

КЛИНОВАЯ РЕФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛАХ

В. И. Альшиц, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 марта 2003 г.

Исследованы топологические особенности самопересечения волновых поверхностей вблизи сингулярных оптических осей поглощающего кристалла. Найдены распределения комплексных поляризационных полей в окрестности вырожденных направлений. Показано, что вращение эллипсов поляризации при обходе волновой нормалью \mathbf{m} вокруг оптической оси характеризуется индексом Пуанкаре $n = 1/4$. Предсказана и теоретически изучена (на примере ромбического кристалла) клиновья рефракция электромагнитных волн на линии пересечения полостей поверхности показателей преломления. Показано, что средние потоки энергии $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ лишь в центральной области клина близки по направлению к нормальям \mathbf{n}_{\pm} к поверхности рефракции, т. е. лишь там, где поляризация почти линейна и групповая скорость волн хорошо определена. При перемещении \mathbf{m} к сингулярным осям на концах ребра клина эллиптичность поляризации растет, а ориентации векторов $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ и \mathbf{n}_{\pm} все более расходятся, оставаясь в одной и той же плоскости ортогональной ребру. Угол между $\bar{\mathbf{P}}_{+}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{-}$ монотонно убывает, и при распространении вдоль сингулярных осей $\bar{\mathbf{P}}_{+} \parallel \bar{\mathbf{P}}_{-}$; при этом растреп между векторами \mathbf{n}_{+} и \mathbf{n}_{-} увеличивается, и вдоль оптических осей они имеют ориентационную сингулярность типа плоского веера. Неусредненные векторы \mathbf{P}_{\pm} при сканировании \mathbf{m} по ребру клина описывают за период одну и ту же коническую поверхность, совпадающую с конусом рефракции прозрачного кристалла, а концы векторов \mathbf{P}_{\pm} пробегает по эллиптическим орбитам, форма и наклон которых зависят от \mathbf{m} . Проанализированы возможности наблюдения клиновья рефракции.

PACS: 42.25.Bs

1. ВВЕДЕНИЕ

Коническая рефракция электромагнитных волн в прозрачных кристаллах — хорошо известное явление [1–3]. Оно возникает в двусосных кристаллах, когда волны распространяются вдоль любой из двух существующих оптических осей, направления которых далее будут обозначаться $\mathbf{m}^{(1)}$ и $\mathbf{m}^{(2)}$. При совпадении волновой нормали \mathbf{m} с направлениями $\mathbf{m}^{(1,2)}$ фазовые скорости $\mathbf{v} = v\mathbf{m}$ волн независимых поляризаций вырождаются (здесь $v = c/n$, n — показатель преломления, c — скорость света в вакууме). При этом в направлении оптической оси разрешенные ориентации векторов поляризации образуют целый континуум. Каждой поляризации соответствует свой вектор потока энергии \mathbf{P} — вектор Пойнтинга, ориентированный по соответствующей образующей конуса рефракции. Поэтому, например, цирку-

лярно поляризованная волна, направленная вдоль $\mathbf{m}^{(j)}$ ($j = 1, 2$), должна распространять энергию по конусу. Как известно, в прозрачных кристаллах вектор \mathbf{P} коллинеарен групповой скорости $\mathbf{u} = u\mathbf{n}$. Здесь \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности показателей преломления $n(\mathbf{m})$. Такая поверхность в точке $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{(j)}$ имеет коническую сингулярность. Нормали \mathbf{n} , определенные в непосредственной близости направления $\mathbf{m}^{(j)}$, совпадая с соответствующими направлениями \mathbf{P} , в пределе образуют классический конус рефракции — геометрически точно такой же, как и конус, образованный векторами \mathbf{P} . Такие конусы были экспериментально обнаружены еще в XIX веке [2].

Аналогичное явление существует и в акустике кристаллов, где коническая рефракция была экспериментально и теоретически изучена значительно позднее [2]. Любопытно, что в акустике кристаллов известен и другой вид рефракции — так называемая

*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

клиновое рефракция, теоретически предсказанная в [4] и экспериментально обнаруженная в [5]. Указанное явление наблюдается в таких гексагональных кристаллах, где две полости поверхности медленностей акустических волн пересекаются. Вблизи линий пересечения полостей поверхности медленностей нормали к этим полостям образуют своеобразный клин направлений групповых скоростей.

В отличие от акустики, где клиновое рефракция существует и в отсутствие поглощения, в оптике прозрачных кристаллов клиновое рефракция невозможна. Однако в поглощающих кристаллах ситуация меняется. При «включении» поглощения каждая оптическая ось прозрачного двуосного кристалла расщепляется на две оси, $\mathbf{m}^{(j)} \rightarrow \mathbf{m}_{\pm}^{(j)}$, называемые сингулярными [1, 6]. Кристалл становится оптически четырехосным. Полости двуполостной поверхности показателей преломления пересекаются по линиям, соединяющим направления расщепленных осей. Поверхность показателей преломления при этом имеет клинообразные особенности, в которых линия пересечения полостей — острие клина. Естественно ожидать, что «включение» поглощения модифицирует классическую коническую рефракцию прозрачного кристалла, превращая ее в качественно новое явление — клиновое рефракцию.

Настоящая работа посвящена анализу именно этой проблемы. Будет детально исследована сложная геометрия самопересечения поверхности показателей преломления и изучено распределение потоков энергии собственных волн в области самопересечения. Мы проследим за поведением векторов Пойнтинга на линии пересечения полостей и за поведением геометрических нормалей к поверхности показателей преломления, которые в прозрачных кристаллах задают направления групповых скоростей. Мы увидим, что вблизи сингулярных осей поведение этих двух векторных характеристик, $\mathbf{P}(\mathbf{m})$ и $\mathbf{n}(\mathbf{m})$, радикально различается. Это обусловлено сильной эллиптичностью волновых полей в этой области и приводит к невозможности введения такой характеристики волновых полей как групповая скорость [7]. С другой стороны, между сингулярными осями на единичной сфере направлений $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ всегда проходит линия, на которой эллиптичность равна нулю и групповая скорость строго определена. Как мы увидим, на этой линии направления потока энергии \mathbf{P} и нормали \mathbf{n} естественным образом совпадают, а клиновое рефракция вблизи этой линии имеет характер, аналогичный родственному явлению в акустике непоглощающих кристаллов. По мере удаления от этой области вдоль ребра клина эллиптич-

ность поляризации нарастает, а поток энергии $\mathbf{P}(\mathbf{m})$ вращается по различным сечениям универсального конуса, совпадающего с конусом рефракции прозрачного кристалла. При этом на краях клина такие вращения происходят в противоположных направлениях по круговым сечениям того же конуса. Таким образом, поведение потока энергии вдоль сингулярных осей фактически совпадает с конической рефракцией в прозрачном кристалле для волны круговой поляризации. Как будет показано, отмеченные особенности, порожденные поглощением, с плавным переходом от одного конуса рефракции к другому на концах клина через узкую зону чисто клинового рефракции даже при малом поглощении доступны для экспериментального наблюдения.

Отдельной нетривиальной проблемой является анализ топологических аномалий в распределении комплексных векторных полей поляризации в окрестности сингулярных осей. Согласно [8], указанные особенности могут быть охарактеризованы «топологическим зарядом» — индексом Пуанкаре $n = 1/4$. Этот важный результат, опубликованный ранее в кратком изложении одним из авторов данной работы в относительно малодоступном издании [8], практически остался, к сожалению, вне поля зрения специалистов. Поэтому ниже мы коснемся и этой проблемы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сначала прозрачный триклинный кристалл, характеризуемый вещественным тензором диэлектрической проницаемости ϵ или обратным ему тензором $\eta = \epsilon^{-1}$. Если использовать стандартную кристаллофизическую систему координат, в которой тензоры ϵ и η диагональны, и для определенности считать, что $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$, то оптические оси будут лежать в плоскости xz . В каждом из выродившихся направлений $\mathbf{m}^{(j)}$ полости поверхности показателей преломления $n_{\pm}(\mathbf{m})$ имеют конический контакт в точках $\mathbf{m}^{(1,2)}$: $n_{+}(\mathbf{m}^{(j)}) = n_{-}(\mathbf{m}^{(j)})$. Здесь индексы \pm помечают две различные полости поверхности показателей преломления, внешнюю (+) и внутреннюю (–), отвечающие двум независимым изонормальным электромагнитным волнам. Ориентации направлений $\mathbf{m}^{(j)}$ задаются углом θ_0 (рис. 1а), который легко находится при рассмотрении сечения поверхности показателей преломления плоскостью xz :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{d_{12}/d_{23}}, \quad d_{ij} = \eta_i - \eta_j. \quad (1)$$

