

ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СХЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Е. В. Подivilов, Б. И. Стурман**

*Международный институт нелинейных исследований,
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

*М. В. Горкунов***

*Университет г. Оснабрюк
D-49069, Оснабрюк, Германия*

Поступила в редакцию 24 октября 2003 г.

Использование определенных обратных связей в фоторефрактивных оптических схемах приводит к реализации периодических состояний и формированию пространственных дифракционных решеток с экстремально высокой и низкой эффективностями. Анализ этого сильно нелинейного явления проводился экспериментально и численно. Развита аналитический метод исследования периодических состояний с использованием симметрии уравнений динамической дифракции и свойства быстроты обратной связи. С помощью этого метода описаны свойства периодических состояний, включая их пространственную структуру, период и амплитуду осцилляций дифракционной эффективности и форму сильной фазовой модуляции, вносимой обратной связью.

PACS: 42.65.-k, 42.65.Hw, 42.65.Sf, 42.70.Nq

1. ВВЕДЕНИЕ

Фоторефрактивные волновые взаимодействия остаются предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований на протяжении последних двадцати лет [1–3]. Это связано с разнообразием и силой фоторефрактивных нелинейных эффектов, а также с потенциалом их применений в различных оптических устройствах [2, 4].

Фоторефрактивная нелинейность связана с разделением зарядов под действием света и изменением оптической диэлектрической проницаемости за счет линейного электрооптического эффекта [3]. насыщение коэффициентов усиления волн (на уровне 10^1 – 10^2 см⁻¹) достигается здесь часто уже в милливаттном диапазоне интенсивностей, когда фотоиндуцированный вклад в проводимость становится

доминирующим. Время нелинейного отклика уменьшается с ростом интенсивности; для экспериментов с непрерывным излучением оно варьируется от $\sim 10^2$ с до $\sim 10^{-3}$ с.

Среди наиболее известных оптических эффектов, связанных с фоторефрактивной нелинейностью, — пространственное усиление волн [5], фазовое сопряжение [6], оптическая генерация [7, 8], солитонное распространение [9], запись и фиксирование объемных решеток [10], нелинейное рассеяние [11]. В последние годы эффекты, связанные с совместным действием оптической и материальной нелинейностей, привлекают повышенное внимание. Это генерация пространственных субгармоник [12], критическое усиление нелинейного отклика [13], формирование сингулярностей пространственного заряда [14].

Управление нелинейно-оптическими свойствами посредством электронных обратных связей также приобрело важность в течение последних нескольких лет [15–20]. Принципиальная схема эксперимента представлена на рис. 1. Входная фаза сигнально-

*E-mail: sturman@iae.nsk.su

**Постоянный адрес: Институт кристаллографии Российской академии наук, 117333, Москва, Россия.

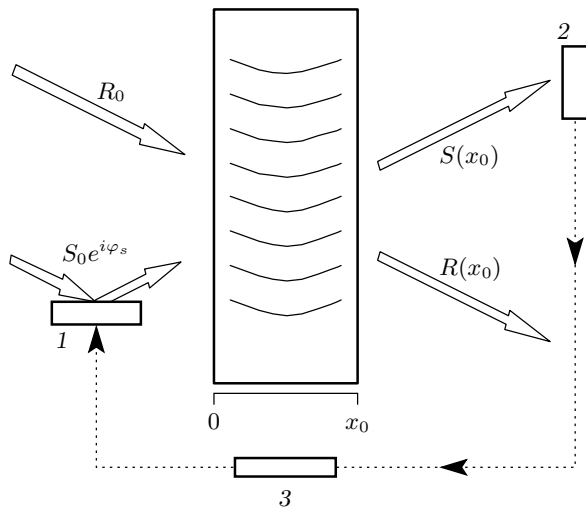


Рис. 1. Схема эксперимента по двухволновому взаимодействию, управляемому обратной связью; 1 — пьезозеркало, 2 — фотодетектор, 3 — электронный блок. Изогнутые линии изображают полосы пространственной решетки

го светового пучка, φ_s , связана определенным образом (детали даны ниже) с выходным значением его интенсивности. Это приводит к радикальному изменению характеристик двухволнового взаимодействия.

История вопроса следующая. Первоначальной целью введения обратной связи было устранение влияния флуктуаций разности входных фаз, т.е. флуктуаций интерференционной световой картины в нелинейной среде. Эксперимент показал, однако, что эффект обратной связи далеко выходит за рамки ожидаемого. В частности, обратная связь привела к тому, что наведенная решетка показателя преломления обладала 100 %-ной дифракционной эффективностью, а энергообмен между световыми пучками кардинально менялся [15–17]. Первоначальные попытки объяснения наблюдаемых данных на основе предположения о пространственной однородности формируемой решетки показателя преломления были несостоятельными. В то же время они несли в себе правильную идею о том, что обратная связь стремится установить фазовый сдвиг $\pm\pi/2$ между дифрагированной и недифрагированной компонентами сигнальной (S) волны на выходе из кристалла.

Формулировка уравнений, адекватно описывающих взаимодействие волн при $\pm\pi/2$ -обратной связи и включающих нелокальные граничные условия, была дана в работе [18]; там же было проведено прямое численное моделирование. Оказалось, что

идеальная $\pm\pi/2$ -обратная связь действительно обладает ярко выраженным максимизирующим действием. При разумных ограничениях на параметры нелинейного кристалла она делает (за конечное время) решетку показателя преломления, обладающей либо 100 %-ной, либо нулевой дифракционной эффективностью. Однако при достижении таких экстремальных состояний идеальная обратная связь теряет смысл. Иными словами, сформулированная идеальная модель оставалась корректной только на протяжении ограниченного интервала времени; за его пределами сформулированные уравнения не описывали перманентное функционирование реального устройства.

Далее было установлено [19], что инерция петли обратной связи является элементом, ответственным за перманентность функционирования системы; эта инерция существенна только вблизи экстремальных состояний. Как показало численное моделирование [19, 20], инерция приводит к тому, что в результате эволюции нелинейной системы достигается некоторое периодическое состояние (аттрактор), в котором входная фаза сигнального пучка $\varphi_s(t)$ испытывает сильные и быстрые периодические изменения, наложенные на медленный дрейф. Это поведение переносится на выходные характеристики световых пучков. Более того, численный эксперимент показал, что с изменением толщины кристалла и входного отношения интенсивностей волн могут происходить переходы между разными типами периодических состояний, различающихся формой и периодом осцилляций фазы $\varphi_s(t)$. Специально проведенные эксперименты подтвердили наличие и множественность периодических состояний [19].

Необходимо отметить, что описанная нелинейная проблема, имея очевидную связь с экспериментом и приложениями, является весьма нетривиальной по своей сути. Насколько можно судить, она не имеет близких аналогов среди известных нелинейных проблем. Ее специфическим свойством является нелокальность и нелинейность условия обратной связи, дополняющего нелинейную эволюционную систему уравнений для волн внутри кристалла. Наличие результатов, полученных прямыми численными вычислениями, не только не заменяет теорию, но и является стимулом к ее созданию.

Целью настоящей работы является развитие аналитического метода для описания взаимодействия волн, управляемого $\pm\pi/2$ -обратной связью, и демонстрация его эффективности для получения разнообразных результатов. Ключевым элементом теории является усреднение по быстрым осцилляциям фа-

зы [21]. Эта процедура использует единственный малый параметр системы — отношение времени реакции петли обратной связи ко времени нелинейного отклика, а также общие свойства симметрии нелинейных уравнений для волн.

При построении теории мы ограничиваемся рассмотрением локального нелинейного отклика — простейшего и наиболее важного для эксперимента. Это ограничение, однако, не является принципиальным. Полученные результаты могут быть обобщены на другие актуальные типы фоторефрактивной нелинейности (см., например, [1–3]). В более общем смысле эти результаты представляют интерес для сред, обладающих инерционным нелинейным откликом, например жидких кристаллов [22]. Именно инерционность нелинейности позволяет реализовывать различные обратные связи для выполнения различных полезных «оптических» функций. Максимизация и минимизация дифракционной эффективности пространственных решеток может рассматриваться как пример таких функций.

2. БАЗИСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Уравнения двухволнового взаимодействия

Исходную систему уравнений для амплитуд волн S и R и амплитуды поля пространственного заряда E , см. также рис. 1, мы запишем в следующем безразмерном виде

$$R_x = iES, \quad (1)$$

$$S_x = iE^*R, \quad (2)$$

$$E_t + E = RS^*. \quad (3)$$

Индексы x и t означают дифференцирование по безразмерным координате и времени. Координата x нормирована на характерную нелинейную длину, которая не зависит от интенсивности света, а t нормировано на время нелинейного отклика, которое обратно пропорционально суммарной интенсивности волн.

