряда.

PACS: 41.60.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, равномерно движущийся в вакууме параллельно плоской поверхности однородного вещества заряд излучает только при выполнении условий излучения Вавилова–Черенкова. Если же условия Вавилова–Черенкова не выполнены, то излучение не возникает, так как невозможна передача продольного (вдоль направления скорости) импульса. В случае неоднородной поверхности становится возможной передача продольного импульса неоднородностям вещества и возникает излучение, называемое обычно дифракционным [1]. Различные частные случаи такого излучения рассмотрены многими авторами [2–6], однако дифракционное излучение при равномерном движении заряда в вакууме параллельно поверхности однородного полубесконечного проводника с неоднородным слоем диэлектрика на его поверхности ранее не обсуждалось. Целью статьи является рассмотрение такого излучения для случая, когда излучение Вавилова–Черенкова отсутствует.

Все излучение связано с неоднородным слоем, так как в отсутствие слоя излучение не возникает. Граничные условия на поверхности металла удовлетворяются введением заряда-изображения [7, 8].

Поле вне проводника совпадает с суммарным полем двух равномерно движущихся в вакууме зарядов, реального заряда e и фиктивного заряда-изображения $-e$. Это поле поляризует неоднородный слой, и возникающие в слое поляризационные токи становятся источниками дифракционного излучения. Представляет интерес оценить зависимость интенсивности дифракционного излучения от характера неоднородностей поверхности слоя.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ТОК В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Обозначим через $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ поле, возникающее в полупространстве $x > 0$ при равномерном движении заряда e по закону $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$ параллельно поверхности $x = 0$ идеального проводника (вектор \mathbf{a} перпендикулярен поверхности среды). Это поле возбуждает в неоднородном слое поляризационные токи — источник дифракционного излучения. Пренебрегая взаимодействием токов, индуцированных в неоднородном слое полем пролетающей заряженной частицы, можно считать действующее на отдельную молекулу слоя поле равным $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$. Тогда в дипольном приближении фурье-образ поляризационного тока

*E-mail: altis2001@mail333.com

имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega n_{mic}(\mathbf{r})\alpha(\omega)\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega), \quad (1)$$

где $\alpha(\omega)$ — поляризуемость отдельной молекулы, $n_{mic}(\mathbf{r})$ — микроскопическая плотность числа молекул в слое.

Поле \mathbf{E}_0 находится с помощью метода изображений как сумма поля реального заряда e и поля фиктивного заряда-изображения $-e$, движущегося по закону $\mathbf{r} = -\mathbf{a} + \mathbf{v}t$. Выбрав ось z вдоль \mathbf{v} , а ось x вдоль \mathbf{a} , можно представить фурье-образ суммарного поля реального заряда и заряда-изображения в форме:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) = i \int d^3q \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\} \times \mathbf{E}_0(q_x, q_y)\delta(\omega - q_z\nu) \sin(q_x a), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_0(q_x, q_y) = \frac{ie}{\pi^2} \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{v} \frac{\omega}{\nu^2 \gamma^2}}{Q^2 + \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}\right)^2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\nu^2}{c^2}, \quad \mathbf{Q} = (q_x, q_y).$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega\alpha(\omega)}{(2\pi)^3} \int d^3q \mathbf{E}_0(q_x, q_y)\delta(\omega - q_z\nu) \times \sin(q_x a) \sum_a \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_a\}, \quad (4)$$

где суммирование проводится по всем молекулам слоя. Поле \mathbf{E}_0 не содержит поля излучения, так что дифракционное излучение создается поляризационным током в неоднородном слое (4). Распределение по углам и частотам энергии, излученной заданным током в вакууме, имеет вид

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = (2\pi)^6 \frac{1}{c} |\mathbf{k} \times \mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega)|^2, \quad (5)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$. Такое распределение справедливо для волн, дошедших до детектора без отражения от поверхности среды. При этом нужно учесть и те волны, которые дошли до детектора после отражения от поверхности среды.

Очевидно, что отраженные волны эквивалентны волнам, излученным поляризационным током молекул-изображений. Как в реальной молекуле излучают ускоренные внешним полем связанные электроны, так и в молекуле-изображении излучают изображения связанных электронов. Фурье-образ тока

молекул-изображений может быть найден из (4) путем замен: $X_a \rightarrow -X_a$, $j_x \rightarrow j_x$, $j_y \rightarrow -j_y$, $j_z \rightarrow -j_z$. Первая из этих замен дает зеркально-симметричное положение молекулы-изображения относительно поверхности проводника. Остальные замены связаны с применением метода изображений к связанным в молекуле электронам. Они отвечают изменению знака нормальной к поверхности компоненты скорости и знака зарядов, связанных в молекуле-изображении. Отсюда имеем

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega\alpha(\omega)}{(2\pi)^3} \times \int d^3q \mathbf{E}_0(q_x, q_y)\delta(\omega - q_z\nu) \sin(q_x a) \times \sum_a \exp\{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_a + 2i(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}_a)\}, \quad (6)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_x$. Полная энергия излучения в интервале частот $d\omega$ в элементе телесного угла $d\Omega$ с учетом отражения от поверхности проводника совпадает с распределением энергии излучения в вакууме от двух источников, (4) и (6):