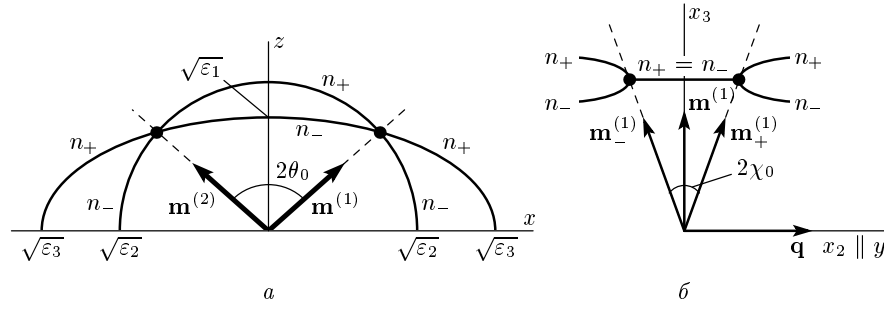


Рис. 1. Сечения поверхностей $n_{\pm}(\mathbf{m})$ плоскостями, содержащими оптические оси: a — прозрачный кристалл; b — поглощающий кристалл

Таким образом, в выбранной кристаллофизической системе координат $\{x, y, z\}$ ориентации оптических осей задаются направлениями

$$\mathbf{m}^{(1,2)} = (\pm \sin \theta_0, \cos \theta_0). \quad (2)$$

При «включении» поглощения материальные тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\eta}$ формально дополняются мнимыми компонентами: $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} + i\boldsymbol{\varepsilon}'$, $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}'$. Соответственно удобно объединить показатели преломления n_{\pm} и коэффициенты поглощения n'_{\pm} , введя комплексные показатели преломления $N_{\pm} = n_{\pm} + in'_{\pm}$, в терминах которых изонормальные электромагнитные волны с частотой ω выражаются в виде, аналогичном случаю прозрачного кристалла:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}_{\pm}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\pm}^0 \\ \mathbf{H}_{\pm}^0 \end{pmatrix} \exp \left[i\omega \left(\frac{N_{\pm}}{c} \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - t \right) \right]. \quad (3)$$

Связь волновых полей (3) и комбинированных показателей N_{\pm} с направлением \mathbf{m} и материальными константами хорошо известна [1–3, 6]. Применительно к нашей задаче удобно воспользоваться инвариантными уравнениями Федорова [6], в которых зависимость от \mathbf{m} фигурирует в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm} &= (\boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}')[\mathbf{H}_{\pm} \times \mathbf{m}], \\ \mathbf{H}_{(\pm)} &\parallel \mathbf{p}_1 \sqrt{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2} \pm \mathbf{p}_2 \sqrt{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} N_{(\pm)} &= \\ &= \left\{ a + b \left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \pm \sqrt{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2)} \right] \right\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{p}_i = \mathbf{m} \times \mathbf{c}^{(i)}$, а величины a, b и $\mathbf{c}^{(i)}$ задают диадную форму комплексного тензора

$$\boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}' = a\mathbf{I} + b \left(\mathbf{c}^{(1)} \otimes \mathbf{c}^{(2)} + \mathbf{c}^{(2)} \otimes \mathbf{c}^{(1)} \right). \quad (6)$$

Заметим, что для перехода от $\mathbf{H}_{(\pm)}$ к \mathbf{H}_{\pm} и от $N_{(\pm)} = n_{(\pm)} + in'_{(\pm)}$ к $N_{\pm} = n_{\pm} + in'_{\pm}$ в (4), (5) требуется дополнительная «сортировка» полостей на внешнюю и внутреннюю. В (6) \mathbf{I} — единичный тензор. Конкретная связь входящих в выражение (6) параметров a, b и $\mathbf{c}^{(i)}$ с компонентами обычной матричной формы тензора $\boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}'$ в кристаллофизической системе координат прослежена в работе [9]. Здесь мы приведем явный вид этих параметров лишь для частного случая кристаллов ромбической симметрии, обеспечивающей диагонализацию действительных и мнимых частей тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} + i\boldsymbol{\varepsilon}'$ и $\boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}'$ в одной и той же системе координат. В последнем случае

$$\begin{aligned} a &= \eta_2 - i\eta'_2, \quad b = -d_{13} + id'_{13}, \\ \mathbf{c}^{(1)} &= (c_1, 0, c_3), \quad \mathbf{c}^{(2)} = (-c_1, 0, c_3), \end{aligned} \quad (7)$$

где по аналогии с (1) обозначено $d'_{ij} = \eta'_i - \eta'_j$ и введены параметры

$$c_1 = \sqrt{\frac{d_{12} - id'_{12}}{d_{13} - id'_{13}}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{d_{23} - id'_{23}}{d_{13} - id'_{13}}}. \quad (8)$$

Условие совпадения комплексных показателей преломления $N_+ = N_- = N_0$ отвечает направлениям оптических осей и реализуется при $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$ и при $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$. Каждое из этих двух комплексных уравнений определяет пару вырожденных направлений, так что в общем случае в поглощающих

кристаллах существуют четыре оптические (сингулярные) оси [1, 6].

Здесь мы должны сделать одно важное замечание. Хотя в предыдущих формулах никаких особых ограничений на уровень поглощения не накладывалось, применительно к рассматриваемому кругу проблем нас будет интересовать достаточно слабое поглощение, при котором электромагнитное поле сохраняет свою волновую структуру при своем распространении на расстояния, значительно превышающие длину волны. При этом речь идет о тех случаях, когда каждая из оптических осей прозрачного двуосного кристалла под влиянием слабого анизотропного поглощения расщепляется на две новые: $\mathbf{m}^{(j)} \rightarrow \mathbf{m}_{\pm}^{(j)} = \mathbf{m}^{(j)} + \Delta\mathbf{m}_{\pm}^{(j)}$. Естественно, что при слабом поглощении такое расщепление должно быть мало¹⁾. Например, для ромбического кристалла с учетом (7), (8) уравнения $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$ и $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$ дают $\mathbf{m}^{(j)} \parallel \text{Re } \mathbf{c}^{(j)}$, что, как нетрудно проверить, соответствует (2), причем

$$\Delta\mathbf{m}_{\pm}^{(j)} \equiv \Delta\mathbf{m}_{\pm} = (0, \pm\chi_0, 0),$$

$$\chi_0 = \frac{\sqrt{d_{12}d_{23}}}{2d_{13}} \left| \frac{d'_{12}}{d_{12}} - \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right|. \quad (9)$$

Такое симметричное расщепление, показанное на рис. 1б, вполне естественно, поскольку исходные оси $\mathbf{m}^{(1,2)}$ принадлежат плоскости xz , которая является плоскостью симметрии.

В соответствии с (4) комплексные векторы поляризации изонормальных волн магнитного поля взаимно ортогональны: $\mathbf{H}_+ \cdot \mathbf{H}_- = 0$. Это означает ортогональность соответствующих эллипсов поляризации и одинаковость направления их обхода. Эксцентриситеты изонормальных эллипсов также одинаковы. Пусть a_{\pm} и b_{\pm} — длины полуосей эллипсов поляризации изонормальных волн. Ориентации этих полуосей определяются формулой

$$\mathbf{a}_{\pm} + i\mathbf{b}_{\pm} \parallel \mathbf{H}_{\pm} / \sqrt{\mathbf{H}_{\pm} \cdot \mathbf{H}_{\pm}}. \quad (10)$$

При распространении вдоль сингулярных осей, когда $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$ или $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$ и соответственно поля \mathbf{H}_{\pm} параллельны \mathbf{p}_1 или \mathbf{p}_2 (с точностью до скалярного комплексного множителя, см. (4)), эксцентриситет эллипсов поляризации волны магнитного поля равен нулю, т. е. поляризация круговая. Поэтому сингулярные оси иногда называют круговыми.

¹⁾ Впрочем, как показано в [10, 11], в условиях малой анизотропии, сопоставимой с уровнем поглощения, расщепление определяется отношением малых параметров и может быть немалым. Ниже мы не будем рассматривать такие специальные случаи.