Уравнения (1), (2) следуют из уравнений Максвелла и описывают брэгговскую дифракцию волн R и S на решетке показателя преломления; отсутствие производных по времени связано с инерционностью нелинейности (свет адиабатически следует изменениям $E(t)$). Суммарная интенсивность волн сохраняется при распространении, $(|S|^2 + |R|^2)_x = 0$. Поскольку входные ($x = 0$) интенсивности не зависят от времени в рамках рассматриваемой задачи, суммарная интенсивность не зависит ни от x , ни от t .

Это позволяет нормировать R и S таким образом, что

$$|R(x, t)|^2 + |S(x, t)|^2 = 1.$$

Уравнение (3) описывает медленный процесс формирования пространственной решетки под действием света, оно выражает материальные свойства кристалла. Абсолютное значение произведения RS^* , входящего в правую часть (3), есть половинный контраст интерференционной световой картины. Отметим, что многие микромоделю фоторефрактивного отклика приводят к используемому материальному уравнению [3, 18].

Согласно (3), в стационарных условиях $E = RS^*$, т. е. максимумы статической решетки показателя преломления совпадают с максимумами интерференционной световой картины. Это и есть предполагаемое нами свойство локальности нелинейного отклика. В общем случае между указанными периодическими распределениями имеется пространственный сдвиг [3]. Его учет делает теорию громоздкой, он не актуален для имеющихся экспериментов.

2.2. Фундаментальные решения

Пространственная зависимость световых амплитуд R и S определяется двумя факторами — их входными значениями $R(0, t)$, $S(0, t)$ и профилем амплитуды решетки $E(x, t)$. Первый фактор характеризует условия считывания, второй — процесс записи. Другими словами, одна и та же решетка, записанная к моменту времени t , может считываться разными способами при быстром изменении входных значений. Это свойство отражает структуру уравнений (1)–(3): в первые два из них время входит как параметр через зависимость $E(x, t)$, а третье уравнение гарантирует малость изменения E на временах $t \ll 1$.

Для дальнейшего важно максимально разделить процессы записи и считывания. С этой целью мы сконцентрируемся вначале на свойствах уравнений (1), (2). Эти уравнения линейны и однородны по R , S . Их общее решение (при заданном $E(x)$) представимо в виде линейной комбинации двух независимых частных решений, образующих базис.

Выберем в качестве одного из частных решений (одного из векторов базиса) пару $R_F(x)$, $S_F(x)$, отвечающую входным значениям $R_F(0) = 1$, $S_F(0) = 0$. Это фундаментальное решение соответствует считыванию решетки R -пучком единичной амплитуды; поскольку амплитуда решетки меняется со временем, фундаментальные амплитуды зависят от t как от параметра. Далее легко убедиться, что пара

$R = -S_F^*(x)$, $S = R_F^*(x)$ также является решением (1), (2). Это второе частное решение соответствует считыванию решетки S -пучком единичной амплитуды. Оно линейно независимо от первого решения и может быть выбрано в качестве второго базисного вектора. То обстоятельство, что базис может быть сконструирован с помощью только двух фундаментальных амплитуд, $R_F(x)$ и $S_F(x)$, является выражением свойств симметрии системы (1), (2).

Таким образом, решение $R(x, t)$, $S(x, t)$ с граничными условиями $R_0(t)$, $S_0(t)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} R(x, t) &= R_F(x, t)R_0(t) - S_F^*(x, t)S_0(t), \\ S(x, t) &= S_F(x, t)R_0(t) + R_F^*(x, t)S_0(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Фундаментальные амплитуды $R_F(x, t)$ и $S_F(x, t)$ полностью характеризуют дифракционные свойства пространственной решетки. Соотношения (4) могут быть алгебраически разрешены относительно R_F , S_F . Иными словами, знание амплитуд $R(x, t)$, $S(x, t)$, отвечающих процессу записи решетки, легко позволяет вычислить фундаментальные решения. При этом следует помнить, что $|R_F(x, t)|^2 + |S_F(x, t)|^2 = 1$.

Необходимым элементом для формулировки условий обратной связи является разложение амплитуд R и S на прошедшую (T) и дифрагированную (D) части. Из уравнений (4), см. также рис. 1, видно, что вклад $R_F R_0$ в амплитуду R есть не что иное как прошедшая часть падающего R -пучка, в то время как вклад $-S_F^* S_0$ есть дифрагированная часть падающего S -пучка. Аналогично, $S_F R_0$ и $R_F^* S_0$ есть D - и T -вклады в амплитуду $S(x, t)$.

Укажем, наконец, что величина

$$\eta = |S_F(x_0, t)|^2 \equiv 1 - |R_F(x_0, t)|^2$$

представляет собой важную наблюдаемую характеристику решетки — ее дифракционную эффективность. В эксперименте она может быть определена кратковременным перекрытием одного из входных пучков (R или S) и вычислением отношения $|R(x_0, t)|^2/|S(0, t)|^2$ или $|S(x_0, t)|^2/|R(0, t)|^2$.

2.3. Условия обратной связи

В дальнейшем будем считать, что входная амплитуда R -волны постоянна, $R(0, t) = R_0 = \text{const}$, а входную амплитуду S -волны представим в виде $S(0, t) = S_0 \exp(i\varphi_s)$, где $S_0 = \text{const}$, а $\varphi_s = \varphi_s(t)$ — есть фаза, управляемая обратной связью. Зависимость этой фазы от времени и определяет наблюдаемые свойства системы. В качестве варьируемых параметров выступают безразмерная толщина

кристалла x_0 и входное отношение интенсивностей $r_0 = |R_0|^2/|S_0|^2$.

Разность фаз между дифрагированной, $S_F(x_0)R_0$, и прошедшей, $R_F^*(x_0)S_0 \exp(i\varphi_s)$, составляющими амплитуды S на выходе из кристалла имеет вид

$$\Phi_s = \arg [R_0 S_0^* R_F(x_0) S_F(x_0) \exp(-i\varphi_s)]. \quad (5)$$

Условия $\Phi_s = \pm\pi/2$ называются идеальными условиями обратной связи. Они могут быть удовлетворены надлежащим выбором входной фазы φ_s . Поскольку фундаментальные амплитуды $R_F(x_0)$, $S_F(x_0)$ алгебраически выражаются через $R(x_0)$ и $S(x_0)$, условия $\Phi_s = \pm\pi/2$ можно рассматривать как сложную нелинейную связь между φ_s и выходными амплитудами записывающих волн. Величина Φ_s определена только при $\eta \neq 0, 1$, когда величина $|S_F(x_0)R_F(x_0)| \equiv \sqrt{\eta(1-\eta)}$ не равна нулю.

В эксперименте обратная связь реализуется с помощью быстрой и слабой модуляции входной фазы $\delta\varphi_s = \psi_d \sin(\omega t)$, где $\psi_d \ll 1$, $\omega \gg 1$. Такие осцилляции φ_s не влияют на процесс записи и служат маркером T -компоненты сигнального пучка. Благодаря интерференции D - и T -компонент, выходная интенсивность $|S(x_0)|^2$ приобретает составляющую, осциллирующую на удвоенной частоте как $\cos(2\omega t)$; ее амплитуда

$$I_{2\omega} = \frac{1}{2} |R_0 S_0| \sqrt{\eta(1-\eta)} \psi_d^2 \cos \Phi_s.$$

Используя $\pm I_{2\omega}$ как сигнал ошибки, можно подстраивать входную фазу так, чтобы $\Phi_s = \pm\pi/2$. Этот метод действует до тех пор, пока произведение $\eta(1-\eta)$ не близко к нулю. Существенно, что наше описание обратной связи апеллирует лишь к общим свойствам фундаментальных амплитуд R_F и S_F ; решетка показателя преломления может при этом быть пространственно неоднородна.

Эксперимент показывает [15], что включение $+\pi/2$ -обратной связи приводит (при некоторых ограничениях на x_0 и r_0) к тому, что эффективность η достигает значений $\eta \approx 1$ и остается на этом уровне. Смена знака обратной связи обращает дифракционную эффективность решетки в нуль. С другой стороны, численное моделирование свидетельствует [18], что при включении идеальной обратной связи дифракционная эффективность достигает значений 1 или 0 за время $t \approx 1$. После этого использование условий $\Phi_s = \pm\pi/2$ теряет смысл. Таким образом, условия идеальной обратной связи применимы лишь к описанию начальной стадии эволюции системы.

Для описания ее перманентного действия они должны быть модифицированы.