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = (2\pi)^6 \frac{1}{c} |\mathbf{k} \times (\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega))|^2. \quad (7)$$

3. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ОТДЕЛЬНЫХ АДсорбированных атомов

Рассмотрим предельный случай слоя, состоящего из двух адатомов, расположенных в точках $\mathbf{R}_a = (d, 0, 0)$ и $\mathbf{R}_b = (d, 0, L)$ на расстоянии L друг от друга. Тогда фурье-образ плотности полного поляризационного тока представляет собой сумму двух слагаемых, относящихся к первому и второму адатомам, а спектрально-угловое распределение излученной энергии имеет вид

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{4\omega^2 |\alpha(\omega)|^2}{c\nu^2} \times \times 2 \left\{ 1 + \cos \left[L \left(\frac{\omega}{\nu} - k_z \right) \right] \right\} \cos^2(k_x d) |\mathbf{k} \times \mathbf{I}|^2, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \mathbf{E}_0(q_x, q_y) \sin(aq_x) \exp\{idq_x\}. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что различие между излученной в интервал $d\omega d\Omega$ энергией для одного и двух адатомов состоит в появлении дополнительного множителя $2\{1 + \cos[L(\omega/\nu - k_z)]\}$ в случае двух адатомов.

При $|\omega/\nu - k_z|L \ll 1$ в данную точку наблюдения от двух адатомов приходит четверо большая энергия, чем от одного адатома. Это связано с тем, что излученные каждым адатомом волны приходят в точку наблюдения с одинаковой фазой, так что поле удваивается, а энергия учетверяется. Заметим, что при $L = 2sl$, где $l = \pi/|\omega/\nu - k_z|$, а s — целое число, энергия дифракционного излучения от двух адатомов одинакова и четверо больше, чем от одного адатома. Однако, если $L = (2s + 1)l$, энергия дифракционного излучения в этом направлении равна нулю. Это объясняется тем, что излученные разными адатомами волны приходят в точку наблюдения в противофазе и погашают друг друга. Следовательно, если N адатомов лежат на линии, параллельной скорости частицы, внутри отрезка длиной $l \sim \pi/|\omega/\nu - k_z|$, то излученные каждым адатомом волны приходят в точку наблюдения с одинаковой фазой, из-за чего излученная энергия окажется в N^2 раз больше, чем в случае одного адатома. В пределе $|\omega/\nu - k_z|L \gg 1$ излученная энергия от двух адатомов вдвое больше, чем от одного, так как функция $\cos[L(\omega/\nu - k_z)]$ быстро осциллирует в интервале частот, давая пренебрежимо малый вклад в результат. Длина l , которая соответствует когерентному излучению всех находящихся на ней адатомов, называется обычно длиной когерентности. В случае ультрарелятивистских частиц, энергия которых $E \equiv \gamma mc^2 \gg mc^2$, излучение сосредоточено в области малых углов θ между \mathbf{n} и \mathbf{v} , так что длина когерентности

$$l = \frac{\pi}{|\omega/\nu - k_z|} \sim \frac{2\pi c}{\omega(\theta^2 + \gamma^{-2})} \quad (10)$$

и может иметь макроскопические размеры.

Для нахождения явного вида распределения дифракционного излучения от двух адатомов по частотам и углам вычислим интеграл (9). Этот интеграл можно выразить через модифицированные функции Бесселя нулевого (K_0) и первого (K_1) порядков:

$$\mathbf{I} = (I_x, 0, I_z),$$

$$\begin{aligned} I_x &= i \frac{e}{\pi} \frac{\omega}{\nu\gamma} \times \\ &\times \left[K_1 \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}(a-d) \right) + K_1 \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}(a+d) \right) \right], \\ I_z &= \frac{e}{\pi} \frac{\omega}{\nu\gamma^2} \times \\ &\times \left[K_0 \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}(a-d) \right) - K_0 \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}(a+d) \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для случая ультрарелятивистской частицы выполнено условие $I_x \gg I_z$. Поэтому

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{I}|^2 = k^2 I_x^2 (1 - n_x^2)$$

и распределение излученной энергии по углам и частотам при $\gamma \gg 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{8\omega^4 |\alpha(\omega)|^2}{c\beta^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \cos \left[L \left(\frac{\omega}{\nu} - k_z \right) \right] \right\} \cos^2(k_x d) \times \\ &\times (1 - n_x^2) \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\omega h}{\nu\gamma} K_1 \left(\frac{\omega h}{\nu\gamma} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\omega h}{\nu\gamma} K_1 \left(\frac{\omega}{\nu\gamma}(h + 2d) \right) \right\}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $h \equiv a - d$ — импакт-параметр, т. е. кратчайшее расстояние между траекторией заряда и молекулами. Отметим некоторые особенности полученного распределения.

Во-первых, выражение в фигурных скобках имеет порядок единицы при $\omega h < \nu\gamma$ и быстро обращается в нуль при $\omega h > \nu\gamma$. Поэтому излученная энергия обратно пропорциональна квадрату прицельного параметра h при $h < \nu\gamma/\omega$ и стремится к нулю по экспоненциальному закону при $h > \nu\gamma/\omega$.