Впрочем, как видно из формулы (4), электрическая компонента волны в этом случае остается эллиптической.

3. ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНОЙ ОСИ

Рассмотрим более детально волновые характеристики вблизи сингулярной оптической оси в кристалле произвольной анизотропии. Выберем любую из четырех осей $\mathbf{m}_{\pm}^{(1,2)}$, обозначив для краткости ее направление \mathbf{m}_0 . Для определенности будем считать, что \mathbf{m}_0 является решением уравнения $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$. Нетрудно убедиться, что в этом случае вектор $\mathbf{c}^{(1)}$ может быть представлен в виде $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{J} + g\mathbf{m}_0$, где \mathbf{J} — круговой вектор, ортогональный \mathbf{m}_0 ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 0$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$). В локальной системе координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ с осью x_3 вдоль \mathbf{m}_0 вектор \mathbf{J} имеет компоненты $\mathbf{J} = (1, i, 0)$. Выбором коэффициента b в (6) вектор $\mathbf{c}^{(2)}$ может быть приведен к виду $\mathbf{c}^{(2)} = (1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$. Поскольку векторы $\mathbf{c}^{(1)}$ и $\mathbf{c}^{(2)}$ полностью определяются материальным тензором $\boldsymbol{\eta} - i\boldsymbol{\eta}'$ (6), то и параметры g , \tilde{c}_2 и \tilde{c}_3 можно считать известными. В этих обозначениях комплексный показатель преломления для вырожденного направления \mathbf{m}_0 равен

$$N_0 = n_0 + in'_0 = [a + b(1 + i\tilde{c}_2)]^{-1/2}. \quad (11)$$

Для нас, однако, основной интерес представляет поведение волновых характеристик в окрестности вырожденного направления, когда

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \theta(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad 0 \leq \theta \ll 1. \quad (12)$$

Здесь θ — угол отклонения волновой нормали от направления сингулярной оси, а полярный угол φ отсчитывается от направления оси x_1 . Вычисления, основанные на общем выражении (5), приводят к следующим выражениям:

$$n_{(\pm)} = n_0 \pm \sqrt{\theta} |P| \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2},$$

$$n'_{(\pm)} = n'_0 \pm \sqrt{\theta} |P| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \quad (13)$$

где величина $|P|$ и угол φ_0 определяются соотношением

$$P \equiv |P| \exp\left(-\frac{i\varphi_0}{2}\right) = ib \left(g \frac{1 + \tilde{c}_2^2}{2}\right)^{1/2} N_0^3. \quad (14)$$

Совершенно аналогично с помощью (4) для комплексных амплитуд магнитной компоненты волны имеем

$$\mathbf{H}_{(\pm)}^0 = C_{\pm} \left[\mathbf{J} \pm \sqrt{\theta} \mathbf{R} \exp(i\varphi/2) \right], \quad (15)$$

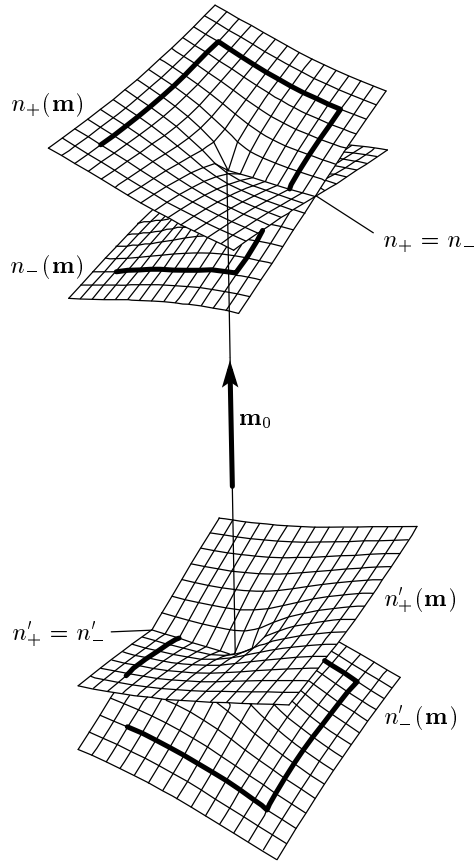


Рис. 2. Конфигурация поверхностей $n_{\pm}(\mathbf{m})$ и $n'_{\pm}(\mathbf{m})$ в окрестности сингулярной оси. Жирными линиями показан непрерывный переход между внешними и внутренними полостями, $n_+ + in'_+ \leftrightarrow n_- + in'_-$, при полном обходе вокруг сингулярной оси

$$\mathbf{R} = A(-\tilde{c}_2, 1, \theta), \quad A = \sqrt{2g/(1 + \tilde{c}_2^2)}. \quad (16)$$

В (15) C_{\pm} — амплитудные коэффициенты. Как видно из (15), при отклонении направления распространения от сингулярной оси ($\theta \neq 0$) поляризация волны перестает быть круговой — возникают эллипсы с эксцентриситетом, малым в меру малости θ ,

$$e^2 = 1 - b_{\pm}^2/a_{\pm}^2 = \sqrt{\theta}|Q|, \quad (17)$$

и ориентацией полуосей (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(+)} &\parallel \left(\cos \frac{1}{4}(\varphi - \varphi^0), \sin \frac{1}{4}(\varphi - \varphi^0), 0 \right), \\ \mathbf{a}_{(-)} &\parallel \left(-\sin \frac{1}{4}(\varphi - \varphi^0), \cos \frac{1}{4}(\varphi - \varphi^0), 0 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В (17), (18) величина $|Q|$ и угол φ^0 определены соотношением

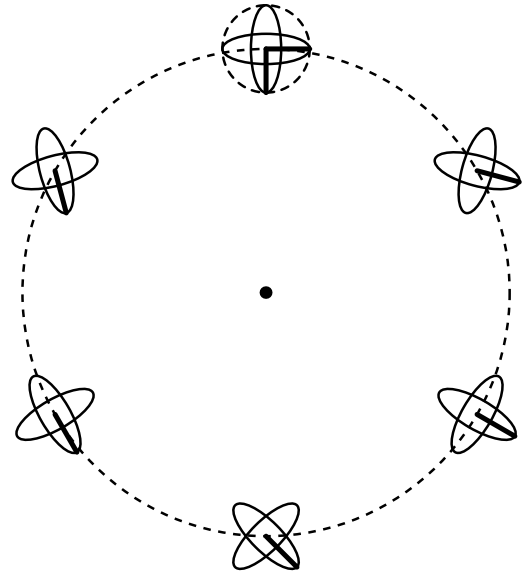


Рис. 3. Вращение эллипсов поляризации при полном обходе сингулярной оси; малый верхний кружок отмечает начало и конец обхода

$$Q \equiv |Q| \exp(-i\varphi^0/2) = 2A(i - \tilde{c}_2). \quad (19)$$

Соотношения (13) полностью описывают волновые поверхности $n(\mathbf{m})$, $n'(\mathbf{m})$ в окрестности сингулярной оси. Локально эти поверхности совершенно аналогичны и различаются лишь масштабом и поворотом вокруг \mathbf{m}_0 на угол π . Действительно, разность $n_{(\pm)} - n_0$ совмещается с $n'_{(\pm)} - n'_0$ при изменении φ на $\varphi + \pi$. Каждая из поверхностей $n(\mathbf{m})$, $n'(\mathbf{m})$ имеет линию самопересечения, выходящую из сингулярной оси. На линии $\varphi = \varphi_0 + \pi$ вырождаются коэффициенты преломления, $n_+ = n_-$, а на линии $\varphi = \varphi_0$ — коэффициенты поглощения, $n'_+ = n'_-$, см. рис. 2. С другой стороны, при полном обходе вокруг \mathbf{m}_0 , т. е. при изменении φ на $\varphi + 2\pi$, знаки \pm в (13) меняются на противоположные: $\pm \rightarrow \mp$, что означает одновременную смену ветвей: $n_+ + in'_+ \leftrightarrow n_- + in'_-$ (см. соответствующие контуры на рис. 2). При этом физическая эквивалентность позиции, повернутой на 2π , обеспечивается тем, что в соответствии с (18) эллипсы поляризаций изонормальных волн тоже обмениваются местами, $\mathbf{a}_+ + i\mathbf{b}_+ \leftrightarrow \mathbf{a}_- + i\mathbf{b}_-$, так что взаимно ортогональные пары эллипсов совмещаются друг с другом. В результате при полном обходе вокруг \mathbf{m}_0 указанные пары поворачиваются в ту же сторону всего на угол $\pi/2$, чему соответствует упомянутый во Введении индекс Пуанкаре $n = 1/4$ (см. рис. 3).