В работе [19] предполагалось, что наличие инерции в петле обратной связи приводит к перманентному функционированию системы. Для учета этой инерции идеальные условия $\Phi_s = \pm\pi/2$ были заменены динамическим соотношением:

$$\dot{\varphi}_s = \mp t_f^{-1} |R_0 S_0| \sqrt{\eta(1-\eta)} \cos \Phi_s, \quad (6)$$

где $t_f \ll 1$ — есть время реакции петли обратной связи, а точка означает взятие обыкновенной производной по времени. Смысл этого соотношения прост. До тех пор, пока коэффициент перед $\cos \Phi_s$ велик по сравнению с единицей, т.е. $\eta(1-\eta)$ не слишком близко к нулю, входная фаза φ_s быстро релаксирует к значению, обеспечивающему равенство $\dot{\Phi}_s \approx \text{const} - \dot{\varphi}_s \approx \pm\pi/2$. Соотношение (6) мало отличается здесь от условий идеальной обратной связи. С приближением значения $\eta(1-\eta)$ к нулю инерция становится существенной, а величина Φ_s может сильно отклоняться от идеальных значений $\pm\pi/2$.

Численное моделирование показало [19, 20], что использование (6) вместо идеальных условий $\Phi_s = \pm\pi/2$ приводит к перманентному функционированию системы. После достижения экстремального состояния дифракционная эффективность периодически осциллирует вблизи единицы или нуля, в то время как фазовый множитель $\exp(i\varphi_s)$ испытывает быстрые периодические изменения, наложенные на линейный дрейф,

$$\varphi_s = \Omega t + \varphi_p(t). \quad (7)$$

Кратная $2\pi/T$ часть Ω может быть включена в быстрый фазовый множитель $\exp(i\varphi_p)$. Отвечающие ему периодические осцилляции не малы и не гармоничны, их период T уменьшается с уменьшением t_f . Численные вычисления показали также, что при изменении толщины x_0 и отношения входных интенсивностей r_0 периодическое состояние (аттрактор) испытывает качественные изменения; они включают изменение расстройки Ω , периода T и формы «периодической» компоненты $\varphi_p(t)$.

Специально проведенные эксперименты по изменению фазы $\varphi_s(t)$ подтвердили основные предсказания теории [19]. Было показано также [20], что частотная характеристика используемой обратной связи хорошо согласуется с уравнением (6). Таким образом, инерционное условие обратной связи получило убедительное подтверждение. Время t_f было оценено как $t_f \sim 10^{-3}$.

3. МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Наличие быстрых, с периодом $T \ll 1$, осцилляций амплитуд дает возможность построить теорию возмущений, используя метод усреднения. В соответствии с соотношением (7) для входной фазы φ_s мы полагаем

$$R_F(x, t) = \bar{R}_F(x) + \tilde{R}_F(x, t), \quad (8)$$

$$S_F(x, t) = \exp(i\Omega t) [\bar{S}_F(x) + \tilde{S}_F(x, t)], \quad (9)$$

$$E(x, t) = \exp(-i\Omega t) [\bar{E}(x) + \tilde{E}(x, t)]. \quad (10)$$

Амплитуды $\bar{R}_F, \bar{S}_F, \bar{E}$ не зависят от времени, а амплитуды $\tilde{E}, \tilde{R}, \tilde{S}$ являются быстрыми T -периодическими функциями времени. Для записываемых амплитуд R и S справедливы аналогичные соотношения. Частотный сдвиг следует считать характеристикой медленных движений, $|\Omega| \lesssim 1$.

В силу инерционности записи быстрая компонента амплитуды решетки мала, $\tilde{E} \ll \bar{E}$. Поскольку фундаментальные амплитуды R_F и S_F характеризуют мгновенные дифракционные свойства решетки, они обладают тем же свойством, $\tilde{R}_F \ll \bar{R}_F, \tilde{S}_F \ll \bar{S}_F$. В то же самое время быстрые компоненты записываемых волн, \tilde{R} и \tilde{S} , не малы по сравнению с медленными, \bar{R} и \bar{S} , поскольку быстрые осцилляции входной амплитуды, $S(0, t) = S_0 \exp(i\varphi_s(t))$, мгновенно передаются в глубь кристалла при дифракции на статической (или квазистатической) решетке. Эти быстрые компоненты дают существенный вклад в \bar{E} , так как произведение $\tilde{R}\tilde{S}^*$, возникающее в правой части (3), имеет не малую постоянную составляющую.

В качестве первого шага теории возмущений мы получим замкнутую систему уравнений для медленных амплитуд. Выражая в (3) амплитуды R и S^* через R_F и S_F с помощью (4), пренебрегая малымя быстрыми составляющими фундаментальных амплитуд и выделяя медленную составляющую, получим:

$$\bar{E} = (1 - i\Omega)^{-1} \times \\ \times [W_0 \bar{R}_F \bar{S}_F^* + \varepsilon |R_0 S_0| (\bar{R}_F^2 - \bar{S}_F^{*2})], \quad (11)$$

где

$$W_0 = |R_0|^2 - |S_0|^2 \equiv \frac{r_0 - 1}{r_0 + 1}$$

— разность входных интенсивностей, $\varepsilon = \langle \exp(i\varphi_p(t)) \rangle$ — среднее по периоду T . Поскольку фаза φ_p определена с точностью до постоянной, $\arg \varepsilon$ может быть выбран из соображений удобства.

Наш выбор отвечает $\varepsilon = |\varepsilon|$. Допустимые значения параметра фазовой модуляции ε лежат в интервале от нуля до единицы; нижнее значение соответствует предельно сильному влиянию периодической фазовой модуляции, верхнее — отсутствию модуляции.

Дифференциальные уравнения для \bar{R}_F и \bar{S}_F отличаются от уравнений (1) и (2) для R и S только заменой E на \bar{E} . Они могут быть решены совместно с (11), см. следующий раздел. В результате мы получаем явные зависимости \bar{E} , \bar{R}_F и \bar{S}_F от координаты x при произвольных параметрах x_0 , r_0 , Ω , ε . Предельный случай $\varepsilon = 1$ соответствует при этом стационарному взаимодействию двух волн в отсутствие периодической модуляции и в присутствии частотной расстройки Ω .

Основное значение соотношений для средних амплитуд следующее. Наличие двух варьируемых действительных параметров, Ω и ε , позволяет удовлетворить комплексное соотношение $\bar{R}_F(x_0) = 0$ (или $\bar{S}_F(x_0) = 0$), т.е. реализовать периодическое состояние с $\eta = 1$ (или $\eta = 0$). В отсутствие периодической модуляции это невозможно. Таким образом, в первом порядке теории возмущений можно найти необходимые усредненные характеристики обратной связи, но нельзя полностью описать периодические состояния. Это становится возможным в следующем порядке теории возмущений. Немаловажно также, что медленная амплитуда \bar{E} , отвечающая $\eta = 1$ или $\eta = 0$, существенно зависит от координаты x . Это исключает использование модели пространственно-однородной решетки и является важным элементом обоснования теории.

Опишем схему вычислений во втором порядке теории возмущений. Для быстрой амплитуды решетки из (3), (8)–(10) следует уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_t = |R_0 S_0| [(\bar{R}_F^2 - \bar{S}_F^{*2})(\cos \varphi_p - \varepsilon) - \\ - i \sin \varphi_p (\bar{R}_F^2 + \bar{S}_F^{*2})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы пренебрегли членами, малыми по параметру T , и учли, что $\langle \cos \varphi_p \rangle = \varepsilon$, $\langle \sin \varphi_p \rangle = 0$. Пространственные и временные зависимости в правой части (12) (которая имеет смысл быстроосциллирующей вынуждающей силы) полностью разделены, что легко позволяет проинтегрировать это уравнение.

Быстрые компоненты фундаментальных амплитуд подчиняются линейной неоднородной системе уравнений, которая следует из (1), (2) и решается методом вариации постоянных. Ответ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}_F(x, t) = A(x, t) \bar{R}_F(x) - B(x, t) \bar{S}_F^*(x), \\ \tilde{S}_F(x, t) = A(x, t) \bar{S}_F(x) + B(x, t) \bar{R}_F^*(x), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, t) = 2i \int_0^x \text{Re}[\tilde{E}(x', t) \bar{R}_F^*(x') \bar{S}_F(x')] dx', \\ B(x, t) = i \int_0^x [\tilde{E}^*(x', t) \bar{R}_F^2(x') - \\ - \tilde{E}(x, t) \bar{S}_F^2(x')] dx'. \end{aligned} \quad (14)$$

Знание выходных значений $\tilde{R}_F(x_0, t)$ и $\tilde{S}_F(x_0, t)$ позволяет описать зависимость $\varphi_p(t)$, используя условия обратной связи, см. разд. 5. Тем самым, теория периодических состояний становится самосогласованной. Важным упрощающим обстоятельством является то, что $\bar{R}_F(x_0)$ или $\bar{S}_F(x_0)$ обращается в нуль в зависимости от знака обратной связи.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

4.1. Фундаментальные амплитуды \bar{R}_F и \bar{S}_F

В соответствии со сказанным выше медленные амплитуды $\bar{R}_F(x)$, $\bar{S}_F(x)$ подчиняются системе (1), (2) (в которой E заменено на \bar{E}) и отвечают граничным условиям $\bar{R}_F(0) = 1$, $\bar{S}_F(0) = 0$. Амплитуда решетки \bar{E} задается соотношением (11), она представляет квадратичную форму \bar{R}_F и \bar{S}_F^* .