Во-вторых, излучение строго вперед ($n_z = 1$, $n_x = 0$) не обращается в нуль. Это связано с отличием от нуля нормальной к поверхности компоненты поляризации тока $j_x \propto I_x$.

В-третьих, величина энергии, излученной под некоторым фиксированным углом на фиксированной частоте, осциллирует в зависимости от d — расстояния от молекул до поверхности проводника. Эти осцилляции являются результатом интерференции полей излучения реальных молекул и молекул-изображений.

4. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ

Рассмотрим теперь дифракционное излучение от неоднородного слоя на поверхности полубесконечного проводника. Пусть известна зависимость средней плотности числа электронов проводимости в слое от координат, $n(\mathbf{r})$. В макроскопической электродинамике фурье-образы токов $\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega)$ в (7) можно заменить их средними значениями $\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) \rangle$ и $\langle \mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) \rangle &= \alpha(\omega) \int d^3 q \mathbf{E}_0(q_x, q_y) \times \\ &\times \delta(\omega - q_z \nu) \sin(aq_x) n(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ \langle \mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) \rangle &= \alpha(\omega) \int d^3 q \mathbf{E}_0(q_x, q_y) \times \\ &\times \delta(\omega - q_z \nu) \sin(aq_x) n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введен фурье-образ плотности числа молекул:

$$n(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} n(\mathbf{r}) \exp\{-i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})\}.$$

Таким образом, распределение излученной энергии по углам и частотам может быть записано в виде

$$\frac{d^2E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{c} |\alpha(\omega)|^2 |\mathbf{k} \times \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)|^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$ определено как

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^3 \int d^3q \mathbf{E}_0(q_x, q_y) \sin(aq_x) \times \\ \times \delta(\omega - q_z \nu) \{n(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + n(\mathbf{k} - \mathbf{q} - 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}))\}. \quad (15)$$

Полученное распределение излучения (14) справедливо при произвольной зависимости плотности числа молекул в слое от координат.

Рассмотрим для примера случай одномерно-неоднородного слоя. Пусть профиль слоя описывается функцией $g(z)$. Средняя плотность числа молекул находится путем усреднения микроскопической плотности по координатам всех молекул слоя (n — средняя плотность числа молекул в слое):

$$n(\mathbf{r}) = \langle n^{mic}(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \sum_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_b) \right\rangle = \\ = n \int_{-\infty}^{\infty} dY_b \int_{-\infty}^{\infty} dZ_b \int_0^{g(Z_b)} dX_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_b). \quad (16)$$

Взяв фурье-образ от (16) и подставив результат в (15), можно получить

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4en}{\nu} \frac{\exp\{-a\eta\}}{\eta^2 + k_x^2} \times \\ \times \left(iG_1 \mathbf{e}_x - \frac{G_2}{\eta} \left(k_y \mathbf{e}_y + \frac{\omega}{\nu \gamma^2} \mathbf{e}_z \right) \right), \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\varphi \equiv \frac{\omega}{\nu} - k_z = k(\beta^{-1} - n_z), \quad (18)$$

$$\eta = \frac{\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2}, \quad (19)$$

$$G_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{iz\varphi\} \{ \eta \cos[k_x g(z)] \times \\ \times \text{sh}[\eta g(z)] + k_x \sin[k_x g(z)] \text{ch}[\eta g(z)] \}, \quad (20)$$

$$G_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{iz\varphi\} \{ \eta \cos[k_x g(z)] \times \\ \times \text{ch}[\eta g(z)] - \eta + k_x \sin[k_x g(z)] \text{sh}[\eta g(z)] \}.$$

Здесь G_1 и G_2 — факторы, определяемые профилем поверхности $g(z)$ диэлектрического слоя.

Рассмотрим для определенности частный случай ультрарелятивистского заряда $\gamma \gg 1$, не слишком малых углов излучения $n_x \gg \gamma^{-1}$ и тонкого слоя толщиной $g_{max}(z) = b \ll \gamma\omega/c$. Отметим, что излучение сосредоточено главным образом в плоскости $n_y = 0$ в области $n_y \leq \gamma^{-1}$ из-за множителя

$$\exp\left\{-\frac{a\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2}\right\}.$$

Для простоты далее рассмотрим только излучение в плоскости $n_y = 0$. В таком случае формула (17) существенно упрощается:

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{4en}{c} \mathbf{e}_x \exp\{-a\eta\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{iz\varphi\} g(z). \quad (21)$$

Подстановка (21) в (14) дает спектрально-угловое распределение энергии, излученной ультрарелятивистским зарядом при его пролете над тонким неоднородным диэлектрическим слоем, находящимся на идеально проводящей подложке:

$$\frac{d^2E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} |4n\alpha(\omega)|^2 (1 - n_x^2) \exp\{-2a\eta\} \times \\ \times \left| \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{iz\varphi\} g(z) \right|^2. \quad (22)$$