Как показано в нашей работе [12], аналогич-

ная топологическая картина возникает и при описании распространения упругих волн в поглощающих кристаллах. При этом, однако, индекс Пуанкаре соответствующих распределений поляризационных полей может быть обоих знаков: $n = \pm 1/4$.

4. ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В РОМБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Теперь мы приступаем к проблеме описания клиновой рефракции в окрестности линии самопересечения поверхности показателей преломления. Общая конфигурация поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$ в этой окрестности вытекает из предыдущего описания и показана на рис. 4. Однако для дальнейшего анализа нам понадобится более детальная информация о геометрии этой поверхности, выходящая за рамки применимости формулы (13), справедливой лишь вблизи одной из расщепленных осей. Между тем при малом поглощении и, соответственно, малом расщеплении можно описать сразу всю окрестность пары осей $\mathbf{m}_{\pm}^{(j)}$. Ниже мы сделаем это для окрестности пары $\mathbf{m}_{\pm}^{(1)}$ в ромбическом кристалле.

Выберем для нашего описания введенную ранее декартову систему координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ с осью $x_3 \parallel \mathbf{m}^{(1)}$ и уточненной ориентацией осей $\{x_1, x_2\}$: будем считать x_2 параллельной оси y исходной кристаллофизической системы координат, как показано на рис. 1б. Иными словами, в качестве ортов системы $\{x_1, x_2, x_3\}$ выберем векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m}^{(1)}$, которые

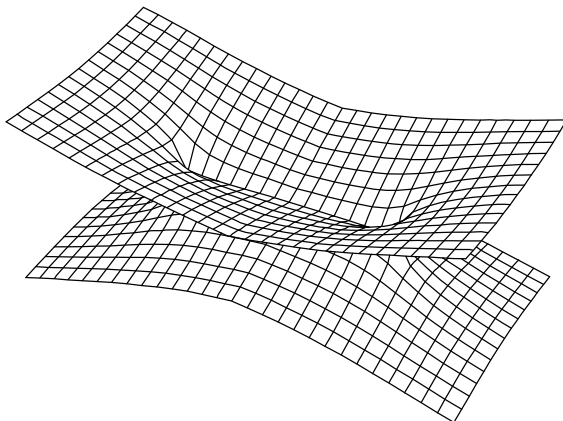


Рис. 4. Самопересечение поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$

в исходной системе равны

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (\cos \theta_0, 0, -\sin \theta_0), \\ \mathbf{q} &= (0, 1, 0), \\ \mathbf{m}^{(1)} &= (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0). \end{aligned} \tag{20}$$

В новой системе текущую волновую нормаль \mathbf{m} удобно записывать в виде

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{(1)} + \Delta \mathbf{m}, \quad \Delta \mathbf{m} = (m_1, m_2, 0), \tag{21}$$

$$m_1^2, m_2^2 \ll 1.$$

Комбинируя выражения (5), (7) с учетом слабости поглощения, после довольно громоздких вычислений получаем

$$\begin{aligned} n_{(\pm)} &= n_0 \pm D \sqrt{\varepsilon_2} \operatorname{Re} r, \quad n_0 = \sqrt{\varepsilon_2} (1 + D m_1), \\ n'_{(\pm)} &= n'_0 \pm (\operatorname{Im} r) D \sqrt{\varepsilon_2}, \\ n'_0 &= (\eta'_2 / 2 \eta_2 + \chi_1 D) \sqrt{\varepsilon_2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{d_{12} d_{23}} / 2 \eta_2, \\ r &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - \chi_1^2 + 2i \chi_1 m_1}. \end{aligned} \tag{23}$$

В (22), (23) χ_1 дается формулой (9), в которой следует заменить знак модуля на простые скобки. Условие $\operatorname{Re} r = 0$, сводящееся к соотношениям

$$m_1 = 0, \quad -\chi_0 \leq m_2 \leq \chi_0, \tag{24}$$

определяет линию самопересечения поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$, на которой $n_+ = n_-$ (рис. 4). С другой стороны, условие $\operatorname{Im} r = 0$ дает два соотношения,

$$m_1 = 0, \quad m_2 \leq -\chi_0 \quad \text{и} \quad m_1 = 0, \quad m_2 \geq \chi_0, \tag{25}$$

определяющих две линии самопересечения поверхности $n'_{\pm}(\mathbf{m})$: на этих линиях $n'_+ = n'_-$. На единичной сфере направлений $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ линии (25) продолжают линию (24). На концах отрезка (24), в точках $m_2 = \pm \chi_0$, совпадают как показатели преломления, так и коэффициенты поглощения. Эти точки определяют направления сингулярных осей. Поглощение, расщепляя оптическую ось $\mathbf{m}^{(1)}$ прозрачного кристалла, порождает пару сингулярных осей $\mathbf{m}_+^{(1)}$ и $\mathbf{m}_-^{(1)}$, угол между которыми (в радианах) равен $2\chi_0$ (см. (9) и рис. 1б). Используемая система координат оказалась удобной для описания локальной геометрии контакта полостей, поскольку ось x_2 параллельна линиям самопересечения.

Линия (24) — клиновья особенность поверхности показателей преломления поглощающих кристаллов. Геометрические нормали \mathbf{n}_{\pm} можно определить для каждой из полостей $n_{\pm}(\mathbf{m})$:

$$\mathbf{n}_{\pm} \parallel \frac{\partial n_{\pm}}{\partial \mathbf{m}}. \quad (26)$$

Нас будут интересовать ориентации \mathbf{n}_{\pm} в непосредственной близости от линии самопересечения. Говоря о таких нормалях на линии (24), будем подразумевать, что они определены в пределе бесконечной близости от рассматриваемой линии. При этом, очевидно, $\mathbf{n}_{\pm}(m_1 > 0) \parallel \mathbf{n}_{\mp}(m_1 < 0)$, и поэтому одна изонормальная пара \mathbf{n}_{\pm} характеризует оба склона клиновья поверхности, и на верхней (+) и на нижней (−) полостях. Для определенности примем для дальнейшего рассмотрения обозначение $\mathbf{n}_{\pm} \equiv \mathbf{n}_{\pm}(m_1 > 0)$.

В частном случае прозрачных кристаллов ($\chi_0 = 0$), когда линия (24) стягивается в точку $m_1 = m_2 = 0$, для показателей преломления n_{\pm} вблизи этой точки и конуса нормалей $\mathbf{n}^0(\mathbf{m})$ к поверхности имеем выражения:

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \sqrt{\varepsilon_2} [1 + \chi D(\cos \psi \pm 1)], \\ \mathbf{n}^0 &\parallel D(\cos \psi - 1)\mathbf{p} + \mathbf{q}D \sin \psi + \mathbf{m}^{(1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь использованы полярные координаты (χ, ψ) : $m_1 = \chi \cos \psi$, $m_2 = \chi \sin \psi$. Именно такой конус нормалей $\mathbf{n}^0(\psi)$ показан на рис. 5. В рассматриваемом случае нулевого поглощения данный конус является одновременно конусом групповых скоростей и векторов Пойнтинга, т. е. представляет собой конус рефракции. Он имеет круговое сечение в плоскости x_1x_2 , перпендикулярной направлению $\mathbf{m}^{(1)}$. Угловые размеры конуса α_0 и β_0 в двух перпендикулярных сечениях, проходящих через его геометрическую ось (см. рис. 5), описываются соотношениями

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 2D, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \operatorname{tg} \alpha_0}, \quad (28)$$

где D определено формулой (23). Нетрудно видеть, что всегда $\beta_0 > \alpha_0$, т. е. конус не является круговым. Однако, чем меньше величина D , тем ближе рассматриваемый конус к круговому с малым раствором: $\beta_0 \approx \alpha_0 \approx 2D \ll 1$. На практике последнее условие обычно выполнено, поскольку, как правило, для большинства кристаллов величина $2D$ не превышает 0.1 и соответственно раствор конуса рефракции α_0 остается весьма малым даже для кристаллов-«рекордсменов». Так, в оксалате аммония $\alpha_0 = 4^{\circ}51'$, а для йодной кислоты $\alpha_0 = 3^{\circ}18'$ [3].