Для нахождения \bar{R}_F и \bar{S}_F воспользуемся тем, что указанная система инвариантна относительно линейного унитарного преобразования

$$\begin{aligned} \bar{R}_F = Q_- \bar{R}_1 + Q_+^* \bar{S}_1^*, \\ \bar{S}_F^* = -Q_+ \bar{R}_1 + Q_-^* \bar{S}_1^* \end{aligned} \quad (15)$$

к новым амплитудам \bar{R}_1 , \bar{S}_1 . Комплексные параметры Q_{\pm} удовлетворяют при этом условию $|Q_+|^2 + |Q_-|^2 = 1$. Физическое свойство инвариантности выражает тот факт, что не одна, а множество пар волн (отвечающих разным граничным условиям) может быть связано через дифракцию на одной и той же решетке. Важным для нас свойством преобразования (15) является то, что квадратичная форма $\bar{E}(\bar{R}_F, \bar{S}_F^*)$ преобразуется к виду $\bar{E} \propto \bar{R}_1 \bar{S}_1^*$ при надлежащем выборе Q_{\pm} . Дифференциальные уравнения для \bar{R}_1 , \bar{S}_1 при этом легко решаются, поскольку они не отличаются по форме от уравнений, описывающих взаимодействие двух волн за счет фоторефрактивной нелинейности [2, 3]. Совершая обратное преобразование, мы получаем искомые соотношения для фундаментальных амплитуд.

Нашим целям отвечает следующий выбор:

$$Q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 \mp \frac{W_0}{g} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где, как и ранее, $W_0 = |R_0|^2 - |S_0|^2$, а

$$g = \sqrt{W_0^2 + \varepsilon^2(1 - W_0^2)} \quad (17)$$

— положительный параметр. Очевидно, что $g \geq |W_0|$, причем в отсутствие фазовой модуляции $g = 1$.

В новом представлении мы получаем для амплитуды решетки $\bar{E} = i\gamma\bar{R}_1\bar{S}_1^*$, где

$$\gamma = g(i + \Omega)^{-1} \quad (18)$$

имеет смысл комплексного инкремента пространственного усиления. Входные значения новых амплитуд есть $\bar{R}_1(0) = Q_-$, $\bar{S}_1(0) = Q_+$, зависимость \bar{R}_1 , \bar{S}_1 от координаты x задается выражениями

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= Q_- [Q_-^2 + Q_+^2 \exp(2\gamma'x)]^{-\gamma/2\gamma'}, \\ \bar{S}_1^* &= Q_+ [Q_+^2 + Q_-^2 \exp(-2\gamma'x)]^{-\gamma/2\gamma'}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно, искомые соотношения для \bar{R}_F и \bar{S}_F имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{R}_F &= \left[Q_-^2 \exp\left(-\frac{\gamma x}{2}\right) + Q_+^2 \exp\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \right] \times \\ &\times [Q_-^2 \exp(-\gamma'x) + Q_+^2 \exp(\gamma'x)]^{(i-\Omega)/2\Omega}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_F^* &= 2Q_+Q_- \operatorname{sh} \frac{\gamma x}{2} \times \\ &\times [Q_+^2 \exp(\gamma'x) + Q_-^2 \exp(-\gamma'x)]^{(i-\Omega)/2\Omega}. \end{aligned} \quad (21)$$

В общем случае \bar{R}_F и \bar{S}_F являются комплексными величинами; можно убедиться, что сумма квадратов их модулей равна единице. При $\varepsilon = 1$ соотношения (20), (21) задают фундаментальные амплитуды в отсутствие фазовой модуляции и в присутствии частотного сдвига Ω между падающими волнами.

4.2. Условия стопроцентной и нулевой дифракционной эффективности

Значения $\eta = |S_F(x_0)|^2$ и $1 - \eta = |R_F(x_0)|^2$ задают дифракционную эффективность решетки и ее коэффициент пропускания. Стопроцентной эффективности дифракции (т.е. нулевому пропусканию) отвечает условие $R_F(x_0) = 0$, в то время как условие нулевой дифракционной эффективности (полного пропускания) имеет вид $S_F(x_0) = 0$. Поскольку

соотношения (20), (21) для \bar{R}_F и \bar{S}_F^* включают два контролируемых обратной связью параметра, Ω и ε , значения $\eta = 1$ и $\eta = 0$ являются достижимыми в главном порядке теории возмущений.

Из соотношения (20) нетрудно найти, что условие $\bar{R}_F(x_0) = 0$ ($\eta \approx 1$) эквивалентно равенствам

$$x_0 = \frac{\pi^2 j^2 + L^2}{g\pi j}, \quad \Omega = -\frac{L}{\pi j}, \quad (22)$$

где

$$L = \ln \frac{g - W_0}{g + W_0},$$

а $j = 1, 3, \dots$ — положительное нечетное число. Поскольку $g = g(\varepsilon, W_0)$, первое из соотношений (22) дает последовательность ветвей для функции $\varepsilon_j(x_0, W_0)$, второе определяет частотную расстройку как функцию x_0 и W_0 для ветви с номером j . При этом функция ε — четна, а Ω — нечетна по W_0 . Рисунок 2а показывает зависимость ε от входного отношения интенсивностей $r_0 \equiv (1 + W_0)/(1 - W_0)$ (которое для представления более удобно, чем W_0) для ветви $j = 1$ и нескольких значений x_0 . Отметим, наконец, что актуальные значения $|\Omega|$ не превосходят 1.5.

В силу того что $\varepsilon \leq 1$, допустимые значения толщины x_0 ограничены снизу, а значения $|\ln r_0|$ — сверху. Полагая $\varepsilon = 1$ в (17), (22), мы получаем соотношение

$$x_0 = \pi j + \frac{\ln^2 r_0}{\pi j}. \quad (23)$$

Оно определяет границу области параметров x_0, r_0 , внутри которой $\eta = 1$. Минимально возможная толщина кристалла, $x_0^{min} = \pi$, отвечает $r_0 = 1$ и ветви $j = 1$. Для этой ветви $|\ln r_0|_{max} = \sqrt{\pi(x_0 - \pi)}$; допустимый диапазон отношения входных интенсивностей быстро расширяется с увеличением x_0 . Рисунок 3 показывает зависимость $x_0(r_0)$ для $j = 1, 3, 5$. Видно, что в широком диапазоне параметров, $\pi \leq x_0 \lesssim 12.5$ и $|\lg r_0| \lesssim 2$, ветвь $j = 1$ является нижней. Она представляет наибольший интерес.

Рассмотрим теперь условие $\bar{S}_F(x_0) = 0$ ($\eta \approx 0$). Как следует из (21), оно приводит к равенствам $\gamma' = 0$, $\gamma''x_0 = -\pi j'$, где $j' = 2, 4, \dots$, которые эквивалентны соотношениям

$$\varepsilon^2 = \frac{(\pi j'/x_0)^2 - W_0^2}{1 - W_0^2}, \quad \Omega = 0. \quad (24)$$

Минимально возможное значение толщины, $x_0^{min} = 2\pi$, отвечает $j' = 2$ и $W_0 = 0$ ($r_0 = 1$); оно вдвое

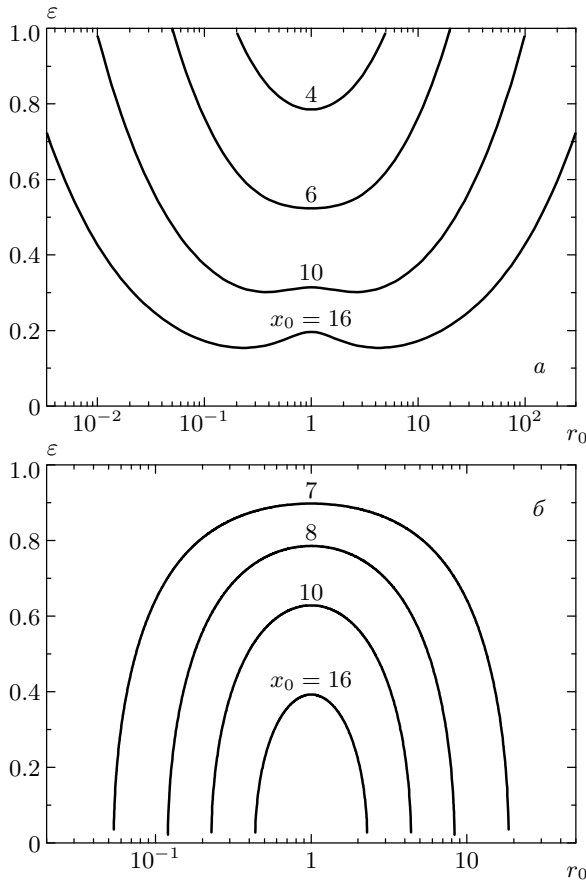


Рис. 2. Зависимость параметра фазовой модуляции ε от отношения входных интенсивностей $r_0 = |R(0)|^2/|S(0)|^2$ для разных значений толщины кристалла x_0 ; случаи $+\pi/2$ - (а) и $-\pi/2$ - (б) обратной связи