Предположим теперь, что слой периодический. Тогда функция $g(z)$, описывающая профиль слоя, может быть разложена в ряд Фурье:

$$g(z) = \sum_m g_m \exp\left\{iz \frac{2\pi}{p} m\right\}, \quad (23)$$

где p — период слоя, а коэффициенты g_m определяются формой отдельной неоднородности. В таком случае интеграл, входящий в (22), может быть преобразован к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{iz\varphi\} \sum_m g_m \exp\left\{iz \frac{2\pi}{p} m\right\} = \\ = 2\pi \sum_m g_m \delta\left(\frac{\omega}{\nu} - k_z + \frac{2\pi}{p} m\right). \quad (24)$$

Наличие суммы дельта-функций означает возникновение в спектре резких линий на частотах, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{m\lambda}{p} = \beta^{-1} - n_z, \quad m = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Физически соотношение (25) возникает из-за того, что пролетающий заряд может передать периодически неоднородной среде только дискретный импульс. Дифракционное излучение, возникающее из-за периодичности среды, рядом с которой пролетает быстрая заряженная частица, будем для краткости называть резонансным [6].

Для $m = 1$ из (25) следует известное соотношение Смита–Парселла. При фиксированных периоде p и длине волны λ дифракционный порядок ограничен двойным неравенством:

$$\frac{p}{\lambda}(\beta^{-1} - 1) \leq m \leq \frac{p}{\lambda}(1 + \beta^{-1}). \quad (26)$$

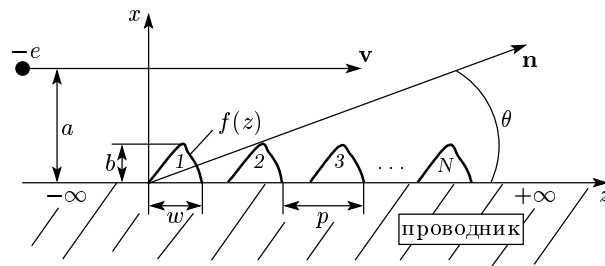
Например, при $p = 0.833$ мкм, $\lambda = 0.360$ мкм, $\gamma = 1673$ получается $m = 1, 2, 3$, и, соответственно, $\theta = 55.4^\circ, 82.2^\circ, 107.3^\circ$. Излучение Смита–Парселла для таких параметров недавно наблюдалось группой немецких физиков на микротроне МАМІ [9]. Они использовали периодически деформированную поверхность (glass BK7) с напыленным тонким (~ 0.7 мкм) слоем металла (алюминий).

Отсюда видно, что углы, под которыми распространяется резонансное излучение, вообще говоря, велики. При $\gamma \gg 1$ и $p < \lambda/2$ излучение под углами, определяемыми соотношением (25), подавлено, поскольку не существует m , удовлетворяющего соотношению (26).

Как видно из (26), резонансное излучение может генерироваться заряженными частицами любой энергии. Например, дифракционное излучение нерелятивистских электронов широко используется в СВЧ-электронике [10]. Спектр резонансного дифракционного излучения релятивистских заряженных частиц охватывает как оптический, так и миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны частот [11, 12].

5. ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ

Рассмотрим теперь частный случай поверхностного слоя в виде конечной дифракционной решетки на поверхности идеального проводника, занимающего полупространство $x < 0$ (см. рисунок). Пусть решетка однородна вдоль оси y , а ее профиль вдоль оси z состоит из N периодически расположенных зубцов. Период равен p , ширина отдельного зубца — w , а высота его определяется функцией $f(z)$. Средняя плотность числа молекул в зубцах одинакова и равна n .



Геометрия задачи. Дифракционная решетка состоит из N полос диэлектрика на проводящей подложке. Полосы параллельны оси y . В сечении плоскостью xz решетка имеет вид N зубцов. Профиль отдельного зубца описывается функцией $f(z)$. Заряд летит вдоль оси z

Средняя плотность числа молекул находится путем усреднения микроскопической плотности по координатам всех молекул слоя:

$$n(\mathbf{r}) = \langle n^{mic}(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \sum_{s=0}^{N-1} \sum_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_{bs}) \right\rangle = n \sum_{s=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dY_{bs} \int_0^w dZ_{bs} \int_0^{f(Z_{bs})} dX_{bs} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_{bs}).$$

Вектор $\mathbf{R}_s = \{0, 0, sp\}$ в аргументе дельта-функции учитывает периодичность расположения зубцов, число s нумерует зубцы. Отсюда

$$n(\mathbf{r}) = n \sum_{s=0}^{N-1} \xi(x, z - sp), \quad (27)$$

$$\xi(x, z - sp) = \int_0^w dz' \delta(z - sp - z') \int_0^{f(z')} dx' \delta(x - x'),$$

так что фурье-образ плотности молекул в слое имеет вид

$$n(\mathbf{q}) = n \delta(q_y) \xi(q_x, q_z) \sum_{s=0}^{N-1} \exp\{-ispq_z\}. \quad (28)$$