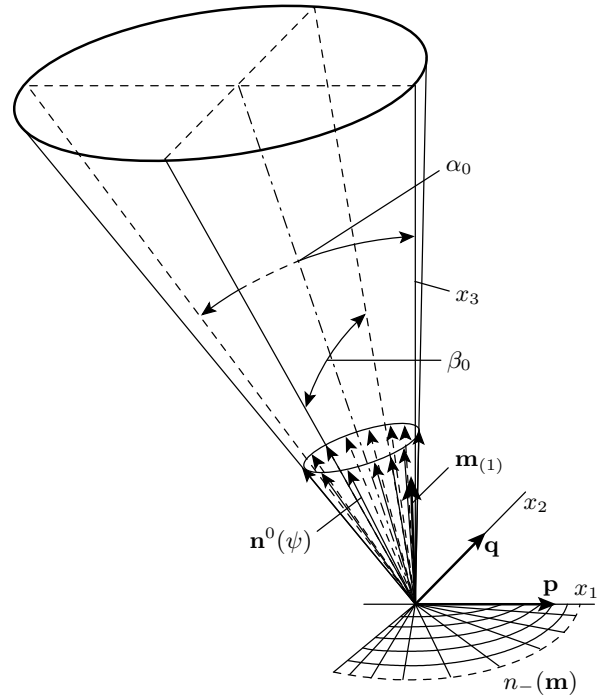


Рис. 5. Конус рефракции прозрачного кристалла (27). Верхняя окружность, ограничивающая коническую поверхность и принадлежащая плоскости x_1x_2 , изображает траекторию конца вектора потока энергии циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль оптической оси $\mathbf{m}^{(1)}$

В поглощающих кристаллах вблизи линии (24), когда $|m_1| \ll 1$, рельеф поверхности показателей преломления (22) и поле геометрических нормалей определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{n_{\pm}}{\sqrt{\varepsilon_2}} &= \\ &= \begin{cases} 1 + \gamma_{\pm} m_1, & m_1 > 0, \\ 1 + \gamma_{\mp} m_1, & m_1 < 0, \end{cases} \quad \mathbf{n}_{\pm} \parallel \mathbf{m}^{(1)} - D\gamma_{\pm}\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь введены параметры

$$\gamma_{\pm} = 1 \pm 1/\sqrt{1 - m_2^2/\chi_0^2}. \quad (30)$$

При выводе этих выражений предполагалось, что $|m_1| \ll (\chi_0^2 - m_2^2)/2\chi_0$. Когда величина m_1 меняет знак, происходит переход $n_+ \leftrightarrow n_-$, а это означает излом поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$ на линии (24), при этом векторы \mathbf{n}_{\pm} также скачком меняют свое направление, формируя клин ориентаций, см. рис. 6а. Угол α раствора этого клина как функция координаты определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D(\gamma_+ - \gamma_-)}{1 + D^2\gamma_+\gamma_-} = \frac{2D\sqrt{1 - m_2^2/\chi_0^2}}{1 - (1 + D^2)m_2^2/\chi_0^2}. \quad (31)$$

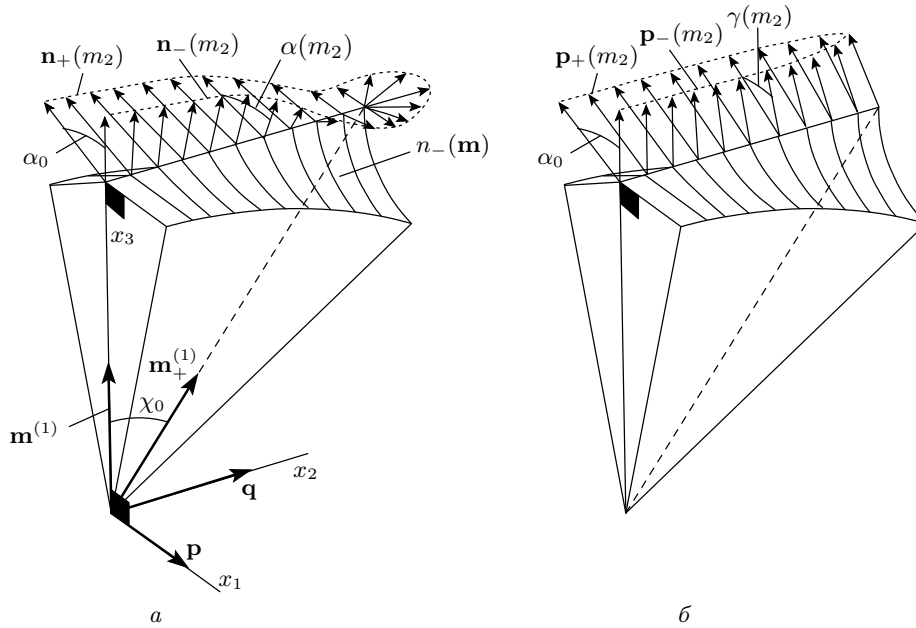


Рис. 6. Схематическое распределение векторных характеристик клиновой рефракции: *a* — нормали \mathbf{n}_{\pm} на линии пересечения полостей; *b* — нормированные векторы Пойнтинга $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{P}_{\pm}/|\mathbf{P}_{\pm}|$ вдоль ребра клина рефракции на волновой полости $n_{-}(\mathbf{m})$ (черные четырехугольники отмечают прямые углы)

В центре линии пересечения полостей при $m_2 = 0$ угол α (31) совпадает с α_0 (28) и оказывается минимальным углом раствора клина геометрических нормалей, см. рис. 6*a*. При отходе от центра угол между нормальными возрастает, а излом полостей $n_{\pm}(\mathbf{m})$ становится все более резким. При $m_2^2/\chi_0^2 \ll 1$ имеем

$$\mathbf{n}_{\pm} \parallel \begin{cases} D \left(-2 - \frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) \mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)}, \\ \left(\frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) D\mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)}. \end{cases} \quad (32)$$

При небольшом отходе от центра линии пересечения полостей, как мы увидим, поляризация волн мало отличается от линейной, поэтому выражения (32) для \mathbf{n}_{\pm} приближенно характеризуют и направления групповых скоростей \mathbf{u}_{\pm} .

Достаточно плавный рост угла α с увеличением m_2 вблизи центра клина сменяется резким увеличением в окрестности направления $\mathbf{m}_+^{(1)}$. Оценим область аномального роста угла α . Удвоение угла α от α_0 до $2\alpha_0$ происходит при $m_2/\chi_0 \approx \sqrt{3}/2 \approx 0.86$. В этой окрестности, $\chi_0 - m_2 \ll \chi_0$, удобно обозначить $m_2 = \chi_0 - \mu$, $0 \leq \mu \ll \chi_0$. Тогда $\alpha = \pi/2$ при $\mu/\chi_0 \approx \alpha_0^2/8$. Для $\alpha_0 = 0.1$ это имеет место при $\mu/\chi_0 \sim 10^{-3}$. Последующее уменьшение параметра μ/χ_0 до нуля приводит к еще более резкому росту угла α от $\pi/2$ до π .

Окрестность особого направления сингулярной оси требует отдельного рассмотрения. Здесь удобно использовать полярные координаты $\mu, \tilde{\psi}$ с центром, соответствующим направлению $\mathbf{m}_+^{(1)}$: $m_2 = \chi_0 + \mu \cos \tilde{\psi}$, $m_1 = \mu \sin \tilde{\psi}$. При этом из выражений (22), (26) имеем

$$\begin{aligned} n_{\pm} &\approx \sqrt{\varepsilon_2} \pm \delta \cos \frac{\tilde{\psi}}{2}, \quad \delta = (2\mu\chi_0\varepsilon_2)^{1/2} D, \\ \mathbf{n}_+ &\approx \mathbf{n}_- \approx \mathbf{n}_0 = \mathbf{p} \sin \frac{\tilde{\psi}}{2} + \mathbf{q} \cos \frac{\tilde{\psi}}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (33) показывает, что при $m_2 = \chi_0$ (распространение вдоль сингулярной оси $\mathbf{m}_+^{(1)}$) поверхность $n_{\pm}(\mathbf{m})$ имеет особенность типа «заостренного носика», см. рис. 6*a*. При этом, в отличие от выраженной асимметрии в центре ребра, на его краях форма клина оказывается симметричной относительно плоскости x_2x_3 , проходящей через острие клина и локально совпадающей в сингулярных точках $m_1 = 0$, $m_2 = \pm\chi_0$ с обоими склонами клина. Соответственно на концах ребра клина геометрические нормали имеют сингулярность типа веера, параллельного плоскости x_1x_2 и симметричного относительно плоскости x_2x_3 , рис. 6*a*.