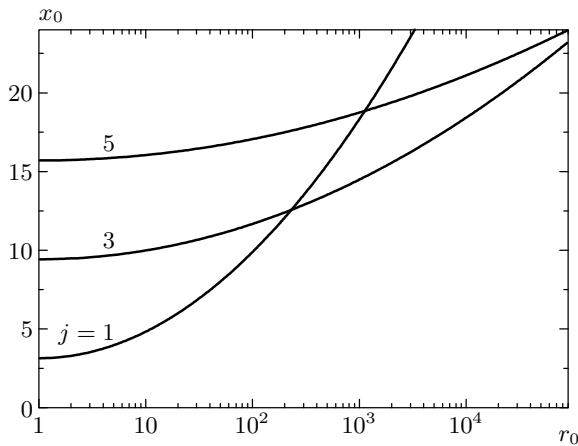


Рис. 3. Пороговые зависимости $x_0(r_0)$ для $+\pi/2$ - обратной связи и $j = 1, 3, 5$

выше предыдущего. Зависимость $\varepsilon(r_0)$ для $j' = 2$ и нескольких значений x_0 показана на рис. 2б. Будучи, как и ранее, четной, она отличается новыми свойствами. Значение ε убывает теперь не только с ростом x_0 , но и с ростом $|\lg r_0|$. Это приводит к снижению допустимого интервала значений r_0 с ростом толщины x_0 . Полагая $\varepsilon = 0$, мы получим для этого интервала неравенство $|W_0| \leq 2\pi/x_0$. Отметим, наконец, что условие $\bar{S}_F(x_0) = 0$ всегда выполняется при $\varepsilon = 0$, т.е. при нулевой амплитуде решетки. За пределами указанного выше интервала этот тривиальный случай единственно возможный.

Мнимость инкремента ($\gamma' = 0$) означает отсутствие энергообмена между световыми волнами и существенно упрощает выражения (20), (21) для \bar{R}_F, \bar{S}_F^* . Для $j' = 2$ они принимают вид

$$\bar{R}_F = \left(\cos \frac{\pi x}{x_0} + i \frac{W_0 x_0}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{x_0} \right) \exp \left(-\frac{iW_0 x}{2} \right),$$

$$\bar{S}_F^* = - \left[i \left(1 - \frac{W_0^2 x_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi x}{x_0} \right] \exp \left(-\frac{iW_0 x}{2} \right).$$

4.3. Пространственная зависимость амплитуды решетки

Используя соотношения (11), (20), (21), нетрудно найти, что

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon R_0 S_0}{1 - i\Omega} \left(\frac{\text{ch } \bar{a}}{\text{ch}(\gamma' x - \bar{a})} \right)^{1-i/\Omega}. \quad (25)$$

Параметр \bar{a} задан соотношением $W_0 = g \text{th } \bar{a}$; в зависимости от W_0 и x_0 он принимает как положительные, так и отрицательные значения. Введение параметра \bar{a} диктуется соображениями удобства. Коэффициент, стоящий перед скобками, равен $\bar{E}(0)$.

Условия (22) или (24) фиксируют параметры обратной связи Ω и ε (а вместе с ними и \bar{a}) и делают распределение $\bar{E}(x)$ зависящим лишь от параметров W_0 (или r_0) и x_0 для каждой ветви j или j' . Ниже мы ограничимся наиболее важными ветвями $j = 1$ и $j' = 2$. Заметим также, что действительные функции $|\bar{E}(x)|$ и $\arg[\bar{E}(x)]$ являются важными количественными и качественными характеристиками системы. Они описывают координатную зависимость амплитуды решетки и положение ее полос.

В случае $\eta = 1$ мы имеем из (22) следующие упрощающие соотношения: $\gamma' x_0 = -L = 2\bar{a}$, $\Omega = 2\bar{a}/\pi$. Равенство (25) при этом дает:

$$\left| \frac{\bar{E}(x)}{\bar{E}(0)} \right| = \frac{\text{ch } \bar{a}}{\text{ch}[\bar{a}(2xx_0^{-1} - 1)]}, \quad (26)$$

$$\arg \bar{E}(x) - \arg \bar{E}(0) = -\frac{\pi}{2\bar{a}} \ln \left| \frac{\bar{E}(x)}{\bar{E}(0)} \right|, \quad (27)$$

где входные значения имеют вид

$$|\bar{E}(0)| = \frac{\varepsilon |R_0 S_0|}{\sqrt{1 + (2\bar{a}/\pi)^2}}, \quad \arg \bar{E}(0) = \operatorname{arctg} \frac{2\bar{a}}{\pi}. \quad (28)$$

Как следует из (26), профиль $|\bar{E}(x)|$ симметричен относительно центра кристалла, причем $|\bar{E}(x)|/|\bar{E}(0)|$ монотонно растет от 1 до $\operatorname{ch} \bar{a}$ с приближением от границ ($x = 0, x_0$) к центру ($x = x_0/2$). Таким образом, величина $\operatorname{ch} \bar{a}$ может рассматриваться как степень пространственной неоднородности профиля решетки. Пространственная зависимость фазы решетки также симметрична относительно центра кристалла. Степень пространственной неоднородности здесь задается величиной $(\pi/2\bar{a}) \ln(\operatorname{ch} \bar{a})$. Отметим, что, согласно определению параметра \bar{a} , он обращается в нуль при $W_0 = 0$, т. е. при равных входных интенсивностях. В этом частном случае решетка остается пространственно однородной.

На рис. 4 представлены зависимости $|\bar{E}(x_0/2)/\bar{E}(0)|$ и $\arg[\bar{E}(x_0/2)/\bar{E}(0)]$ от r_0 для разных толщин кристалла. Видно, что с ростом $|\lg r_0|$ эффекты неоднородности, которые включают в себя модуляцию и изгиб полос решетки, становятся весьма существенными.

Зависимость входного значения $|\bar{E}(0)|$ от $\lg r_0$ четна. Она характеризуется максимумом при $\lg r_0 = 0$; максимальное значение уменьшается приблизительно от 0.19 до 0.075 при увеличении x_0 от 4 до 10. Зависимость $\arg \bar{E}(0)$ от $\lg r_0$ нечетна; она близка к зависимости $-\arg[\bar{E}(x_0/2)/\bar{E}(0)]$.

В случае $\eta = 0$ (где $\gamma' = \Omega = 0$) решетка остается пространственно-однородной и неподвижной при любых допустимых значениях W_0 и x_0 . В соответствии с (25) ее амплитуда (для $j' = 2$) имеет вид

$$\bar{E} = \exp(-iW_0 x) \sqrt{\left(\frac{\pi}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{W_0}{2}\right)^2}. \quad (29)$$

Этот случай существенно проще предыдущего.

На первый взгляд, сочетание ненулевого значения амплитуды дифракционной решетки с нулевой дифракционной эффективностью кажется парадоксальным. Однако оно находится в соответствии с общими принципами и объясняется энергообменом между R - и S -волнами. В отличие от известной формулы Когельника, $\eta = \sin^2(|E|x_0)$, справедливой при постоянной амплитуде решетки ($E = \text{const}$), наши соотношения показывают возможность реализации решетки с $\eta = 0$ в широком диапазоне входных параметров x_0 и r_0 .