Подстановка (28) в (15) и интегрирование по q_z и q_y дает

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n}{\nu} \sum_{s=0}^{N-1} \exp\{-isp\varphi\} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \mathbf{E}_0(q_x, k_y) \times \times \sin(aq_x) [\xi(k_x - q_x, -\varphi) + \xi(-k_x - q_x, -\varphi)].$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} \{ \eta \cos [k_x f(z)] \operatorname{sh} [\eta f(z)] + \\
 &\quad + k_x \sin [k_x f(z)] \operatorname{ch} [\eta f(z)] \}, \\
 F_2 &= \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} \{ \eta \cos [k_x f(z)] \operatorname{ch} [\eta f(z)] - \\
 &\quad - \eta + k_x \sin [k_x f(z)] \operatorname{sh} [\eta f(z)] \},
 \end{aligned} \tag{29}$$

где φ и η определены, соответственно, формулами (18) и (19), можно привести выражение для \mathbf{J} к виду

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{4en}{\nu} \frac{\exp\{-a\eta\}}{\eta^2 + k_x^2} \times \\
 &\quad \times \left(iF_1 \mathbf{e}_x - \frac{F_2}{\eta} \left(k_y \mathbf{e}_y + \frac{\omega}{\nu \gamma^2} \mathbf{e}_z \right) \right) \times \\
 &\quad \times \sum_{s=0}^{N-1} \exp\{isp\varphi\}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь F_1 и F_2 — факторы, определяемые формой профиля отдельного зубца. Подстановка (30) в (14) дает

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{c} \frac{16\beta^2 n^2 |\alpha(\omega)|^2}{(1 - \beta^2 n_z^2)^2} \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \times \\
 &\quad \times \left| \mathbf{n} \times \left(iF_1 \mathbf{e}_x - F_2 \frac{\beta \gamma n_y \mathbf{e}_y + \gamma^{-1} \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2}} \right) \right|^2 \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{2a\omega}{c\beta\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Формула (31) описывает спектрально-угловую плотность излученной энергии в случае, когда на поверхности идеального проводника расположен диэлектрический периодически неоднородный слой. Энергия частицы при этом может быть любой. Свойства слоя характеризуются: 1) поляризуемостью отдельной молекулы $\alpha(\omega)$; 2) параметрами, определяющими геометрию отдельной неоднородности — зубца — шириной w , профилем $f(z)$; 3) параметрами, определяющими структуру всей решетки: периодом p решетки, количеством N зубцов.

Спектрально-угловые характеристики излучения (31) определяются двумя факторами. Первый — это множитель $(1 - \beta^2 n_z^2)^{-2}$, дающий в ультрарелятивистском случае максимум излучения вперед под малыми углами порядка γ^{-1} . Второй фактор — функция

$$\frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)}.$$

Эта функция имеет максимумы в точках $\varphi p = 2\pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, что дает условие, совпадающее с условием резонансного излучения (25). Вводя полярный угол θ посредством соотношения $n_z = \cos \theta$, получаем

$$m \frac{\lambda}{p} = \beta^{-1} - \cos \theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{32}$$

Угловая ширина отдельных пиков $\Delta\theta = \lambda/Np$. При $N \gg 1$ пики становятся резкими настолько, что отношение квадратов синусов может быть заменено суммой дельта-функций:

$$\frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \xrightarrow{N \gg 1} 2\pi N \sum_m \delta(\varphi p - 2\pi m), \tag{33}$$

что отвечает переходу к полубесконечному периодическому слою.

Теперь проанализируем отдельно нерелятивистский и ультрарелятивистский случаи.

6. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим нерелятивистскую частицу с $\beta \ll 1$. При этом энергия частицы должна быть много больше полных потерь на излучение, поскольку иначе нарушается предположение о постоянстве скорости частицы, сделанное выше. Из (19) видно, что в таком случае $\eta = \omega/c\beta \gg k_x$. Тогда мы имеем три параметра с размерностью длины: λ , $\beta\lambda$, $b = f_{max}(z)$. Выпишем возможные неравенства:

$$\beta\lambda \ll \lambda \ll b \leftrightarrow k_x f(z) \gg 1, \quad \eta f(z) \gg 1, \tag{34a}$$

$$\beta\lambda \ll b \ll \lambda \leftrightarrow k_x f(z) \ll 1, \quad \eta f(z) \gg 1, \tag{34б}$$

$$b \ll \beta\lambda \ll \lambda \leftrightarrow k_x f(z) \ll 1, \quad \eta f(z) \ll 1. \tag{34в}$$

Соответствующие выражения для факторов F_1 и F_2 из (29) имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_1 &\approx F_2 \approx \\
 &\approx \frac{\eta}{2} \int_0^w dz \exp\{iz\varphi + \eta f(z)\} \cos [k_x f(z)],
 \end{aligned} \tag{35a}$$

$$F_1 \approx F_2 \approx \frac{\eta}{2} \int_0^w dz \exp\{iz\varphi + \eta f(z)\}, \tag{35б}$$

$$F_2 \ll F_1 \approx \eta^2 \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} f(z). \tag{35в}$$

В последнем случае (35в) спектрально-угловое распределение излученной энергии имеет вид

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} n^2 |\alpha(\omega)|^2 (1 - n_x^2) \times \left| \frac{4\omega^2}{\beta c^2} \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} f(z) \right|^2 \times \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \exp\left\{-\frac{2a\omega}{c\beta}\right\}. \quad (36)$$