**5. КЛИНОВАЯ РЕФРАКЦИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА
ЛИНИИ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТИ $n_{\pm}(\mathbf{m})$**

Как мы увидим, поляризация волн вблизи линии самопересечения поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$ линейна лишь в центральной плоскости x_2x_3 , а в остальных местах эллиптическая. Поэтому групповая скорость волн может быть введена только в относительно узкой зоне, окружающей плоскость x_2x_3 . Отсюда ясно, что найденное выше поле нормалей $\mathbf{n}_{\pm}(\mathbf{m})$ едва ли может быть характеристикой рассматриваемой клиновья рефракции волн. Для описания последней необходимо найти поле векторов Пойнтинга:

$$\mathbf{P}_{\pm} = \text{Re } \mathbf{E}_{\pm} \times \text{Re } \mathbf{H}_{\pm}. \quad (34)$$

Для комплексных векторных амплитуд электрических и магнитных полей вблизи линии пересечения полостей $\mathbf{n}_{\pm}(\mathbf{m})$ из соотношений (4), (7) имеем выражения, дополняющие формулы (22):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm}^0 &\parallel m_2 \mathbf{q} + (m_1 + i\chi_1 \pm r) \mathbf{G}, \\ \mathbf{H}_{\pm}^0 &\parallel m_2 \mathbf{p} - (m_1 + i\chi_1 \pm r) \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $\mathbf{G} = \mathbf{p} + 2D\mathbf{m}^{(1)}$. На самой линии пересечения полостей (24), когда $m_1 = 0$, для переменных электрических и магнитных полей соответственно имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{E}_{\pm} &\parallel g_{\pm} \mathbf{G} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} - \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{q} \cos \varphi_{\pm}^{\sim}, \\ \text{Re } \mathbf{H}_{\pm} &\parallel g_{\pm} \mathbf{q} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} + \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{p} \cos \varphi_{\pm}^{\sim}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$g_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - (m_2/\chi_0)^2}, \quad (37)$$

φ_{\pm}^{\sim} — фаза, зависящая от времени t и координаты \mathbf{r} : $\varphi_{\pm}^{\sim} = \varphi^{\sim} - \varphi_{\pm}^0$, $\varphi^{\sim} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, φ_{\pm}^0 — начало отсчета фазы. Формулы (36) описывают эллиптическую поляризацию изонормальных волн, имеющих в данном случае одинаковые фазовые скорости, но различные коэффициенты поглощения. Коэффициенты при $\sin \varphi_{\pm}^{\sim}$ и $\cos \varphi_{\pm}^{\sim}$ в формулах (36) задают векторы полусосей \mathbf{a}_{\pm} и \mathbf{b}_{\pm} соответствующих эллипсов.

Вблизи середины линии пересечения полостей,

при $|m_2| \ll \chi_0 \equiv |\chi_1|$, из (36), (37) имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{E}_{\pm} &\parallel \begin{cases} 2\mathbf{G} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} - \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{q} \cos \varphi_{\pm}^{\sim}, \\ 2\mathbf{q} \cos \varphi_{\pm}^{\sim} - \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{G} \sin \varphi_{\pm}^{\sim}, \end{cases} \\ \text{Re } \mathbf{H}_{\pm} &\parallel \begin{cases} 2\mathbf{q} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} + \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{p} \cos \varphi_{\pm}^{\sim}, \\ 2\mathbf{p} \cos \varphi_{\pm}^{\sim} + \frac{m_2}{\chi_1} \mathbf{q} \sin \varphi_{\pm}^{\sim}. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Эти формулы показывают, что в самом центре ребра, когда $m_2 = 0$, поляризация линейная, а при небольшом отходе от центра возникает слабая эллиптичность. Наконец, при распространении строго вдоль сингулярной оси электрическое поле эллиптически поляризовано, а магнитное — циркулярно:

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{E}_{\pm} &\parallel \mathbf{G} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} - \mathbf{q} \text{sgn } \chi_1 \cos \varphi_{\pm}^{\sim}, \\ \text{Re } \mathbf{H}_{\pm} &\parallel \mathbf{q} \sin \varphi_{\pm}^{\sim} + \mathbf{p} \text{sgn } \chi_1 \cos \varphi_{\pm}^{\sim}. \end{aligned} \quad (39)$$

Вектор Пойнтинга \mathbf{P}_{\pm} (34) можно представить как сумму постоянного во времени (среднего за период) потока энергии $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ и переменного потока \mathbf{P}_{\pm}^{\sim} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\pm} &= \bar{\mathbf{P}}_{\pm} + \mathbf{P}_{\pm}^{\sim}, \\ \mathbf{P}_{\pm}^{\sim} &\parallel \mathbf{c}_{\pm} \cos 2\varphi_{\pm}^{\sim} + \mathbf{d}_{\pm} \sin \varphi_{\pm}^{\sim}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь \mathbf{c}_{\pm} и \mathbf{d}_{\pm} — полуоси соответствующих эллипсов. На линии пересечения полостей (24) в соответствии с (34), (36) эти векторы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\pm} &\parallel -2Dg_{\pm}^2 \mathbf{p} + \left(\frac{m_2^2}{\chi_0^2} + g_{\pm}^2 \right) \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{c}_{\pm} &\parallel 2Dg_{\pm}^2 \mathbf{p} + \left(\frac{m_2^2}{\chi_0^2} - g_{\pm}^2 \right) \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{d}_{\pm} &\parallel 2Dg_{\pm} \left(\frac{m_2}{\chi_0} \right) \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (41)$$

Одинаковые множители в выражениях для $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ и \mathbf{P}_{\pm}^{\sim} мы опустили. Как видно из (41), два средних по времени вектора $\bar{\mathbf{P}}_{+}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{-}$, ориентации которых могут быть также представлены в виде

$$\bar{\mathbf{P}}_{\pm} \parallel \mathbf{m}^{(1)} - Dg_{\pm} \mathbf{p}, \quad (42)$$

всегда лежат в плоскости x_1x_3 , ортогональной ребру клина, а их ориентации плавно меняются при изменении координаты m_2 , составляя угол γ (рис. 6б):

$$\text{tg } \gamma = \frac{D(g_+ - g_-)}{1 + D^2 g_+ g_-} = \frac{2D\sqrt{1 - m_2^2/\chi_0^2}}{1 + D^2 m_2^2/\chi_0^2}. \quad (43)$$

Любопытно отметить сходство выражений (42), (43) с (29), (31).

Концы векторов $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ соответствуют центрам эллиптических траекторий, описываемых концами векторов \mathbf{P}_{+}^{\sim} и \mathbf{P}_{-}^{\sim} . Малые полуоси эллипсов параллельны ребру клина, $\mathbf{d}_{\pm} \parallel \mathbf{q}$, а их эксцентриситет с ростом m_2 на интервале $0 \leq m_2 \leq \chi_0$ монотонно убывает от единицы до нуля. Параллельно уменьшается до нуля и наклон больших полуосей \mathbf{c}_{\pm} к горизонтали: при $m_2 = \chi_0$ имеем $\mathbf{c}_{\pm} \parallel \mathbf{p}$. Довольно громоздкий анализ приводит к весьма интересной картине: все эллиптические орбиты можно представить как линии, возникающие в плоских сечениях универсального конуса, совпадающего с конусом рефракции прозрачного кристалла (см. формулы (28) и рис. 5). С изменением m_2 меняются лишь ориентации секущих плоскостей, сохраняющих параллельность ребру клина, т. е. вектору \mathbf{q} . При этом полные векторы потока энергии \mathbf{P}_{\pm} за период обходят все образующие универсального конуса, пробегая по соответствующим эллиптическим орбитам (см. рис. 7).