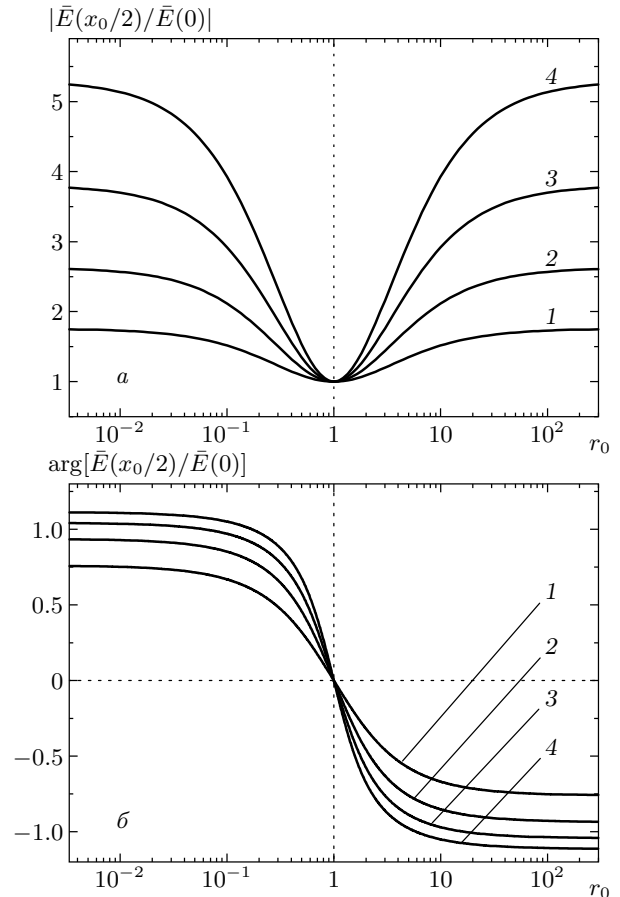


Рис. 4. Зависимость параметров $|\bar{E}(x_0/2)/\bar{E}(0)|$ (а) и $\arg[\bar{E}(x_0/2)/\bar{E}(0)]$ (б), характеризующих амплитудные и фазовые искажения решетки, от отношения входных интенсивностей при $x_0 = 4$ (1), 6 (2), 8 (3), 10 (4) для $+\pi/2$ -обратной связи

5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

Для получения замкнутых уравнений для «быстрой периодической» фазы $\varphi_p(t)$ необходимо вычислить произведение

$$S_0 R_0 R_F(x_0, t) S_F(x_0, t) \exp(-i\Omega t),$$

входящее в условие обратной связи (6) через соотношение (5). Учитывая (8), (9), (13) и (14), а также тот факт, что $\bar{R}_F(x_0)$ (или $\bar{S}_F(x_0)$) равно нулю для периодических состояний, контролируемых $\pm\pi/2$ -обратной связью, имеем:

$$R_F(x_0) S_F(x_0) \exp(-i\Omega t) \approx \mp B(x_0). \quad (30)$$

Быстрая амплитуда \tilde{E} , входящая в соотношение (14) для B , находится из (12),

$$\tilde{E} = |R_0 S_0| [(\bar{R}_F^2 - \bar{S}_F^{*2})u - i(\bar{R}_F^2 + \bar{S}_F^{*2})v]. \quad (31)$$

Известные амплитуды \bar{R}_F и \bar{S}_F зависят от x , а периодические функции времени u и v связаны с $\varphi_p(t)$ уравнениями

$$\dot{u} = \cos \varphi_p - \varepsilon, \quad \dot{v} = \sin \varphi_p. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (14), получим

$$|R_0 S_0| B(x_0, t) = -c_+ v + i c_- u, \quad (33)$$

где коэффициенты c_{\pm} заданы соотношениями

$$c_{\pm} = |R_0 S_0|^2 \int_0^{x_0} (1 \pm 2\bar{R}_F^2 \bar{S}_F^2 - 2|\bar{R}_F \bar{S}_F|^2) dx, \quad (34)$$

они зависят лишь от x_0 и r_0 . Стоящие под интегралом амплитуды $\bar{R}_F(x)$ и $\bar{S}_F(x)$ отвечают условию $\eta = 1$ или $\eta = 0$. Весьма существенно, что коэффициенты c_{\pm} действительны. Для того чтобы увидеть это и вычислить необходимые интегралы, мы воспользуемся результатами предыдущего раздела.

Используя (20), (21), (22) и (24), нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \bar{R}_F \bar{S}_F &= \\ &= \left\{ \text{sh} \left[\bar{a} \left(\frac{2x}{x_0} - 1 \right) \right] + \text{sh} \bar{a} \cos \frac{\pi x}{x_0} + i \text{ch} \bar{a} \sin \frac{\pi x}{x_0} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ 2 \text{ch} \bar{a} \text{ch} \left[\bar{a} \left(\frac{2x}{x_0} - 1 \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

при $\eta \approx 1, j = 1$ и

$$\begin{aligned} \bar{R}_F \bar{S}_F &= \\ &= \frac{1}{2 \text{ch}^2 \bar{a}} \left(i \text{ch} \bar{a} \sin \frac{2\pi x}{x_0} - 2 \text{sh} \bar{a} \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

при $\eta \approx 0, j' = 2$. В обоих случаях действительная и мнимая части произведения $\bar{R}_F(x)\bar{S}_F(x)$ обладают разной четностью относительно центра кристалла. Это свойство и делает коэффициенты c_{\pm} действительными. На рис. 5 показаны зависимости $c_{\pm}(r_0)$ для нескольких значений x_0 и случаев $\eta = 1$ и $\eta = 0$. При $r_0 = 1$ мы имеем $c_+ = x_0/8, c_- = x_0/4$. Приведенные кривые не обладают никакими особенностями вблизи границ интервалов допустимых значений. В случае $\eta \approx 1$ отношение c_+/c_- монотонно увеличивается с x_0 и $|\lg r_0|$ от 0.5 до приблизительно 0.7. В случае $\eta \approx 0$ это отношение может достигать значений 1–1.2.

Используя (5), (6), (30) и (33), мы получаем, наконец, уравнение для φ_p :

$$t_f \dot{\varphi}_p = c_- u \sin \varphi_p - c_+ v \cos \varphi_p. \quad (37)$$

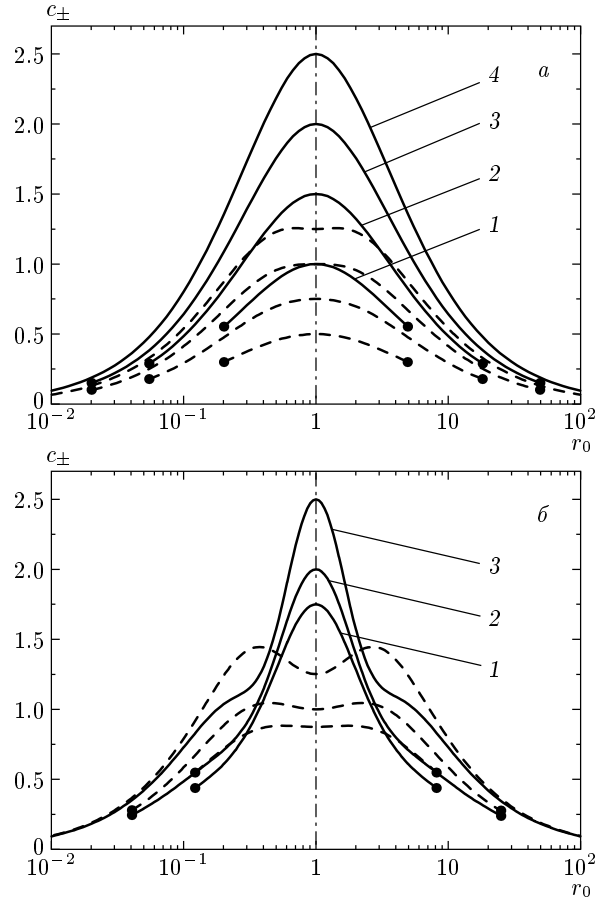


Рис. 5. Зависимость коэффициентов c_{\pm} для $+\pi/2$ - (а) и $-\pi/2$ - (б) обратной связи от r_0 для нескольких значений x_0 . Сплошные кривые отвечают c_- , штриховые — c_+ ; а — $x_0 = 4$ (1), 6 (2), 8 (3), 10 (4), б — $x_0 = 7$ (1), 8 (2), 9 (3). Точками отмечены концы интервалов допустимых значений

Его форма не зависит от знака обратной связи. Пропорциональное изменение c_+ и c_- эквивалентно перенормировке t_f . Обыкновенные дифференциальные уравнения (32) и (37) образуют замкнутую систему для нахождения периодических функций φ_p, u и v . Эта система существенно нелинейна.

Заметим, что для $+\pi/2$ -обратной связи $\bar{S}_F(x_0) \approx -i$, а $R_F(x_0, t) \approx -iB(x_0, t)$. Периодическая функция времени

$$-iB = \frac{c_- u + i c_+ v}{|R_0 S_0|}$$

задает близкую к нулю замкнутую траекторию на комплексной плоскости. Эта траектория является удобным (и связанным с экспериментом) представлением движения системы. Для $-\pi/2$ -обратной связи

зи траектория системы характеризуется близкой к нулю периодической функцией

$$S_F(x_0, t) \approx -B(x_0, t) = \frac{-ic_-u + c_+v}{|R_0S_0|}.$$

Вполне понятно, что период движения T и максимальное отклонение $\delta\eta_{max}$ дифракционной эффективности от значения 1 или 0 зависят от времени реакции обратной связи t_f . Полученные уравнения движения легко позволяют установить эти зависимости. Если нормировать время t и переменные u, v на $\sqrt{t_f}$, т. е. перейти к естественному масштабу, то малый параметр t_f исчезает из уравнений движения. Отсюда следуют масштабные соотношения:

$$T \propto \sqrt{t_f}, \quad \delta\eta_{max} \propto t_f. \quad (38)$$

Они отвечают результатам прямого численного моделирования [19, 20]. Коэффициенты пропорциональности в (38) зависят от типа периодического состояния.