Вместо отдельного рассмотрения случаев (26а) или (26б) удобнее проанализировать более общее неравенство, не делая предположений о величине $k_x b$:

$$\eta b \gg 1. \quad (37)$$

Здесь вместо (35а) и (35б) имеем

$$F_1 \approx F_2 \approx F = \frac{\eta}{2} \int_0^w dz \exp\{iz\varphi + \eta f(z)\} \cos[k_x f(z)]. \quad (38)$$

Рассмотрим (38) подробнее. Подынтегральная функция $\exp\{\eta f(z)\}$ при положительных значениях аргумента растет с ростом $f(z)$, поэтому при выполнении (37) имеем

$$|F| = \left| \frac{\eta}{2} \int_0^w dz \exp\{iz\varphi + \eta f(z)\} \cos[k_x f(z)] \right| \leq \frac{\eta}{2} \exp\{\eta f_{max}\} \left| \cos(k_x f_{max}) \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} \right| = \frac{\eta}{\varphi} \exp\{\eta b\} \left| \cos(k_x b) \sin \frac{w\varphi}{2} \right|. \quad (39)$$

Отсюда видно, что при заданных ширине w и высоте b зубца излучение максимально для зубцов прямоугольной формы, когда $f(z) = b$. В этом случае излучение для (38) описывается формулой

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \left(\frac{4\beta\eta}{\varphi} \right)^2 n^2 |\alpha(\omega)|^2 (1 + n_y^2) \cos^2(k_x b) \times \sin^2 \frac{w\varphi}{2} \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\beta}\right\}, \quad (40)$$

где $h \equiv a - b$ — кратчайшее расстояние между излучающим веществом и траекторией пролетающей заряженной частицы, так называемый импакт-параметр.

Можно оценить интеграл (39) при довольно общих предположениях о явном виде $f(z)$. Для этого воспользуемся методом Лапласа. Предположим, что функция $f(z)$ имеет один максимум в некоторой внутренней точке z_0 интервала $(0, w)$, так что $f(z_0) = f_{max} = b$. Основной вклад в интеграл (38) в силу (37) и неравенства $\eta \gg k$ вносит узкая область значений вблизи $z = z_0$. Осциллирующие члены ведут себя достаточно плавно вблизи точки $z = z_0$, так что их можно вынести за знак интеграла. Раскладывая $f(z)$ в ряд и удерживая только квадратичный по z член разложения, получаем

$$F \approx \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\eta |f''(z_0)|}} \exp\{iz_0\varphi\} \exp\{\eta b\} \cos(k_x b). \quad (41)$$

Спектрально-угловое распределение излучения имеет вид

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{8\pi\omega\beta}{c |f''(z_0)|} n^2 |\alpha(\omega)|^2 (1 + n_y^2) \times \cos^2(k_x b) \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\beta}\right\}. \quad (42)$$

Для случая (34а) здесь следует заменить квадрат косинуса $\cos^2(k_x b)$ его средним значением $1/2$, а в случае (34б) — единицей. Формула (42) описывает дифракционное излучение от решетки с достаточно высокими зубцами, так что выполнено неравенство (37) $b \gg \beta\lambda$.

7. УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Теперь рассмотрим случай $\gamma \gg 1$. Как было отмечено выше, излучение сосредоточено главным образом в плоскости $n_y = 0$ в области $n_y \leq \gamma^{-1}$. Для простоты далее будем учитывать только излучение в плоскости $n_y = 0$.

Поскольку $iF_1 \mathbf{e}_x \gg F_2 \gamma^{-1} \mathbf{e}_z$, в ультрарелятивистском случае главную роль играет нормальная к поверхности компонента индуцированных токов. Из (31) при $n_y = 0$ и $\gamma \gg 1$ получаем

$$\frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} 16n^2 |\alpha(\omega)|^2 \times \frac{n_z^2 |F_1|^2}{(\gamma^{-2} + n_x^2)^2} \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \exp\left\{-\frac{2a\omega}{c\gamma}\right\}. \quad (43)$$

Фактор F_1 определен первой из формул (29) и зависит от явного вида функции $f(z)$, определяющей профиль отдельного зубца. Предположим, что профиль зубцов имеет форму прямоугольника высотой

b и шириной w . Тогда $f(z) = b$ и $|F_1|^2$ может быть легко вычислен. При $n_y = 0$ и $\gamma \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{c} \frac{16n^2 |\alpha(\omega)|^2 n_z^2}{(\gamma^{-2} + n_x^2)^2 (1 - \beta n_z)^2} \sin^2 \frac{\varphi w}{2} \times \\ &\times \frac{\sin^2(\varphi p N/2)}{\sin^2(\varphi p/2)} \exp\left\{-\frac{2h\omega}{c\gamma}\right\} \times \\ &\times \left\{ \gamma^{-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2b\omega}{c\gamma}\right) \right] \cos(bk_x) + \right. \\ &\left. + n_x \left[1 + \exp\left(-\frac{2b\omega}{c\gamma}\right) \right] \sin(bk_x) \right\}^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь, как и ранее, $h \equiv a - b$ — импакт-параметр, а $\varphi = (\omega/c)(\beta^{-1} - n_z)$.