Рассмотрим подробнее поведение интересующих нас характеристик у середины и на концах линии пересечения полостей. При $|m_2| \ll \chi_0$ потоки энергии изонормальных волн задаются соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{P}}_{+} \parallel D \left(-2 + \frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) \mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{c}_{+} \parallel D \left(2 - \frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) \mathbf{p} - \left(1 - \frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{d}_{+} \parallel \left(\frac{m_2}{\chi_0} \right) D\mathbf{q}. \end{array} \right. \quad (44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{P}}_{-} \parallel - \left(\frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) D\mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{c}_{-} \parallel \left(\frac{m_2^2}{2\chi_0^2} \right) D\mathbf{p} + \left(1 - \frac{m_2^2}{4\chi_0^2} \right) \mathbf{m}^{(1)}, \\ \mathbf{d}_{-} \parallel \left(\frac{m_2}{\chi_0} \right) D\mathbf{q}. \end{array} \right. \quad (45)$$

Как вытекает из этих формул, средние по времени векторы $\bar{\mathbf{P}}_{+}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{-}$ двух изонормальных волн по мере отхода от центра клина начинают сближаться. Причем, как мы и ожидали, их начальные ориентации при $m_2 = 0$ совпадают с соответствующими направлениями нормалей \mathbf{n}_{\pm} (см. (32)), однако последние, в отличие от потоков $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$, с ростом m_2 расходятся, а не сближаются (рис. 6).

Вблизи сингулярной оси, когда $m_2 = \chi_0 - \mu$, $0 \leq \mu \ll \chi_0$, потоки энергии характеризуются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\pm} \parallel \bar{\mathbf{P}}_0 \pm \sqrt{\frac{2\mu}{\chi_0}} \left(-2D\mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)} \right), \\ \bar{\mathbf{P}}_0 = -D\mathbf{p} + \mathbf{m}^{(1)}, \\ \bar{\mathbf{c}}_{\pm} \parallel D\mathbf{p} \pm \sqrt{\frac{2\mu}{\chi_0}} \left(2D\mathbf{p} - \mathbf{m}^{(1)} \right), \\ \mathbf{d}_{\pm} \parallel D \left(1 \pm \sqrt{\frac{2\mu}{\chi_0}} \right) \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (46)$$

Эти соотношения показывают, что при распространении строго вдоль сингулярной оси, когда $\mu = 0$, средние потоки изонормальных волн совпадают по направлению, $\bar{\mathbf{P}}_{+} \parallel \bar{\mathbf{P}}_{-} \parallel \bar{\mathbf{P}}_0$, а их концы являются центрами соответствующих окружностей, которые описывают векторы \mathbf{P}_{+}^{\sim} и \mathbf{P}_{-}^{\sim} в плоскости x_1x_2 (рис. 7е). Полные векторы $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{P}^{\sim}$ ведут себя точно так же, как и векторы потока в прозрачных кристаллах, когда вдоль оптической оси распространяется циркулярно поляризованная волна (рис. 5). Как следует из формулы (46), средний вектор потока $\bar{\mathbf{P}}_0$ сохраняет асимметричную ориентацию в плоскости x_1x_3 .

При отходе от сингулярной оси, когда волны утрачивают циркулярную поляризацию, векторы $\bar{\mathbf{P}}_{+}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{-}$ с ростом μ все более отклоняются друг от друга (рис. 6б). При этом окружности, описываемые векторами \mathbf{P}_{+}^{\sim} и \mathbf{P}_{-}^{\sim} при $\mu = 0$, превращаются в постепенно вытягивающиеся эллипсы. Угол γ (43) между векторами $\bar{\mathbf{P}}_{+}$ и $\bar{\mathbf{P}}_{-}$ при движении к центру клина плавно увеличивается: в центре он максимален и равен α_0 , т. е., как уже говорилось, совпадает с углом между нормальными \mathbf{n}_{\pm} (см. рис. 6).

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, поглощение приводит к весьма нетривиальным топологическим особенностям как в геометрии контакта вырожденных волновых поверхностей (рис. 2, 4), так и в распределении комплексных векторных поляризационных полей, характеризующихся в окрестности сингулярных осей индексом Пуанкаре $n = 1/4$ (рис. 3). В направлениях распространения близких к линии самопересечения поверхности показателей преломления предсказывается явление внутренней клиновой рефракции. Анализ показал, что лишь в центральной области клина, где поляризация близка к линейной, характер рефракции аналогичен сходному явлению в акустике непоглощающих кристаллов. С удалением от этой зоны эллиптичность поляризации нарастает, а направление среднего по периоду вектора Пойнтинга $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$ все более отклоняется от соответствующей нормали \mathbf{n}_{\pm}

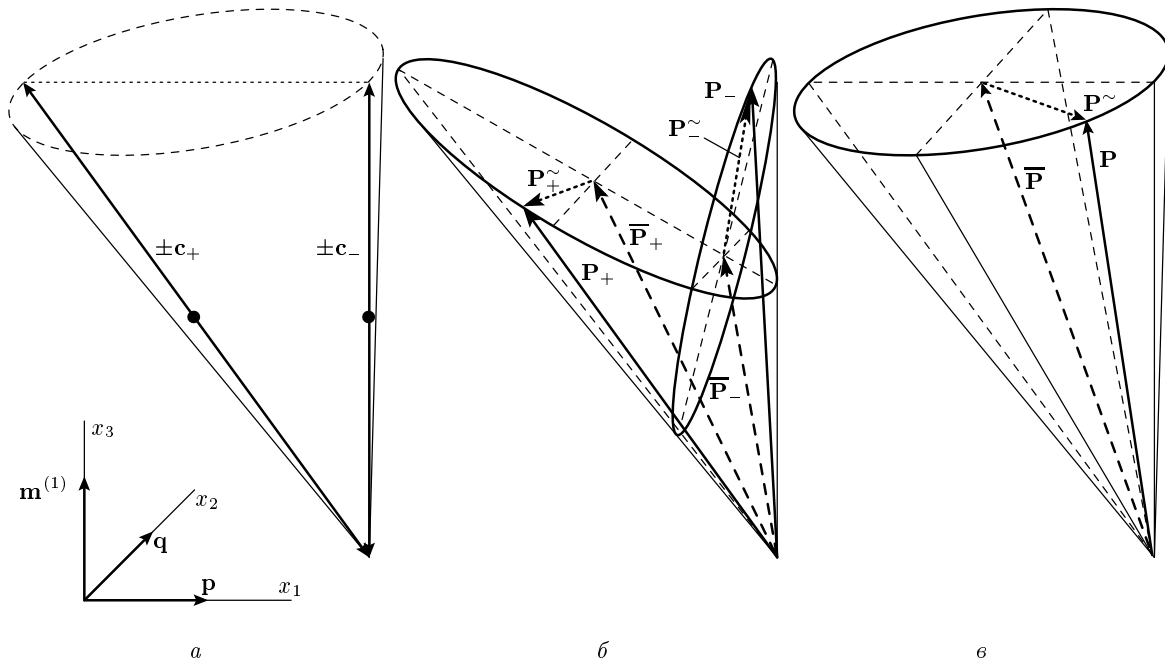


Рис. 7. Траектории концов векторов Пойнтинга \mathbf{P}_{\pm} изонормальных волн на универсальном конусе рефракции (рис. 5) для трех направлений волновой нормали на ребре самопересечения поверхности $n_{\pm}(\mathbf{m})$: *a* — $\mathbf{m} \parallel \mathbf{m}^{(1)}$ ($m_2 = 0$), жирные точки отмечают положения концов векторов $\bar{\mathbf{P}}_{\pm}$; *b* — промежуточная ориентация, $0 < m_2 < \chi_0$, два эллиптических сечения конуса параллельны вектору \mathbf{q} (ребру клина); *v* — $\mathbf{m} \parallel \mathbf{m}_+^{(1)}$ ($m_2 = \chi_0$), горизонтальная окружность в сечении отвечает слиянию двух эллипсов для вырожденного направления

к поверхности показателей преломления. При этом неусредненные векторы Пойнтинга \mathbf{P}_{\pm} на всем ребре клина вращаются по одному и тому же конусу направлений, совпадающему с конусом рефракции прозрачного кристалла, а концы этих векторов пробегают по различным плоским (эллиптическим) сечениям конуса, зависящим от положения волновой нормали на ребре клина. Вдоль сингулярных осей (на концах ребра клина) указанные сечения становятся круговыми, а картина рефракции полностью повторяет коническую рефракцию циркулярно поляризованных волн в прозрачном кристалле (рис. 5).