Укажем, наконец, полезные свойства симметрии системы (32), (37). Если ей удовлетворяют функции $\varphi_p(t), u(t), v(t)$, то тройка $-\varphi_p(t), u(t), -v(t)$ реализует другое решение; кроме того, инверсия времени эквивалентна смене знаков u и v .

Поскольку рассматриваемая система уравнений автономна, ее порядок может быть понижен. Полагая $u(t) = u(\varphi_p(t)), v(t) = v(\varphi_p(t))$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_f} \frac{du}{d\varphi_p} &= \frac{\cos \varphi_p - \varepsilon}{c_- u \sin \varphi_p - c_+ v \cos \varphi_p}, \\ \frac{1}{t_f} \frac{dv}{d\varphi_p} &= \frac{\sin \varphi_p}{c_- u \sin \varphi_p - c_+ v \cos \varphi_p}. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим далее, что периодические решения могут быть классифицированы согласно условию $\varphi_p(t + T) - \varphi_p(t) = 2\pi N$, где $N = 0, \pm 1, \dots$ — целое число. Соответственно, период функций $u(\varphi_p), v(\varphi_p)$ равен $2\pi N$. Если функция $\varphi_p(t)$ не монотонна, например при $N = 0$, то функции $u(\varphi_p)$ и $v(\varphi_p)$ являются двузначными. Ненулевые значения N и $-N$ связаны указанными выше соотношениями симметрии. Поэтому достаточно рассмотреть случаи с $N \geq 0$. Если периодические функции $u(\varphi_p), v(\varphi_p)$ известны, то зависимость $\varphi_p(t)$ может быть найдена из (37).

Интегрирование нелинейных уравнений (39) не может быть выполнено аналитически. Однако эта задача легко решается численно с использованием, например, стандартной программы «Математика». Численное интегрирование позволяет осуществить практически полный анализ решений.

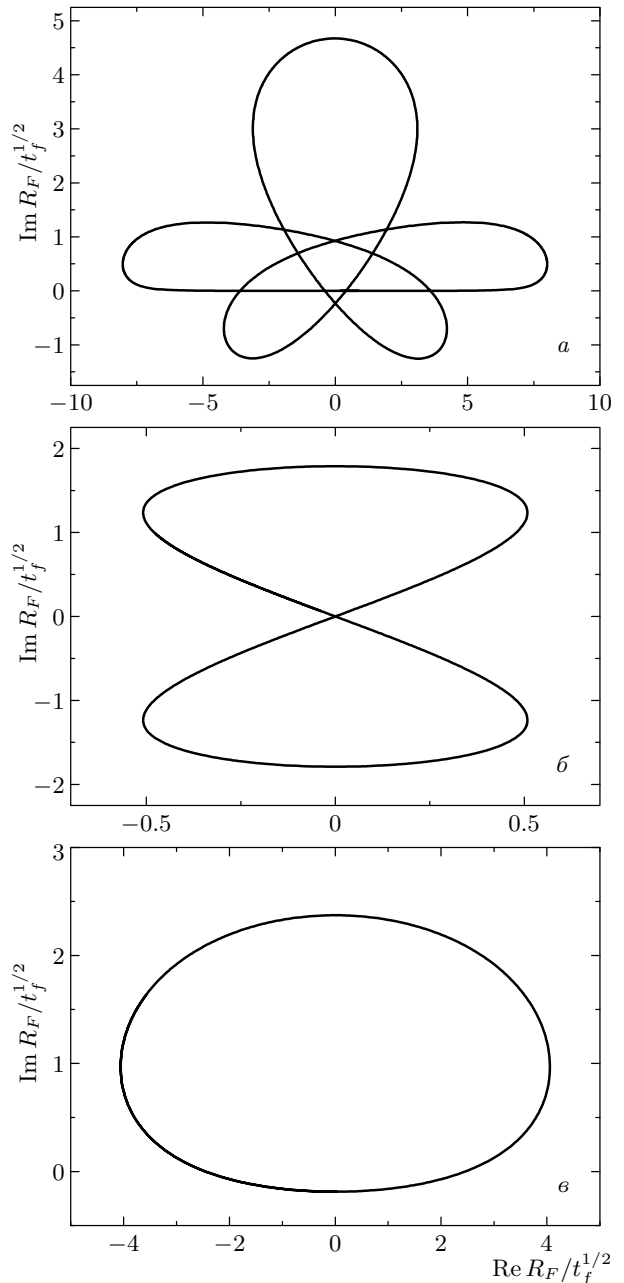


Рис. 6. Замкнутые траектории на комплексной плоскости, отвечающие временной зависимости амплитуды $R_F(x_0)$ для $x_0 = 6.6$ при $+\pi/2$ -обратной связи; $N = 3$ (а), 0 (б), 1 (в), $r_0 = 1$ (а), 6 (б), 1 (в)

На рис. 6а показана замкнутая траектория $R_F(x_0, t)/\sqrt{t_f}$ на комплексной плоскости для $\eta \approx 1, x_0 = 6.6, r_0 = 1, N = 3$. В течение периода $T \approx 30.7\sqrt{\tau_f}$ фаза φ_p изменяется на 6π . Значение $\delta\eta_{max} = |R_F(x_0, t)|_{max}^2$ составляет здесь примерно $\approx 64.5t_f$. Отвечающая этому случаю временная

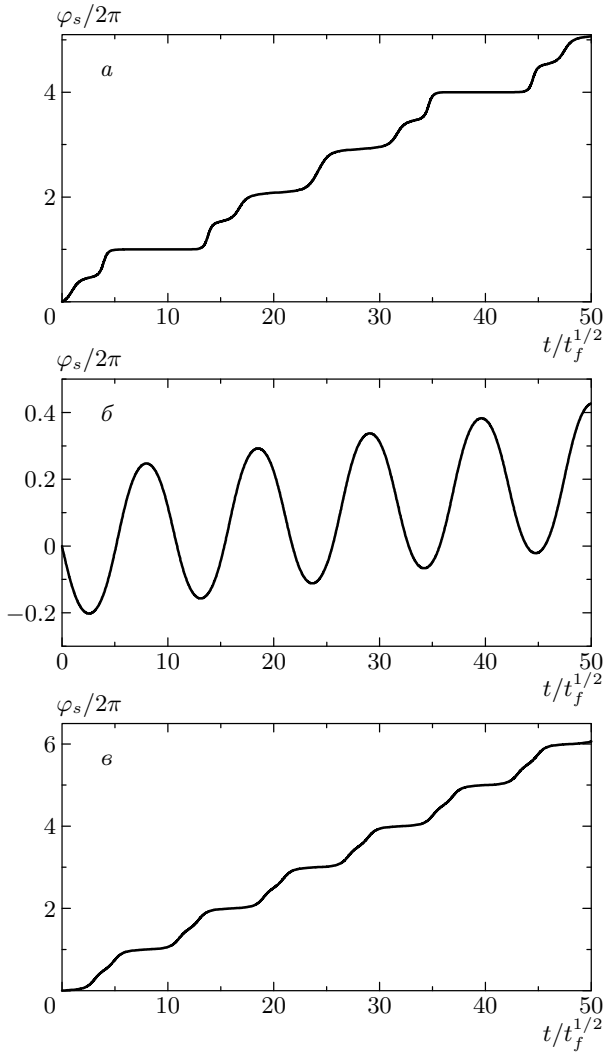


Рис. 7. Временная зависимость входной фазы φ_s для периодических состояний, изображенных на рис. 6

зависимость входной фазы φ_s представлена на рис. 7а. Поскольку $\Omega = 0$, она не отличается от зависимости $\varphi_p(t)$. В течение периода фаза испытывает три выраженных скачка. Описанные результаты хорошо согласуются с данными прямых численных вычислений и эксперимента [19, 20]. Такое же поведение предсказывается для $S_F(x_0, t)$ и $\varphi_p(t)$ в случае $\eta = 0$.

На рис. 6б представлена траектория для $\eta = 1$, $x_0 = 6.6$, $r_0 = 6$ и $N = 0$. Фаза φ_p здесь периодическая с периодом $T \approx 10.5\sqrt{t_f}$, а $\delta\eta_{max} \approx 3.2t_f$. Частотная расстройка Ω в этом случае приблизительно равна 0.85. Благодаря ей периодические осцилляции входной фазы φ_s наложены на линейный рост, см.

рис. 7б. Эти закономерности также находятся в согласии с численными и экспериментальными результатами.

Наши вычисления показывают, что при одних и тех же значениях x_0 и r_0 можно, вообще говоря, найти периодические состояния, отвечающие $N = 0, 1, 2, \dots$. Иными словами, периодическое решение системы (32), (37) не единственно. Рисунки 6в и 7в показывают замкнутую траекторию и зависимость $\varphi_s(t)$ для случая $N = 1$ при $x_0 = 6.6$, $r_0 = 1$. Траектория обладает характерной однолепестковой структурой, фаза испытывает один скачок в течение периода $T \approx 8.0\sqrt{t_f}$, а $\delta\eta \approx 17.5t_f$.