Ограничимся далее рассмотрением только резонансного излучения. Как упоминалось выше, резонансное излучение распространяется под достаточно большими углами (по крайней мере, именно большие углы представляют экспериментальный интерес). Это позволяет считать, что $k_x \sim k \gg \eta$. Тогда из (29) видно, что фактор F_1 для зубцов произвольной формы может быть записан в виде

$$F_1 \approx k_x \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} \sin[k_x f(z)] \operatorname{ch}[\eta f(z)]. \quad (45)$$

Для тонких пластинок толщиной, меньшей длины волны, $b \ll \lambda$, выполнено неравенство

$$b \ll \lambda \ll \gamma\lambda \leftrightarrow \eta f(z) \ll k_x f(z) \ll 1. \quad (46)$$

Отсюда (45) принимает вид

$$F_1 \approx k_x^2 \int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} f(z). \quad (47)$$

Для пластинок толщиной, большей длины волны, можно считать выполненным условие $k_x f(z) \gg 1$. В силу условия $k_x \sim k \gg \eta$ прямо применять метод Лапласа здесь нельзя, поскольку в окрестности максимума функции $f(z)$ подынтегральная функция в (45) резко осциллирует. Представим синус в виде разности экспонент и применим метод перевала, т.е. сместим контур интегрирования в (45) в комплексную плоскость так, чтобы он проходил через точку z_+ (или z_-), седловую для функции $iz\varphi + ik_x f(z)$ (или, соответственно, $iz\varphi - ik_x f(z)$). При этом гиперболический косинус может быть вынесен за знак интеграла

в точке z_+ (или z_-) в силу неравенства $k_x \gg \eta$. Из (45) нетрудно получить

$$\begin{aligned} F_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_x}{2i} \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\eta f(z_+)]}{\sqrt{|g_+|}} \exp\{i\xi_+\} \times \right. \\ \times \exp\{iz_+\varphi + ik_x f(z_+)\} - \frac{\operatorname{ch}[\eta f(z_-)]}{\sqrt{|g_-|}} \times \\ \left. \times \exp\{i\xi_-\} \exp\{iz_-\varphi - ik_x f(z_-)\} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь седловые точки z_+ и z_- определяются уравнением

$$k_x f'(z_{\pm}) \pm \varphi = 0. \quad (49)$$

Параметры g_{\pm} и ξ_{\pm} можно найти из уравнений

$$\begin{aligned} \pm ik_x f''(z_{\pm}) &= g_{\pm} \exp\{i\psi_{\pm}\}, \\ \cos(2\xi_{\pm} + \psi_{\pm}) &= -1. \end{aligned} \quad (50)$$

При получении (49) предположено, что функция $f(z)$ имеет максимум во внутренней точке интервала $(0, w)$ и $f''(z_{\pm}) \neq 0$.

Отметим, что отличие седловых точек z_{\pm} от точки z_0 — точки максимума функции $f(z)$ (т.е. точки, где $f'(z_0) = 0$) — приводит к тому, что фактор F_1 , найденный по формуле (49), зависит от значений $f(z_-)$ и $f(z_+)$, а не от $f(z_0) = f_{max} = b$. Физически это означает, что наибольший вклад в излучение дается не вершиной зубцов, а какими-то другими точками. Это может привести к ослаблению излучения, поскольку любые точки зубца лежат дальше от траектории пролетающего заряда, чем вершина. Этот эффект будет заметен при выполнении условия $|z_{\pm} - z_0| \geq \gamma\lambda$, где $\gamma\lambda$ — характерный масштаб, на котором убывает собственное поле пролетающего заряда.

Рассмотрим для иллюстрации пример функции

$$f(z) = \frac{4bz}{w^2}(w - z).$$

Эта функция описывает зубец в форме параболы с вершиной в точке $(w/2, b)$. Из (49) находим седловые точки

$$z_{\pm} = \frac{w}{2} \left(1 \pm \frac{w\varphi}{2bk_x} \right) \quad (51)$$

и соответствующие значения функции $f(z_{\pm})$:

$$f(z_{\pm}) = f \equiv b \left[1 - \left(\frac{w\varphi}{2bk_x} \right)^2 \right]. \quad (52)$$

Из формул (50) имеем

$$\begin{aligned} g_{\pm} &= g \equiv \frac{8bk_x}{w^2}, \\ \xi_{\pm} &= \frac{1}{2} \left[\pi(2n + 1) \pm \frac{\pi}{2} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Подставляя (51)–(53) в (48), получаем

$$|F|_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2g}} \operatorname{ch}(\eta f) \left| k_x \sin \left(\frac{\varphi^2 w^2}{4bk_x} - \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad (54)$$

Отметим, что применимость (48) ограничена неравенствами $bk_x \gg 1$ и $k_x \gg \eta \approx (\gamma\lambda)^{-1}$. Из (43), (52) и (54) видно, что излучение зависит не от $\exp\{-2h\omega/c\gamma\}$, как в случае прямоугольных зубцов (см. (44)), а от

$$\exp \left\{ -\frac{2\omega}{c\gamma} \left(h + b \left(\frac{w\varphi}{2bk_x} \right)^2 \right) \right\}.$$

Однако для резонансного излучения $\varphi p = 2\pi m$, $m = 1, 2, \dots$ и

$$\frac{w\varphi}{2bk_x} = \frac{w\pi m}{pbk_x} \sim \frac{\pi}{bk_x} \ll 1$$

в силу условия $bk_x \gg 1$. Поэтому в рассмотренном примере точки z_+ , z_- весьма близки к z_0 и заметно ослабления излучения не происходит.