В последних разделах статьи, анализируя геометрию самопересечения поверхности показателей преломления и обсуждая особенности клиновой рефракции электромагнитных волн, мы ограничились рассмотрением кристаллов ромбической симметрии. В этом случае проходящая через центр клина плоскость x_1x_3 является плоскостью симметрии и по обе стороны от нее картины эквивалентны. Центру клина соответствует линейная поляризация волн, сохраняющаяся во всей этой плоскости, а знаки вращения эллиптически поляризованных волн по обе сторо-

ны от плоскости симметрии противоположны. При этом, очевидно, противоположны и знаки вращения в циркулярно поляризованных волнах, распространяющихся вдоль кристаллографически эквивалентных сингулярных осей $\mathbf{m}_+^{(j)}$ и $\mathbf{m}_-^{(j)}$. Конечно, в моноклинных и триклинных кристаллах при отсутствии указанной плоскости симметрии, связывающей сингулярные направления, они перестают быть эквивалентными и общая картина несколько искажается. Тем не менее, как показывает анализ, и в отсутствие симметрии все основные черты явления качественно сохраняются. В частности, триклинное возмущение симметрии не устраняет на единичной сфере направлений $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ линию ориентаций распространения линейно поляризованных волн, а деформирует ее. Такие линии известны в поглощающих кристаллах произвольной анизотропии [13, 14] и не исчезают даже при дополнительном «включении» оптической активности [15].

Коснемся возможностей экспериментального наблюдения описанной клиновой рефракции в поглощающих кристаллах. В эксперименте физическим параметром, с которым надлежит сравнивать угол расщепления оптических осей, является расходи-

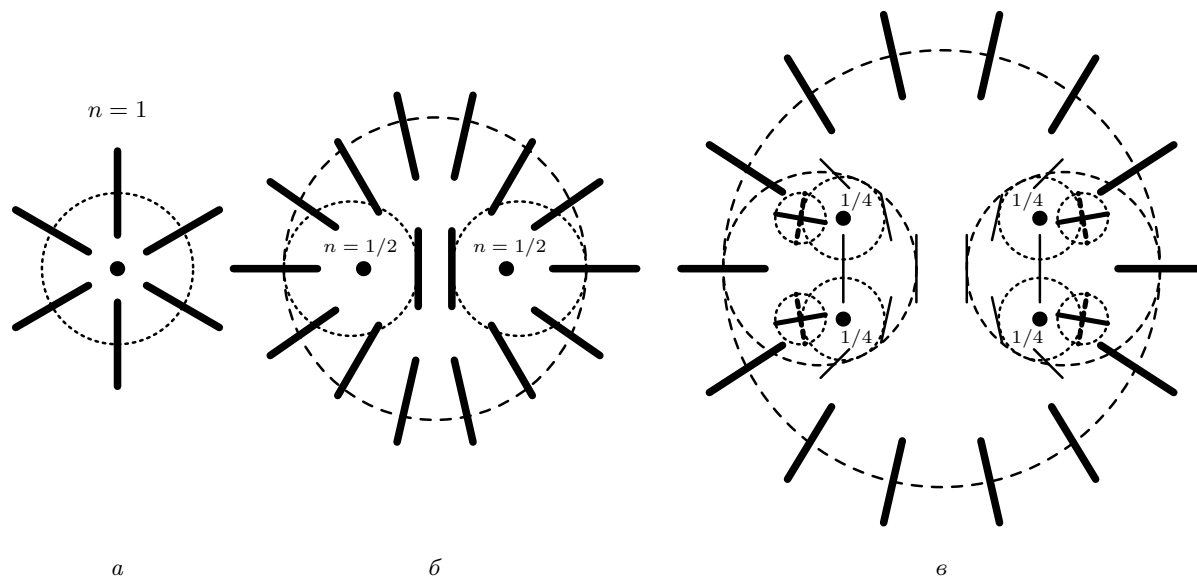


Рис. 8. Векторные поляризации поля в одной из изонормальных ветвей вокруг: *a* — касательной точки вырождения в одноосном кристалле; *б* — пары конических точек в двуосном прозрачном кристалле; *в* — четверки сингулярных осей в поглощающем кристалле (вблизи сингулярных точек показано вращение больших полуосей эллипсов поляризации)

мость используемого оптического пучка. В частности, при пропускании пучка света вдоль направления $\mathbf{m}^{(1)}$ (или $\mathbf{m}^{(2)}$) с расходимостью $\Delta\vartheta$, значительно превышающей угловое расщепление оптических осей $2\chi_0$, наблюдаемая картина будет мало отличаться от обычной конической рефракции: тонкости, вызванные поглощением, не проявятся. Однако, если выбрать лазерный пучок с расходимостью, существенно меньшей, чем угловое расщепление осей, то возникает реальная возможность наблюдения как клиновой рефракции, так и описанных выше аномалий вблизи новых положений оптических осей. Поскольку расходимость лазерного пучка может быть весьма малой: $\Delta\vartheta \sim 1'$, соответствующая оценка допустимых соотношений между материальными параметрами $2\chi_0 \gg \Delta\vartheta$ дает неравенство $\eta'/d \gg 3 \cdot 10^{-4}$, приводящее к не слишком существенным ограничениям на выбор объектов исследования.

Остановимся на одном любопытном топологическом аспекте проблемы. Как известно, в оптически одноосных кристаллах вырождение, отвечающее касанию волновых полостей и характеризуемое индексом Пуанкаре $n = 1$ (рис. 8*a*), является неустойчивым по отношению к любому вещественному возмущению $\delta\varepsilon$ «одноосной» симметрии тензора ε . Всякое такое возмущение (вследствие

внешних воздействий на кристалл или фазового превращения) приводит к расщеплению касательного вырождения на два конических, каждое из которых имеет топологический «заряд» $n = 1/2$, так что суммарный индекс Пуанкаре остается равным исходному (рис. 8*б*). Конические вырождения являются устойчивыми по отношению к изменениям анизотропии, которые лишь перемещают точки вырождения, но не меняют их индекса n . Однако, как мы видели, устойчивость эта не распространяется на мнимые возмущения $\delta\varepsilon = i\delta\varepsilon'$, отвечающие поглощению. В соответствии с полученными выше результатами «включение» поглощения приводит к расщеплению и конических вырождений на две пары сингулярных точек с индексами $n = 1/4$ (рис. 8*в*), так что опять выполняется правило сохранения исходного индекса: $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Именно это обеспечивает непрерывное «выключение» рассмотренных выше двух типов возмущений, в результате которого показанные на рис. 8*б, в* области с расщепленными осями (в кругах, обозначенных пунктиром) стягиваются в точки, и мы возвращаемся к исходной картине прозрачного двуосного, а затем и одноосного кристалла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16871), а также Поль-

ско-Японским институтом информационных технологий (грант РЖ/МКТ/02/2003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
2. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1975).
3. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов, *Отражение и преломление света прозрачными кристаллами*, Наука и техника, Минск (1976).
4. А. Г. Хаткевич, *Кристаллография* **7**, 742, 916 (1962).
5. E. Henneke and R. J. Green, *Acoust. Soc. Amer.* **45**, № 6, pt. 1, 1367 (1969).
6. Ф. И. Федоров, *Теория гиротропии*, Наука и техника, Минск (1976).
7. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1979).
8. V. N. Lyubimov, *Proc. Intern. Workshop on Dissipation in Physical Systems* (Borkow 1995), ed. by A. Radowicz, *Zeszyty Naukowe Politechniki Swetokrzyskiej*, Kielce, Poland; *Mechanika* **59**, 77 (1995).
9. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, *Кристаллография* **45**, 731 (2000).
10. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, А. Радович, Л. А. Шувалов, *Кристаллография* **46**, 519 (2001).
11. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Л. А. Шувалов, *Кристаллография* **46**, 742 (2001).
12. V. I. Alshits and V. N. Lyubimov, *Proc. 2nd Intern. Workshop on Dissipation in Physical Systems* (Borkow 1997), ed. by A. Radowicz, *Zeszyty Naukowe Politechniki Swetokrzyskiej*, Kielce, Poland; *Mechanika* **66**, 15 (1998).
13. G. Sziwessy, *Kristaloptik*, *Handb. d. Phys.* **20**, Springer, Berlin (1928).
14. А. М. Гончаренко, *Докл. АН БССР* **2**, 457 (1958).
15. M. V. Berry and M. R. Dennis, *Proc. R. Soc. Lond. A* **459**, 1261 (2003).