Число возможных решений растет с удалением от порога, т. е. от границы области существования периодических состояний (от сепаратрисы), см. рис. 3. Рассмотрим для простоты случай $\eta \approx 1$, $r_0 = 1$, когда разность $x_0 - \pi = \pi(\varepsilon^{-1} - 1)$ является естественным параметром надкритичности. В припороговой области $\pi < x_0 \lesssim 4.2$, где ε меняется от 1 до приблизительно 0.74, периодическое состояние с $N = 0$ единственно. С приближением к порогу амплитуда фазовых осцилляций стремится к нулю как $(x_0 - \pi)^{1/2}$, в то время как период T испытывает незначительное уменьшение. Невозможность реализации решений с $N \neq 0$ в припороговой области достаточно естественна. Исчезновение эффекта фазовой модуляции для таких состояний было бы возможно только через резкие скачки φ_s , кратные 2π . Инерционность системы препятствует таким скачкам.

В области $x_0 \gtrsim 4.2$, помимо решения с $N = 0$, всегда существует периодическое решение с $N = 1$. С приближением x_0 к нижней границе интервала оно не испытывает пороговых особенностей и исчезает через потерю устойчивости. При $x_0 \gtrsim 5.7$ ($\varepsilon \lesssim 0.54$) становится возможным периодическое состояние с $N = 3$; с ростом x_0 оно мягко отщепляется от состояния с $N = 1$ и отвечает утроению периода, см. также рис. 6, 7. При $x_0 \approx 6.7$ ($\varepsilon \approx 0.47$) от состояния с $N = 1$ отщепляется состояние с $N = 2$, которое отвечает удвоению периода.

Аналогичное поведение системы имеет место и в случае, когда удаление от сепаратрисы осуществляется за счет уменьшения $|\ln r_0|$. Описанные выше закономерности позволяют понять результаты численных и натуральных экспериментов, представленные в работе [19]. Для достаточно толстых кристаллов, $x_0 \gtrsim 12.5$, при большой разнице входных интенсивностей ($|\lg r_0| \gtrsim 2.1$) можно ожидать новых припороговых особенностей, связанных с пересечением ветвей $j = 1$ и $j = 2$, см. рис. 3.

6. ВЫВОДЫ

Выше мы развили эффективный метод описания новой сильно нелинейной системы — волнового взаимодействия и записи пространственных решеток, управляемых электронной обратной связью. Метод использует свойства симметрии уравнений динамической дифракции и свойство быстроты обратной связи. Он не имеет аналогов среди известных нелинейных явлений в распределенных системах и включает в себя ряд новых понятий.

С помощью нового метода получен ряд результатов. Описана пространственная структура решетки показателя преломления для периодических состояний с $\eta = 1$ и $\eta = 0$, получены масштабные соотношения для периода осцилляций T и величины осцилляций $\delta\eta_{max}$, описаны наблюдаемые свойства разнообразных периодических состояний, установлена тесная связь между режимами с $\eta \approx 1$ и $\eta = 0$, понят сценарий вырождения периодических состояний с приближением к сепаратрисе. Эти результаты существенно дополняют данные, полученные прямым численным моделированием.

Весьма интересно, что периодические состояния могут быть не единственными. Вдали от порога при одних и тех же входных параметрах может существовать несколько периодических решений, различающихся по внешним проявлениям. Это свойство делает актуальным анализ устойчивости периодических состояний. Не исключено также, что реализация того или иного режима связана с предысторией системы.

Рассмотренный локальный нелинейный отклик наиболее выражен в кристаллах LiNbO_3 с доминирующим фотогальваническим транспортом [23]. Этот материал важен для создания разнообразных дифракционных элементов, на нем проведено большинство экспериментов по исследованию обратной связи. Значения безразмерной толщины x_0 здесь, как правило, не превышает 10, что отвечает реальной толщине в несколько миллиметров. Это обстоятельство делает наиболее актуальными ветви решений с $j = 1$ и $j' = 0, 2$ и оправдывает ограничения, сделанные в теоретическом анализе.

С точки зрения теории весьма интересными были бы эксперименты с кристаллами $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$ одного состава (с одинаковыми концентрациями ионов Fe^{2+} и Fe^{3+}), но разной толщины. Они позволили бы проверить предсказанную последовательность появления новых периодических состояний с увеличением надкритичности. По-видимому, не представляют большой сложности и эксперименты по проверке

масштабных соотношений для T и $\delta\eta_{max}$. Варьирование времени реакции петли обратной связи может быть осуществлено здесь за счет электроники.

Случай нелокального фоторефрактивного отклика, который характеризуется наличием мнимой единицы в правой части (3) и отвечает диффузионному транспорту, также представляет значительный интерес. Этот случай важен для реализации пространственного усиления оптических сигналов. Периодические состояния с $\eta \approx 1$ достижимы здесь при более жестких требованиях к параметрам кристалла и условиям эксперимента. Их анализ требует модификации соотношений теории.

Мы полагаем, что два рассмотренных выше устройства, которые максимизируют и минимизируют дифракционную эффективность решетки, являются представителями более общего семейства оптических приборов, в которых электронные обратные связи ответственны за осуществление заданных полезных функций. Развитие теории такого рода систем представляет интересную и практически важную задачу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16083).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Topics in Applied Physics*, Vols. 61, 62, *Photorefractive Materials and Their Applications*, ed. by P. Günter and J.-P. Huignard, Springer-Verlag, Berlin (1988, 1989).
2. М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко, *Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике*, Наука, Санкт-Петербург (1992).
3. L. Solymar, D. J. Webb, and A. Grunnet-Jepsen, *The Physics and Applications of Photorefractive Materials*, Clarendon Press, Oxford (1996).
4. S. Stepanov, *Rep. Progr. Phys.* **57**, 39 (1994).
5. T. Tschudi, A. Herden, J. Goltz et al., *IEEE J. Quant. Electron.* **22**, 1493 (1986).
6. Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий, В. В. Шкунов, *Обращение волнового фронта*, Наука, Москва (1985).
7. M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J. O. White, and A. Yariv, *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-20**, 12 (1984).
8. С. Г. Одулов, М. С. Соскин, А. И. Хижняк, *Лазеры на динамических решетках*, Наука, Москва (1990).

9. M. Segev, B. Crosignani, A. Yariv et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 923 (1992); M. F. Shih, M. Segev, and G. Salamo, Phys. Rev. Lett. **78**, 2551 (1997).
10. A. Yariv, S. S. Orlov, and G. A. Rakuljic, J. Opt. Soc. Amer. B **13**, 2513 (1996).
11. B. Sturman, S. Odoulov, and M. Goul'kov, Phys. Rep. **275**, 197 (1996).
12. А. Бледовский, Д. Оттен, К. Рингхофер, Б. Стурман, ЖЭТФ **102**, 406 (1992); Б. И. Стурман, А. И. Черных, Е. Шамонина ЖЭТФ **114**, 1034 (1998).
13. М. В. Горкунов, Е. В. Подивилов, Б. И. Стурман, ЖЭТФ **121**, 551 (2002); E. V. Podivilov, B. I. Sturman, H. Pedersen, and P. M. Johansen, Phys. Rev. Lett. **85**, 1867 (2000).
14. G. F. Calvo, B. Sturman, F. Agullo-Lopez, and M. Carrascosa, Phys. Rev. Lett. **84**, 3839 (2000); *ibid* **89**, 033902 (2002).
15. A. Freschi and J. Frejlich, J. Opt. Soc. Amer. B **11**, 1837 (1994).
16. P. M. Garcia, K. Buse, D. Kip, and J. Frejlich, Opt. Comm. **117**, 35 (1995).
17. P. M. Garcia, A. A. Freschi, J. Frejlich, and E. Krätzig, Appl. Phys. B **63**, 207 (1996).
18. V. P. Kamenov, K. H. Ringhofer, B. I. Sturman, and J. Frejlich, Phys. Rev. A **56**, R2541 (1997).
19. E. V. Podivilov, B. I. Sturman, S. G. Odoulov et al., Phys. Rev. A **63**, 053805 (2001).
20. E. V. Podivilov, B. I. Sturman, S. G. Odoulov et al., Opt. Comm. **192**, 399 (2001).
21. К. Н. Рингхофер, В. Р. Каменов, В. Стурман et al., Phys. Rev. E **61**, 2029 (1999).
22. А. С. Сонин, *Введение в физику жидких кристаллов*, Наука, Москва (1983).
23. Б. И. Стурман, В. М. Фридкин, *Фотогальванический эффект в средах без центра симметрии и родственные явления*, Наука, Москва (1992).