Приведем явный вид коэффициента F_1 , соответствующий треугольной форме зубцов для $f(z) = zb/w$. Вычисление интеграла (55) в пренебрежении членами $\eta = \omega/c\gamma \ll k_x$ дает следующее выражение для $|F_1|^2$:

$$|F_1|^2 = w^2 k_x^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\omega b}{c\gamma} \right) \left\{ \frac{1}{a_1^2} \sin^2 \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_2^2} \sin^2 \frac{a_2}{2} - \frac{1 + \cos(a_1 - a_2) - \cos a_1 - \cos a_2}{2a_1 a_2} \right\}, \quad (55)$$

где

$$a_1 = \frac{\omega}{c} [w(1 - \beta n_z) + bn_x],$$

$$a_2 = \frac{\omega}{c} [w(1 - \beta n_z) - bn_x].$$

Подставляя (55) в (43), можно получить спектрально-угловое распределение дифракционного излучения ультрарелятивистской частицы при треугольной форме зубцов.

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статье исследовано дифракционное излучение от неоднородного диэлектрического слоя, лежащего на идеально проводящей подложке. Для учета влияния подложки использован метод изображений. Формулы (29), (31) дают спектрально-угловую плотность излучения для дифракционной решетки с произвольным профилем $f(z)$ и равномерно движущегося заряда.

Для решетки с высотой отдельной неоднородности b , меньшей любых параметров задачи, как в нерелятивистском ($b \ll \beta\lambda$), так и в ультрарелятивистском случае ($b \ll \lambda$) зависимость спектрально-углового распределения излученной энергии от формы отдельной неоднородности — зубца — определяется фактором

$$\int_0^w dz \exp\{iz\varphi\} f(z)$$

(см. (47) и (36)).

Для достаточно толстых пластинок толщиной $b \gg \beta\lambda$ в нерелятивистском случае максимальное излучение достигается при прямоугольной форме зубцов. В ультрарелятивистском случае зависимость $f(z)$ от формы отдельной неоднородности сложнее и однозначный вывод о предпочтительной форме зубцов сделать сложно. Однако для прямоугольной формы зубцов распределение излучения (31) вычисляется наиболее просто. Например, ультрарелятивистский и нерелятивистский случаи излучения от пластинок прямоугольной формы описываются, соответственно, формулами (44) и (40).

Результаты получены в первом порядке по теории возмущений путем замены действующего поля суммой полей пролетающего заряда и заряда-изображения. Оценка поправок второго порядка по теории возмущений дает ограничения на область применимости полученных результатов:

$$|\varepsilon - 1| \ll 1, \quad b \gg \gamma\beta\lambda,$$

$$|\varepsilon - 1| \frac{b}{\gamma\beta\lambda} \ll 1, \quad b \ll \gamma\beta\lambda. \quad (56)$$

Таким образом, в области прозрачности диэлектрика, где $|\varepsilon - 1| \ll 1$, сделанное приближение описывает рассмотренное излучение с хорошей точностью при любой толщине слоя. При этом для достаточно тонкого слоя с $b \ll \gamma\beta\lambda$ область применимости расширяется с уменьшением толщины слоя b . Примененный метод впервые позволил учесть влияние подложки и проанализировать зависимость дифракционного излучения от формы профиля отдельных неоднородностей (решетки).

Макроскопическое усреднение, проведенное при получении (14), предполагает, что число молекул, содержащихся в отдельной неоднородности слоя, много больше единицы. Это ограничивает снизу размеры отдельной неоднородности. Область применимости полученных результатов ограничена также предположением об идеальной проводимости металли-

ческой подложки. Это ограничивает диапазон рассматриваемых частот сверху.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН **94**, 377 (1968).
2. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР **116**, 377 (1957); **124**, 1026 (1959).
3. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ДАН СССР **147**, 74 (1962).
4. J. H. Brownell, G. Doucas, and J. Walsh, Phys. Rev. E **57**, 1075 (1998).
5. A. P. Potylitsyn, Nucl. Instr. Meth. B **145**, 169 (1998).
6. A. P. Potylitsyn, Phys. Lett. A **238**, 112 (1998).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
8. В. Е. Пафомов, Изв. вузов. Радиофизика **10**, 240 (1967).
9. G. Kube, H. Baske, H. Euteneuer et al., Phys. Rev. E **65**, 056501 (2002).
10. В. П. Шестопапов, *Дифракционная электроника*, Изд-во ХГУ, Харьков (1976).
11. J. H. Brownell, J. Walsh, H. G. Kirk et al., Nucl. Instr. Meth. A **393**, 323 (1997).
12. Y. Shibata, S. Hasebe, K. Ishi et al., Phys. Rev. E **57**, 1061 (1998).